→ Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Computación científica

Uso de computadoras:

i) Resolver problemas de ciencia aplicada y la ingeniería

ii) obtener soluciones de modelos matemáticos que un fenómeno físico.

Para que se usa el cálculo científico:

1) Diseño
2) Problemas de ecología / biología, dinámica población determinísticas y estocásticas

Física de videojuegos.

Cálculo científico: conjunto de herramientas técnicas y teóricas que se requieren para resolver modelos matemáticos de la ciencia aplicada generalmente utilizando equipo de cómputo

Ejemplo

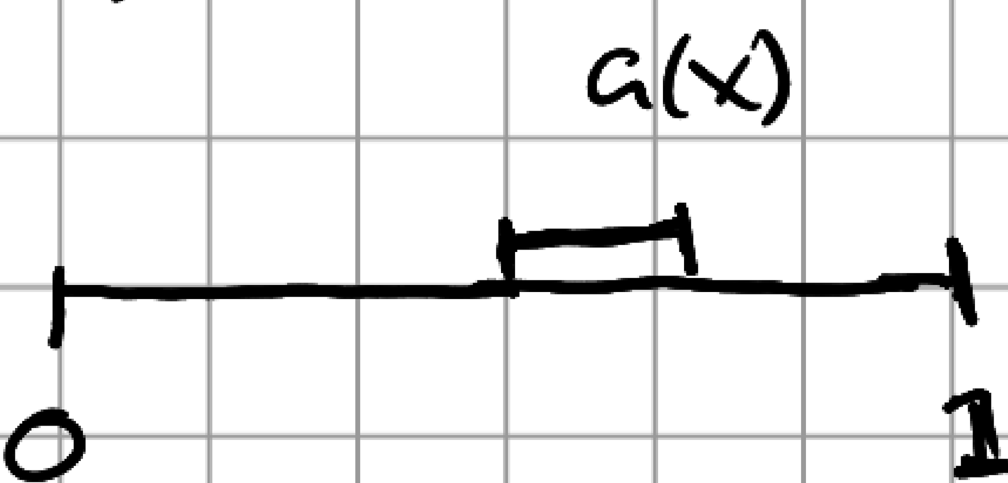
Ecuación de Calor:

$$\underline{\underline{(*)}} \qquad -\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{du}{dx}\right] + b(x)u = f(x) \quad x\in(0,1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} u(0)=\alpha \\ u(1)=\beta \end{cases} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad a(x)>0,\ b(x)\geq 0$$

u: función de temperatura, °K

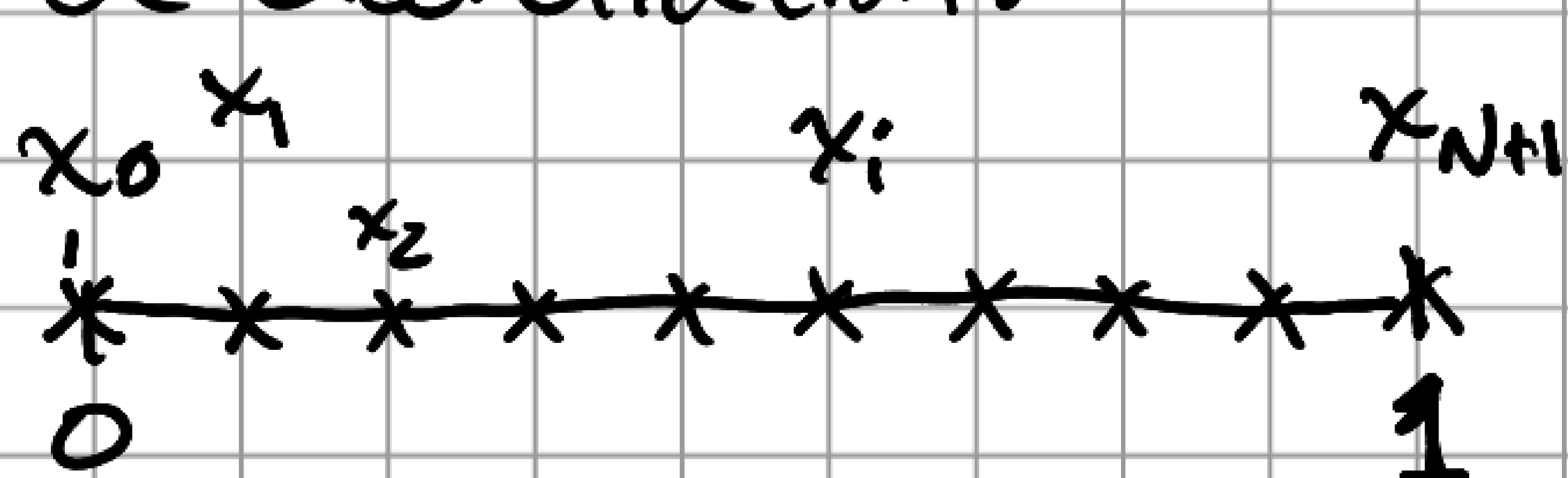
$u: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$



