→ Métodos de resolución para sistemas no-lineales

1) Método del Trapecio

$$y' = f(t,y) \quad t \in (a,b)$$
$$y(a) = y_0$$

$$\hat{y}_0 = y_0$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{y}}_{i+1} = \hat{\underline{y}}_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, \hat{\underline{y}}_i) + f(t_{i+1}, \hat{\underline{y}}_{i+1}) \right]$$

$$\left\{ \hat{\underline{y}}_{i+1} = G_i(h, f, \hat{\underline{y}}_i, \hat{\underline{y}}_{i+1}) \right.$$

$$p = G(p)$$

2) Def: Un número $p \in \mathbb{R}$ es un punto fijo para una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $g(p) = p$.

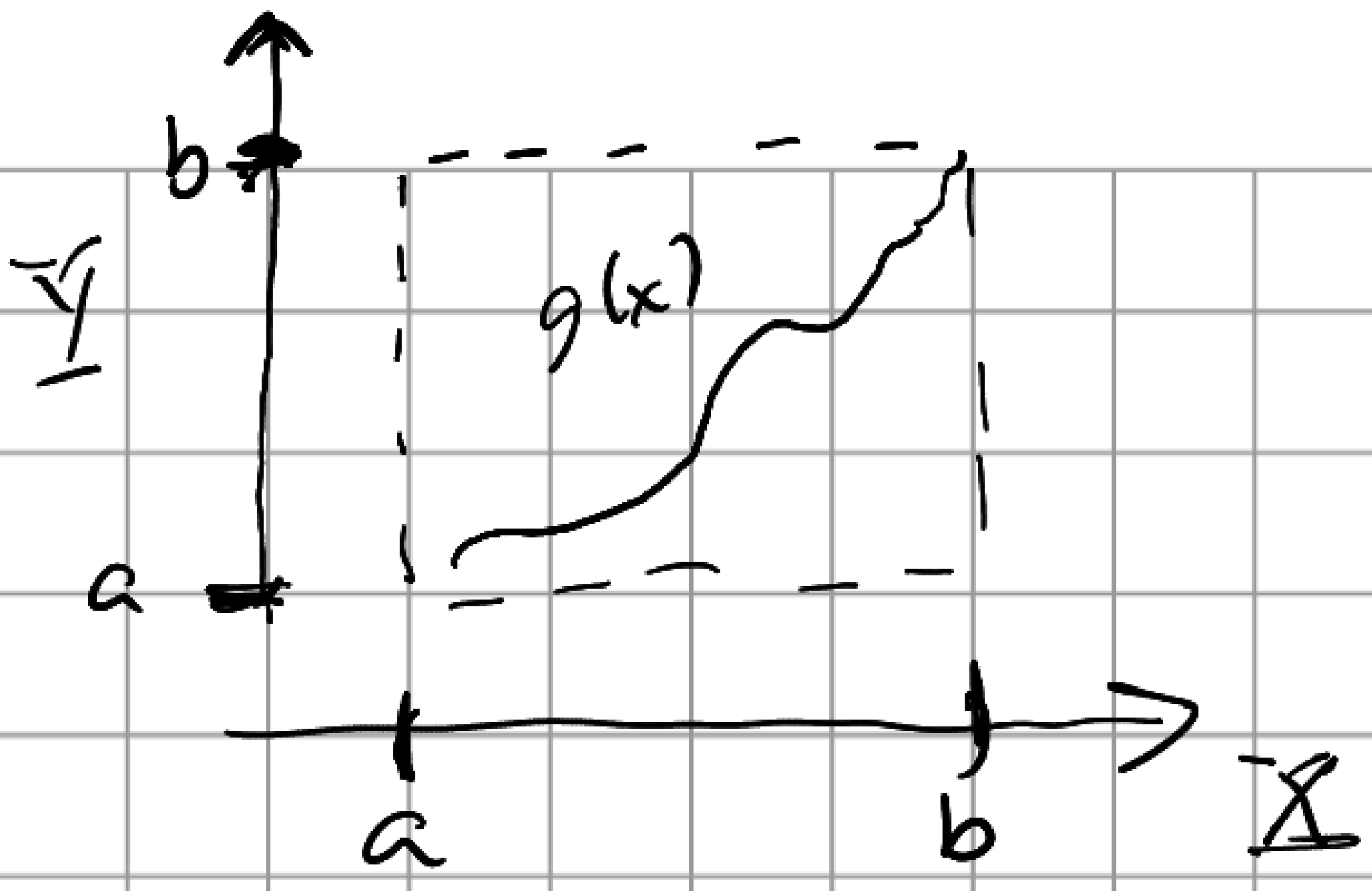
3) Teorema:

