写在前面

> 本文为南方科技大学MA212概率论与数理统计课程2022秋季学期后半学期的知识点整理，大部分内容摘选自MA212-03班的课件，编者仅进行了一定转述和搬运工作。由于复习材料的目的性强，本文对考点有一定的强调和浓缩，忽略了一些非考点，但也并不能视为与考纲完全相符，同时可能存在一定错误。阅读本文并不能让你两三天速通概统，本文的定位在于用一篇文章看完课件内容，因此建议读者在学完该部分内容后借本文复习概念，并结合题目练习。
>
> 祝你在这门课程取得优秀成绩！
>
> 计算机科学与技术21级 樊斯特(12111624)
>
> 2023.1

由于编者能力有限，恳请各位读者在阅读过程中勘误，如果您对其中内容有疑问或发现错误，抑或是希望联系编者，欢迎通过该QQ联系：3425811925，非常感谢！

Chapter 3

§3.6 联合分布随机变量函数

r.v. 函数的分布

设(X,Y)是二维连续型随机向量，其联合概率密度函数为$f(x,y)$。则$Z=g(X,Y)$的累积分布函数为

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)du$

求导可得其概率密度函数$Z\sim f_Z(z)$

连续卷积公式：r.v. $(X,Y)\sim f(x,y)$，$Z=X+Y$

$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)dudy=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)dydu$

求导得：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$

若X,Y独立，$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，则

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

独立正态r.v.之和：独立r.v. 集$\{X_n\}$，$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$

则其非零线性组合$\sum\limits_{i=1}^{n} a_iX_i\sim N(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mu_i,\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2)$

即：独立正态r.v.的非零线性组合仍服从正态分布

非独立正态r.v.之和：

若$(X,Y)\sim\mathbf{N}(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则
$(C_1X+C_2Y)\sim\mathbf{N}(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+2C_1C_2\sigma_1\sigma_2\rho)$

离散卷积公式：$P\{Z=k\}=\sum\limits_i P\{X=i\}P\{Y=k-i\}=\sum\limits_i P\{X=k-i\}P\{Y=i\}$

离散r.v.函数的分布：对于$Z=g(X,Y)$，$P\{Z=z_k\}=\sum\limits_{g(x_i,y_j)=z_k}p(x_i,y_i)$

r.v.商的分布：$(X,Y)\sim f(x,y)$，$Z=\frac{X}{Y}$，$F_Z(z)=P\{\frac{x}{y}\le z\}=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z}f(x,y)dxdy$

$F_Z(z)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{yz}f(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^0\int_{yz}^\infty f(x,y)dxdy$

设$u=x/y$，$dx=ydu$

$F_Z(z)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{z}f(uy,y)ydudy+\int_{-\infty}^0\int_{z}^{-\infty}f(uy,y)ydudy$

$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\int_0^\infty f(uy,y)ydydu+\int_{z}^{-\infty}\int_{-\infty}^0 f(uy,y)ydydu=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^\infty f(uy,y)|y|dydu$

求导得$f_Z(z)=\int_{-\infty}^\infty f(zy,y)|y|dy$

Jacobi行列式：$J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$

若连续可微变换$T(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$为双射，且$J(u,v)\neq 0$，则

$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\iint_{\Omega'}f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv$

则逆变换$U=g_1(X,Y),V=g_2(X,Y)$的联合密度为：

$f_{UV}(u,v)=f_{XY}(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|$

正态分布与线性变换：

两个独立标准正态r.v.的线性变换服从二元正态分布。

更一般地，若两个r.v.的联合分布为二元正态分布，则其非奇异线性变换还是二元正态分布。

构造生成标准正态分布r.v.：构造独立r.v. $U_1\sim U[0,1]$，$U_2\sim U[0,1]$

则$X=\sqrt{-2logU_1}\cos(2\pi U_2)$，$Y=\sqrt{-2logU_1}\sin(2\pi U_2)$是独立标准正态r.v.