<u>**BVP.**</u>

$a(x)$: coeficiente de conductividad térmica

2) Error de discretización: $(0,1)=\Omega$

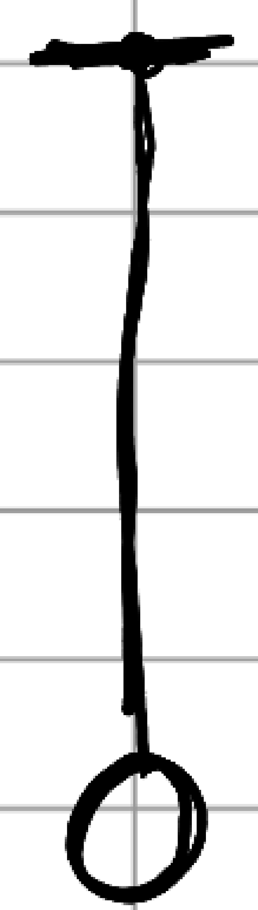


$\begin{cases} u(x) \text{ solución analítica} \\ \hat{u}(x_i) \text{ solución discreta} \end{cases}$

$|u(x_i) - \hat{u}(x_i)|$ error absoluto

$$\frac{|u(x_i) - \hat{u}(x_i)|}{|u(x_i)|} \qquad \text{relativo}$$

→ La ecuación del Péndulo Simple



no es elástica

i) la cuerda no tiene masa

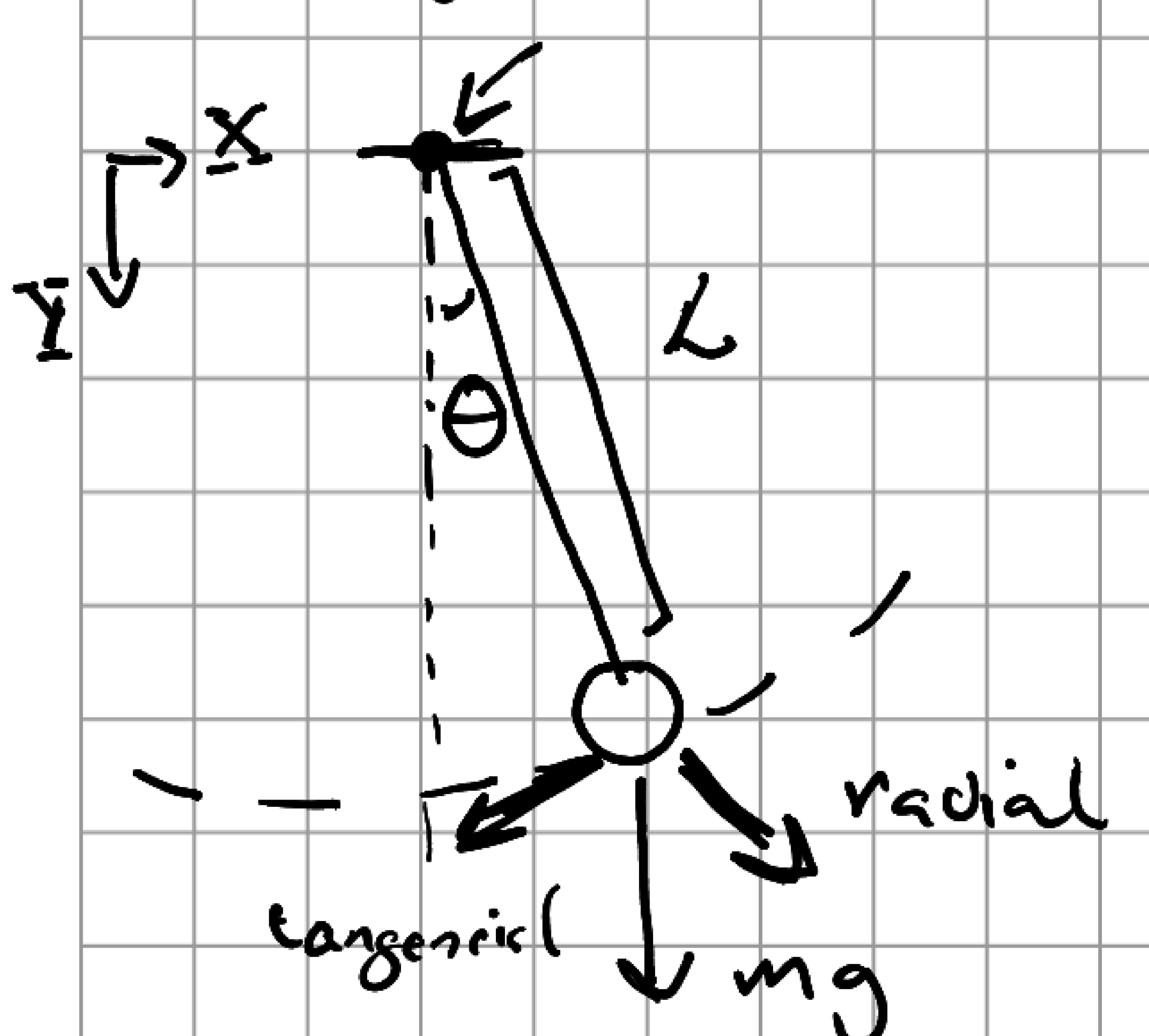
ii) no hay resistencia del aire

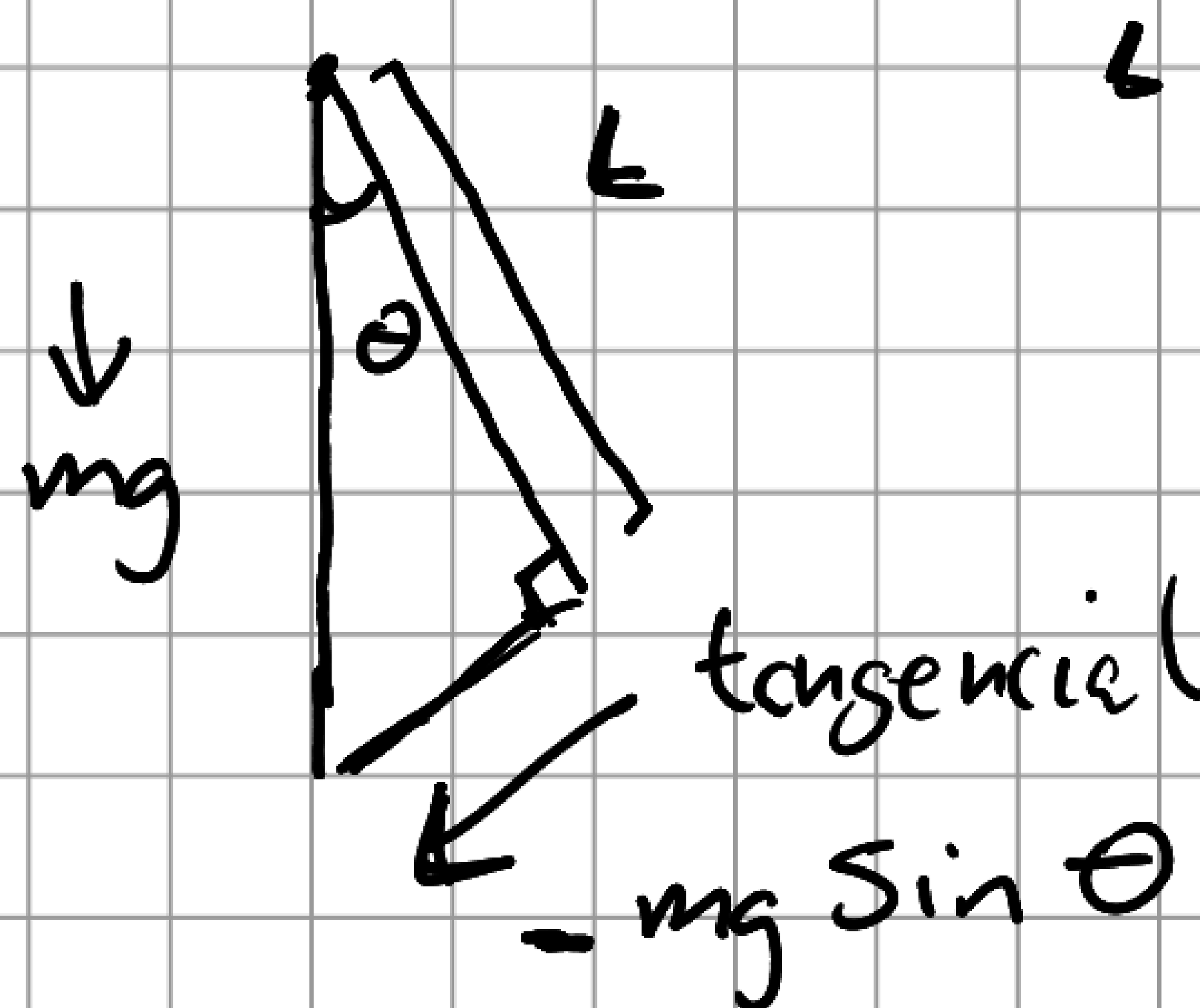
iii) Movimiento es de una partícula - masa Kg

