→ Estabilidad Lineal para Métodos Multipaso

1) Recordemos la forma grd. de un método multipaso de m-niveles (escalar)

(*)
$$\hat{y}_{i+1} = a_{m-1}\hat{y}_i + a_{m-2}\hat{y}_{i-2} + \dots + a_0\hat{y}_{i+1-m}$$
$$+ h\left[b_m f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, \hat{y}_i) + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, \hat{y}_{i+1-m}) \right]$$

Si $b_m \neq 0$ entonces el método es implícito.

Si aplicamos (*) para resolver $\begin{cases} y' = \lambda y, & t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 & \end{cases}$ $\quad Re(\lambda) < 0$

$\longrightarrow \; y(t) = e^{\lambda t}$, $y \to 0$ cuando $t \to \infty$

$\Rightarrow$

(*)
$$(1 - \lambda h b_m)\hat{y}_{i+1} = (a_{m-1} + \lambda h b_{m-1})\hat{y}_i + (a_{m-2} + \lambda h b_{m-2})\hat{y}_{i-1} + \dots + (a_0 + \lambda h b_0)\hat{y}_{i+1-m}$$

$\Rightarrow$

(*a)
$$(1 - \lambda h b_m)\hat{y}_{i+1} - (a_{m-1} + \lambda h b_{m-1})\hat{y}_i - (a_{m-2} + \lambda h b_{m-2})\hat{y}_{i-1} - \dots - (a_0 + \lambda h b_0)\hat{y}_{i+1-m} = 0.$$

esta una relación recurrencia y su solución está relacionada con el polinomio característico:

$R(\xi, \lambda h) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ (polinomio en la variable ξ)

$$R(\xi, \lambda h) = \underbrace{(1 - \lambda h b_m)}\,\xi^m - \underbrace{(a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})}\,\xi^{m-1} - \cdots - \underbrace{(a_0 + \lambda h b_0)}\,\xi^0 \quad , \quad \underbrace{\hat{y}_{i+1-j} = \xi^{m-j}}$$

2.i) Teorema.

Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ raíces distintas de la ecuación $\rightarrow$ $R(\xi, h\lambda) = 0$.

$\Rightarrow$ la solución de $(**)$ es $\boxed{\hat{y}_i = \sum_{k=1}^{m} c_k (\xi_k)^i}$

donde los coeficientes c_k se obtienen de la condiciones iniciales de $(**)$, esto es, de los valores dado $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{m-1}$

2.ii) Corolario:

$$\hat{y}_i \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad i \rightarrow \infty$$

si y solo sí $|\xi_k| < 1$, $k = 1, \ldots, \xi_m$

3) Def: El dominio de estabilidad del M. Multipaso

(*)

$$D = \{ z \in \mathbb{C} : \text{ los raíces } \xi_1, \dots, \xi_m$$

$$\to \text{ de } R(\xi, z) = 0 \quad (z = \lambda h)$$

son distintas y $|\xi_k| < 1, k = 1, \dots, m \}$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, "R(\xi{,}z)"] \arrow[rr, bend left] & \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \arrow[r, "R(\xi{,}z)=0"] & {[\xi_1, \dots, \xi_m]} \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

4) En la práctica para calcular D observar que.

(**) $\underline{R(\xi, z) = 0}$ implica que:

$$(1 - zb_m)\xi^m - (a_{m-1} + zb_{m-1})\xi^{m-1} - (a_{m-2} + zb_{m-2})\xi^{m-2}$$

$$- \dots - (a_0 + zb_0) = 0.$$

$$\Rightarrow \overbrace{\xi^m - a_{m-1}\xi^{m-1} - a_{m-2}\xi^{m-2} - \dots - a_0}^{\rho(\xi)}$$

$$z[\underbrace{-b_m\xi^m - b_{m-1}\xi^{m-1} - \dots - b_0}_{\sigma(\xi)}] = 0$$

$(*\square) \Rightarrow \rho(\xi) + z\sigma(\xi) = 0$

$\rho(\xi), \sigma(\xi) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$

$$(\alpha\alpha\alpha) \qquad \rho(\xi) + z\,\sigma(\xi) = 0.$$

Para $\underline{|\xi| < 1} \rightarrow z = -\dfrac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}.$

