→ Métodos de resolución para sistemas no-lineales

1) Método del Trapecio

$$y' = f(t,y) \qquad t \in (a,b)$$
$$y(a) = y_0$$

$$\hat{y}_0 = y_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, \underline{\hat{y}}_i) + f(t_{i+1}, \underline{\hat{y}}_{i+1}) \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hat{y}}_{i+1} = G_i(h, f, \underline{\hat{y}}_i, \underline{\hat{y}}_{i+1}) \\ \uparrow \qquad p = G(p) \leftarrow \\ p \end{array} \right.$$

2) Def: Un número $p \in \mathbb{R}$ es un punto fijo para una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $g(p) = p$.

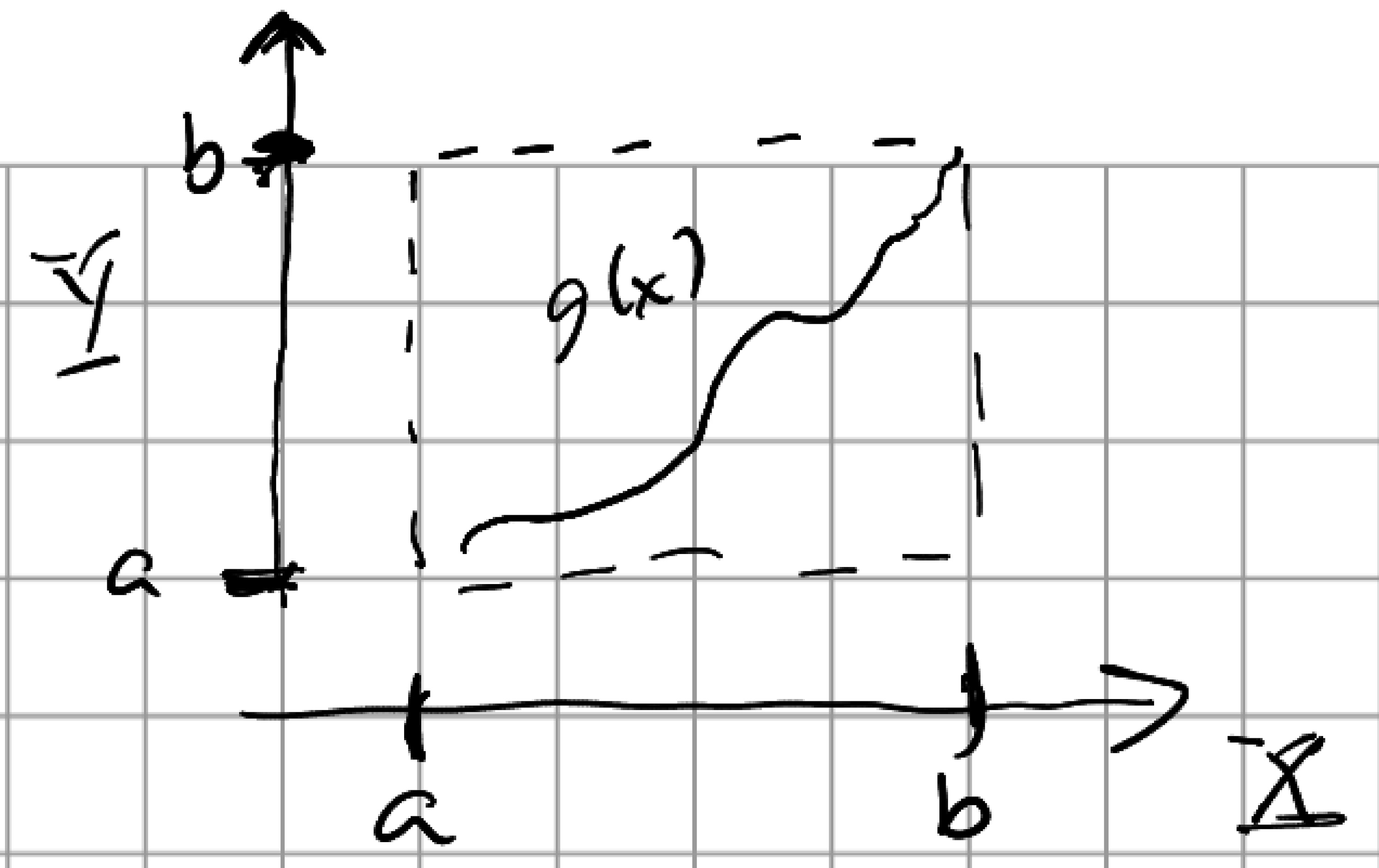
3) Teorema:

