# Cordas periódicas: Uma analogia mecânica para cristais fotônicos.

Rodrigo S. Pitombo[1*], Patrícia P. Abrantes[1†], Reinaldo de Melo e Souza[2±] and Carlos Farina[1,‡]
(1) Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68528, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil
(2) Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, 24210-346, Niterói, RJ, Brazil
(∗) rspitombo@gmail.com (†) patricia@pos.if.ufrj.br (±) reinaldos@id.uff.br (‡) farina@if.ufrj.br

**Mosaico do Instituto de Física-UFRJ**
**17 de dezembro de 2020**

## Introdução

Cristais fotônicos são meios materiais cujas propriedades ópticas são inomogêneas e ordenadas. Geralmente, são compostos por camadas alternadas de dieléricos, produzindo-se um material cuja constante dielétrica varia periodicamente [1]. Essa estrutura faz com que existam intervalos de frequências para os quais a propagação de ondas eletromagnéticas não é permitida, as bandas proibidas. Esse tipo de estrutura tem muitas aplicações importantes [1,2].

Esses sistemas ópticos são, em muitos aspectos, análogos aos cristais convencionais, da física da matéria condensada, nos quais o aparecimento de bandas proibidas (de energia, nesse caso) é bem conhecido. Neste trabalho, exploramos um outro sistema análogo, o das cordas vibrantes periódicas, cujo estudo é totalmente baseado em mecânica clássica. Esse sistema consiste em segmentos finitos de cordas vibrantes adjacentes com densidades lineares de massa periodicamente alternadas.

Para analisar as propriedades de transmissividade e refletividade das estruturas utilizamos o formalismo das matrizes de transferência, comumente utilizado em problemas de eletrodinâmica em multicamadas [3], adaptando-o para as condições de contorno obtidas da aplicação da segunda lei de Newton nas junções de cordas vibrantes. Esse método permite o cálculo exato das transmissividades e refletividades e permite que analisemos a dependência dessas grandezas com a frequência da onda incidente.

Aplicaremos, então, o formalismo das matrizes de transferência nas cordas periódicas e mostraremos que, para certos intervalos de frequência, a transmissividade se anula. Ou seja, existem, nesse sistema mecânico clássico, bandas de frequências proibidas.

## Conceitos básicos e metodologia

### Condições de contorno

Para estudarmos as cordas periódicas, precisamos, antes de tudo, entender como as soluções da equação de onda se comportam na interface de duas cordas com densidades lineares diferentes. Quem dita esse comportamento são as condições de contorno.

Imaginemos duas cordas semi-infinitas unidas na origem com densidades lineares de massa $\mu_1$ e $\mu_2$ e sob tensão $T$.


**Figura 1:** União de duas cordas semi-infinitas com densidades diferentes

Naturalmente, em cada uma das regiões semi-infinitas as soluções obedecem à equação de onda. Além disso, como não queremos uma corda que "se arrebente", a solução total precisa ser contínua na origem. Com isso, temos a primeira condição:

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \tag{1}$$

Onde, na equação acima, $u_1$ é a solução à esquerda e $u_2$, à direita. Agora, se aplicarmos a segunda lei de Newton a um segmento infinitesimal cujo centro esteja na junção das duas cordas, encontramos que, para que a aceleração na origem seja finita,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0_-,t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(0_+,t). \tag{2}$$

As condições 1 e 2 são suficientes para determinar univocamente as transmissividades e refletividades para uma dada configuração de cordas unidas.