i) Si $g \in C[a,b]$ e $g(x) \in [a,b]$ $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow g$ tiene al menos un punto fijo

ii) Si adicionalmente $g'(x)$ en (a,b) y existe $0 < K < 1$ tal que

$$|g'(x)| \leq K \quad \forall\, x \in (a,b)$$

entonces el punto fijo p es único.



Prueba :

i) Si $g(a)=a$ ó $g(b)=b \Rightarrow g$ tiene un punto fijo p en los extremos de $[a,b]$

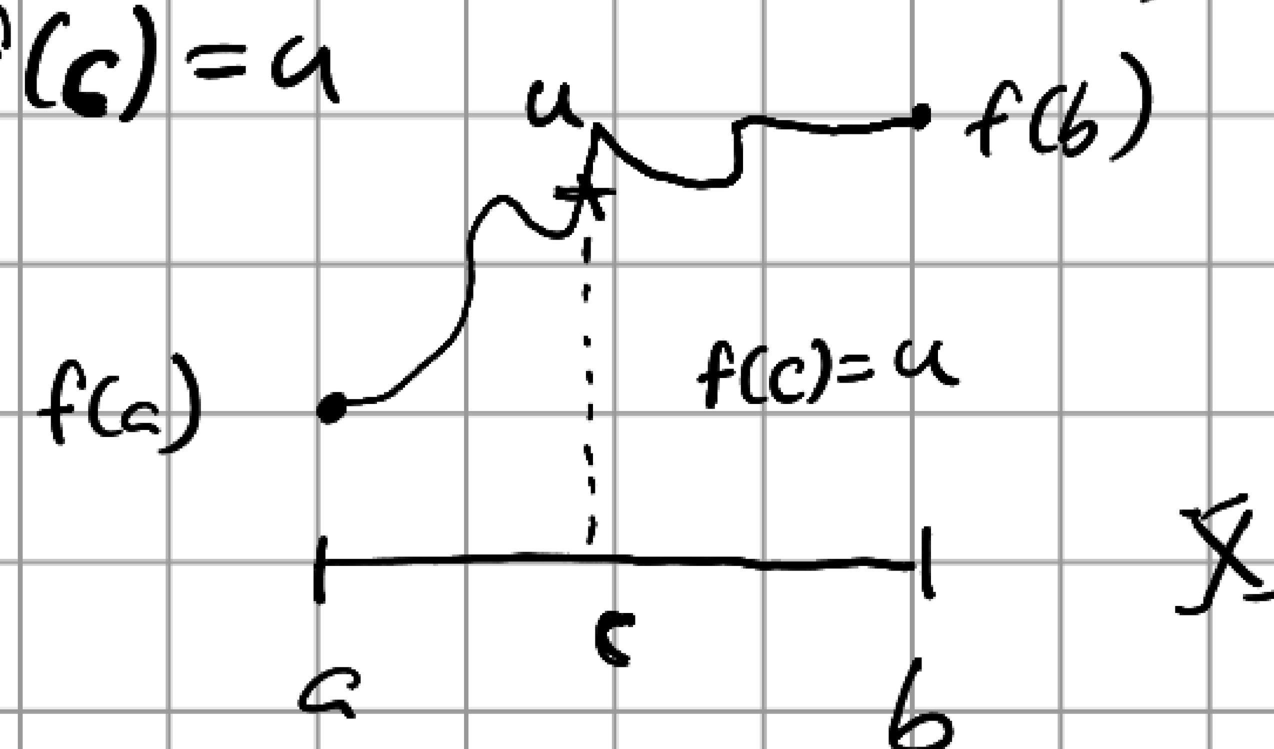
sino $g(a)>a$ & $g(b)<b$ porque $g(x)\in[a,b]$