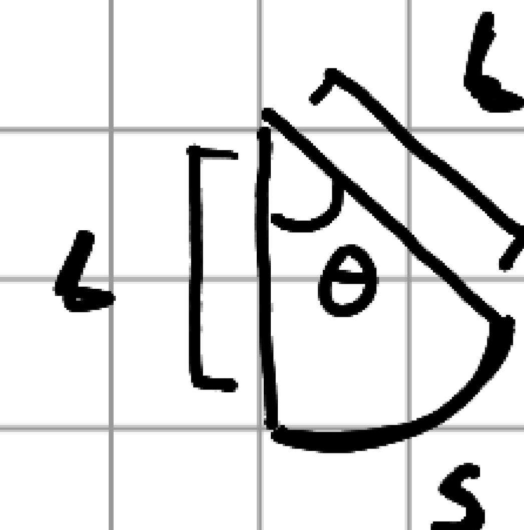
2° Ley de Newton

$$F = ma$$

$$v = \frac{d}{dt} \qquad a = \frac{d^2}{dt^2}$$







$$s = L\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

θ:

t: tiempo

$$-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

i) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ No-Lineal $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$-15^\circ \le \theta \le 15^\circ$

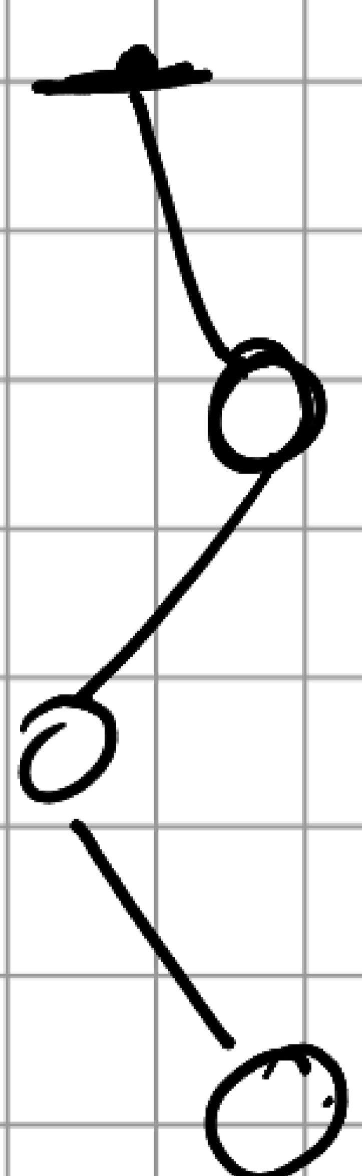
Posición inicial

$\theta(0) = \theta_0$

