B.T. 5.2

→ Análisis de Convergencia para el método de Euler

→ Lemma 1. Sea $x \geq -1$ y m un entero positivo

$$\Rightarrow \quad 0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$$

Prueba:

Utilizamos el T. Taylor para $f(x) = e^x$

x alrededor del punto 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(\xi)\frac{x^2}{2}, \ \xi \in (0,x)$$

$$(1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{\xi}$$

⇒ como $x \geq -1$

$$0 \leq (x+1) \leq (x+1) + \underbrace{\frac{x^2}{2}e^{\xi}}_{\geq 0} = e^x$$

$$\Rightarrow \quad (x+1)^m \leq e^{mx}$$

■.

$a, b \geq 0$

$a \leq b$

$\Rightarrow a^2 \leq b^2$

$\Rightarrow$ Lemma 2 . Sean t, s números reales positivos

Sea $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ una sucesión que satisface:

desigualdades Gronwall

$$\text{i)} \quad a_0 \geq -\frac{t}{s}$$

$$(*) \quad \text{ii)} \quad a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t \qquad i = 0, \dots, k-1$$

$$\Rightarrow \qquad a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left[a_0 + \frac{t}{s}\right] - \frac{t}{s}$$

Pf:

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t$$

$$\leq (1+s)[(1+s)a_{i-1} + t] + t$$

$$(=) \quad (1+s)^2 a_{i-1} + t[1 + (1+s)]$$

$$\leq (1+s)^2[(1+s)a_{i-2} + t] + t[1 + (1+s)]$$

$$(=) \quad (1+s)^3 a_{i-2} + t[1 + (1+s) + (1+s)^2]$$

$$\leq (1+s)^3[(1+s)a_{i-3} + t] + \quad \checkmark$$

$$(=) \quad (1+s)^4 a_{i-3} + t[1 + (1+s) + (1+s)^2 + (1+s)^3]$$

$$\vdots$$

$$a_{i+1} \leq (1+s)^{i+1} a_0 + t\,\underbrace{[1 + (1+s) + (1+s)^2 + \dots + (1+s)^i]}.$$

$a \geq 0$, $a \neq 1$

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{(1 - a^{n+1})}{(1 - a)}$$

$$a_{i+1} \leq (1+s)^{i+1} a_0 + t \left[\frac{1 - (1+s)^{i+1}}{1 - (1+s)} \right]$$

$$(=) \ (1+s)^{i+1} c_0 + t \left[\frac{1 - (1+s)^{i+1}}{-s} \right] = (1+s)^{i+1} \left[c_0 + \frac{t}{s} \right] - \frac{t}{s}$$

utilizando el Lemma 1 $\quad x = s$

$m = i+1$

$$\Rightarrow \quad a_{i+1} \leq e^{(i+1)s} \left[a_0 + \frac{t}{s} \right] - \frac{t}{s}$$

$\Rightarrow$ Teorema $\quad P^* \begin{cases} y' = f(t,y), & t \in (a,b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

i) Sea f una función continua y satisface la condición de Lipschitz en "y" con cte. L en el conjunto

$D = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq b \ \& \ -\infty < y < \infty \}$

ii) Sea $M > 0$ tal que $|y''(t)| \leq M \ \forall \ t \in [a,b]$ donde $y(t)$ es la solución única del P^*

iii) Sea $\{\hat{y}_i\}_{i=0}^{N}$ los valores obtenidos utilizando el método de Euler.

Entonces $$|y(t_i) - \hat{y}_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right] \overset{*}{=}$$

$i = 0, \dots, N$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{N}}$$

Df: $i=0$ es claro porque $\hat{y}_0 = y_0$ en la etapa de inicialización

Utilizando el T. Taylor:

$$(*) \quad y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\,\overbrace{f(t_i, y(t_i))}^{y'(t_i)} + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_i), \quad \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

$$(**) \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f(t_i, \hat{y}_i)$$

$$\Rightarrow \quad y(t_{i+1}) - \hat{y}_{i+1} = y(t_i) - \hat{y}_i + h\left[f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, \hat{y}_i)\right] + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

$$\Rightarrow \quad |y(t_{i+1}) - \hat{y}_{i+1}| \leq |y(t_i) - \hat{y}_i| + h\,\overbrace{|f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, \hat{y}_i)|} + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_i)|$$

Pero f satisface la condición de Lipschitz, y $|y''(t)| \leq M$
$t \in [a,b]$

$$\Rightarrow |y(t_{i+1}) - \hat{y}_{i+1}| \leq (1+Lh)|y(t_i) - \hat{y}_i| + \frac{h^2 M}{2}$$

Usando el Lemma 2. $a_i = |y(t_i) - \hat{y}_i|$, $a_0 = 0$

$$1+s = 1+Lh$$
$$s = Lh \quad , \quad t = \frac{h^2 M}{2}$$

$$\Rightarrow |y(t_{i+1}) - \hat{y}_{i+1}| \leq e^{(i+1)Lh} \left[\frac{h^2 M}{2Lh} \right] - \frac{h^2 M}{2Lh}$$

$$(i+1)h = \overbrace{(i+1)h + a}\, - a$$
$$= t_{i+1} - a$$

$$\Rightarrow |y(t_{i+1}) - \hat{y}_{i+1}| \leq \left[e^{(t_{i+1}-a)L} - 1 \right] \frac{hM}{2L}$$

✓