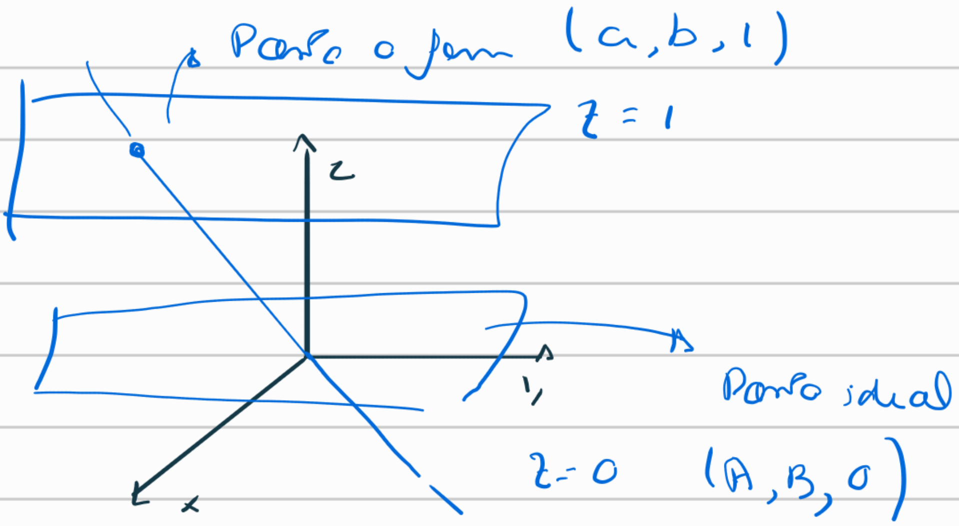
Aula 4

O que já vimos

Pontos em $\mathbb{R}^2$

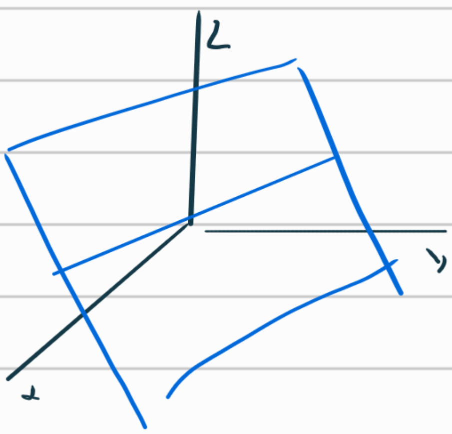
↳ é uma reta em $\mathbb{R}^3$

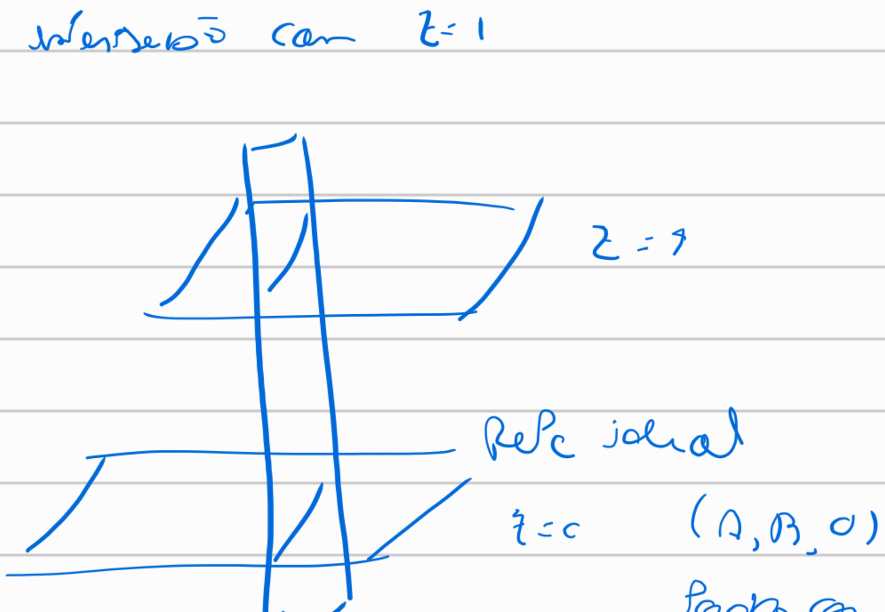
Coordenada canonica no plano $z = 1$



Reta em $\mathbb{R}^2$

↳ plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem





$Ax + by + cz = 0$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$A \quad B \quad C$

