→ Métodos de resolución para sistemas no-lineales

1) Método del Trapecio

$$y' = f(t, y) \qquad t \in (a,b)$$
$$y(a) = y_0$$

$$\underline{\hat{y}}_0 = y_0$$

$$\underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, \underline{\hat{y}}_i) + f(t_{i+1}, \underline{\hat{y}}_{i+1}) \right]$$

$$\underline{\hat{y}}_{i+1} = G_i(h, f, \underline{\hat{y}}_i, \hat{y}_{i+1})$$

$$\uparrow \qquad p = G(p)$$
$$p$$

2) Def: Un número $p \in \mathbb{R}$ es un punto fijo para una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $g(p) = p$.

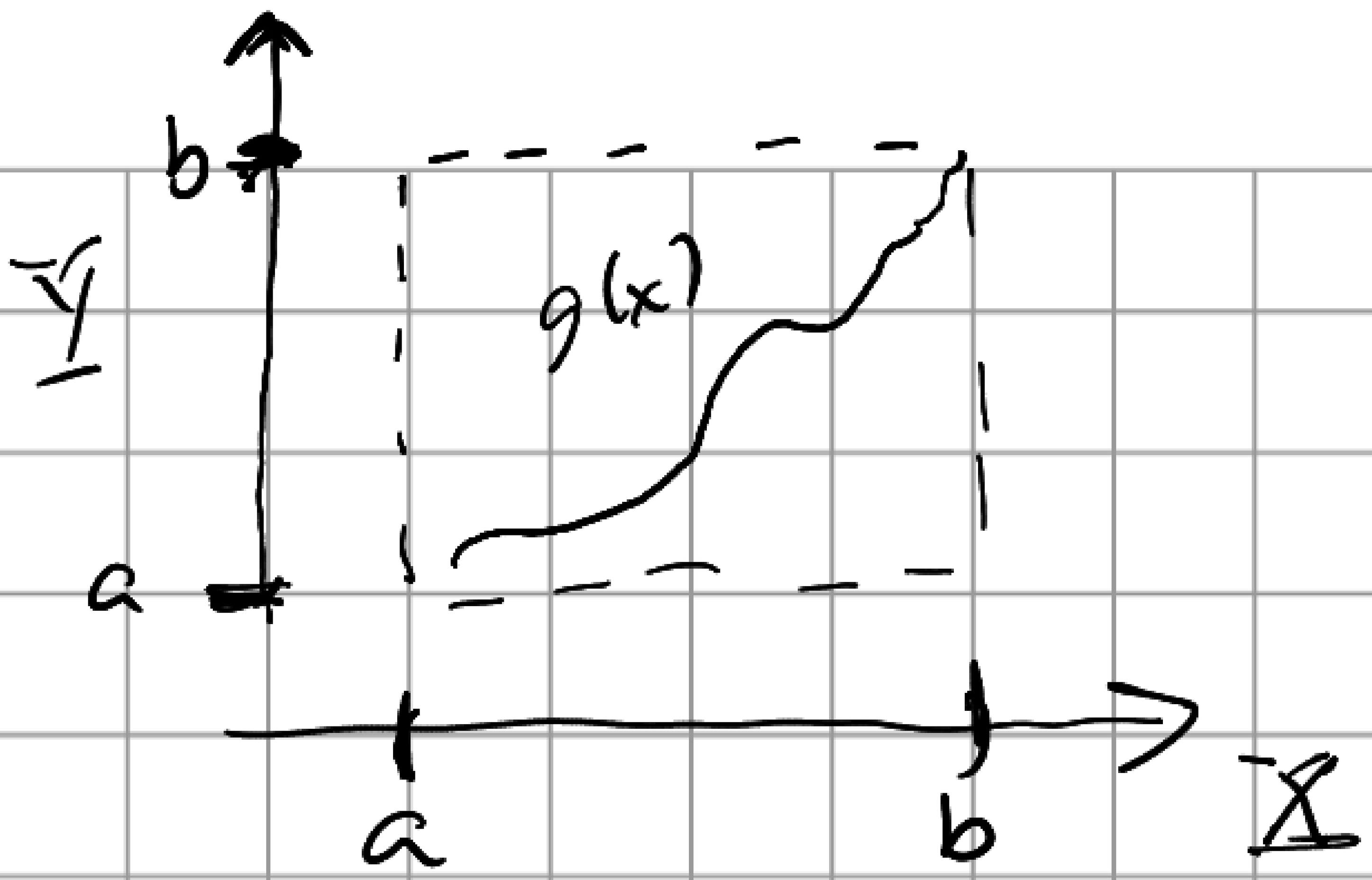
3) Teorema:

i) Si $g \in C[a,b]$ e $g(x) \in [a,b]$ $\forall\, x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ g tiene al menos un punto fijo

ii) Si adicionalmente $g'(x)$ en (a,b) y existe $0 < K < 1$ tal que

$$|g'(x)| < K \quad \forall\, x \in (a,b)$$

entonces el punto fijo p es único.