### Matriz de transferência e coeficientes

Para obtermos os coeficientes de transmissão e reflexão precisamos analisar as soluções harmônicas da equação de onda em cada segmento e impor as condições de contorno. Para a configuração da figura 1 as soluções harmônicas gerais em cada segmento são

$$u_1(x,t) = A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} + B_1 e^{-i(k_1 x + \omega t)} \tag{3}$$
$$u_2(x,t) = A_2 e^{i(k_2 x - \omega t)} + B_2 e^{-i(k_2 x + \omega t)}. \tag{4}$$

Em que

$$k_j = \omega \sqrt{\frac{\mu_j}{T}} \quad j = 1, 2, \tag{5}$$

impondo, então, as condições de contorno:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \tag{6}$$
$$k_1(A_1 - B_1) = k_2(A_2 - B_2) \tag{7}$$

esse sistema pode ser escrito na seguinte forma matricial ($\eta := k_2/k_1$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & -\eta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2, \end{pmatrix} \tag{8}$$

o que implica

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\eta & 1-\eta \\ 1-\eta & 1+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$
$$=: \mathbf{T}_{1\to 2} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Na equação acima, $\mathbf{T}_{1\to 2}$ é a chamada matriz de transferência [3]. Como mostra a equação (10) ela relaciona os coeficientes das soluções à esquerda com os à direita. A partir dos elementos da matriz de transferência, encontramos, de imediato, a transmissividade e refletividade do problema.

### Matriz de transferência total e propagação.

O formalismo matricial possibilita uma grande simplificação. Para obtermos a solução geral basta analisarmos a configuração mais simples ilustrada a seguir.

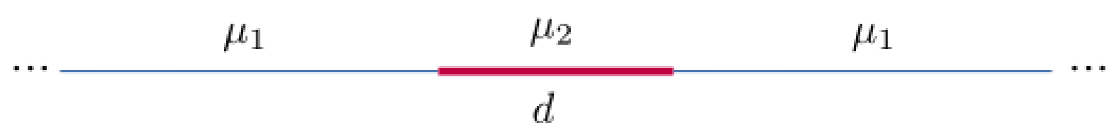



**Figura 2:** Segmento finito de corda com densidade diferente do resto entre duas cordas semi-infinitas

Para obtermos os coeficientes de transmissão, precisamos da matriz de transferência total que relaciona as amplitudes na corda semi-infinita à esquerda com aquelas depois do segmento finito, à direita.

Sabemos relacionar as amplitudes em cada uma das interfaces através de $\mathbf{T}_{1\to 2}$, de modo que só falta levarmos em conta a propagação ao longo do segmento finito. Para isso, basta que utilizemos a matriz de propagação dada por

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} e^{ik_2 d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 d} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Com isso, a matriz de transferência total para essa configuração é

$$\mathbf{T}_{\text{tot}} = \mathbf{T}_{1\to 2} \mathbf{P}_2 \mathbf{T}_{1\to 2}^{-1} \tag{12}$$

Em termos dos elementos da matriz de transferência total, a transmissividade e a refletividade são dadas por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{|T_{11}^{\text{tot}}|^2} \qquad \mathcal{R} = \left|\frac{T_{21}^{\text{tot}}}{T_{11}^{\text{tot}}}\right|^2 \tag{13}$$

### A corda periódica

Analisemos a corda periódica, cuja configuração está mostrada na figura 3.

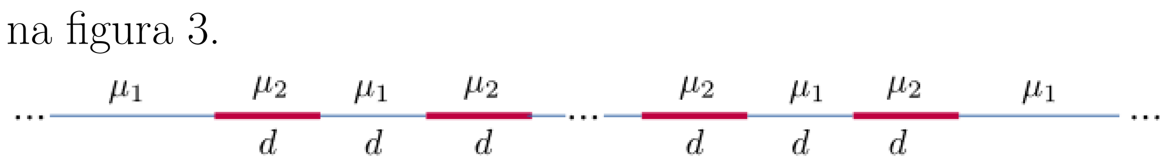



**Figura 3:** A corda periódica

A generalização da equação (12) para esse caso, supondo que tenhamos $N$ segmentos de densidade $\mu_2$ é

$$\mathbf{T}_{\text{tot}} = \mathbf{T}_{1\to 2} (\mathbf{P}_2 \mathbf{T}_{1\to 2}^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{T}_{1\to 2})^{(N-1)} \mathbf{P}_2 \mathbf{T}_{1\to 2}^{-1}. \tag{14}$$

As equações (13) continuam valendo, de modo que "basta" calcularmos a matriz de transferência total para obtermos as transmissividades e refletividades.

