Introdução à Análise de dados em FAE **(18/9/2021)**

estatistica

Professores: Dilson, Eliza, Sandro, Sheila *Name:* Daniel

TEXTO

EXERCICIO 1

A grandeza $u_i = f(x_i, y_i)$ pode ser expandida em séries de potências:

$$u_i = \bar{u} + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial y}(y_i - \bar{y}) + T.O.S. \tag{0.1}$$

Onde as derivadas são calculadas nos valores médios de x e y e T.O.S. são os termos de ordem superior, que tendem a ser bem pequenos e para a aproximação que estamos considerando, desprezíveis. Mainpulando a equação então temos:

$$(u_i - \bar{u}) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial y}(y_i - \bar{y}) \tag{0.2}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado, temos:

$$(u_i - \bar{u})^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2(x_i - \bar{x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2(y_i - \bar{y})^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{0.3}$$

Esta equação funciona para um valor de u_i, calculando a média para todos os valores de u_i, temos:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \bar{u})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial u}{\partial x})^2(x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial u}{\partial y})^2(y_i - \bar{y})^2 + 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{0.4}$$

Sabendo que a variância é dada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{0.5}$$

E a covariância dada por:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{0.6}$$

A nossa equação fica então:

$$\sigma_u^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2\sigma_x^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2\sigma_y^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{xy} \tag{0.7}$$

Sabendo que o erro da média é dado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \tag{0.8}$$

E dividindo os dois lados da nossa equação por N, chegamos à equação a ser deduzida:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2\sigma_{\bar{x}}^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2\sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{xy} \tag{0.9}$$

EXERCICIO 2

A partir da equação (0.9), podemos deduzir as duas equações do exercício.

i) Precisamos descobrir as derivadas parciais da equação:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \tag{0.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \pm 1 \tag{0.11}$$

E sabendo que a covariância pode também ser escrita como:

$$\sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y = rN\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} \tag{0.12}$$

Onde r é o coeficiente de correlação linear de Pearson, Podemos substituir as derivadas e a nova definição de covariância na equação (0.9) para obter:

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 + 2r\sigma_x\sigma_y} \tag{0.13}$$

A equação do exercício assume valores positivos ou negativos noúltimo termo dentro da raíz quadrada, isso depende do valor assumido pelo coeficiente de Pearson.

ii) No primeiro caso, as derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \tag{0.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \tag{0.15}$$

No segundo caso, as derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \tag{0.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} \tag{0.17}$$

Substituindo essas derivadas avaliadas nos pontos $\bar{x}$ e $\bar{y}$ na equação (0.9), temos para o primeiro caso:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \bar{y}^2\sigma_{\bar{x}}^2 + \bar{x}^2\sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N}\bar{x}\bar{y}\sigma_{xy} \tag{0.18}$$

E para o segundo caso:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \frac{1}{y^2}\sigma_{\bar{x}}^2 + \frac{x^2}{y^4}\sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N}\frac{-x}{y^3}\sigma_{xy} \tag{0.19}$$

Dividindo a equação (0.18) por $\bar{u}^2 = \bar{x}^2\bar{y}^2$ e a equação (0.19) por $\bar{u}^2 = \frac{\bar{x}^2}{\bar{y}^2}$, substituindo a definição da covariância (0.12) temos para ambas que:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}^2}{\bar{u}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\bar{x}} + \frac{\sigma_{\bar{y}}^2}{\bar{y}} \pm \frac{2r}{\bar{x}\bar{y}}\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} \tag{0.20}$$

EXERCICIO 3

3.7.1 - a) O intervalo em questão vai de $\bar{x} - 1\sigma$ até $\bar{x} + 1\sigma$, ou seja, 68,3%.

b) O intervalo em questão vai de $\bar{x} - 2\sigma$ até $\bar{x}$, isto é, metade do intervalo que vai de $\bar{x} - 2\sigma$ até $\bar{x} + 2\sigma$, ou seja, 47,75%.

c) O intervalo em questão vai de $\bar{x} + 1\sigma$ até $\bar{x} + 2\sigma$, isto é, metade do intervalo que vai de $\bar{x} - 2\sigma$ até $\bar{x} + 2\sigma$ menos metade do intervalo que vai de $\bar{x} - 1\sigma$ até $\bar{x} + 1\sigma$, isto é 47,75% - 34,15%, ou seja, 13,6%.