Prueba:

i) Si $g(a)=a$ ó $g(b)=b \Rightarrow g$ tiene un punto fijo p en los extremos de $[a,b]$

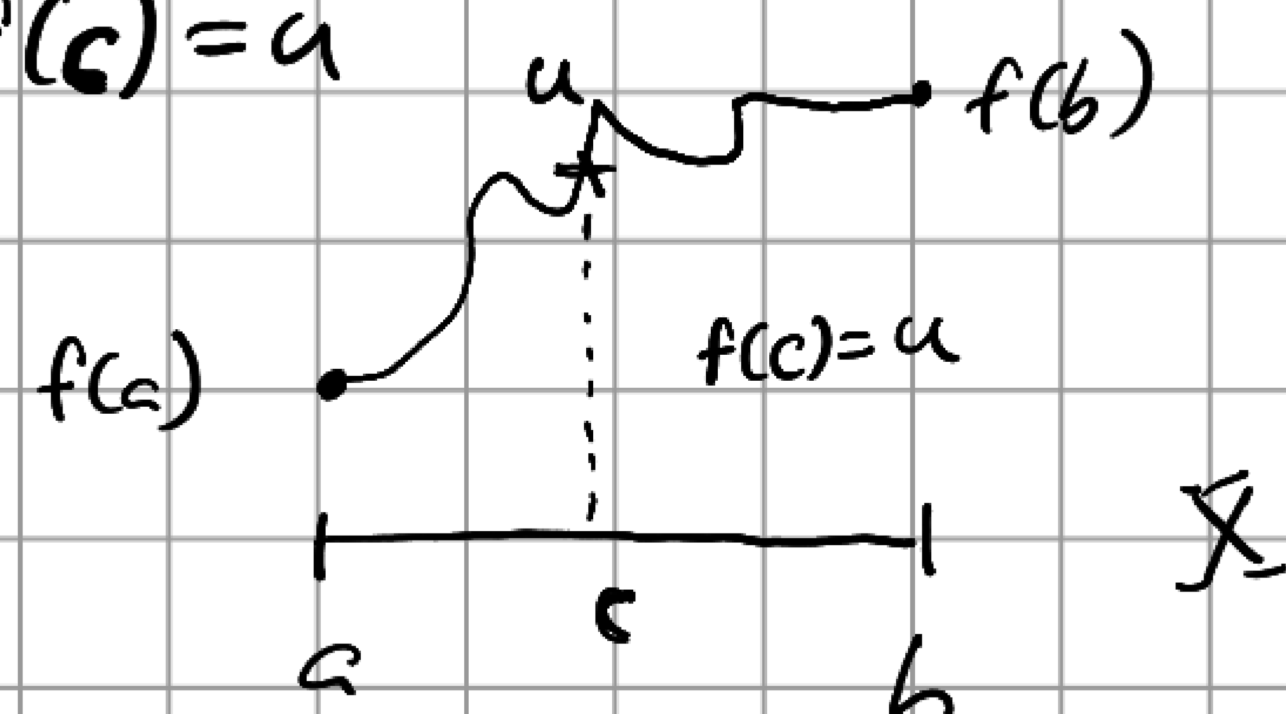
sino $g(a) > a$ & $g(b) < b$ porque $g(x) \in [a,b]$