Para graficar D el proceso es el siguiente

i) Graficamos la frontera de D:

$$BD = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1 \}$$

$$D_{BD} = \{ z \in \mathbb{C} : z = -\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}, \ \xi \in BD \}.$$

ii) Graficamos algunos puntos dentro de D.

$$BD_{r_0} = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi| < r_0 \} \quad \text{donde } r_0 < 1$$

$$D_{r_0} = \{ z \in \mathbb{C} : z = -\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}, \ \xi \in BD_{r_0} \}.$$

5) Ejemplos

5.i) método de Adams-Bashfort (explícito)

$\rightsquigarrow m=2$. Dados $\hat{y}_0, \hat{y}_1$ $[\tau_{i+1}(h) \sim h^2]$

(*) $$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2}\left[3f(t_i, \hat{y}_i) - f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1})\right].$$

Aplicamos (*) a la ecuación $\begin{cases} y' = \lambda y, & t>0, \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 & \operatorname{Re}(\lambda) < 0. \end{cases}$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2}\left[3\lambda \hat{y}_i - \lambda \hat{y}_{i-1}\right].$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{i+1} - \left(1 - \frac{3}{2}\lambda h\right)\hat{y}_i + \frac{\lambda h}{2}\hat{y}_{i-1} = 0.$$

$z = \lambda h$, $\hat{y}_{i+1-j} = \xi^{m-j} = \xi^{2-j}$

$$\Rightarrow R(\xi, z) = \xi^2 - \left(1 - \frac{3}{2}z\right)\xi + \frac{z}{2} = 0.$$