i) Si $g \in C[a,b]$ e $g(x) \in [a,b]$ $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow g$ tiene al menos un punto fijo

ii) Si adicionalmente $g'(x)$ en (a,b) y existe $0 < K < 1$ tal que

$$|g'(x)| \leq K \quad \forall\, x \in (a,b)$$

entonces el punto fijo p es único.



Prueba:

i) Si $g(a) = a$ ó $g(b) = b \Rightarrow g$ tiene un punto fijo p en los extremos de $[a,b]$

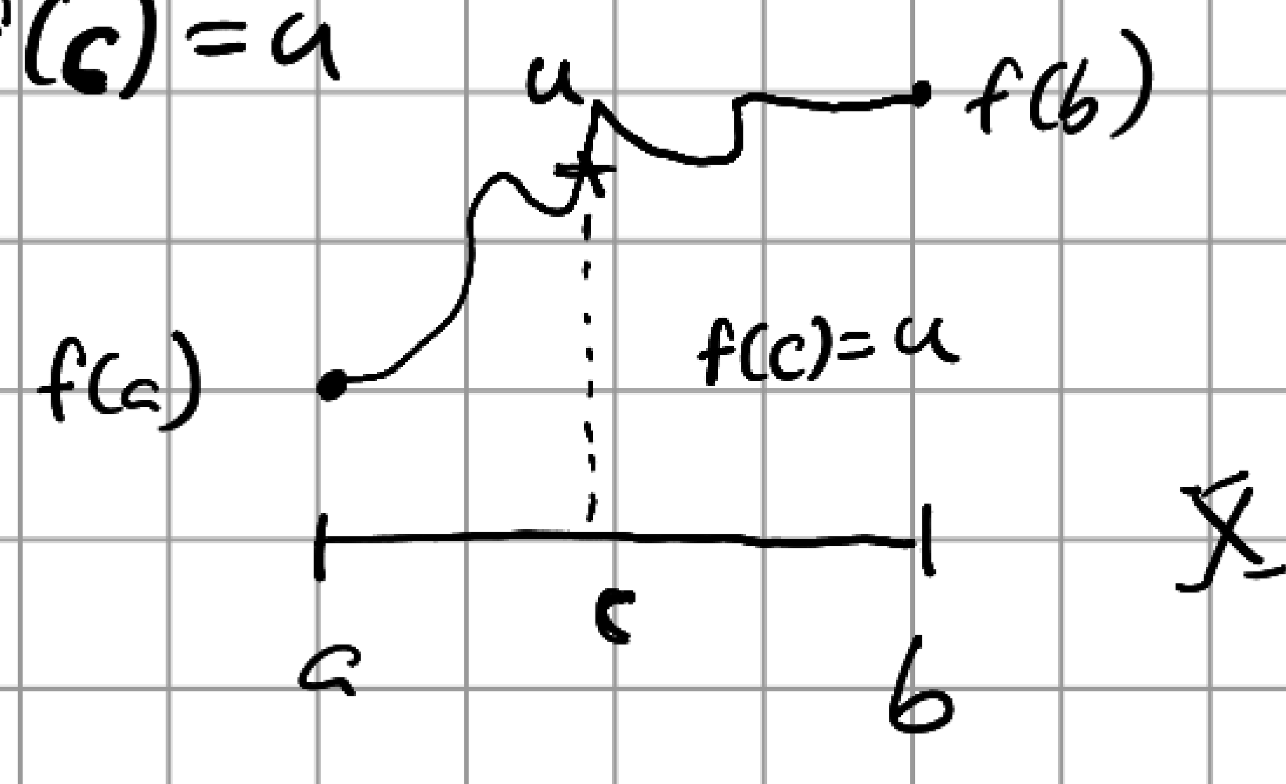
sino $g(a) > a$ & $g(b) < b$ porque $g(x) \in [a,b]$

