Transformação Linear

Uma Função $T: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

É linear se $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

1: Representação Linear

Um Funcional Linear é uma Transform. linear

$$T: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

Teorema: Para todo Funcional linear

$T: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}^N$

Tq: $T(x) = \underbrace{\langle y, x \rangle}_{\text{Prod. interno}}$

Prova:

$$T\left(\sum_{i=1}^{N} x \cdot e\right) \underset{\substack{\text{linearidade} \\ \text{da } T}}{=} \sum^{N} x \; T(e) = \langle x, y \rangle$$

$$= T(e_1) + \cdots + T(e_N)$$

Representação Matricial

1ª interpretação
• Pelas linhas:

Para todo funcional linear $T: R^N \to R^M$ existem M funcionais $T_1, \dots T_M : R^N \to R$ tq $T(x) = \underline{T_1(x)}, \dots T_M(x)$

Produto do N

$$T(x) = \begin{pmatrix} \dots & y_1 & \dots \\ \dots & y_2 & \\ & y_m & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y_1, x \rangle \\ \langle y_2, x \rangle \\ \langle y_m, x \rangle \end{pmatrix}$$

$T(M \times N)$

$e_1 = 1°$ elem. da base canônica R^N

2ª Interpretação
• Pelas colunas

$$T(x) = \begin{pmatrix} T(e_1) & \dots & T(e_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_m)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) = T\left(\sum x_i e_i\right)$$

$$= T(x)$$

$T(1, 0, 0, \dots)$

Se lê coluna = imagem da base canônica
Se lê linha = funcionais lineares

Produto Vetorial (Definido nos $\mathbb{R}^3$) → Vetor Perpendicular

$$\vec{X} \times \vec{Y} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = I \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

E_1

depende i_2 →

$$\begin{array}{ll} & \text{ptz} \\ -S & \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \\ & \text{pt3} \\ +k & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - bc$$

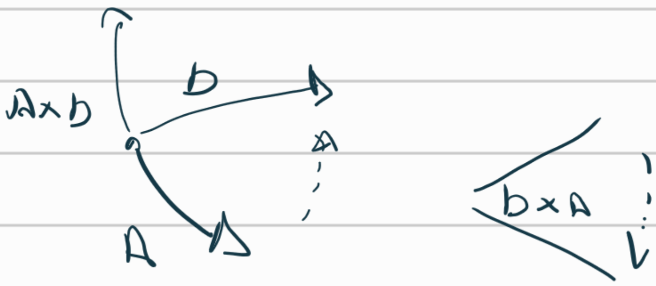
$$a \times b = \underbrace{\|a\|}_{\text{norma}} \ \|b\| \cdot sen(\theta)\ \hat{N} \qquad \|N\| = 1$$

$\langle a, n \rangle = 0$ ← Perpendicular $a \perp \hat{N}$

$\langle b, n \rangle = 0$ ← Perpendicular $b \perp \hat{n}$

$$-1 < \frac{\langle a, b \rangle}{|a|\,|b|} < 1 = \cos\theta$$

Regra da mão direita



Propriedades

1) $a \times b = -b \times a$

2) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

3) $a \times (\lambda b) = \lambda (a \times b)$

2 e 3 ∴ Existe transformação linear $\vec{A}$ $[a_\times] : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
tal que $a \times b = \underline{\underline{[a_\times] b}}$
Pesquisa!!

—— // ——

1 prova + 2 projeto

—— // ——

Geometria Projetiva (Analítica)
↳ Não é euclidiana

Motivação

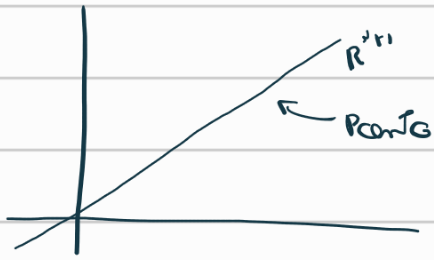
1°) Unifica operações de mesmo universo
(Rotação, Translação e Perspectiva)

2°) Simplifica de forma analítica problemas geométricos complexos. Fazendo uma "linearização"

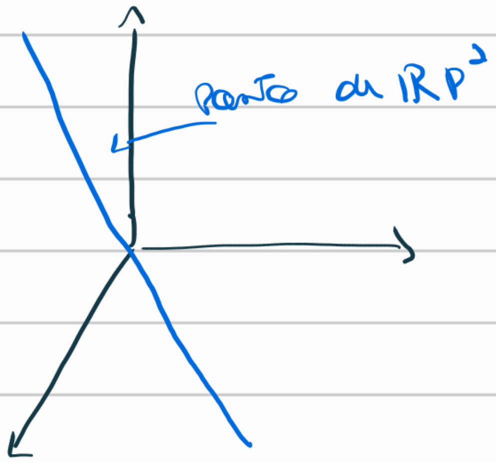
Espaço Projetivo $\mathbb{R}P^n$

Um ponto do espaço projetivo $\mathbb{R}P^N$ é uma reta de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passa pela origem.