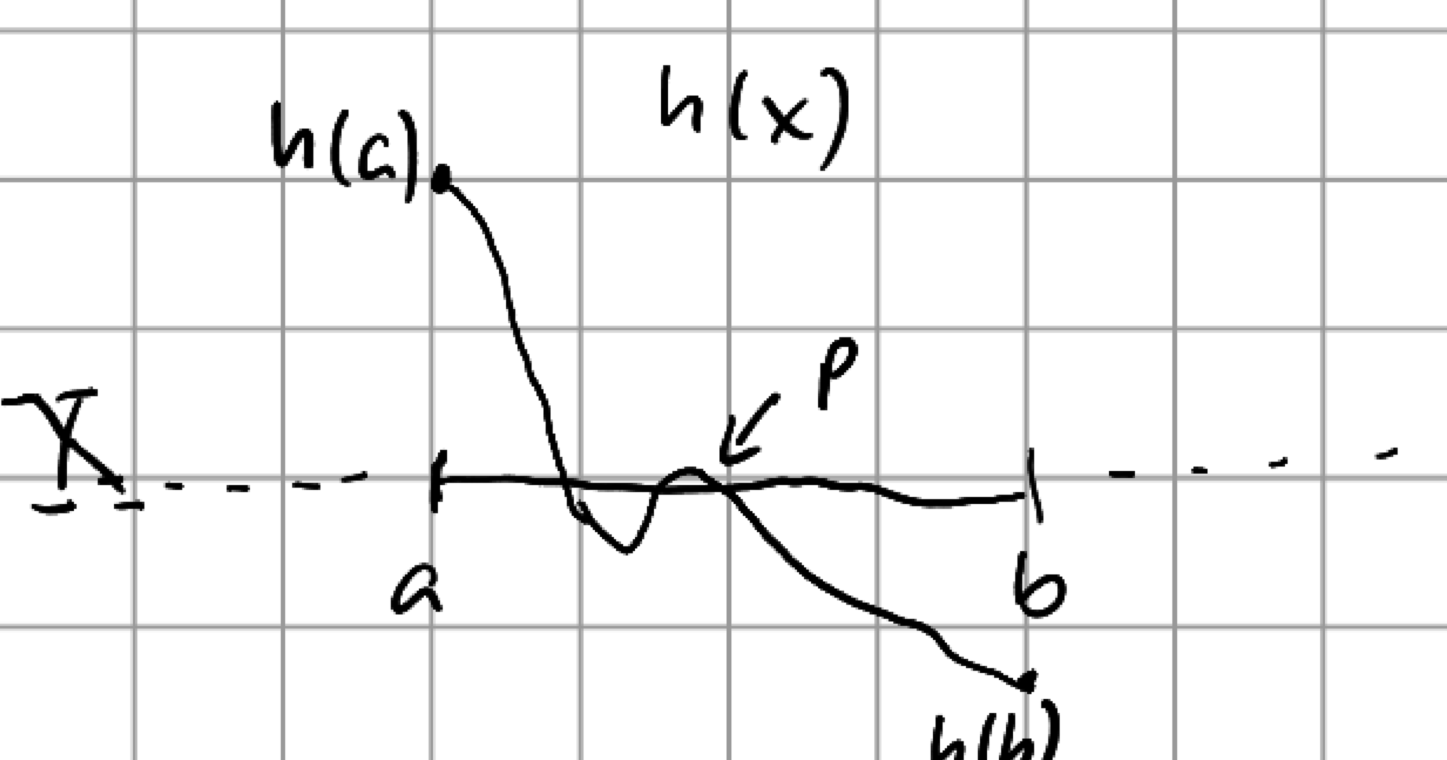
Sea $h(x)=g(x)-x$, y como $g(x)$ es continua $\Rightarrow h(x)$ es continua

