

→ Métodos de resolución para sistemas no-lineales

1) Método del Trapecio

$$y' = f(t, y) \quad t \in (a, b)$$

$$y(a) = y_0$$

$$\hat{y}_0 = y_0$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2} \left[f(t_i, \hat{y}_i) + f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \right]$$

$$\hat{y}_{i+1} = G_i(h, f, \hat{y}_i, \hat{y}_{i+1})$$

$$\uparrow$$
$$p = G(p) \leftarrow$$

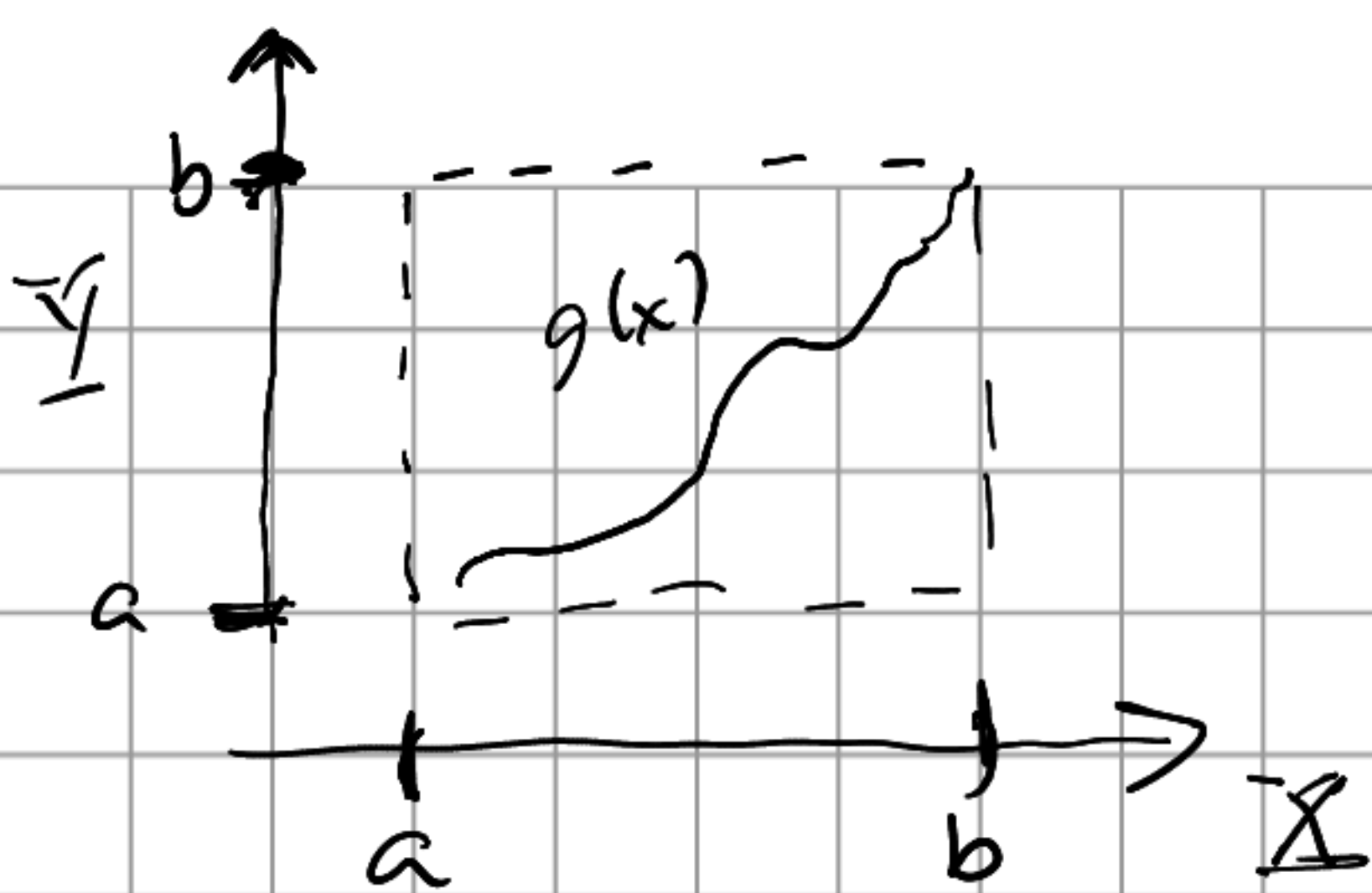
2) Def: Un número $p \in \mathbb{R}$ es un punto fijo para una función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si $g(p) = p$.