Exemplo $\mathbb{R}P^1$



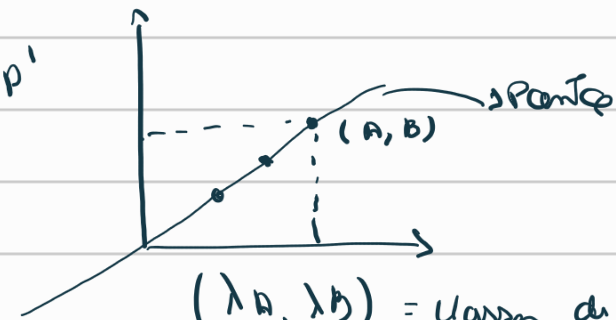
Exemplo $\mathbb{R}P^2$



Coordenadas em $\mathbb{R}P^N$

Uma coord de um ponto $P \in \mathbb{R}P^N$ é definida interpretando-se P como uma reta R^{N+1} e elegendo-se um ponto diferente da origem

Ex $\mathbb{R}P^1$



$(\lambda A, \lambda B)$ = classe de equivalência

Temos que as coordenadas de pontos de $\mathbb{R}P^N$ são definidas com ambiguidade ; de uma multiplicação

Iso

escalar não nulo

Dizemos por causa disso que as coordenadas são <u>homogêneas</u>

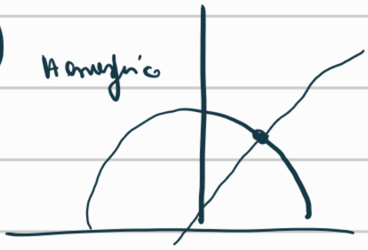
Coordenadas Canônicas

!!!

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$

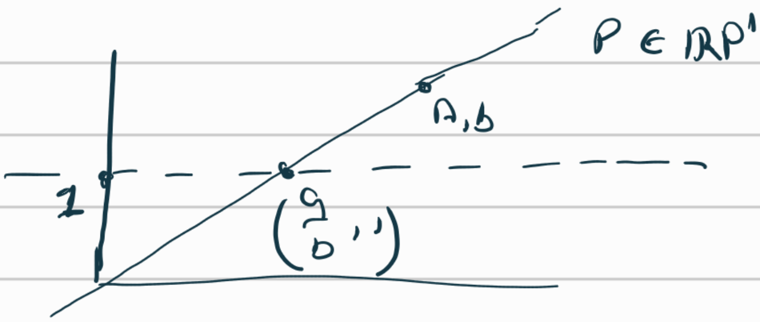
Preguiça

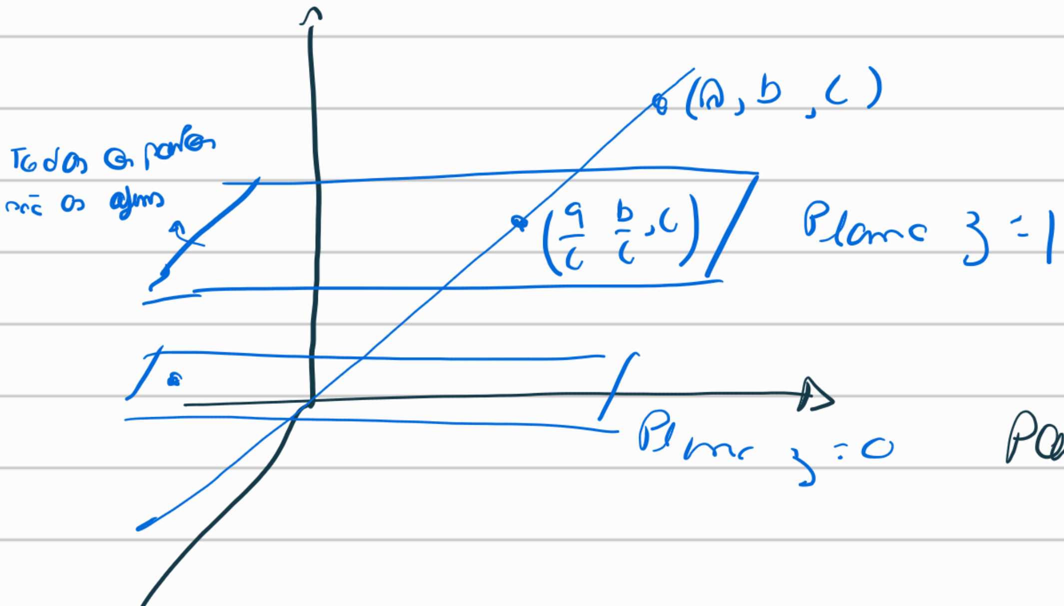
1°) Homogênia



2:) Escolhemos como coord. canônicas de um ponto RP^n $P = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ as coordenadas tais que $x_{n+1} = 1$

Ex $\mathbb{R}P^1$





Pontos ideais

Se $x_{n+1} = 0$ não podemos multiplicar $P \cdot \frac{1}{x_{n+1}}$

logo $\mathbb{R}P^n = \underline{\{(x_1, \ldots x_{n+1})\}} \cup \underline{\{(x_1, \ldots x_n, 0)\}}$

$\{(x_1, \ldots x_{n+1})\}$ ⇓ Pontos Afim correspondem de $\mathbb{R}^n$ ⇓ Rotação e Translação

$\{(x_1, \ldots x_n, 0)\}$ ⇓ Pontos ideais ou de infinito ⇓ Perspectiva

Um ponto de $\mathbb{R}P^2$ no plano $z = 1$ é um ponto

A geometria projetiva em $\mathbb{R}P^2$ faz com que o plano $z = 1$ seja um $\mathbb{R}^2$ imerso no $\mathbb{R}^3$

Plano $z = 1$ $\langle x, y, 1 \rangle$ está contido $\mathbb{R}^2$