§3.7 极值和顺序统计量

r.v.极值的分布

max分布：$\{X_n\}$为独立r.v.集，$F_{max}(z)=P\{\bigcap\limits_{i=1}^n(X_i\le z)\}=\prod\limits_{i=1}^n F_{X_i}(z)$

min分布：$\{X_n\}$为独立r.v.集，$F_{max}(z)=P\{\bigcup\limits_{i=1}^n(X_i\le z)\}=1-\prod\limits_{i=1}^n(1-F_{X_i}(z))$

n个独立同分布r.v.的极值的密度：$f_{max}(z)=nf(z)[F(z)]^{n-1}$，$f_{min}(z)=nf(z)[1-F(z)]^{n-1}$

指数分布的**串联系统**仍服从指数分布，失效率为各部件失效率之和。

顺序统计量$X_{(k)}$的密度：$f_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}f(x)F^{k-1}(x)[1-F(x)]^{n-k}$

若$X_i\sim\mathbf{U}[0,1]$且相互独立，则$X_{(k)}\sim\mathbf{Beta}(k,n-k+1)$

Chapter 4

§4.1 随机变量的期望

数学期望(离散型)：

若级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<+\infty$，则数学期望$E(x)\overset{\Delta}{=}\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kP\{X=x_k\}$

否则无法说明级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$收敛，期望不存在

数学期望(连续型)：

r.v.X的cdf为$f(x)$，若$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx<+\infty$，则数学期望$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

否则$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=+\infty$，期望不存在(标准柯西分布：$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$)

Markov不等式：

r.v.X非负，且$E(X)$存在，则$P\{X\geq t\}\leq\frac{E(X)}{t}$

函数的期望：

对于普通函数$y=g(x)$，其期望$E(Y)=E(g(X))=\sum\limits_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$ 或 $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$

对于二元函数$z=g(x,y)$，其期望$E(Z)=E(g(X,Y))=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$或$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$

数学期望的基本性质：

- 设$a\leq X\leq b\ (a.e)$，则$a\leq E(X)\leq b$
- 对于常数c，$E(cX)=cE(X)$
- 对于r.v. X,Y，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- 对于**独立**r.v. X,Y，$E(XY)=E(X)E(Y)$

数学期望的几个推论：

- 若$X=c\ (a.e)$，则$E(X)=c$
- 线性组合的期望等于期望的线性组合
- $\{X_n\}$相互独立，则$E(\prod\limits_{k=1}^{n}X_k)=\prod\limits_{k=1}^{n}E(X_k)$

超几何分布等式：N件产品，M件次品，摸出次品个数的期望值(前置证明：每次摸中次品概率相同)

$\sum\limits_{k=0}^{n}k\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=\frac{nM}{N}$

§4.2 方差与标准差

方差：$Var(X)\overset{\Delta}{=}E[(X-E(X))^2]$

标准差：$\sqrt{Var(X)}$

方差的计算：$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

方差的基本性质：

- $X=c\ (a.e)\rightleftharpoons Var(X)=0$
- 对于常数a,b，$Var(aX\pm b)=a^2Var(X)$

- 对于r.v. X,Y，$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2E[(X-E(x))(Y-E(Y)]$
- 对于相互独立的$\{X_n\}$，$Var(\sum\limits_{k=1}^{n}X_i)=\sum\limits_{k=1}^{n}Var(X_i)$

正态r.v.的标准化：$X\sim\mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$，$X^\star=\frac{X-\mu}{\sigma}$，$X^\star\sim\mathbf{N}(0,1)$

Chebyshev不等式：

期望μ、方差σ^2均存在，则$\forall\varepsilon>0$，有$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

证明用Markov不等式，$Y=(X-\mu)^2$，$E(Y)=\sigma^2$

§4.3 协方差与相关系数

协方差：$Cov(X,Y)\overset{\Delta}{=}E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)$

协方差的基本性质

- 若r.v. X,Y相互独立，则$Cov(X,Y)=0$，但协方差为0不一定独立
- $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$，$Cov(X,X)=Var(X)$
- $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
- 双线性性：
  - $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$
  - $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$
  - $U=a+\sum\limits_{i=1}^{n}b_iX_i$，$V=c+\sum\limits_{j=1}^{m}d_jY_j$，则

    $Cov(U,V)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}b_id_jCov(X_i,Y_j)$

