Teorema: El método de Taylor de orden n tiene un error de truncamiento de orden n, i.e; $\tau_{i+1}(h) = Ch^n = O(h^n)$ con la suposición de que la solución y es derivable (continuamente) $n+1$-veces.

→ Existencia y unicidad para EDOs.

1) Def. Una función $\overset{f(t,y)}{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface la condición de Lipschitz en la variable "y" en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_2 - y_1|$$

donde $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. La constante L se llama constante de Lipschitz

2) Ejemplo: Mostrar que $f(t,y) = t|y|$ satisface la condición de Lipschitz para

$$D = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2, \ 1 \leq t \leq 2 \ e \ -3 \leq y \leq 4 \}$$

Sol. Sea $(t,y_1), (t,y_2) \in D \Rightarrow$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \big| |t||y_1| - |t||y_2| \big|$$

$$= |t| \, \big| |y_1| - |y_2| \big|$$

$$\leq 2 \, \big| |y_1| - |y_2| \big| \leq 2 \, |y_1 - y_2|$$

$$\Big[\big| |a| - |b| \big| \leq |a-b| \leq |a| + |b| \Big]$$

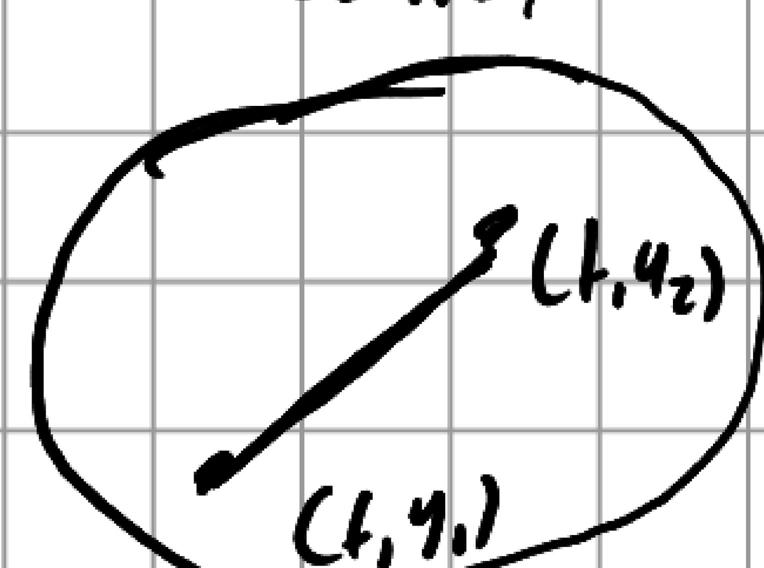
3) Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ se le llama convexo si para dos puntos $(t,y_1), (t,y_2) \in D$, entonces

$$((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2 \, , \, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \in D$$

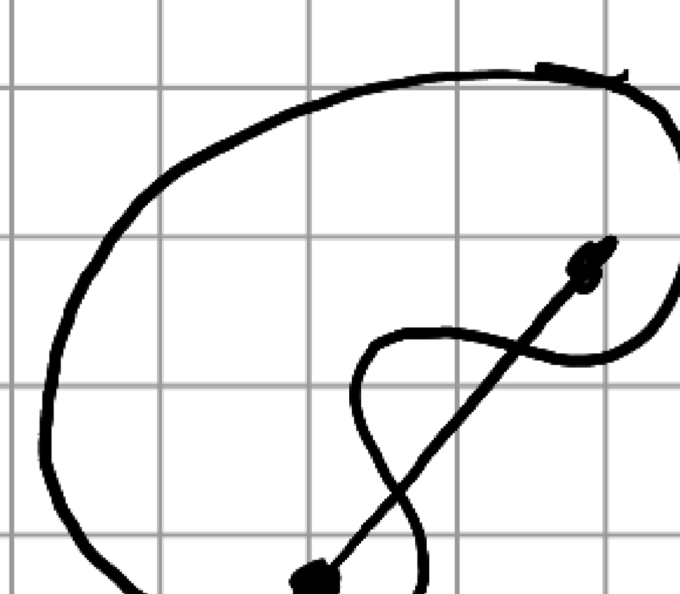
$$\forall \ \lambda \in [0,1].$$

Visualmente

C. Convexo



no convexo.



(*)
$\Rightarrow$ Teorema: Sea $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, D es convexo

Si existe una cte. $L > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right| \leq L \quad \forall \ (t,y) \in D$$

$\Rightarrow$ f satisface la condición de Lipschitz en D en la variable "y" y con cte Lipschitz L.

Prueba:

Teorema del valor medio.

Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y diferenciable

$\exists \ c \in (a,b)$ tal que.

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c).$$

$(t, y_a), (t, y_b) \in D$.

$y_b > y_a$

$\exists \ \underbrace{y_c \in (y_a, y_b)}$ tal que $\quad \dfrac{f(t,y_b) - f(t,y_a)}{y_b - y_a} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y_c)$

Pero D es convexo $\quad (t, y_c) \in D$.

$$\Rightarrow \frac{|f(t,y_b) - f(t,y_a)|}{|y_b - y_a|} = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_c) \right|$$

$$\Rightarrow \quad |f(t, y_b) - f(t, y_a)| \leq |y_b - y_a| \overbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_c) \right|}^{\leq L}$$
$$\leq L\, |y_b - y_a|$$

$\square$

4) Teorema de Existencia y unicidad:

sea $D = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq b \text{ e } -\infty < y < \infty \}$

y sea $f(t,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que satisface la condición de Lipschitz en D en la variable "y", $\Rightarrow$ el problema con valor inicial:

$$y'(t) = f(t, y) \qquad t \in (a,b)$$
$$y(a) = y_0$$

tiene solución única para $t \in [a,b]$.

5) Ej. Demostrar que existe una solución única para el sig. problema

$$y' = 1 + t \sin(ty) \qquad t \in (0,2)$$
$$y(0) = 0.$$

Sol. $y_1 < y_2$, x teorema del valor medio $\quad \xi \in (y_1, y_2)$

$$\frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\Big|_{y=\xi} = t^2 \cos(ty)\Big|_{y=\xi}$$

$$\Rightarrow \quad |f(t,y_2)-f(t,y_1)| \leq |y_2-y_1|\,|t^2\cos(t\xi)|$$

$$\leq |y_2-y_1|\,|t^2|\,|\cos(t\xi)| \quad , t\in(0,2)$$

$$\leq |2^2|\,|y_2-y_1|\,|\cos(t\xi)|$$

$$\leq 4\,|y_2-y_1|$$

$\Rightarrow$ La solución y existe y es única.