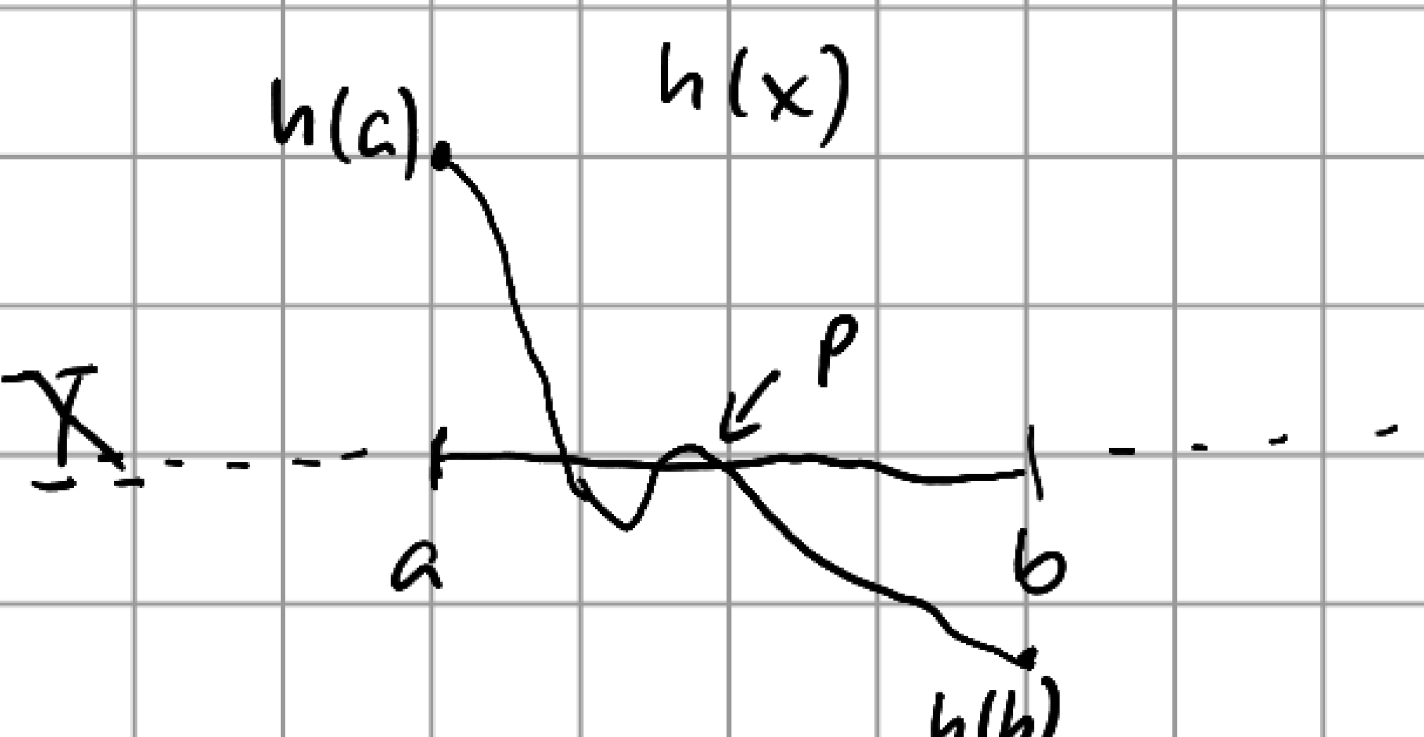
Sea $h(x) = g(x) - x$, y como $g(x)$ es continua $\Rightarrow h(x)$ es continua

$*$ $h(a) = g(a) - a > 0$ & $h(b) = g(b) - b < 0$

Recordamos el teorema del valor intermedio que nos dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ tal que

$f(a) < f(b) \Rightarrow \forall\, u \in (f(a), f(b))\ \exists\ c \in (a,b)$ tal que $f(c) = u$





