EDO

May 11, 2018

Equações diferenciais ordinárias
Referência: https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_differential_equation

---

Uma equação diferencial é uma equação para uma função que relaciona os falores da função com ela mesma e suas derivadas de várias ordens. Um equação diferencial matricial contém mais de uma função empilhada em forma vetorial com a matriz relacionando a função a suas derivadas.

Um exemplo de equação diferencial matricial simples é
$\dot{X}(t) = AX(t)$,
onde $X(t)$ é um vetor coluna com n elementos contendo funções da variável independente t, $\dot{X}(t)$ é o vetor com a primeira derivada dessas funções, e A é uma matriz n x n com os coeficientes relacionando as derivadas ás funções.

No caso da matriz A ter n autovetores linearmente independentes, esta equação diferencial terá a seguinte solução geral:
$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2 + ... + c_n e^{\lambda_n t} u_n$,
onde $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n}$ são os autovalores de A, e $u_1, u_2, ..., u_n$ são os respectivos autovetores de A, e $c_1, c_2, ..., c_n$ são constantes.

Resolvendo um exemplo numericamente
Dada as equações:
$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y$
$\frac{dy}{dt} = 4x - 7y$
Montamos a matriz A:

```
In [9]: import numpy as np

        A = np.array( [[3, -4], [4, -7]] )
        print(A)
```

```
[[ 3 -4]
 [ 4 -7]]
```

Agora encontramos os autovalores e autovetores associados a A

```
In [10]: eigvalues, eigvectors = np.linalg.eig(A)
         print('\nAutovalores \n%s\n'%(eigvalues))
         print('\nAutovetores \n%s\n'%(eigvectors))

         print('Apenas normalizarei dividindo pelo menos componente do autovetor')
         print('\nlambda_1 = %s ; u_1 %s\n'%(eigvalues[0], eigvectors[:, 0] / eigvectors[:, 0]
         print('\nlambda_2 = %s ; u_2 %s\n'%(eigvalues[1], eigvectors[:, 1] / eigvectors[:, 1]

         print()
```

```
Autovalores
[ 1. -5.]


Autovetores
[[0.89442719 0.4472136 ]
 [0.4472136  0.89442719]]

Apenas normalizarei dividindo pelo menos componente do autovetor

lambda_1 = 1.0 ; u_1 [2. 1.]


lambda_2 = -5.0 ; u_2 [1. 2.]
```

Agora podemos montar a solução geral desse sistema:
$\binom{x}{y} = Ae^{\lambda_1 t}u_1 + Be^{\lambda_2 t}u_2$
$\binom{x}{y} = Ae^{t}\binom{2}{1} + Be^{-5t}\binom{1}{2}$

$x = 2Ae^{t} + Be^{-5t}$
$y = Ae^{t} + 2Be^{-5t}$