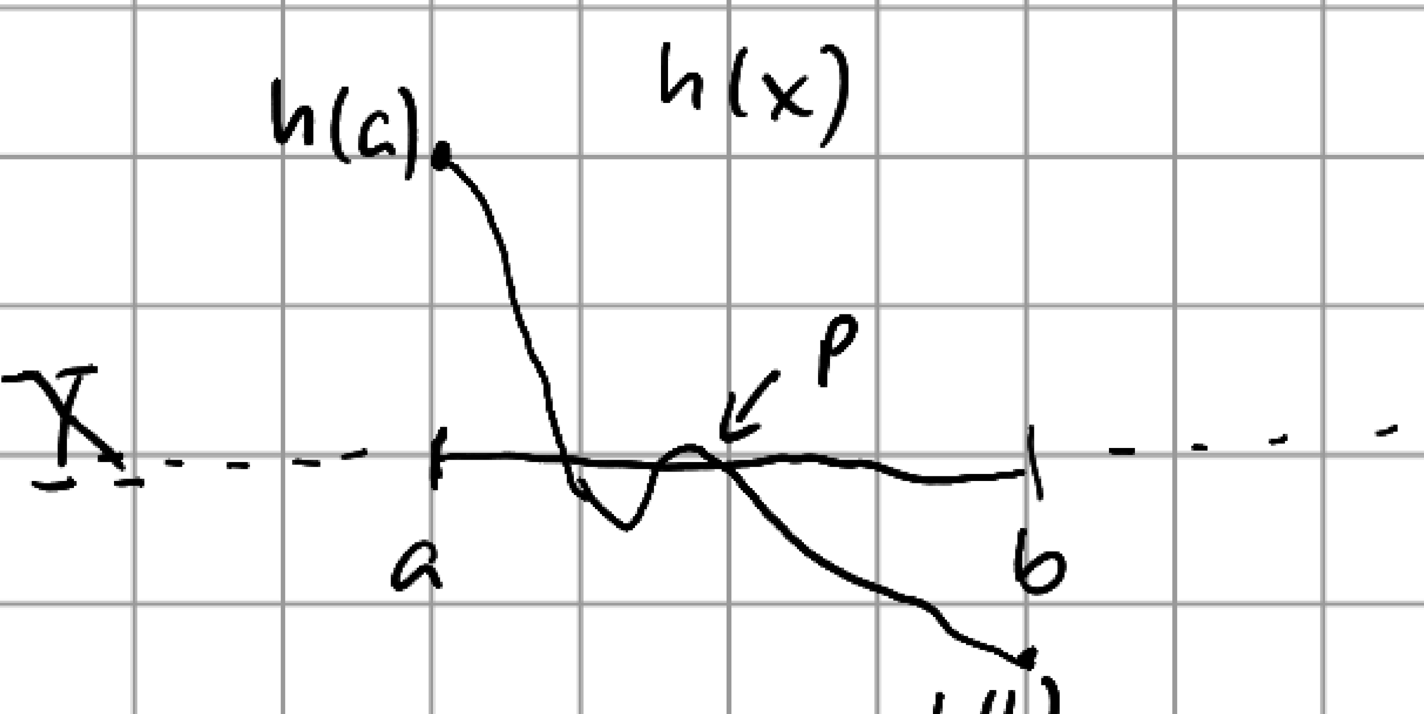
Sea $h(x) = g(x) - x$, y como $g(x)$ es continua $\Rightarrow h(x)$ es continua

$\underline{*}$ $h(a) = g(a) - a > 0$ & $h(b) = g(b) - b < 0$

Recordamos el teorema del valor intermedio que nos dice que una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ tal que

$f(a) < f(b) \Rightarrow \forall\, u \in (f(a), f(b))\ \exists\ c \in (a,b)$ tal que $f(c) = u$





$\exists\ p \in (a,b)$ tal que

$h(p) = 0. \Rightarrow h(p) = g(p) - p$

$\Rightarrow 0 = g(p) - p \Rightarrow p = g(p)$ ∎

ii) $\exists\ K < 1$ tal que $|g'(x)| < K \quad \forall x \in (a,b)$

Supongamos que p, q son puntos fijos de $g(x)$

y $\underline{\underline{p \neq q}}$ por el teorema del valor medio $\exists\ \xi \in [p,q]$

$p, q \in [a,b]$ tal que $\dfrac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi) \quad (*)$

$$\Rightarrow \quad |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)|\,|p-q|$$
$$< K\,|p-q|$$
$$|g(p) - g(q)| < |p-q|$$
$$|p - q| < |p-q|$$

contradicción.

$\Rightarrow \quad p = q \quad \blacksquare$

4) Algoritmo del punto fijo: Para solucionar $p = g(p)$ dada una aproximación p_0

Input: p_0, tolerancia $\epsilon > 0$, # máximo de iteraciones N_0

output: aproximación de p ó un mensaje de fallo

Algoritmo:

Paso de Init. $\quad i = 1$ (# de iteraciones)

Paso 1 $\quad$ while $i \leq N_0$ { $p = g(p_0)$ *

if $|p - p_0| < \epsilon$ {

then output(p)

exit from program {

$i = i + 1$

$p_0 = p$

{

output("el método ha fallado para No iteracciones")

$\boxtimes$

5) Teorema de convergencia del Algoritmo del punto fijo

i) Sea $g \in C[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b] \ \forall x \in [a,b]$

ii) g' existe en (a,b) y $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$

$$|g'(x)| < k \quad \forall x \in (a,b) \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Para todo número $p_0 \in [a,b]$, la sucesión definida por

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

converge al único punto fijo $p \in [a,b]$.

Pf:
$$\begin{aligned} |p_n - p| &= |g(p_{n-1}) - g(p)| \\ &= |g'(c_n)|\,|p_{n-1} - p| \quad \text{por el teorema del valor medio} \\ &< k\,|p_{n-1} - p| \end{aligned}$$

Recursivamente
$$|p_n - p| < k\,|p_{n-1} - p| < k^2\,|p_{n-2} - p| < \dots < k^n\,|p_0 - p|$$

$$\Rightarrow |p_n - p| < k^n\,|p_0 - p|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| < \left[\lim_{n\to\infty} k^n\right] |p_0 - p|$$

como $0 < k < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} k^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \boxtimes.$$