* $h(a)=g(a)-a>0$ & $h(b)=g(b)-b<0$

Recordemos el teorema del valor intermedio que nos dice que una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ tal que

$$f(a)<f(b) \Rightarrow \forall u\in(f(a),f(b))\ \exists\ c\in(a,b)$$
tal que $f(c)=u$





$\exists\ p\in(a,b)$ tal que

$h(p)=0. \Rightarrow h(p)=g(p)-p$

$\Rightarrow 0=g(p)-p \Rightarrow p=g(p)$ ■

ii) $\exists\ K < 1$ tal que $|g'(x)| < K \quad \forall x \in (a,b)$

Supongamos que p, q son puntos fijos de $g(x)$

y $\underline{\underline{p \neq q}}$ por el teorema del valor medio $\exists\ \xi \in [p,q]$

$p, q \in [a,b]$ tal que $\dfrac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi) \quad (*)$

$$\Rightarrow \quad |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)|\,|p-q|$$
$$< K\,|p-q|$$
$$|g(p) - g(q)| < |p-q|$$
$$|p - q| < |p-q|$$

contradicción.

$\Rightarrow \quad p = q \quad \blacksquare$

4) Algoritmo del punto fijo: Para solucionar $\underline{p = g(p)}$ dada una aproximación $\underline{\underline{p_0}}$

Input: p_0, tolerancia $\epsilon > 0$, # máximo de iteraciones N_0

output: aproximación de $\underline{\underline{p}}$ ó un mensaje de fallo

Algoritmo:

```
Paso de Init.    i = 1    (# de iteraciones)
Paso 1           while  i ≤ N0 {   p = g(p0)    * ←
                                   if |p - p0| < ε {
                                      then output(p)
                                           exit from program {
                                   i = i + 1
                                   p0 = p
                                 {
```

output("el método ha fallado para No iteracciones")

$\boxed{\text{/}}$

5) Teorema de convergencia del Algoritmo del punto fijo

i) Sea $g \in C[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$

ii) g' existe en (a,b) y $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$

$$|g'(x)| \leq k \quad \forall x \in (a,b) \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Para todo número $p_0 \in [a,b]$, la sucesión definida por

$$\longrightarrow \quad p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

converge al único punto fijo $p \in [a,b]$.

$g(p_{n-1}) - g(p) = g'(\xi)(p_{n-1} - p)$

Pf: $\bullet$ $|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)|$

$= |g'(\xi_n)| \, |p_{n-1} - p|$ por el teorema del valor medio

$\leq k \, |p_{n-1} - p|$

Recursivamente

$$|p_n - p| < k|p_{n-1} - p| < k^2 |p_{n-2} - p| < \dots < k^n |p_0 - p|$$

$(*) \Rightarrow |p_n - p| < k^n |p_0 - p|$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| < \left[\lim_{n\to\infty} k^n\right] |p_0 - p|$$

como $0 < k < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} k^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \boxed{\text{/}}.$$

6) Corolario.- Si $g(x)$ satisface las condiciones del teorema anterior, entonces:

