Transformações Projetivas

↳ Uma função T de $\mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ é uma transformação projetiva se vista como $T': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ é linear.

$\mathbb{RP}^{n+1}$ → Reta que passa pela origem

Então, toda transformação projetiva $T: \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ pode ser expressa por uma matriz $\underset{\text{linha}}{(m+1)} \times \underset{\text{cols}}{(n+1)}$

Teorema: toda transformação projetiva fica definida a menos de um produto por um escalar.

↳

Prova: Seja $T: \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$

$$(\lambda T)(x) \underset{\text{definição}}{=} \lambda \cdot (T(x)) \underset{\substack{\text{considerando} \\ \text{linearidade em } \mathbb{R}^{n+1}}}{=} T(\lambda x) \underset{\substack{\text{homogeneidade} \\ \text{em } \mathbb{RP}^n}}{=} T(x)$$

Anatomia de uma Transformação Projetiva

↳ $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$

↳ $$T = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & T_1 \\ c & D & T_2 \\ \hline P_1 & P_2 & S \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & T \\ \hline P & S \end{array}\right)$$

Obs: Pelo Teorema anterior basta analisar $S = 1$ ou $S = 0$

1º caso: $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P = (0,0)$ $S = 1$

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ponto afim

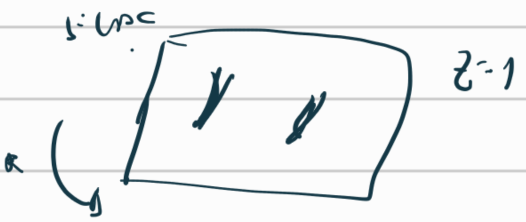
$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponto ideal

Conclusão

1) Pontos afins continuam afins e pontos ideais continuam ideais

2) No plano $z=1$ T funciona como a transformação linear A



2: caso $A = I$ $p = (0,0)$ $S = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & T_1 \\ 0 & 1 & T_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_1 \\ y + T_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & T_1 \\ 0 & 1 & T_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) No plano $z=1$ T funciona como a translação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

3) Caso 1 + Caso 2 : $P = (0\ 0)$ $S \neq 1$)

$$\begin{pmatrix} a & b & T_1 \\ c & D & T_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + T_1 \\ cx + Dy + T_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & T_1 \\ c & D & T_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consequência

1) Pontos afins se mantém afim e ideal = ideal

2) No plano $z=1$ tudo se passa como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$

= Transformação Afim

Se A for uma matriz de rotação então temos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$ = movimento rígido no $z = 1$

Caso 3 : $A = I$; $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $S = 1$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ P_1 & P_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ P_1 x + P_2 y + 1 \end{pmatrix}$$

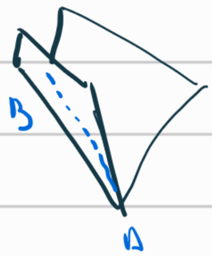
$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_1 x + p_2 y \end{pmatrix}$$

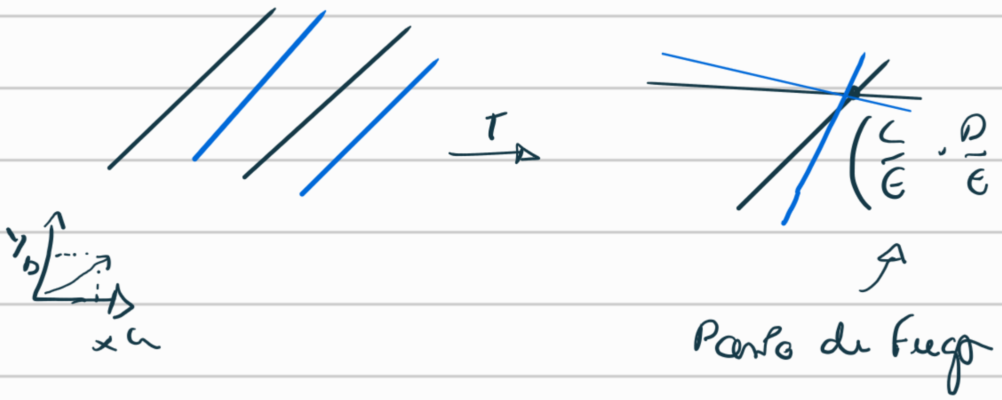
- Em A, se $p_1 x + p_2 y + 1 = 0$ temos que um ponto afim vira ideal
- Em B, se $p_1 x + p_2 y \neq 0$ então um ponto ideal se transforma em afim (mais fácil, qualquer movimento já muda p/ afim)

Ponto Fuga (Definição)

↳ Seja $T: \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ uma transformação projetiva.