## Resultados

### Transmissividade e refletividade vs. frequência

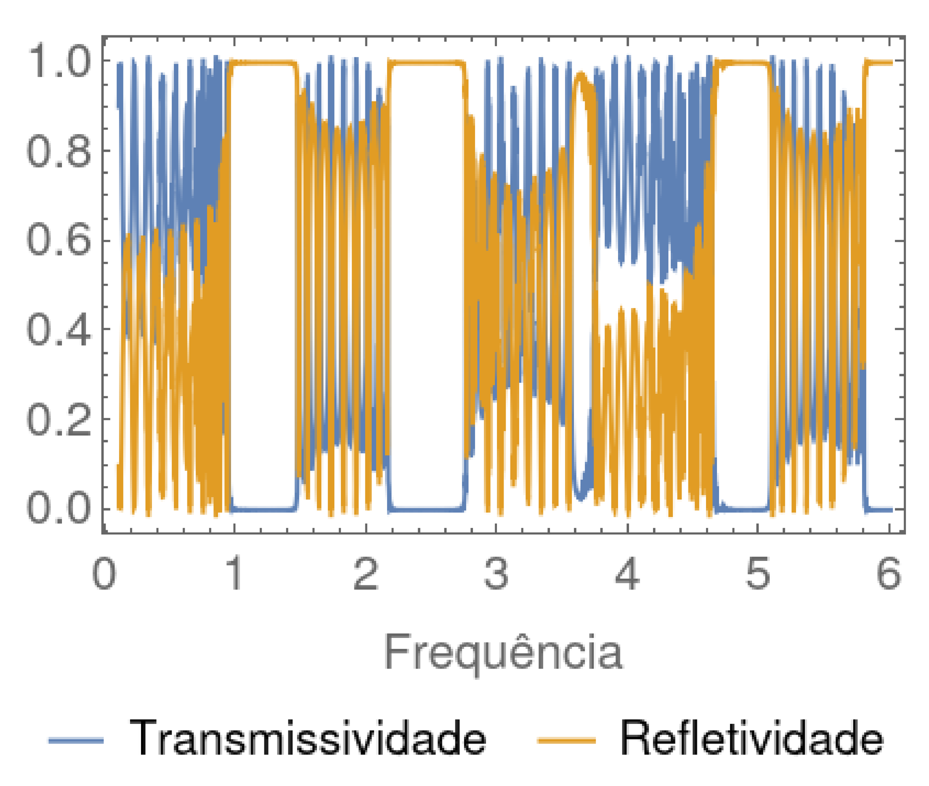



**Figura 4:** Reflexividades e transmissividades com respeito a frequência para $N$=10

Como primeiro exemplo, calculamos como os coeficientes de transmissão e reflexão variam com a frequência para o caso em que $N = 10$. A partir da figura 4, observamos que existem intervalos de frequência para os quais a transmissividade é zero, as bandas proibidas.