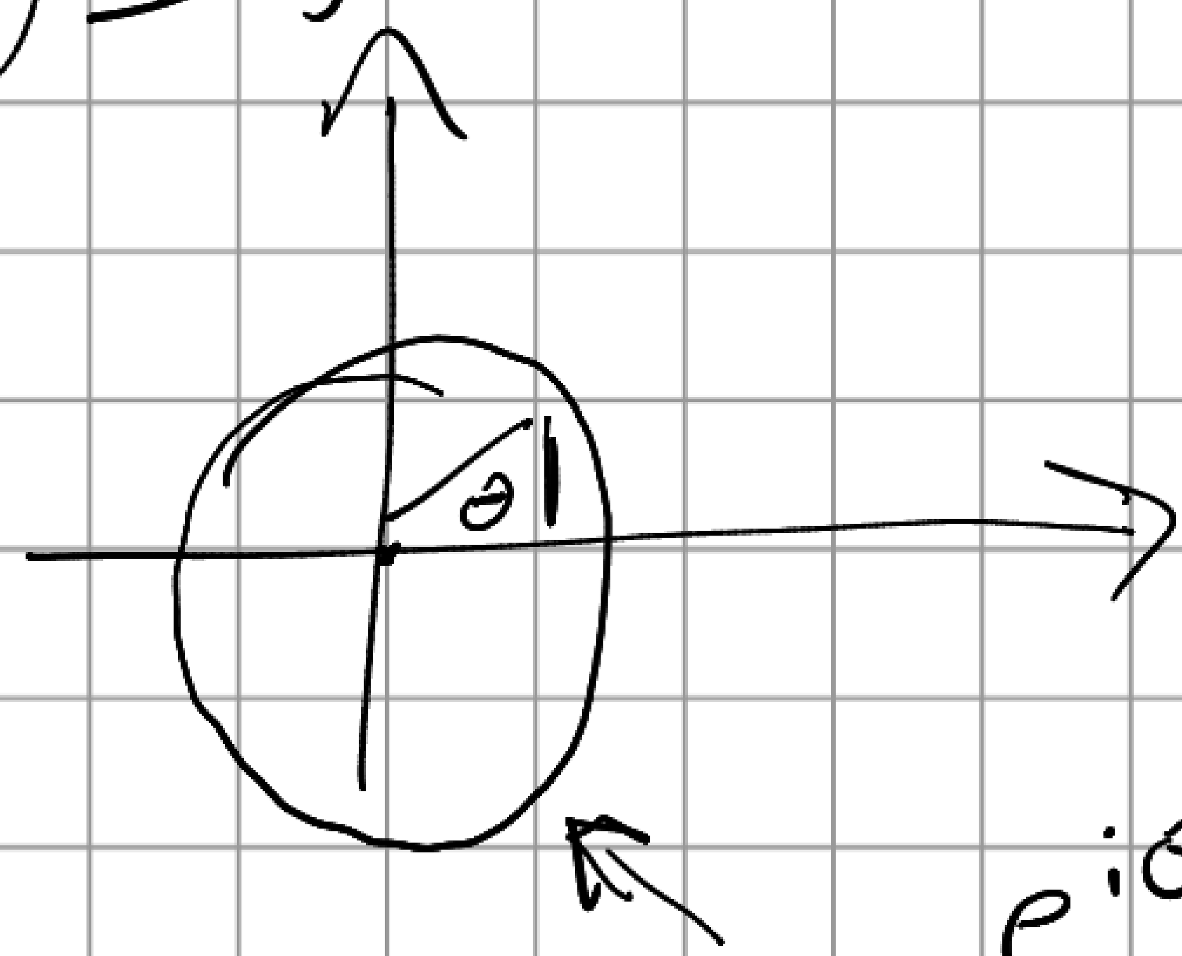
$$\Rightarrow \underbrace{(\xi^2 - \xi)}_{\rho(\xi)} - z\underbrace{\left(\frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}\right)}_{\sigma(\xi)} = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{(\xi^2 - \xi)}{\frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}}$$

$BD = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\}$

$\rightsquigarrow \text{Dom}_{BD} = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{\xi^2 - \xi}{\frac{3\xi}{2} - \frac{1}{2}}, \xi \in BD\}$.

(Y) Img



Re (X)

$|\xi| = 1$

$\downarrow$

$\xi = x + iy$.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

5.ii) Ejemplo: Adams-Bashfort (exp) m=4 niveles

Dados $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$

(*) $$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{24}\left[55 f(t_i, \hat{y}_i) - 59 f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) + 37 f(t_{i-2}, \hat{y}_{i-2}) - 9 f(t_{i-3}, \hat{y}_{i-3})\right]$$

$\tau_{i+1}(h) \sim h^4$

Aplicamos (*) a la ecuación $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) < 0$

$$\Rightarrow \hat{y}_{i+1} - \left(1 + \lambda h \frac{55}{24}\right)\hat{y}_i + \frac{59}{24} h \lambda \hat{y}_{i-1} - \frac{37}{24} \lambda\lambda \hat{y}_{i-2} + \frac{9\lambda h}{24} = 0.$$

$R(\xi, z) = 0$, $z = \lambda h$, $\hat{y}_{i+1-j} = \xi^{m-j} = \xi^{4-j}$

$$\Rightarrow (\xi^4 - \xi^3) + z\left(-\frac{55}{24}\xi^3 + \frac{59}{24} - \frac{37}{24}\xi + \frac{9}{24}\right) = 0$$

$$\Rightarrow z = \overbrace{(\xi^4 - \xi^3)}^{\rho(\xi)} \left[\frac{55}{24}\xi^3 - \frac{59}{24}\xi^2 + \frac{37}{24}\xi - \frac{9}{24}\right]^{-1} \leftarrow \sigma(\xi)^{-1}$$