(*) i) $|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, p_0 - b\}$

ii) $|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$, $n \geq 0$

Pf:

i) Por el teorema anterior, $|p_n - p| \leq k^n |p_0 - p|$

pero $p \in [a,b] \Rightarrow |p_0 - p| \leq \max\{|p_0 - a|, |p_0 - b|\}$

ii) $n \geq 1$,

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k|p_n - p_{n-1}|$$ valor medio $|g'(\cdot)| \leq k$

$$\leq k^2 |p_{n-1} - p_{n-2}|$$

$$\vdots$$

$$\leq k^n |p_1 - p_0|$$

Para $m > n \geq 1$ 0

$$|p_m - p_n| = |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - p_{m-2} + p_{m-2} + \dots + p_{n+2} - p_{n+1} + p_{n+1} - p_n|$$

$$\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \dots + |p_{n+2} - p_{n+1}| + |p_{n+1} - p_n|$$

$$\leq k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \dots + k^{n+1}|p_1 - p_0| + k^n |p_1 - p_0|$$

(Z) $$(=) k^n |p_1 - p_0| [1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-2} + k^{m-n-1}]$$

Como $p_m \to p$ cuando $m \to \infty \Rightarrow$ cte

$$|p - p_n| = \lim_{m \to \infty} |p_m - p_n| \leq \left[\lim_{m \to \infty} k^n |p_1 - p_0|\right] \left[\lim_{m \to \infty} \sum_{j=0}^{m-n-1} k^j\right]$$

$$|p - p_n| \leq K^n |p_1 - p_0| \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} k^j}$$

Como $0 < k < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} k^j = \frac{1}{1-k}$

$$\Rightarrow |p - p_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| \qquad \blacksquare$$

7) Ejemplo: La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene solución única en $[1,2]$. Encontrar la solución utilizando el método del Punto Fijo.

Sol.:

i) $\tilde{g}_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \Rightarrow \tilde{g}_1(x) + x = x + x^3 + 4x^2 - 10$

y definimos $g_1(x) = \tilde{g}_1(x) + x$

Si x^* es P.F. de $g_1(x^*) \Rightarrow \tilde{g}_1(x^*) = 0$.

$g_1(x) = x + x^3 + 4x^2 - 10$

$g_1(1) = 1 + 1 + 4 - 10 = 6 - 10 = -4 \notin [1,2]$.

$g_1(x)$ no satisface las condiciones del Teorema P.F.

ii) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 10 - x^3 \Rightarrow 4x = \frac{10}{x} - x^2, \; x \neq 0$

$\Rightarrow x = \left[\frac{10}{x} - 4x\right]^{1/2}$ utilizando el hecho de que la solución es única

$g_2(x) = \left[\frac{10}{x} - 4x\right]^{1/2}, \quad x^* = g_2(x^*)$

$$g_2(x) = \left[\overbrace{\frac{10}{x}}^{\to 0} - 4x \right]^{1/2} \qquad x = 2 \quad [1,2]$$

$$g_2(2) = \sqrt{5 - 8} \quad , \; g_2(2) \text{ no esta definida}$$

$$\frac{10}{x} - 4x < 0 \Rightarrow \frac{10}{x} < 4x \Rightarrow 10 < 4x^2$$

$$\Rightarrow 1 < 4 < \frac{5}{2} < x^2 \Rightarrow 1 < x$$

$g_2(x)$ no esta definida en $(1,2]$.

iii) $$x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$$

$$x = \frac{1}{2}\left[10 - x^3\right]^{1/2} =: g_3(x) \qquad [1,2]$$

$$g_3'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)[10 - x^3]^{-1/2}[-3x^2] = -\frac{3}{4}x^2[10 - x^3]^{-1/2}$$

$$\leq 0$$

$g_3(x)$ es decreciente en $[1,2]$

$$g_3(2) = \frac{1}{4}\left[10 - 8\right]^{1/2} \approx 2.12 \notin [1,2]$$

Como $g_3(x)$ es decreciente, es más conveniente analizar $g_3(x)$ en el intervalo $[1, 3/2]$

$$g_3(3/2) \approx 1.28 \in [1, 3/2]$$

$$g_3(1) = \frac{1}{2}\left[10 - 1\right]^{1/2} = \frac{3}{2} \in [1, 3/2] \Rightarrow g_3(x) \in [1, 3/2]$$

✓

$$|g_3'(x)| \leq 1 \quad \text{Graficando en Matlab}$$

$$g_4(x) = \left[\frac{10}{4+x}\right]^{1/2} \quad , [1,2]$$

$g_4(x)$ cumples las condiciones (ejercicio).