$\exists\ p \in (a,b)$ tal que

$h(p) = 0 \Rightarrow h(p) = g(p) - p$

$\Rightarrow 0 = g(p) - p \Rightarrow p = g(p)$ ∎

ii) $\exists\ K < 1$ tal que $|g'(x)| < K \quad \forall x \in (a,b)$

Supongamos que p, q son puntos fijos de $g(x)$

y $\underline{\underline{p \neq q}}$ por el teorema del valor medio $\exists\ \xi \in [p,q]$

$p, q \in [a,b]$ tal que $\dfrac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi)$ ($\underline{\underline{*}}$)

$$\Rightarrow \quad |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)|\,|p-q|$$
$$< K\,|p-q|$$
$$|g(p) - g(q)| < |p-q|$$
$$|p - q| < |p-q|$$

contradicción.

$\Rightarrow \quad p = q$ ∎

4) Algoritmo del punto fijo: Para solucionar $\underline{p = g(p)}$ dada una aproximación $\underline{\underline{p_0}}$

Input: p_0, tolerancia $\epsilon > 0$, # máximo de iteraciones N_0

output: aproximación de $\underline{\underline{p}}$ ó un mensaje de fallo

Algoritmo:

Paso de Init. $i = 1$ (# de iteraciones)

Paso 1 while $i \leq N_0$ { $p = g(p_0)$ * ←

if $|p - p_0| < \epsilon$ {

then output(p)

exit from program {

$i = i + 1$

$p_0 = p$

{

output ("el método ha fallado para No iteracciones")

$\boxtimes$

5) Teorema de convergencia del Algoritmo del punto fijo

i) Sea $g \in C[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$
ii) g' existe en (a,b) y $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$

$$|g'(x)| \leq k \quad \forall x \in (a,b) \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Para todo número $p_0 \in [a,b]$, la sucesión definida por

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

converge al único punto fijo $p \in [a,b]$.

$g(p_{n-1}) - g(p) = g'(\xi)(p_{n-1} - p)$

Pf: $\cdot$ $|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)|$
$= |g'(\xi_n)|\,|p_{n-1} - p|$ por el teorema del valor medio
$\leq k\,|p_{n-1} - p|$

Recursivamente
$$|p_n - p| < k\,|p_{n-1} - p| < k^2\,|p_{n-2} - p| < \dots < k^n\,|p_0 - p|$$

$(*) \Rightarrow |p_n - p| < k^n\,|p_0 - p|$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| < \left[\lim_{n\to\infty} k^n\right] |p_0 - p|$$

como $0 < k < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} k^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \boxtimes.$$

6) Corolario.- Si $g(x)$ satisface las condiciones del teorema anterior, entonces:

(*) i) $|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, p_0 - b\}$

ii) $|p_n - p| \leq \dfrac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|, \quad n \geq 0$

Pf:

i) Por el teorema anterior, $|p_n - p| \leq k^n |p_0 - p|$

pero $p \in [a,b] \Rightarrow |p_0 - p| \leq \max\{|p_0 - a|, |p_0 - b|\}$

ii) $n \geq 1$,

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k\,|p_n - p_{n-1}| \quad \text{valor medio } |g'(\cdot)| \leq k$$
$$\leq k^2 |p_{n-1} - p_{n-2}|$$
$$\vdots$$
$$\leq k^n |p_1 - p_0|$$

Para $m > n \geq 1$

$$|p_m - p_n| = |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - p_{m-2} + p_{m-2} + \cdots + p_{n+2} - p_{n+1} + p_{n+1} - p_n|$$
$$\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+2} - p_{n+1}| + |p_{n+1} - p_n|$$
$$\leq k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \cdots + k^{n+1}|p_1 - p_0| + k^n |p_1 - p_0|$$
$$(z) \quad (=) \; k^n |p_1 - p_0| \left[1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-2} + k^{m-n-1}\right]$$

Como $p_m \to p$ cuando $m \to \infty \Rightarrow$ cte

$$|p - p_n| = \lim_{m\to\infty} |p_m - p_n| \leq \left[\lim_{m\to\infty} k^n |p_1 - p_0|\right]\left[\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m-n-1} k^j\right]$$

$$|p - p_n| \leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{j=0}^{\infty} k^j$$

Como $0 < k < 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} k^j = \dfrac{1}{1-k}$

$$\Rightarrow |p - p_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| \quad \boxtimes$$

7) Ejemplo: La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene solución única en $[1,2]$. Encontrar la solución utilizando el método del Punto Fijo.