相关系数：$\rho_{XY}\overset{\Delta}{=}\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$，$|\rho_{XY}|\leq 1$，取等当且仅当$Y\overset{a.e}{=}a+bX$

均方误差：对于线性近似$\widehat{Y}=a+bX$，均方误差$e=E[(Y-\widehat{Y})^2]$

$e_{min}=Var(Y)(1-\rho_{XY}^2)$，此时$b_0=\frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$，$a_0=E(Y)-b_0E(X)$

相关：正相关，负相关，不相关。不相关不一定独立，独立一定不相关。

协方差矩阵：对于n维r.v.$\{X_n\}$，记$c_{ij}=Cov(X_i,X_j)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$

将c_{ij}写成矩阵的形式C，则称其为$\{X_n\}$的协方差矩阵。协方差矩阵为**非负定对称阵。**

n维正态r.v.：令

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \mu=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}$$

其中C为n阶正定矩阵，若n维r.v.$\{X_n\}$的密度函数为

$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^TC^{-1}(X-\mu)\right\}$

则称$\{X_n\}$服从参数为(μ,C)的n维正态分布，记为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim\mathbf{N}(\mu,C)$。

n维正态r.v.的重要性质：

- μ称为均值向量，C为协方差矩阵，对角线为对应r.v.方差。
- $X_i \sim \mathbf{N}(\mu_i, c_{ii})$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$，反之若$\{X_n\}$相互独立且 $X_i \sim \mathbf{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $\{X_n\} \sim \mathbf{N}(\mu, C)$，其中$\mu = [\mu 1\ \mu 2 \ldots\ \mu_n]^T$，$C = diag\{\sigma_1^2\ \sigma_2^2 \ldots\ \sigma_n^2\ \}$
- 若$\{X_n\} \sim \mathbf{N}(\mu, C)$，则$\{X_n\}$的任一线性组合$\sum\limits_{k=1}^{n} l_i X_i$服从一维正态分布
- 正态r.v.的线性变换不变性：若$\{X_n\} \sim \mathbf{N}(\mu, C)$
  $$\begin{cases} Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \\ Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \\ \vdots \\ Y_m = a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \end{cases}$$
  则$\{Y_m\}$仍服从多维正态分布。

§4.4 条件期望

不考，不过明明是很重要的内容来着。

§4.x 常用分布的分布及数字特征

附录 1　常用分布的分布及数字特征

分布类型	分布名称	分布律或密度函数	数学期望	方差
离散型	0-1 分布 $B(1, p)$	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$, $0<p<1$, $k=0, 1$	p	pq
	二项分布 $B(n, p)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $0<p<1$, $k=0, 1, \cdots, n$	np	npq
	超几何分布 $H(N, M, n)$	$P(X=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $k=\max(0, n+M-N), \cdots, \min(n, M)$	$n\dfrac{M}{N}$	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
	泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda>0$, $k=0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$	λ	λ
	几何分布 $Ge(p)$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$, $0<p<1$, $k=1, 2, \cdots, n, \cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
	负二项分布 $NB(r, p)$	$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$, $0<p<1$, $k=r, r+1, \cdots, r+n, \cdots$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{r(1-p)}{p^2}$
连续型	均匀分布 $U(a, b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
	指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $\lambda>0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
	正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<+\infty$　$\mu\in R$, $\sigma>0$	μ	σ^2
	伽马分布 $Ga(a, \lambda)$	$f(x)=\dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}$, $x\geqslant 0$, $\lambda>0$, $a>0$	$\dfrac{a}{\lambda}$	$\dfrac{a}{\lambda^2}$
	贝塔分布 $Be(a, b)$	$f(x)=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, $0<x<1$, $a>0$, $b>0$	$\dfrac{a}{a+b}$	$\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

· 213 ·

Chapter 5

§5.1 大数定律

依概率收敛：

设$\xi, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \ldots$是一系列r.v.，若$\forall \varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\}=0$，则称$\{\xi_n\}$依概率收敛于$\xi$，记为$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$。

- $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\}=0 \rightleftharpoons \lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n-\xi|<\varepsilon\}=1$
- 随着n的增大，绝对误差$|\xi_n-\xi|$较大的可能性越来越小
- 若$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$，$g$是连续函数，则$g(\xi_n) \xrightarrow{P} g(\xi)$