3) Teorema: i) Si $g \in C[a, b]$ y $g(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow g$ tiene al menos un punto fijo

ii) Si adicionalmente $g'(x)$ en (a, b) y existe $0 < K < 1$ tal que

$$|g'(x)| \leq K \quad \forall x \in (a, b)$$

entonces el punto fijo p es único.



Prueba:

i) Si $g(a) = a$ ó $g(b) = b \Rightarrow g$ tiene un punto fijo p en los extremos de $[a, b]$

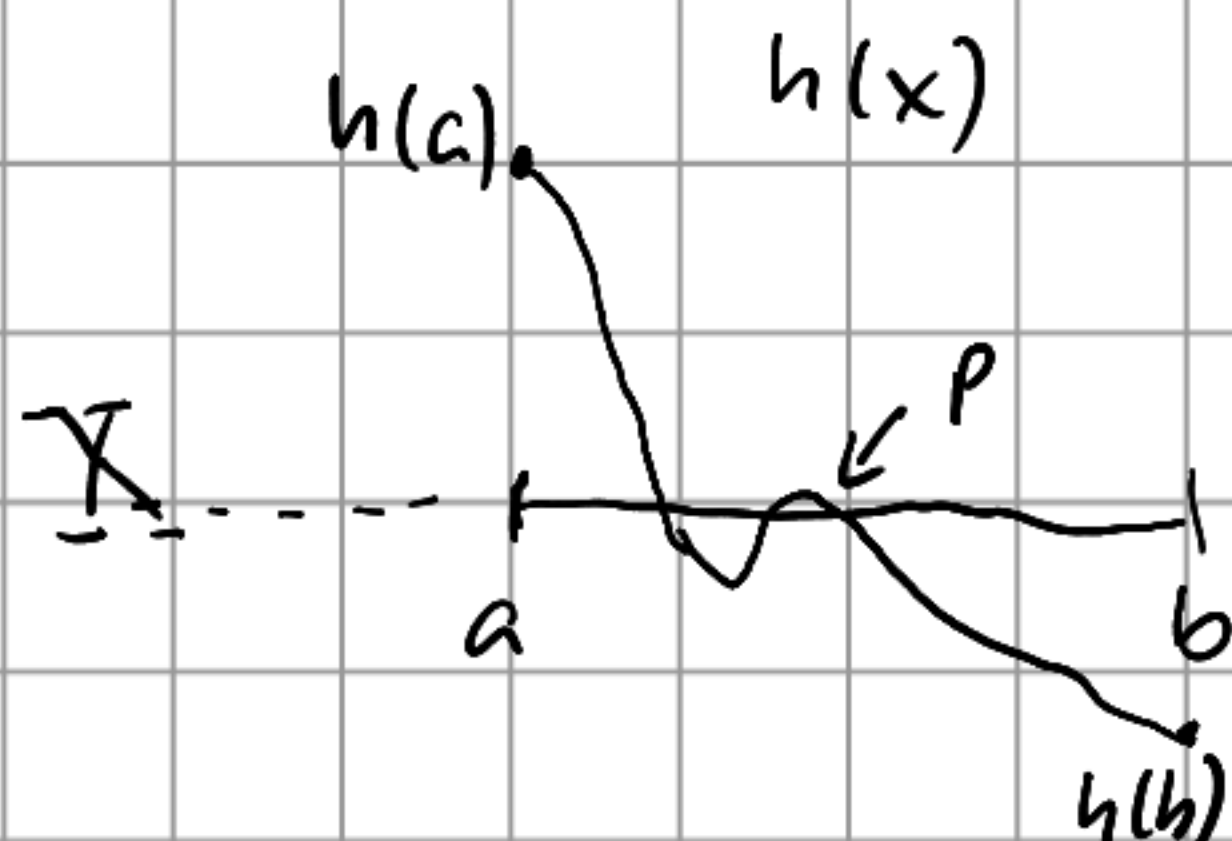
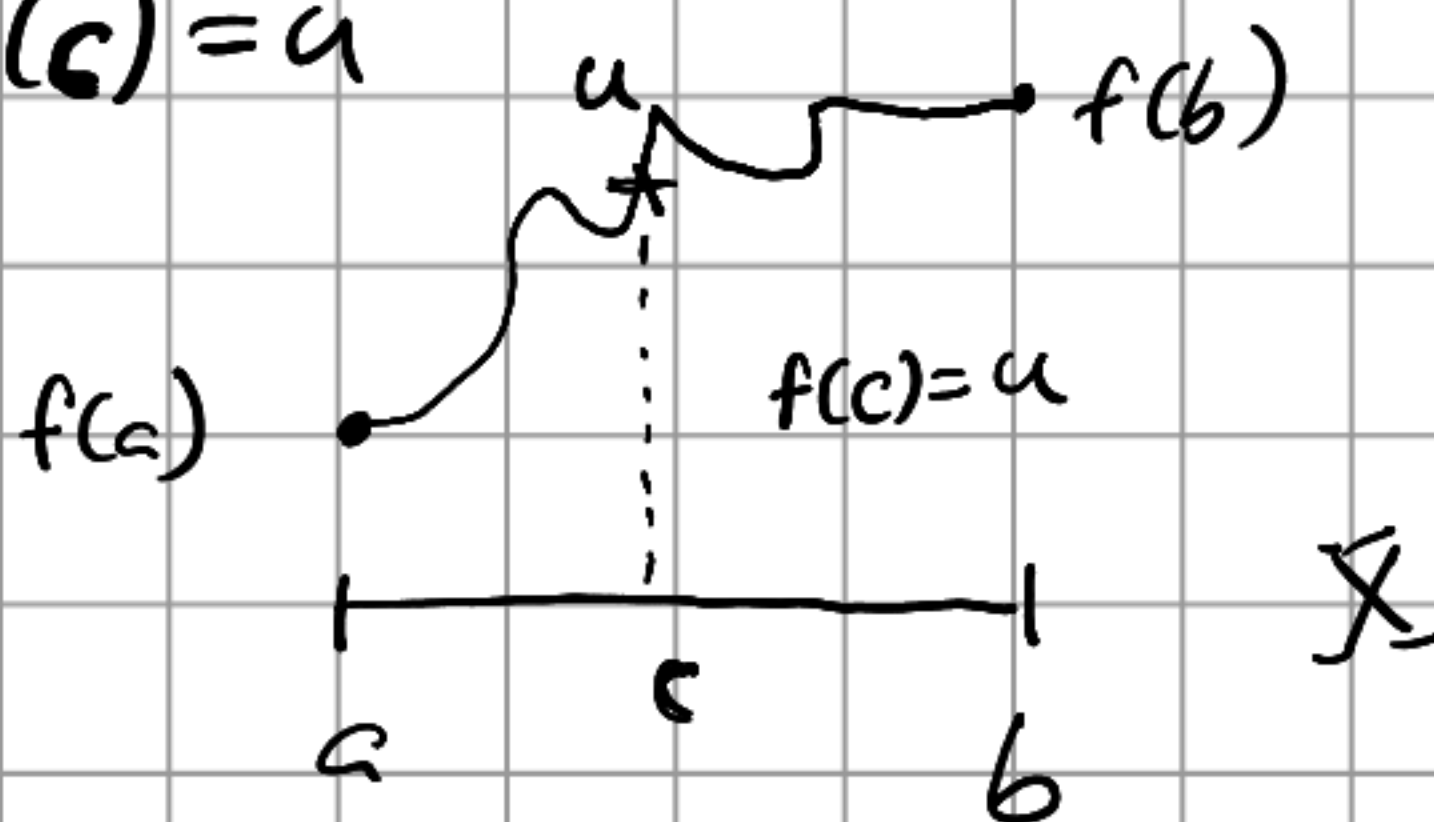
Si no $g(a) > a$ y $g(b) < b$ porque $g(x) \in [a, b]$