$\sin\theta \approx \theta$

$\frac{d\theta}{dt}(0) = v_\theta$

ii) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$ Lineal



Triple péndulo

Método de Euler

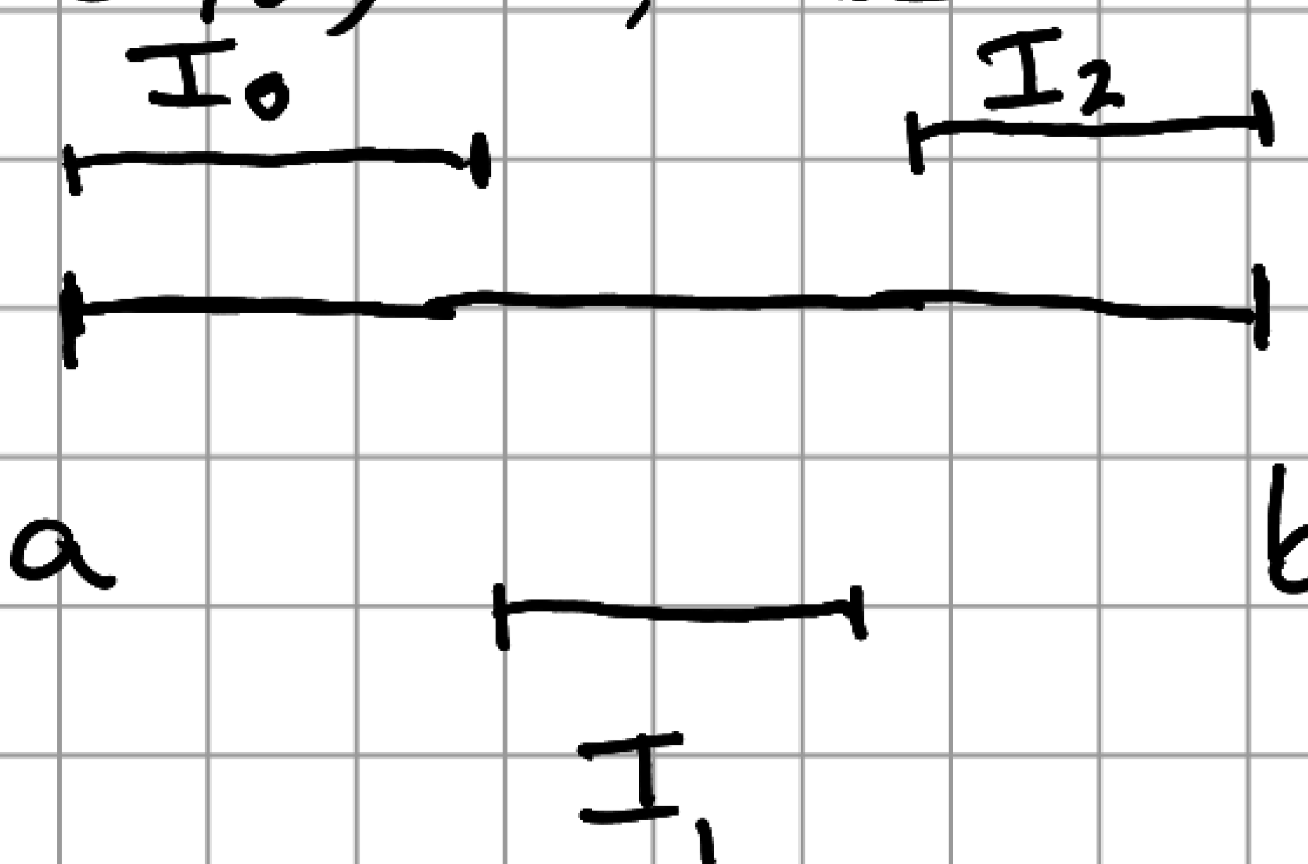
Burden - Faires 5.2.

1) $$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad , \quad t \in (a,b)$$
$$y(a) = \alpha = y_0 \in \mathbb{R}$$

$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f es derivable en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2) $\Omega := (a,b)$, $\overline{\Omega} := [a,b]$