Métodos Implícitos:

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}) & t \in [a, b] \\ \underline{y}(a) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

1) Trapecio

$$\underline{\hat{y}}_0 = \underline{y}_0$$

$$\underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + \frac{h}{2}\left[\underline{f}(t_i, \underline{\hat{y}}_i) + \underline{f}(t_{i+1}, \underline{\hat{y}}_{i+1})\right]$$

El método del Trapecio tiene error de convergencia de $O(h^2)$

2) Método Euler-Implícito

$$\underline{\hat{y}}_0 = \underline{y}_0$$

$$\underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + h\,\underline{f}(t_{i+1}, \underline{\hat{y}}_{i+1})$$

Error de convergencia de $O(h)$

Euler explícito

$$\underline{\hat{y}}_0 = \underline{y}_0$$

$$\underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + h\,\underline{f}(t_i, \underline{\hat{y}}_i)$$

→ Método de Newton

⇒ Para resolver $f(p) = 0$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \underline{\underline{(*)}}$

1) Sea $f \in C^2[a,b]$, $p_0, p \in [a,b]$, p es la solución de $\underline{(*)}$ y p_0 es una aproximación p tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p_0 - p|$ es "pequeño"

⇒ Usando Taylor para $f(p)$ alrededor de $f(p_0)$

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi)$$

$\xi \in (p_0, p)$ ó (p, p_0)

como $f(p) = 0$

$$0 = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi)$$

Como $|p_0 - p|$ es "pequeño" $\Rightarrow (p - p_0)^2 \approx 0$

$$\Rightarrow \quad 0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$$

$$\Rightarrow \quad p = p_0 - \frac{f(p)}{f'(p_0)} \leftarrow$$ Algoritmo de Newton.

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \longleftarrow \quad \underline{\underline{(**)}}$$

2) Algoritmo de Newton para aproximar la solución

de $f(p) = 0$.

muy cercana 0

Input: Aproximación inicial p_0, tol $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ $(\delta = 10^{-12})$
número máximo de iteraciones N_0

output: Aproximación p ó un mensaje de error/fallo.

Algoritmo:

```
Init.   i = 1
        while  i ≤ N0
        {
            if (|f'(p0)| < δ)
            {
                output ("El método fallo (división por cero)")
                exit-program;
            }
            p = p0 - f(p0)/f'(p0)
            if |p - p0| < ε then
            {   output(p);
                exit-program();
            }
            i = i+1;  p0 = p;
        }
        output ("El método de Newton fallo para
                 N0-iteraciones")
```

3) Algoritmo de Newton para una aprox. de EDO.

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & , t \in (a,b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Método numérico de la forma

$$\hat{y}_0 = y_0$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \phi(t_i, h, \hat{y}_i, \hat{y}_{i+1}, f)$$, $\hat{y}_{i+1}$ es la incognita

$$G(\hat{y}_{i+1}) = -\hat{y}_{i+1} + \hat{y}_i + \phi(, \dots)$$

queremos resolver $\underline{G(\hat{y}_{i+1})} = 0$

ver (**)

4) Teorema de convergencia del método de Newton.

$$f(x) = 0$$

Sea $f \in C^2[a,b]$. Si $p \in (a,b)$ tal que $f(p) = 0$

& $f'(p) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que el método de Newton genere una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cual converge a p para toda aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$