Sea $h(x) = g(x) - x$, y como $g(x)$ es continua $\Rightarrow h(x)$ es continua

* $h(a) = g(a) - a > 0$ y $h(b) = g(b) - b < 0$

Recordando el teorema del valor intermedio que nos dice que una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ tal que

$$f(a) < f(b) \Rightarrow \forall u \in (f(a), f(b)) \exists c \in (a, b) \text{ tal que } f(c) = u$$



$\exists p \in (a, b)$ tal que

$$h(p) = 0 \Rightarrow h(p) = g(p) - p \\ \Rightarrow 0 = g(p) - p \Rightarrow p = g(p)$$

$$ii) \quad \exists K < 1 \text{ tal que } |g'(x)| < K \quad \forall x \in (a, b)$$

Supongamos que p, q son puntos fijos de $g(x)$

y $\underline{p \neq q}$ por el teorema del valor medio $\exists \xi \in [p, q]$

$$p, q \in [a, b] \text{ tal que } \frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi) \quad (\underline{\neq})$$

$$\Rightarrow |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)| |p - q|$$

$$< K |p - q|$$

$$|g(p) - g(q)| < |p - q|$$

$$|p - q| < |p - q|$$

contradicción.

$$\Rightarrow p = q \quad \square$$

4) Algoritmo del punto fijo: Para solucionar $\underline{p = g(p)}$ dada una aproximación p_0