几乎处处收敛(了解):

若r.v.列$\{\xi_n\}$满足$\forall\varepsilon>0$，$P\{\lim\limits_{n\to\infty}|\xi_n-\xi|<\varepsilon\}=1$，则称$\{\xi_n\}$几乎处处收敛于$\xi$，记为$\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$或$\xi_n\to\xi,\ a.s.$

伯努利大数定律:

设n_A是n次独立重复实验中事件A发生的次数，且$P(A)=p$，则$\forall\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n}-p|\geq\varepsilon\}=0$

切比雪夫大数定律:

$\{X_n\}$为独立r.v.列，且具有相同的期望μ和方差σ^2，则$\forall\varepsilon>0$有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|\geq\varepsilon\}=0$，即$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$，可由Chebyshev不等式证明：$P\left(\left|\bar{X}_n-\mu\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{\operatorname{Var}\left(\bar{X}_n\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\to 0,$

辛钦大数定律(弱大数定律):

$\{X_n\}$是独立同分布r.v.列，期望μ存在，则$\{X_n\}$服从大数定律，$\forall\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$

强大数定律(了解):

若$\{X_n\}$两两独立且同分布，期望μ存在，则$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$

§5.2 中心极限定理

中心极限定理:

若$Z_n=\frac{\sum_{k=1}^n X_k-\sum_{k=1}^n\mu_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n\sigma_k^2}}$的分布函数$F_n(x)$对任意$x$满足

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F_n(x)&=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k-\sum_{k=1}^n\mu_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n\sigma_k^2}}\leq x\right\}\\&=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)\end{aligned}$$

则称$\{X_k\}$服从中心极限定理。

中心极限定理(独立同分布):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F_n(x)&=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}\\&=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)\end{aligned}$$

中心极限定理的实际含义:

对于均值为μ，方差$\sigma^2>0$的i.i.d.r.v.列$\{X_n\}$，有$\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\overset{\text{近似}}{\sim}\mathbf{N}(n\mu,n\sigma^2)$，或$\bar{X}_n\overset{\text{近似}}{\sim}\mathbf{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理:

设$\{\eta_n\}$为服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布r.v.列，则对任意x有

$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$

对于r.v.$\eta_n\sim\mathbf{b}(n,p)\ (n=1,2,\ldots)$，有$\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\overset{近似}{\sim}\mathbf{N}(0,1)$，于是当$n$充分大时，可以认为$\eta_n\overset{近似}{\sim}\mathbf{N}(np,np(1-p))$

Chapter 6

§6.2 数理统计：基本概念

简单随机抽样:

在相同条件下对总体X进行n次重复、独立观察。要求各次取样结果互不影响，每次取出的样品与总体有相同的分布，满足这两条性质的样本称为简单随机样本。

样本均值: $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

样本方差: $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

样本标准差: $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

样本k阶矩: $A_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$

样本k阶中心距: $B_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$

顺序统计量: $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$

极小值: $X_{(1)}=min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

极大值: $X_{(n)}=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

样本矩的特征: 设$\{X_n\}$为来自总体$X\sim F(x)$的样本，总体k阶矩$\mu_k\overset{\Delta}{=}E(X^k)$都存在，则

- $X_1^k,X_2^k,\cdots,X_n^k$独立，与X^k同分布
- $E(A_k)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i^k)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X^k)=\mu_k$
- 由辛钦大数定律，$n\to\infty$时，$A_k\xrightarrow{P}\mu_k$，连续函数$g(A_1,A_2,\cdots,A_k)\xrightarrow{P}g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$

样本均值与样本方差的数字特征: $E(\bar{X})=\mu$，$Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$，$E(S^2)=\sigma^2$

§6.3 抽样分布

χ^2**-分布**:

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X\sim\mathbf{N}(0,1)$的样本，令

$\mathcal{X}^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$

称$\mathcal{X}^2$服从自由度为n的χ^2-分布，记为$\mathcal{X}^2\sim\chi^2(n)$。

χ^2-分布的可加性：

设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$，$\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$且相互独立，则$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$