= Coordenadas da reta

Ponto com

Coordenadas de retas de Retas em $\mathbb{R}P^2$

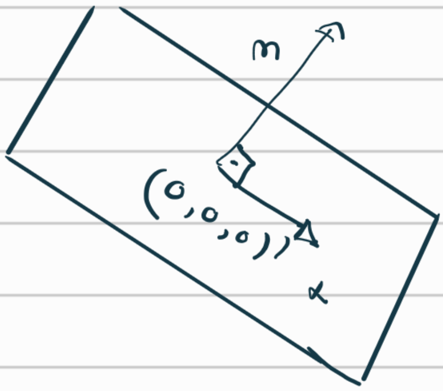
Os pontos de $\mathbb{R}^3$ do plano de $\mathbb{R}^3$ associado a uma reta de $\mathbb{R}P^2$ são dados por:

$$\{ x \mid \langle n, x \rangle = 0 ,\ x \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= ax + by + cz = 0$$

$$\langle n, x \rangle = 0$$

$\|n\| \, \|x\| \cos\theta = 0 \Rightarrow$ Perpendicular



N é perpendicular a um vetor ao plano $\mathbb{R}^3$ que define a reta. Se o plano é da forma $ax + by + cz = 0$
$N = (a, b, c)$

$\langle (a,b,c), (x,y,z) \rangle = 0$ é sinônimo (*)

No plano $z=1$ as coordenadas de $ax+by+cz=0$ são da forma $ax+by+cz=0$ ou $ax+by=-c$ quando $z=1$ (intersecção com o plano) = reta definida no plano $z=1$

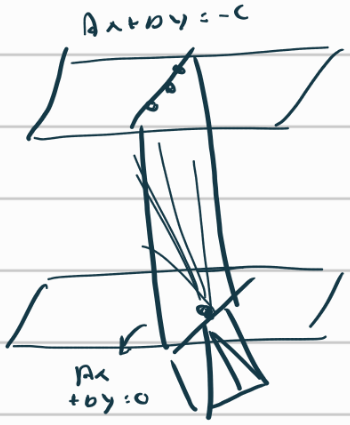
$Ax + by + cz$ ⇒ todos pontos afins

$ax + by = -c$ ⇒ reta que está no plano $z = 1$

Os pontos de

$ax + by + cz = 0$ que intersectam $z = 0$ são da forma

$ax + by = 0$ ⇒ Reta que passa no plano $z = 0$. Passa pela origem

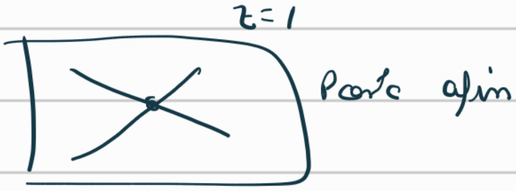


qualquer $(k x_0, k y_0, 0)$

$ax + by = 0$ ← Ponto ideal

Reta definida em $z = 0$

Recompensa da aula passada:



Uma Reta em R^3 é um plano com infinitos pontos Afins e um ponto ideal

Operações entre Pontos e Retas

•

Pertinência de Ponto a reta.

$= (x, y, z)$ $(0,0,0)$

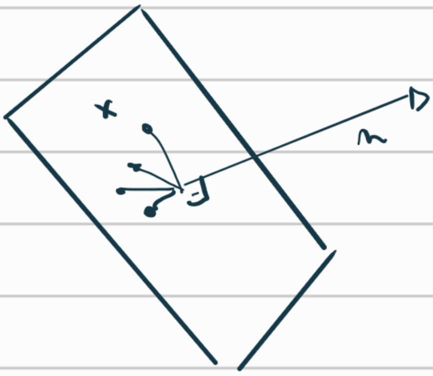
Sejam a os coordenadas de um ponto de $\mathbb{RP}^2$ e n os coordenadas de uma reta de $\mathbb{RP}^2$. $a \in n$ se e somente se $\langle n, a \rangle = 0$