Input: p_0 , tolerancia $\epsilon > 0$, # máximo de iteraciones N_0

Output: aproximación de p ó un mensaje de fallo

Algoritmo:

Paso de Init. $i = 1$ (# de iteraciones)

Paso 1

while $i \leq N_0$ { $p = g(p_0)$ * ←

if $|p - p_0| < \epsilon$ {

then output(p)

exit from program {

$i = i + 1$

$p_0 = p$

}

output("el método ha fallado para No iteraciones")

5) Teorema de convergencia del Algoritmo del punto fijo □

i) Sea $g \in C[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b] \forall x \in [a,b]$

ii) g' existe en (a,b) y $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$

$$|g'(x)| \leq k \quad \forall x \in (a,b) \quad (*)$$

\Rightarrow Para todo número $p_0 \in [a,b]$, la sucesión definida por

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

converge al único punto fijo $p \in [a,b]$.

$$g(p_{n-1}) - g(p) = g'(\xi)(p_{n-1} - p)$$

$$\begin{aligned} \text{Pf: } |p_n - p| &= |g(p_{n-1}) - g(p)| \\ &= |g'(\xi_n)| |p_{n-1} - p| \quad \text{por el teorema del valor medio} \\ &\leq k |p_{n-1} - p| \end{aligned}$$

Recurivamente

$$|p_n - p| < k |p_{n-1} - p| < k^2 |p_{n-2} - p| < \dots < k^n |p_0 - p|$$

$$(*) \Rightarrow |p_n - p| < k^n |p_0 - p|$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| < \left[\lim_{n \rightarrow \infty} k^n \right] |p_0 - p|$$

$$\text{Como } 0 < k < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \quad \square$$

$$|p - p_n| \leq K^n |p_1 - p_0| \sum_{j=0}^{\infty} K^j$$

Como $0 < K < 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} K^j = \frac{1}{1-K}$

$$\Rightarrow |p - p_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |p_1 - p_0| \quad \square$$

7) Ejemplo: La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene solución única en $[1, 2]$. Encontrar la solución utilizando el método del Punto Fijo.

sol.:

i) $\tilde{g}_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \Rightarrow \tilde{g}_1(x) + x = x + x^3 + 4x^2 - 10$

y definimos $g_1(x) = \tilde{g}_1(x) + x$

Si x^* es P.F. de $g_1(x^*) \Rightarrow \tilde{g}_1(x^*) = 0$.

$$g_1(x) = x + x^3 + 4x^2 - 10$$

$$g_1(1) = 1 + 1 + 4 - 10 = 6 - 10 = -4 \notin [1, 2]$$

$g_1(x)$ no satisface las condiciones del Teorema P.F.

ii) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 10 - x^3 \Rightarrow 4x = \frac{10}{x} - x^2, x \neq 0$

$$\Rightarrow x = \left[\frac{10}{x} - 4x \right]^{1/2}$$

$$g_2(x) = \left[\frac{10}{x} - 4x \right]^{1/2}, x^* = g_2(x^*)$$

utilizando el hecho de que la solución es única

$$g_2(x) = \left[\frac{10}{x} - 4x \right]^{1/2} \quad x=2 \quad [1,2]$$

$$g_2(2) = \sqrt{5-8}, \quad g_2(2) \text{ no esta definida}$$

$$\frac{10}{x} - 4x < 0 \Rightarrow \frac{10}{x} < 4x \Rightarrow 10 < 4x^2$$

$$\Rightarrow 1 < 4 < \frac{5}{2} < x^2 \Rightarrow 1 < x$$

$g_2(x)$ no esta definida en $[1,2]$.

$$\text{iii)} \quad x^2 = \frac{1}{4} (10 - x^3)$$

$$x = \frac{1}{2} [10 - x^3]^{1/2} =: g_3(x) \quad [1,2]$$

$$g_3'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) [10 - x^3]^{-1/2} [-3x^2] = -\frac{3}{4} x^2 [10 - x^3]^{-1/2} < 0$$

$g_3(x)$ es decreciente en $[1,2]$

$$g_3(2) = \frac{1}{4} [10 - 8]^{1/2} \approx 2.12 \notin [1,2]$$

Como $g_3(x)$ es decreciente, es más conveniente analizar $g_3(x)$ en el intervalo $[1, 3/2]$

$$g_3(3/2) \approx 1.28 \in [1, 3/2]$$

$$g_3(1) = \frac{1}{2} [10 - 1]^{1/2} = \frac{3}{2} \in [1, 3/2] \Rightarrow g_3(x) \in [1, 3/2]$$