χ^2-分布的数字特征：

设$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则$E(\chi^2) = n$，$Var(\chi^2) = 2n$

t-分布：

设$X \sim \mathbf{N}(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且X, Y相互独立，令

$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$

称t服从自由度为n的t-分布，记为$t \sim t(n)$。当n较大时，可以认为$t(n) = N(0,1)$

F-分布：

设$U \sim \chi^2(n_1)$，$V \sim \chi^2(n_2)$，且U, V相互独立，令

$F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$

称F服从自由度为(n_1, n_2)的F-分布，记为$F \sim F(n_1, n_2)$

F-分布的性质：

- 若$F \sim F(n_1, n_2)$，则$\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
- 若$T \sim t(n)$，则$T^2 \sim F(1, n)$。(t-分布的平方服从F-分布)

α分位点：

设$X \sim f(x)$，若$\forall 0 < \alpha < 1$，存在常数x_α满足

$P\{X \leq x_\alpha\} = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)dx = \alpha$

则称x_α为分布密度$f(x)$的α分位点，也即$F(X_\alpha) = \alpha$

- $\mathbf{N}(0,1)$的α分位点记为u_α
- $t(n)$的α分位点记为$t_\alpha(n)$
- $\chi^2(n)$的α分位点记为$\chi_\alpha^2(n)$
- $F(n_1, n_2)$的α分位点记为$F_\alpha(n_1, n_2)$
- 三反公式：$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$

抽样分布定理一：

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$的样本，则$\bar{X} \sim \mathbf{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

抽样分布定理二：

1. $\bar{X}$，S^2相互独立
2. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

抽样分布定理三：

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$的样本，则

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

抽样分布定理四：

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$X \sim \mathbf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$的样本；$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$是总体$Y \sim \mathbf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立，两样本均值和样本方差分别为$\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$，则

$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1,m-1)$

抽样分布定理五：

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X\sim \mathbf{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本；$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$是总体$Y\sim \mathbf{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立，两样本均值和样本方差分别为$\bar{X},\bar{Y},S_1^2,S_2^2$，则

$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$

其中$S_\omega^2=\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$，$S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$

指数分布与χ^2-分布：自由度为2的χ^2-分布就是参数为$\frac{1}{2}$的指数分布

Chapter 7

§7.1 点估计

矩估计法：

设总体$X\sim F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，其中$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的样本，设总体矩$\mu_k=E(X^k)\ (k=1,2,\cdots,m)$都存在，则$\mu_k$是$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$的函数。

由辛钦大数定律，样本k阶矩$A_k\xrightarrow{P}\mu_k,\ n\to\infty\ (k=1,2,\cdots,m)$

从而可以使用A_k估计μ_k，进而得到θ的估计。

1. 设$\mu_i=\mu_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m),\ i=1,2,\cdots,m$
2. 反解方程组得$\theta_i=\theta_i(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m),\ i=1,2,\cdots,m$
3. 用样本矩代替总体矩，得到矩估计$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(A_1,A_2,\cdots,A_m),\ i=1,2,\cdots,m$
4. 若$\hat{\theta}$是位置参数θ的据估计，则$g(\theta)$的矩估计为$g(\hat{\theta})$。

二阶矩估计的结论：

用A_1,A_2代替μ_1,μ_2，得到μ和σ^2的矩估计量分别为：

$\widehat{\mu}=A_1=\bar{X}$

$\widehat{\sigma}^2=A_2-A_1^2=\frac{n-1}{n}S^2\overset{\Delta}{=}\widetilde{S}^2$，称为修正的样本方差。

最大似然估计(MLE)：

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X\sim f(x;\theta)$的样本，令

$L(\theta)=L(\theta;X_1,X_2,\cdots,X_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(X_i;\theta)$

$L(\theta)$称为**似然函数**，若存在统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$使得$L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_))$，则称其为$\theta$的最大似然估计(MLE)。

最大似然估计常见求法：

1. 求似然函数，构建(对数)似然方程组
2. 对各未知参数求偏导，使其偏导为0
3. 求解(对数)似然方程组，得到MLE

在似然函数不可导时，回到原始定义，即找到让似然函数值最大的$\hat{\theta}$即可

§7.2 估计量的评价标准

无偏性：

若估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的数学期望存在，且$\forall\theta\in\Theta$有$E_\theta(\hat{\theta})=\theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的无偏估计