### Variando o tamanho dos segmentos

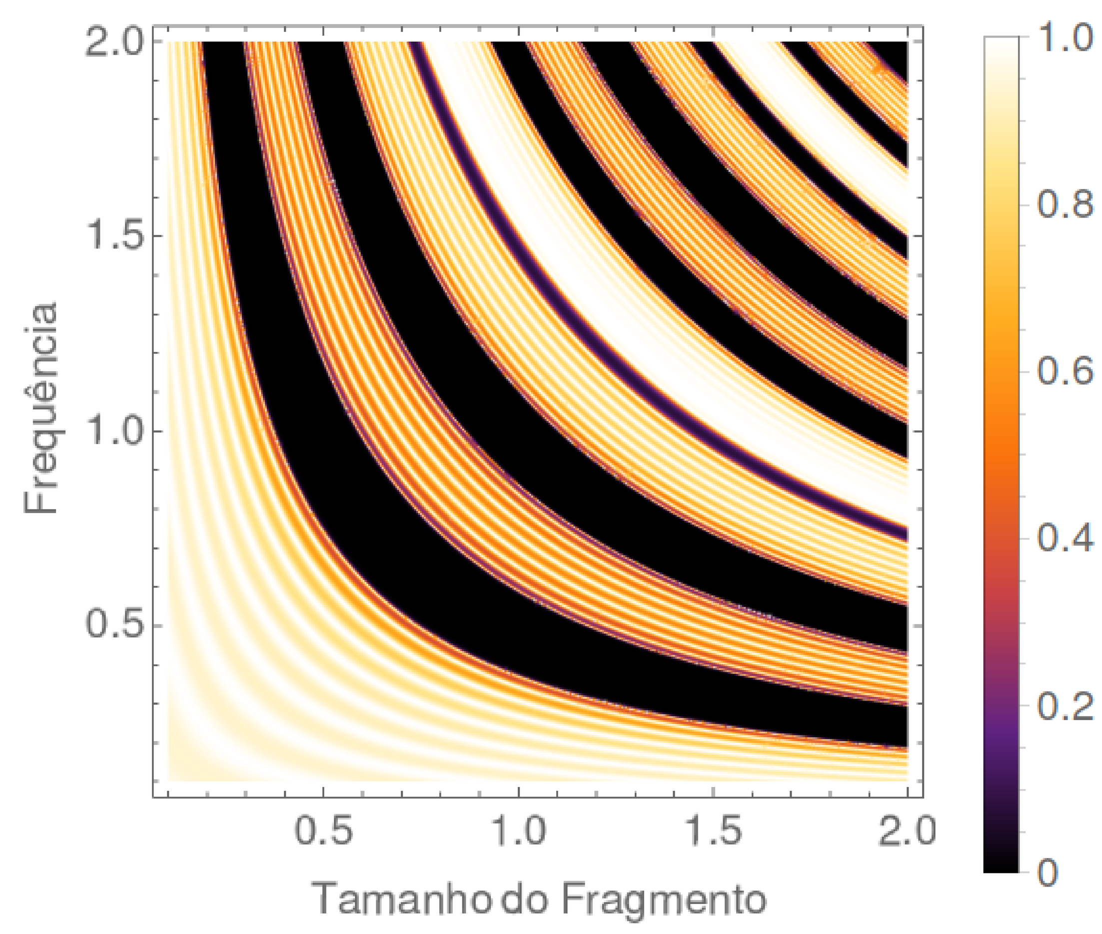
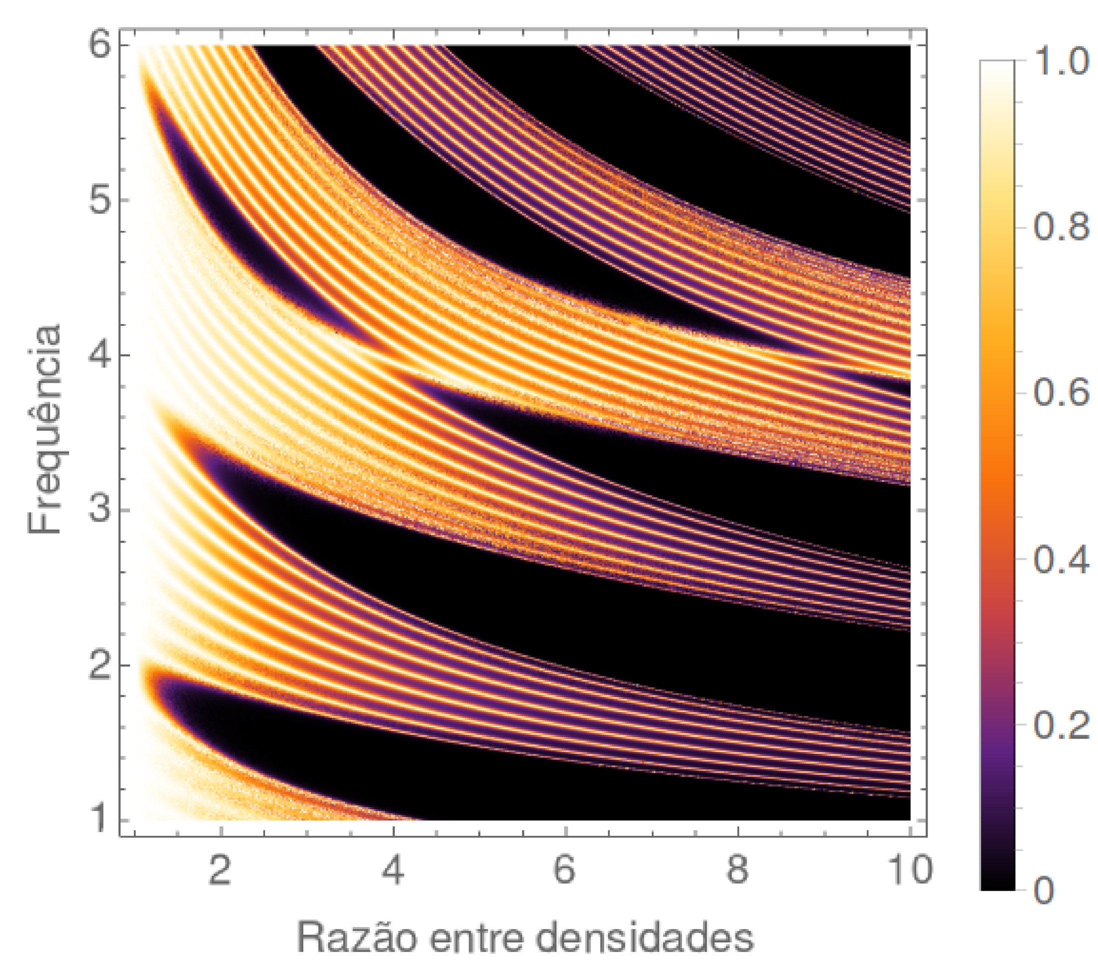



