Teorema de
→ Error de truncamiento para métodos multipaso

1) Forma grel. de un método multipaso (caso escalar) de m-niveles

$$\hat{y}_{i+1} = a_{m-1}\hat{y}_i + a_{m-2}\hat{y}_{i-1} + \dots + a_0\hat{y}_{i+1-m}$$
$$+ h\left[b_m f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, \hat{y}_i) + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, \hat{y}_{i+1-m}) \right]$$

Si $b_m \neq 0$ entonces es un método implícito.

1.i) Notación compacta

$$\underline{1^k)} \qquad \hat{y}_{i+1} = \sum_{s=1}^{m} a_{m-s}\hat{y}_{i+1-s} + h\sum_{s=0}^{m} b_{m-s} f(t_{i+1-s}, \hat{y}_{i+1-s})$$

2) Error de truncamiento (consistencia)

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{1}{h}\underbrace{y(t_{i+1})} - \frac{1}{h}\sum_{s=1}^{m} a_{m-s}\underbrace{y(t_{i+1-s})} - \sum_{s=0}^{m} b_{m-s}\, y'(t_{i+1-s})$$

3) **Teorema**: El método multipaso en la forma gral. (*) tiene un error de truncamiento de $O(h^r)$ si se cumplen las sig. condiciones:

i) $\sum_{s=1}^{m} a_{m-s} = 1$

ii) $m^k - \sum_{s=1}^{m} (m-s)^k a_{m-s} - k \sum_{s=0}^{m} (m-s)^{k-1} b_{m-s} = 0$

donde $k=1,\dots,r$ y por convención $0^0 = 1$.

iii) $m^{(r+1)} - \sum_{s=1}^{m} (m-s)^{r+1} a_{m-s} - r \sum_{s=1}^{m} (m-s)^r b_{m-s} \neq 0$.

Dem:

Recordar que para una función $f(x)$ tenemos su polinomio de Taylor

$$f(x+\tilde{h}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{h}^k f^{(k)}(x)}{k!} \quad , f^{(k)} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$y(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mh)^k}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m}) \quad , t_{i+1} - t_{i+1-m} = (i+1)h - (i+1-m)h = mh$$

$$y(t_{i+1-s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-s)^k h^k}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m}) \quad , t_{i+1-s} - t_{i+1-m} = (m-s)h$$

$s = m$?

$$y(t_{i+1-m}) = y(t_{i+1-m}) \qquad 0^0 = 1$$

$$\underline{y'(t_{i+1-s})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m-s)^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$

radio convergencia $\overbrace{t_{i+1}, t_i, \ldots, t_{i+1-m}}$

$$\tau_{i+1}(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k h^{k-1}}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$
$$- \sum_{s=1}^{m} a_{m-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-s)^k h^{k-1}}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$
$$- \sum_{s=0}^{m} b_{m-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m-s)^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$

$$\tau_{i+1}(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k h^{k-1}}{k!} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$ usando Fubini*

(**)

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{m} a_{m-s} \frac{(m-s)^k}{k!} h^{k-1} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} b_{m-s} \frac{(m-s)^{k-1}}{(k-1)!} h^{k-1} y^{(k)}(t_{i+1-m})$$

Para obtener $\tau_{i+1}(h) \sim O(h^r)$ necesitamos que todos los términos con h^{k-1} $k=0, \ldots, r$ de (**) se anulen y que el término h^r no se anule. $(y^{(k)}(t_{i+1-m}) \neq 0)$

Entonces igualamos los términos con $h^{k-1} y^{(k)}(t_{i+1-m})$

para que sean cero $k = 0, \dots, r$

i) $k=0$ $\frac{y(t_{i+1-m})}{h}\left[1 - \sum_{s=1}^{m} a_{m-s}\right] = 0$

ii) $k = 1, \dots, r$

$$h^{k-1} y^{(k)}(t_{i+1-m})\left[\frac{m^k}{k!} - \sum_{s=1}^{m} \frac{(m-s)^k}{k!} a_{m-s} - \sum_{s=0}^{m} \frac{(m-s)^{k-1}}{(k-1)!} b_{m-s}\right] = 0$$

iii) $k = r+1$

$$y^{(r+1)}(t_{i+1-m})\left[\frac{m^{r+1}}{(r+1)!} - \sum_{s=1}^{m} \frac{(m-s)^{r+1}}{(r+1)!} \dots \right] \neq 0.$$

4) Ejemplos (del Teorema)

4.1) Método de Adams-Bashfort (explícito)

$m=2$. Dados $\hat{y}_0, \hat{y}_1$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2}\left[3f(t_i,\hat{y}_i) - f(t_{i-1},\hat{y}_{i-1})\right]$$

$\tau_{i+1}(h) \sim h^2 \Leftarrow$

$m=2, \ r=2$

$a_0=0, \ a_1=1, \quad b_2=0, \ b_1=\frac{3}{2}, \ b_0=-1/2$

Condiciones del Teorema:

i) $\sum a_m = 1$ ✓

ii) $k=1$:

$$2 - \sum_{s=1}^{2}(2-s)^1 a_{2-s} - 1\sum_{s=0}^{2}(2-s)^0 b_{2-s} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\hookrightarrow = 2 - (2-1)a_1 - 0 \quad - 1\cdot 2\cdot b_2 - 1\cdot b_1 - b_0$$

$$= 2 - a_1 - b_2 - b_1 - b_0$$

$$= 2 - 1 - 0 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$ ✓

$K=2$

$$2^2 - \sum_{s=1}^{2} (2-s)^2 a_{2-s} - 2\sum_{s=0}^{2} (2-s)^1 b_{2-s}$$

$$= 4 - a_1 - 2[\,2b_2 + b_1\,]$$

$$= 4 - 1 - 2[\,0 + \tfrac{3}{2}\,] = 4 - 1 - 3 = 0$$

métodos Predictor - Corrector. Multipaso.

Adams - Moulton (implícito)

$m=2$, Dados $\hat{y}_0$, $\hat{y}_1$

(A.M.) $$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{12}\left[5 f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + 8 f(t_i, \hat{y}_i) - f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1})\right]$$

$$\tau_{i+1}(h) \sim h^3$$

(A.B.) $$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2}\left[3 f(t_i, \hat{y}_i) - f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1})\right]$$

Los métodos Predictor - Corrector utilizan métodos implícito (A.M) pero para aproximar la parte implícita $f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$ se utiliza $f(t_{i+1}, \hat{y}^*_{i+1})$ donde $\hat{y}^*_{i+1}$ es una aproximación "predictora" utilizando un método explícito (A.B) y entonces $\hat{y}_{i+1}$ es la aproximación correctora.

Ej:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{12}\left[5f(t_{i+1}, \hat{y}^*_{i+1}) + 8\ldots\right]$$

donde $$\hat{y}^*_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2}\left[3f(t_i, \hat{y}_i) - f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1})\right]$$