$N = 3$



i) $t_i = a + ih$

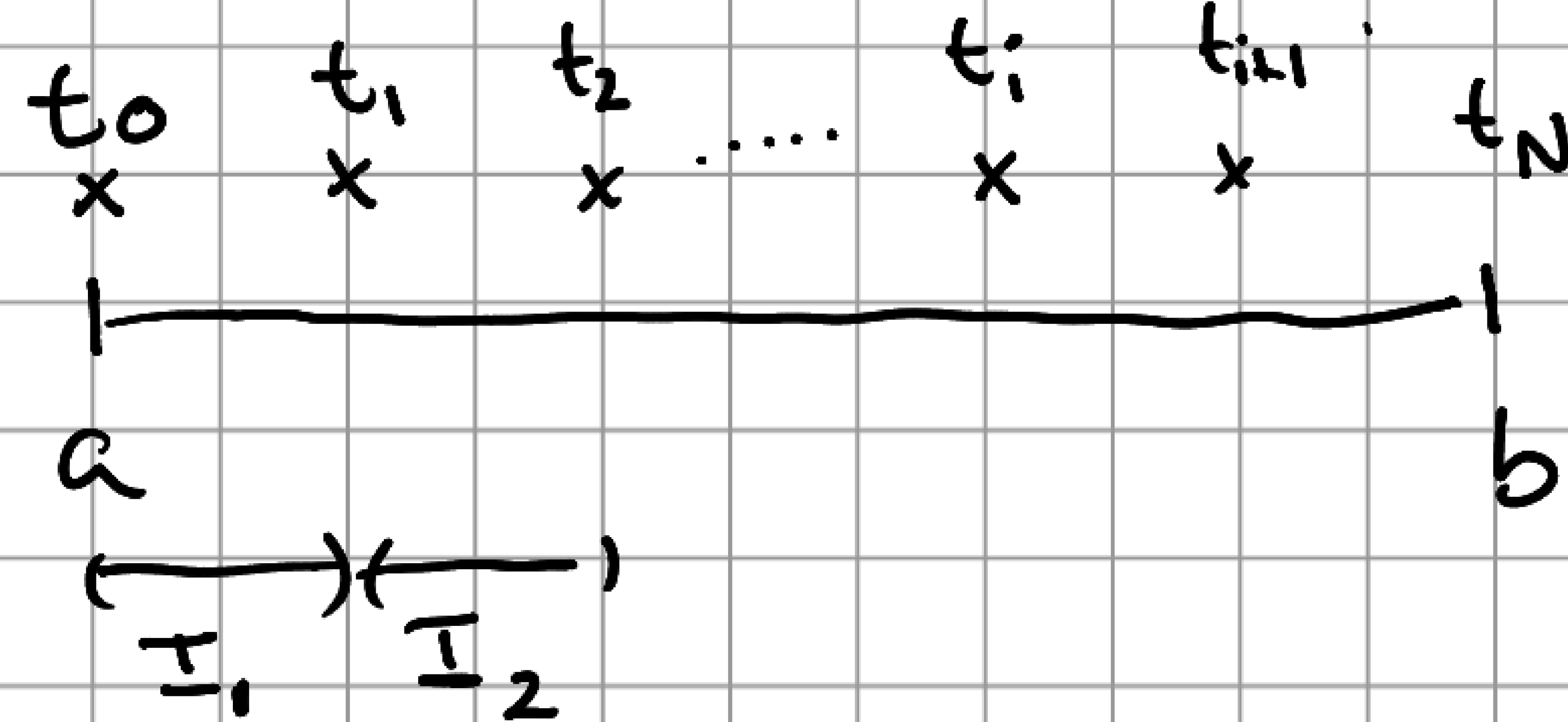
ii) $h = \dfrac{b-a}{N}$

$|I_i| =: h$ es la longitud de cada subintervalo

N: es el # de subintervalos que dividen $\Omega = [a,b]$

$\Rightarrow I_i = (t_{i-1}, t_i)$

$t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $N+1$ puntos de discretización



→ división uniforme
→ malla uniforme

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

3) $\boxed{y(t_i)}$ ← valor de la solución analítica en el punto t_i

4) Teorema de Taylor con residuo diferencial

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable $(k+1)$-veces en $[\bar{a}, \bar{b}]$, entonces $x \in [\bar{a}, \bar{b}]$

$$g(x) = g(\bar{a}) + g'(\bar{a})(x-\bar{a}) + \frac{g''(\bar{a})}{2!}(x-\bar{a})^2 + \dots + \frac{g^{(k)}(\bar{a})}{k!}(x-\bar{a})^k + \frac{g^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-\bar{a})^{k+1}, \quad \xi \in [\bar{a}, \bar{b}]$$

$\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$

5) $y(t_{i+1})$ alrededor de $y(t_i)$

(*) $$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\, y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2!} y''(\xi_i)$$

exacta

$$\hat{y}(t_{i+1}) \approx y(t_{i+1}), \quad \hat{y}_i = \hat{y}(t_i)$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f(t_i, \hat{y}_i)$$ método de Euler.