Se $T \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \\ E \end{pmatrix}$ com $E \neq 0$ dizemos que $\left(\frac{C}{E}, \frac{D}{E}\right)$ é ponto de fuga da direção (A, B) definida por T.





Pontos de Fuga Principais

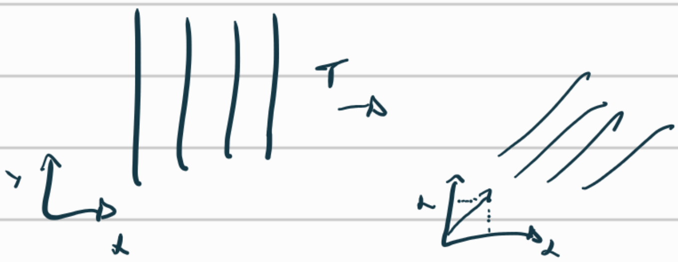
↳ Seja $T \begin{pmatrix} A & B & T_1 \\ C & D & T_2 \\ P_1 & P_2 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \\ P_1 \end{pmatrix}$

Temos que, se $P_1 \neq 0$ $\left(\frac{A}{P_1}, \frac{C}{P_1}\right)$ é o ponto de fuga associado a direção do eixo X $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & B & T_1 \\ C & D & T_2 \\ P_1 & P_2 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ D \\ P_2 \end{pmatrix}$$

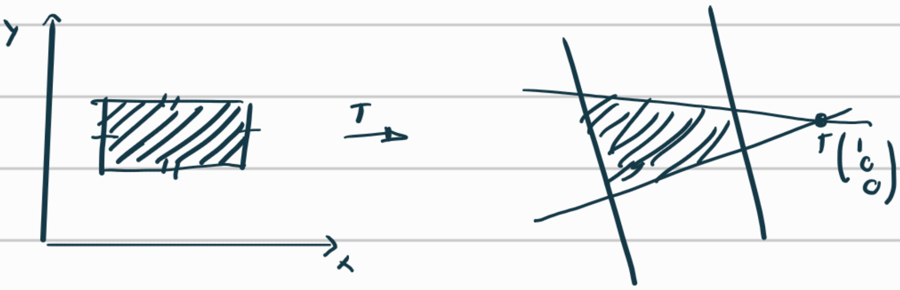
, logo se, $P_2 \neq 0$ $\left(\frac{B}{P_2}, \frac{D}{P_2}\right)$ é o ponto fuga associado ao eixo Y

E se $P_2 = 0$

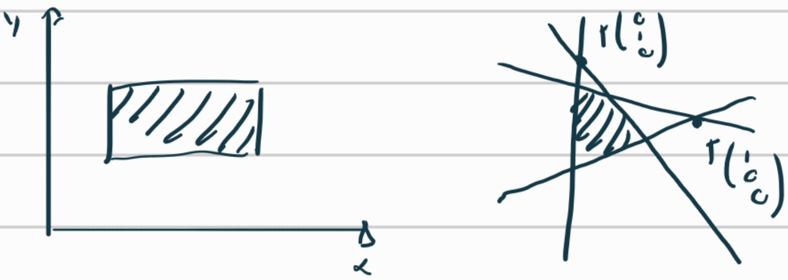


Ilustração

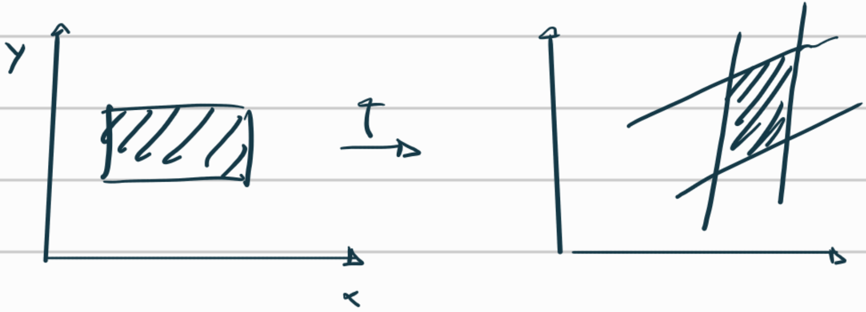
a) $P_1 \neq 0$ $\quad P_2 = 0$



B) $P_1 \neq 0$ $\quad P_2 \neq 0$



c) $P_1 = 0$ e $P_2 = 0$



continua paralelo

Dessa forma, podemos generalizar as interpretações de A, t e P para $T: \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$. Sendo que A é a transformação linear do $\mathbb{R}^3$ e t e P definem os pontos principais associados aos eixos X, Y e Z.