**Figura 5:** Gráfico variando a frequência e o tamanho $d$ dos segmentos. A cor representa a transmissividade

Nesse caso, variamos, também, os tamanhos dos segmentos. A figura 4 é um corte vertical do gráfico mostrado na figura 5, em que a transmissividade é representada pelas cores.

### Variando razão entre densidades lineares




,

**Figura 6:** Gráfico variando a frequência e a razão entre as densidades dos segmentos. A cor representa a transmissividade

As bandas também são sensíveis à mudança da razão entre as densidades lineares, como mostra a figura 6. Note que, como o esperado, a transmissividade vai a 1 no limite de corda homogênea.

## Considerações finais

- Apresentamos mais um fenômeno ondulatório clássico para o qual periodicidade se traduz na formação de bandas.
- É possível modificar as bandas mudando parâmetros como o tamanho do segmento e a densidade das cordas.
- Atualmente, estamos investigando as seguintes questões: como os parâmetros de nosso problema (densidades, larguras e número de repetições) afetam as propriedades da banda (número de bandas, largura e nitidez).

## Referências

[1] Angelakis, Dg, et al. "Photonic Crystals and Inhibition of Spontaneous Emission: an Introduction." Contemporary Physics, vol. 45, no. 4, 2004, pp. 303–318., doi:10.1080/00107510410001676795.
[2] Yablonovitch, Eli. "Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics." Physical Review Letters, vol. 58, no. 20, 1987, pp. 2059–2062., doi:10.1103/physrevlett.58.2059.
[3] Andre Da Silva Goncalves Paulo, and Nuno Peres. An Introduction to Graphene Plasmonics. World Scientific., 2016.