Algoritmo Método Euler Explícito #.

Aproximamos la solución de

$$\rightarrow \begin{cases} y' = f(t,y), & t \in (a,b) \\ & y(a) = y_0 \end{cases}$$

Algoritmo:

Input: a, b, N, y_0

Output: $\hat{y}_i, \quad i = 0, \dots, N$

$\rightarrow$ Init: $h = \dfrac{b-a}{N}$

$t = a$

$\hat{y}_0 = y_0$

Step 1: For $i = 1, \dots, N$

$$\hat{y}_i = \hat{y}_{i-1} + h f(t, \hat{y}_{i-1})$$

$\rightarrow t = a + ih$

Done, stop.

Ejemplo:

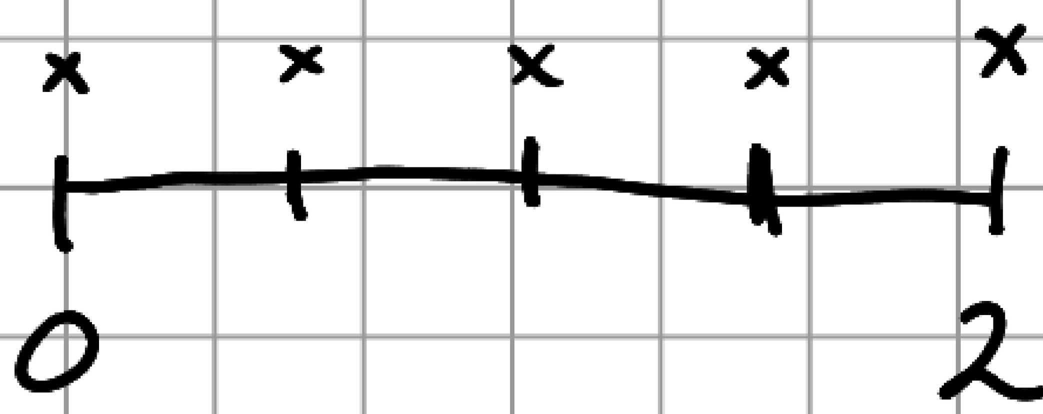
$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1 \quad , \quad t \in (0,2) \quad , \quad y(0) = 0.5$$

$$h = 0.5$$

$N = ?$

$$h = \frac{b-a}{N} \to 0.5 = \frac{2-0}{N} \to N = \frac{2}{0.5} = \frac{2}{\frac{5}{10}} = \frac{20}{5} = 4 \ \#$$

$N = 4$, $N+1 = 5$



Init: $\hat{y}_0 = y_0 = 0.5$

$h = 0.5$

$t = a = 0$

For $i = 1, \dots N = 4$

$i=1$

$$\hat{y}_1 = \hat{y}_0 + h f(t, \hat{y}_0)$$
$$= 0.5 + 0.5[0.5 - 0^2 + 1]$$
$$= 0.5 + 0.5(1.5) = \underline{1.25}$$
$$t = a + ih = 0 + 1 \cdot 0.5$$
$$= 0.5$$

$i=2$

$$\hat{y}_2 = \hat{y}_1 + h f(t, \hat{y}_1)$$
$$= 1.25 + 0.5[1.25 - 0.5^2 + 1]$$
$$= \underline{2.25}$$
$$t = 0 + 2 \cdot 0.5 = 1$$

$i=3$

$$\hat{y}_3 = 2.25 + 0.5[2.25 - 1^2 + 1]$$
$$= \underline{3.375}$$
$$t = 1.5$$

$i=4$

$$\hat{y}_4 = 3.375 + 0.5[3.375 - (1.5)^2 + 1]$$
$$= 4.4375 \ \#$$

4 decimales #

Tabla

t	$\hat{y}_i$	$y(t_i)$	$\lvert \hat{y}_i - y(t_i) \rvert$	$\frac{\lvert \hat{y}_i - y(t_i) \rvert}{\lvert y(t_i) \rvert}$
0	0.5	0	0	0
0.5	1.25	1.456	0.1756	0.1232
1	2.25	2.6409	0.3909	0.1480
1.5	3.375	4.0092	0.6342	0.1582
2	4.4375	5.3055	0.8680	0.1636

Sol. exacta.

$$y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$$