，否则为有偏估计。

称$b_n(\hat{\theta})=E_\theta(\hat{\theta})-\theta$为估计量$\hat{\theta}$的偏差，若$\lim\limits_{n\to\infty}b_n(\hat{\theta})=0$，则$\hat{\theta}$为$\theta$的渐进无偏估计。

对任意总体X，若期望μ与方差σ^2存在，则$\widehat{\mu}=\bar{X}$，$\widehat{\sigma}^2=S^2$都是无偏估计，而修正后的样本方差$\widetilde{S}^2$是σ^2的渐进无偏估计。

同一参数的不同无偏估计的线性组合(总比例为1)还是无偏估计。

估计量的均方误差：

设$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为待估参数$\theta$的估计量，称$E_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2$为$\hat{\theta}$的均方误差。

$E_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2=Var(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})-\theta]^2$

有效性：

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X\sim F(x,\theta);\theta\in\Theta$的样本，

$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

都是θ的无偏估计，即$E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta\ (\forall\theta\in\Theta)$。若$\forall\theta\in\Theta$有$Var(\hat{\theta}_1)\le Var(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效。

相合性(一致性)：

设$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是位置参数$\theta$的点估计，若$\forall\theta\in\Theta$满足：$\forall\varepsilon>0$有

$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\ge\varepsilon\}=0$

即$\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}\theta\ (n\to\infty)$，则称$\hat{\theta}_n$是$\theta$相合估计。

对任意总体X，若期望μ与方差σ^2存在，则$\widehat{\mu}=\bar{X}$，$\widehat{\sigma}^2=S^2$都是相合估计。

关于相合估计的一般结论：

- 由辛钦大数定律，θ的矩估计$\hat{\theta}$是相合估计
- θ的MLE$\hat{\theta}$一般也是相合估计
- θ的相合估计不一定是无偏估计
- 若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，则由Chebyshev不等式有

  $P\{|\hat{\theta}-\theta|\ge\varepsilon\}\le\frac{Var(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}$

  故当$\lim\limits_{n\to\infty}Var(\hat{\theta})=0$时，$\hat{\theta}$是$\theta$的相合估计(充分条件)

§7.3 区间估计

区间估计：

设总体$X\sim F(x;\theta)\ (\theta\in\Theta)$。若对给定的$0<\alpha<1$，存在两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n),\ \overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\ (\underline{\theta}\le\overline{\theta})$

使得$\forall\theta\in\Theta$，有

$$P\{\underline{\theta}\le\theta\le\overline{\theta}\}\ge 1-\alpha$$

则称随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的**置信区间**，$\underline{\theta},\overline{\theta}$分别称为**置信下限**和**置信上限。**

$1-\alpha$置信区间的含义是随机区间$[\underline{\theta},\overline{\theta}]$至少以$1-\alpha$的概率套住$\theta$的真值。

- 可靠性：置信度$1-\alpha$应尽量大，即要求估计尽量可信(可靠)。
- 精确性：区间长度应尽量小，即估计的精度要尽可能地高。
- 上述两个要求是相互矛盾的：先保证可靠性，在此前提下尽可能提高精度。

求未知参数置信区间的一般过程：

- 找出参数θ的一个较好的点估计$\hat{\theta}=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。
- 找出枢轴量函数$W(T,\theta)$，使得W的分布不依赖于未知参数
- 对于给定置信水平$1-\alpha$定出两个常数a,b使得
  $$P\{a\le W(T,\theta)\le b\}=1-\alpha$$
- 根据等价形式得到$\underline{\theta}\le\theta\le\overline{\theta}$，则$[\underline{\theta},\overline{\theta}]$就是$\theta$的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

单正态总体参数的区间估计：

单个正态总体$X\sim\mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是一个样本。

待估参数	其他参数	枢轴量及其分布	置信区间
μ	σ^2已知	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim\mathbf{N}(0,1)$	$\left[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
μ	σ^2未知	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$
σ^2	μ已知	$\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2(n)$	$\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$
σ^2	μ未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

