Teorema de
→ Error de truncamiento para métodos multipaso

1) Forma grel. de un método multipaso (caso escalar) de m-niveles

$$\hat{y}_{i+1} = a_{m-1}\hat{y}_i + a_{m-2}\hat{y}_{i-1} + \dots + a_0\hat{y}_{i+1-m}$$
$$+ h\left[b_m f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, \hat{y}_i) + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, \hat{y}_{i+1-m}) \right]$$

Si $b_m \neq 0$ entonces es un método implícito.

1.i) Notación compacta.

$$\underline{\underline{1^{k})}} \quad \hat{y}_{i+1} = \sum_{s=1}^{m} a_{m-s}\hat{y}_{i+1-s} + h\sum_{s=0}^{m} b_{m-s} f(t_{i+1-s}, \hat{y}_{i+1-s})$$

2) Error de truncamiento (consistencia)

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{1}{h} y(t_{i+1}) - \frac{1}{h}\sum_{s=1}^{m} a_{m-s}\, y(t_{i+1-s}) - \sum_{s=0}^{m} b_{m-s}\, y'(t_{i+1-s})$$

3) **Teorema**: El método multipaso en la forma grál. (*) tiene un error de truncamiento de $O(h^r)$ si se cumplen las sig. condiciones:

i) $\displaystyle\sum_{s=1}^{m} a_{m-s} = 1$

ii) $\displaystyle m^k - \sum_{s=1}^{m} (m-s)^k a_{m-s} - k\sum_{s=0}^{m} (m-s)^{k-1} b_{m-s} = 0$

donde $k=1,\dots,r$ y por convención $0^0 = 1$ #.

iii) $\displaystyle m^{(r+1)} - \sum_{s=1}^{m} (m-s)^{r+1} a_{m-s} - r\sum_{s=1}^{m} (m-s)^{r} b_{m-s} \neq 0$.

Dem:

Recordar que para una función $f(x)$ tenemos su polinomio de Taylor

$$f(x+\tilde{h}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{h}^k f^{(k)}(x)}{k!}, \quad f^{(k)} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$y(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mh)^k}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m}), \quad t_{i+1} - t_{i+1-m} = (i+1)h - (i+1-m)h = mh$$

$$y(t_{i+1-s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-s)^k h^k}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m}), \quad t_{i+1-s} - t_{i+1-m} = (m-s)h$$

$s = m$?

$$y(t_{i+1-m}) = y(t_{i+1-m}) \qquad 0^0 = 1 \ \#.$$

$$\underline{y'(t_{i+1-s})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m-s)^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(t_{i+1-m}) \qquad \text{radio convergencia}$$

$$\overbrace{t_{i+1}, t_i, \dots, t_{i+1-m}}$$

$$\tau_{i+1}(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k h^{k-1}}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$
$$- \sum_{s=1}^{m} a_{m-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-s)^k h^{k-1}}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$
$$- \sum_{s=0}^{m} b_{m-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m-s)^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$

$$\tau_{i+1}(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k h^{k-1}}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m}) \qquad \text{usando Fubini}^*$$
$$(**) \quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{m} a_{m-s} \frac{(m-s)^k}{k!} h^{k-1} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} b_{m-s} \frac{(m-s)^{k-1}}{(k-1)!} h^{k-1} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$

Para obtener $\tau_{i+1}(h) \sim O(h^r)$ necesitamos que todos los términos con h^{k-1} $k = 0, \dots, r$ de $(**)$ se anulen y que el término h^r no se anule. $(y^{(k)}(t_{i+1-m}) \neq 0)$

Entonces igualamos los términos con $h^{k-1} y^{(k)}(t_{i+1-m})$

para que sean cero $k = 0, \dots, r$

i) $k=0$. $\dfrac{y(t_{i+1-m})}{h}\left[1 - \sum_{s=1}^{m} a_{m-s}\right] = 0$

ii) $k = 1, \dots, r$

$$h^{k-1} y^{(k)}(t_{i+1-m})\left[\frac{m^k}{k!} - \sum_{s=1}^{m} \frac{(m-s)^k}{k!} a_{m-s} - \sum_{s=0}^{m} \frac{(m-s)^{k-1}}{(k-1)!} b_{m-s}\right] = 0$$

iii) $k = r+1$

$$y^{(r+1)}(t_{i+1-m})\left[\frac{m^{r+1}}{(r+1)!} - \sum_{s=1} \frac{(m-s)^{r+1}}{(r+1)!} \dots\right] \neq 0.$$