Sol.:

i) $\tilde{g}_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \Rightarrow \tilde{g}_1(x) + x = x + x^3 + 4x^2 - 10$

y definimos $g_1(x) = \tilde{g}_1(x) + x$

Si x^* es P.F. de $g_1(x^*) \Rightarrow \tilde{g}_1(x^*) = 0$.

$g_1(x) = x + x^3 + 4x^2 - 10$.

$g_1(1) = 1 + 1 + 4 - 10 = 6 - 10 = -4 \notin [1,2]$.

$g_1(x)$ no satisface las condiciones del Teorema P.F.

ii) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 10 - x^3 \Rightarrow 4x = \frac{10}{x} - x^2,\ x \neq 0$

$\Rightarrow x = \left[\frac{10}{x} - 4x\right]^{1/2}$ utilizando el hecho de que la solución es única

$g_2(x) = \left[\frac{10}{x} - 4x\right]^{1/2},\ x^* = g_2(x^*)$

$$g_2(x) = \left[\overbrace{\frac{10}{x} - 4x}^{\to 0}\right]^{1/2} \qquad [1,2] \quad x = 2$$

$$g_2(2) = \sqrt{5-8}, \quad g_2(2) \text{ no está definida}$$

$$\frac{10}{x} - 4x < 0 \Rightarrow \frac{10}{x} < 4x \Rightarrow 10 < 4x^2$$

$$\Rightarrow 1 < 4 < \frac{5}{2} < x^2 \Rightarrow 1 < x$$

$g_2(x)$ no está definida en $(1,2]$.

iii) $$x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$$

$$x = \frac{1}{2}\left[10 - x^3\right]^{1/2} =: g_3(x) \qquad [1,2]$$

$$+ \quad +$$

$$g_3'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left[10 - x^3\right]^{-1/2}\left[-3x^2\right] = -\frac{3}{4}x^2\left[10 - x^3\right]^{-1/2}$$

$$\leq 0$$

$g_3(x)$ es decreciente en $[1,2]$

$$g_3(2) = \frac{1}{4}\left[10 - 8\right]^{1/2} \approx 2.12 \notin [1,2]$$

Como $g_3(x)$ es decreciente, es más conveniente analizar $g_3(x)$ en el intervalo $[1, 3/2]$

$$g_3(3/2) \approx 1.28 \in [1, 3/2]$$

$$g_3(1) = \frac{1}{2}\left[10 - 1\right]^{1/2} = \frac{3}{2} \in [1, 3/2] \Rightarrow g_3(x) \in [1, 3/2]$$

✓

$|g_3'(x)| \leq 1$ Graficando en Matlab

$$g_4(x) = \left[\frac{10}{4+x}\right]^{1/2} \quad , [1,2]$$

$g_4(x)$ cumples las condiciones (ejercicio).

Métodos Implícitos:

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}) & t \in [a, b] \\ \underline{y}(a) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

1) Trapecio

$$\hat{\underline{y}}_0 = \underline{y}_0$$

$$\hat{\underline{y}}_{i+1} = \hat{\underline{y}}_i + \frac{h}{2}\left[\underline{f}(t_i, \hat{\underline{y}}_i) + \underline{f}(t_{i+1}, \hat{\underline{y}}_{i+1})\right]$$

El método del Trapecio tiene error de convergencia de $O(h^2)$

2) Método Euler-Implícito

$$\hat{\underline{y}}_0 = \underline{y}_0$$

$$\hat{\underline{y}}_{i+1} = \hat{\underline{y}}_i + h\,\underline{f}(t_{i+1}, \hat{\underline{y}}_{i+1})$$

Error de convergencia de $O(h)$

Euler explícito

$$\hat{\underline{y}}_0 = \underline{y}_0$$

$$\hat{\underline{y}}_{i+1} = \hat{\underline{y}}_i + h\,\underline{f}(t_i, \hat{\underline{y}}_i)$$