3.7.2 - A melhor estimativa para a gravidade é a média entre as medidas e a melhor incerteza é o erro da média, dados respectivamente pela fórmula abaixo e pela (0.8):

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{0.21}$$

Na equação (0.8), σ_x é o desvio padrão, dado por:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{0.22}$$

Portanto, conclui-se que a estimativa-padrão para a aceleração da gravidade a partir dos dados é $9,73 \pm 0,05$.
3.7.3 - Utilizando as equações do exercício anterior, obtemos a estimativa-padrão para a f.e.m. da pilha : $1,71 \pm 0,03$
3.7.4 - Substituindo os valores do enunciado na equação (0.8), obtemos que o número de medidas necessárias é:

$$N = (\frac{10}{3})^2 \approx 11,11 \tag{0.23}$$

Ou seja, cerca de 11 medidas.
3.7.5 - Calculando-se a discrepância $|e_i - e_{ref}|$ para cada uma das estimativas dos estudantes, podemos descobrir a compatibilidade dos resultados com o valor de referência:
$|e_1 - e_{ref}| \approx 0,118.10^{-19}C < 3\sigma$ — Inconclusivo
$|e_2 - e_{ref}| \approx 0,148.10^{-19}C < 3\sigma$ — Inconclusivo
$|e_3 - e_{ref}| \approx 0,018.10^{-19}C < 1\sigma$ — Compatível
3.7.6 - Para saber se trata da mesma partícula, precisamos calcular a discrepância entre as duas estimativas $|\overline{m}_1 - \overline{m}_2|$ e os erros são combinados $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ para verificar a compatiblidade entre elas. O erro combinado é $0,4.10^{-27}kg$ e a discrepância fica:
$|\overline{m}_1 - \overline{m}_2| = 0,8.10^{-27}kg = 2\sigma$ —Inconclusivo
3.7.7 - a) Através das equações (0.8) e (0.21), obtemos a estimativa padrão:
$\rho = 1,90 \pm 0,03$
b) A discrepância entre esta estimativa e o valor de referência fica:
$|\rho_1 - \rho_{ref}| \approx 0,04g/cm^3 < 2\sigma$ — Compatível
3.7.8 - Mais uma vez combinando os erros $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \approx 9,5$ e calculando a discrepância temos:
$|E_1 - E_2| = 15MeV < 2\sigma$ — Compatível
Portanto a discrepância não é significativa.
3.7.9 - Para combinar os resultados obtidos pelos dois experimentos, utilizamos as fórmulas dadas no slide da lista:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_1^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_1^2}} \tag{0.24}$$

e

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_1^2}}} \tag{0.25}$$

Assim, a estimativa-padrão para a massa do quark top é $177,9 \pm 4,0$
3.7.10 - Calculando a discrepância entre o valor obtido pelo estudante e o valor de referência temos:
$|\bar{g} - g_{ref}| \approx 0,29 < 3\sigma$ — Inconclusivo
3.7.11 - Calculando o erro da média (0.8) para as duas baterias de medidas, obtemos as duas estimativas para a f.e.m. da pilha:
$1,022 \pm 0,0016$ e $1,018 \pm 0,0013$
Utilizando as equações (0.24) e (0.25), combinamos os resultados e obtemos a estimativa-padrão:
$1,0196 \pm 0,0010$

EXERCICIO 4

As partículas escolhidas e as estimativas-padrão para suas massas foram:
Múon — $105,6583745 \pm 0,0000024MeV$
Píon $\pm$ — $139,57018 \pm 0,00035MeV$
Píon neutro — $134,9766 \pm 0,0006MeV$
Káon $\pm$ — $493,677 \pm 0,016MeV$
Káon neutro — $497,611 \pm 0,013MeV$
Combinando todas essas massas, conforme as equações (0.24) e (0.25), obtemos:

$m = 105,6604601 \pm 0,0000024 MeV$

A combinação das massas das partículas ficou bem próxima da massa do múon, o que era de se esperar, uma vez que a incerteza na estimativa dele é bem menor do que a incerteza nas outras partículas.

EXERCICIO 7

O total de calouros da Universidade é 5419, a probabilidade de sortear um estudante conforme o enunciado é $\frac{1291}{5419} \approx 24\%$

EXERCICIO 12

A eficiência de um sistema com n detectores é de $0,6^n$, portanto, a eficiência para 4 detectores é de aproximadamente 13% e para 5 detectores é de aproximadamente $7,7\%$