双正态总体参数的区间估计：

正态总体$\mathbf{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$和$\mathbf{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$的两组相互独立的样本$X_1,X_2,\cdots,X_m$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$。

样本均值和样本方差分别是$\bar{X},S_1^2$和$\bar{Y},S_2^2$，记$S_\omega^2=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{(m+n-2)}$。

待估参数	其他参数	枢轴量及其分布	置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim\mathbf{N}(0,1)$	$\left[\bar{X}-\bar{Y}-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},\bar{X}-\bar{Y}+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$	$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-S_\omega\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2),(\bar{X}-\bar{Y})+S_\omega\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right]$
σ_1^2/σ_2^2	μ_1,μ_2未知	$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$	$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\right]$
σ_1^2/σ_2^2	μ_1,μ_2已知	$\frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2/n_2}\sim F\left(n_1,n_2\right)$	$\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_2)^2/n}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)},\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_2)^2/n}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)}\right]$

~~这玩意能背下来就有鬼子= =~~

单侧置信区间：

将上表中的区间两端值取出，将$\frac{\alpha}{2}$全部更换为α，即可得到置信水平为$1-\alpha$的单侧置信限。

大样本下非正态总体参数的区间估计：

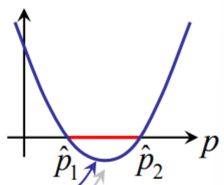
根据中心极限定理，当n充分大时有$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{近似}{\sim} \mathbf{N}(0,1)$

然后把μ和σ^2用参数代回，按标准正态得到置信区间，解不等式得到参数的区间估计。

例 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体 $X\sim b(1,p)$的样本，求未知参数 p 的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

解法二 由中心极限定理，当 n 充分大时有

$$\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$$



故当 n 充分大时，有

$$P\left\{\frac{|\bar{X}-p|^2}{\sqrt{p(1-p)/n}^{\,2}}<u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}\approx 1-\alpha$$

$$P\{(n+u^2_{1-\alpha/2})p^2-(2n\bar{X}+u^2_{1-\alpha/2})p+n\bar{X}^2<0\}\approx 1-\alpha$$

令$(n+u^2_{1-\alpha/2})p^2-(2n\bar{X}+u^2_{1-\alpha/2})p+n\bar{X}^2=0$，解得

$$\hat{p}_1,\hat{p}_2=\frac{n}{n+u^2_{1-\alpha/2}}\left(\bar{X}+\frac{u^2_{1-\alpha/2}}{2n}\mp u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}+\frac{u^2_{1-\alpha/2}}{4n^2}}\right)$$

即有

$$P\{\hat{p}_1<p<\hat{p}_2\}\approx 1-\alpha$$

故 p 的$1-\alpha$的近似置信区间为$(\hat{p}_1,\hat{p}_2)$.

Chapter 8

§8.1 假设检验概述

建立假设：

对问题提出原假设(零假设)，记为H_0，其对立面称为对立假设(备择假设)，记为H_1或H_α。

原假设一般有符号$=$，$\leq$或$\geq$。

假设检验就是要根据样本判断是否拒绝H_0。

- 双侧假设检验：$H_0:\theta=\theta_0$，$H_1:\theta\neq\theta_0$
- 右侧检验：$H_0:\theta\leq\theta_0$，$H_1:\theta>\theta_0$
- 左侧检验：$H_0:\theta\geq\theta_0$，$H_1:\theta<\theta_0$

检验统计量：由样本对原假设进行检验总是通过一个统计量完成，称为检验统计量。

拒绝域：使原假设被拒绝的样本所组成的区域称为拒绝域，即拒绝H_0的样本值的取值区域，其补集称为接受域。

第一类错误：在原假设H_0为真的情况下拒绝H_0，一般设置为更严重的错误。

第二类错误：在原假设H_0为假的情况下接受H_0。

显著性检验：控制犯第一类错误的概率在一个较小的数α以内，倾向于保护H_0

显著性检验倾向于“宁可错杀也不可放过H_0”，一般原假设也是依此选定：

- 判断病人得两种病中的哪种，需要控制把重症误判成轻症的错误率，因此倾向于把轻症H_1判成重症H_0，而非把重症H_0当轻症H_1放过。

- 想检验某结论成立，应提出H_0：结论不成立，然后说明样本取值在拒绝域内，即概率反证法。

  e.g. 是否有显著提高？H_0：没有显著提高，代入数据若能拒绝H_0说明确实有显著提高。

“如果连H_0都保护不住的结论，其真实性势必应当受到怀疑。”