$k(ax + by + cz) = 0 \iff kax + kby + kcz = 0$

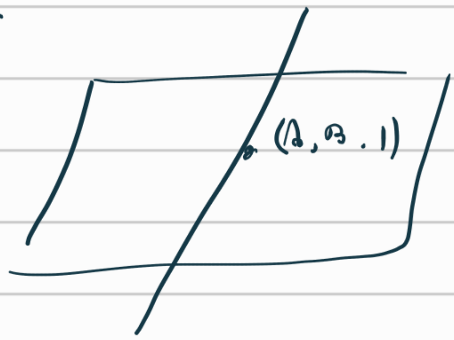
$ax + by + cz =$

Ponto $a \in$ reta $n \iff \langle n, a \rangle = 0$

Justificativa $\rightarrow$ Pela definição temos que n é perpendicular a todos os seus pontos



$\langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = 0$
$\quad n$



$\langle n, (A, B, 1) \rangle$

2) Interseção de Retas

$l_1 \times l_2$

$\underbrace{\|l_1\| \, \|l_2\| \sin\theta \, \hat{n}}_{\text{Prod vetorial}}$ Pol que $\langle \hat{n}, l_1 \rangle$ e $\langle \hat{n}, l_2 \rangle$

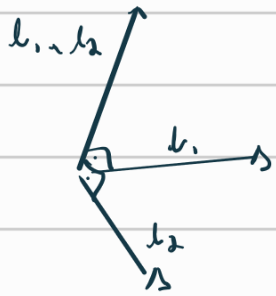
$\|l_1 \times l_2\|$ = Tamanho = norma

Sejam l_1 e l_2 as coordenadas de duas retas de $\mathbb{RP}^2$
Temos que a interseção dessas retas é dada por $l_1 \times l_2$

$\langle l_1 \times l_2, l_1 \rangle = 0$

$\langle l_1 \times l_2, l_2 \rangle = 0$

$\hookrightarrow$ coordenada do ponto de RP^2 que é a interseção



Só existe um ponto pertencente a L_1 e a L_2 que é a interseção

$$l_1 \times l_2 \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Verificar se o $c = 0$ é $l_1 \times l_2$ = ideal $\downarrow$ l_1 paralela l_2

$z_0 \neq 0 \Rightarrow l_1 \times l_2$ é afim $\downarrow$ $\left(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}, 1\right)$

$\hookrightarrow$ coordenada canonica

3) Reta que passa por dois pontos

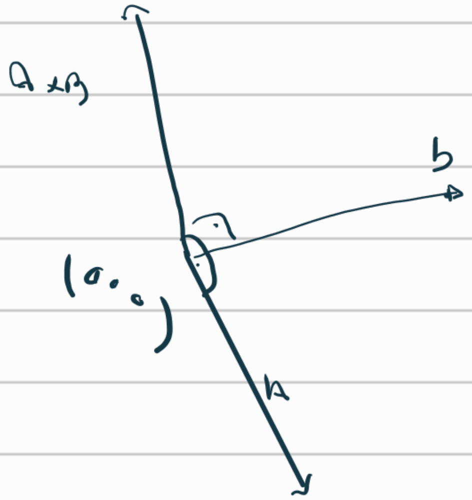
A reta que passa pelos pontos $a \in \mathbb{R}^2$ e $b \in \mathbb{R}^2$ é dada por

$a \times b$

Porque $\langle a \times b, a \rangle = 0$

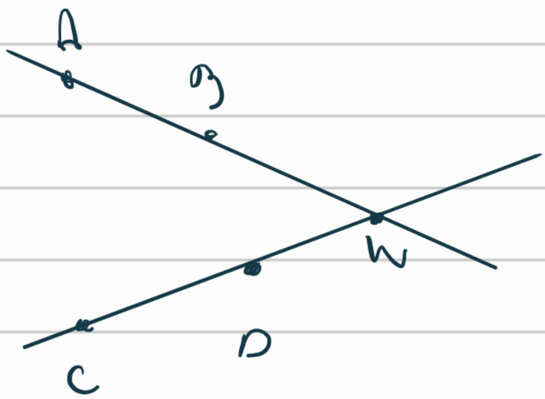
$\langle a \times b, b \rangle = 0$

$\hookrightarrow$ coordenada de uma reta RP^2 perpendicular a A e B



$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & a & a \\ b & b & b \end{vmatrix} = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

Ex.: Proj. Pa (1)



$A \times B = R_1$

$C \times D = R_2$

$R_1 \times R_2$

$\Downarrow$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = A \; B \; C$$

$$K \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A/C \\ B/C \\ 1 \end{pmatrix} = W$$