§8.2 正态总体参数的假设检验

双边u检验法：

已知σ_0^2，关于$H_0:\mu=\mu_0$的检验问题

拒绝域：$|\bar{X}-\mu_0|$的值偏大，Ⅰ类风险$P_{H_0}\left\{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}}>u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha$

单边u检验法：

1. 已知σ_0^2，关于$H_0:\mu\le\mu_0$的检验问题

   拒绝域：$\bar{X}-\mu_0$的值偏大，Ⅰ类风险$P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}>u_{1-\alpha}\right\}=\alpha$
2. 已知σ_0^2，关于$H_0:\mu\ge\mu_0$的检验问题

   拒绝域：$\bar{X}-\mu_0$的值偏小，Ⅰ类风险$P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<u_{\alpha}\right\}=\alpha$

双边t检验法：

未知μ,σ^2，关于$H_0:\mu=\mu_0$的检验问题

拒绝域：$|\bar{X}-\mu_0|$的值偏大，Ⅰ类风险$P_{H_0}\left\{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\alpha$

单边t检验法：

1. 未知μ,σ^2，关于$H_0:\mu\le\mu_0$的检验问题

   拒绝域：$\bar{X}-\mu_0$的值偏大，Ⅰ类风险$P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\alpha}(n-1)\right\}=\alpha$
2. 未知μ,σ^2，关于$H_0:\mu\ge\mu_0$的检验问题

   拒绝域：$\bar{X}-\mu_0$的值偏小，Ⅰ类风险$P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha}(n-1)\right\}=\alpha$

双边χ^2检验法：

未知μ,σ^2，关于$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$的检验问题

拒绝域：S^2不在σ_0^2附近波动或幅度太大，Ⅰ类风险$P_{H_0}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ or\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\alpha$

已知μ未知σ^2，关于$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$的检验问题

拒绝域：$P_{H_0}\left\{\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\ or\ \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}=\alpha$

单边χ^2检验法：

1. 未知μ,σ^2，关于$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$的检验问题

   拒绝域：$P_{H_0}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=\alpha$
2. 未知μ,σ^2，关于$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$的检验问题

   拒绝域：$P_{H_0}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha}(n-1)\right\}=\alpha$
3. 已知μ未知σ^2，关于$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$的检验问题

拒绝域：$P_{H_0}\left\{\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=\alpha$

4. 已知μ未知σ^2，关于$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$的检验问题

   拒绝域：$P_{H_0}\left\{\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<\chi^2_{\alpha}(n-1)\right\}=\alpha$

双总体均值差的检验：

已知σ_1^2,σ_2^2，$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\sim\mathbf{N}(0,1)$

1. 关于$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta$的检验问题，拒绝域$|U|\ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
2. 关于$H_0:\mu_1-\mu_2\ge\delta$的检验问题，拒绝域$U\le u_\alpha$
3. 关于$H_0:\mu_1-\mu_2\le\delta$的检验问题，拒绝域$U\ge u_{1-\alpha}$

未知σ_1^2,σ_2^2但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}S_\omega}\sim T(n+m-2)$，其中$S_\omega=\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{(n+m-2)}}$

1. 关于$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta$的检验问题，拒绝域$|T|\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$
2. 关于$H_0:\mu_1-\mu_2\ge\delta$的检验问题，拒绝域$T\le t_\alpha(n+m-2)$
3. 关于$H_0:\mu_1-\mu_2\le\delta$的检验问题，拒绝域$T\ge t_{1-\alpha}(n+m-2)$

双总体方差比的检验：

未知μ_1,μ_2，$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

1. 关于$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$的检验问题，拒绝域$F\ge F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$或$F\le F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$
2. 关于$H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$的检验问题，拒绝域$F\le F_\alpha(n-1,m-1)$
3. 关于$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2$的检验问题，拒绝域$F\ge F_{1-\alpha}(n-1,m-1)$