→ Convergencia de Métodos Numéricos para sistemas de EDOs con condición inicial

(*)
$$\underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}) \quad t \in (a,b)$$
$$\underline{y}(a) = \underline{y}_0$$

es continua

1) Def: Una función $\underline{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n}$ (t ↓ ↓ y)

satisface la condición de Lipschitz en la variable $\underline{y}$ si existe $L > 0$ tal que

$$\| \underline{f}(t, \underline{y}_1) - \underline{f}(t, \underline{y}_2) \| \leq L \| \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \|$$

$(t, \underline{y}_1), (t, \underline{y}_2) \in D$, donde $\| \ \|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. Comunmente la Euclideana.

2) Sea $\underline{f} : D \to \mathbb{R}^n$ donde $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, D es convexo. Entonces si existe $L > 0$ tal que

(1)
$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right| \leq L \quad i, k = 1, \dots, n$$

⇒ $\underline{f}$ satisface la condición de Lipschitz en la variable $\underline{y}$ en el dominio D.

3) Sea $D = \{ (t, \underline{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid$

$a \leq t \leq b, \ -\infty < y_j < \infty \quad j = 1, \dots n \}$

El problema (1) tiene solución única.

4) $\underline{\text{Def}}$: Un método numérico es convergente si:

$$\lim_{h \to 0^+} \max_{i=0 \dots N} \| \underline{y}(t_i) - \hat{\underline{y}}_i \| = 0.$$

$$\underline{e}_i := \underline{y}(t_i) - \hat{\underline{y}}_i$$

$$\lim_{h \to 0^+} \max_{i=0,\dots N} \| \underline{e}_i \| = 0. \leftarrow$$

$h = \frac{b-a}{N}$, N: # subintervalos que divide $[a,b]$.

5) Lemma 2. Sean t, s números reales positivos

Sea $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ una sucesión que satisface

i) $a_0 \geq -\frac{t}{s}$

ii) $a_{i+1} \leq (1+s) a_i + t, \quad i = 0, \dots, k-1$

$\Rightarrow \quad a_{i+1} \leq e^{(i+1)s} \left[a_0 + \frac{t}{s} \right] - \frac{t}{s}$

6) El método de Euler para Problema $\underline{\underline{(*)}}$, es convergente. Suponiendo $\underline{f}$ satisface la condición de Lipschitz y $\|\underline{y}''(t)\| < M \ \forall t \in [a,b]$

$\underline{\underline{(**)}}$
$$\hat{\underline{y}}_0 = \underline{y}_0$$
$$\hat{\underline{y}}_{i+1} = \hat{\underline{y}}_i + h\,\underline{f}(t_i, \hat{\underline{y}}_i) \qquad i = 0, \ldots, N$$

Por T. Taylor.
$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + h\,\underline{y}'(t_i) + \frac{h^2}{2}\underline{y}''(\underline{\xi}_i)$$

$$[\underline{\xi}_i]_j \in (t_i, t_{i+1}) \quad j = 1, \ldots, n$$

$\underline{\underline{(***)}}$ $\Rightarrow \underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + h\,f(t, \underline{y}(t_i)) + \frac{h^2}{2}\underline{y}''(\underline{\xi}_i)$

$(**)$ $(***)$

$$\underbrace{\underline{y}(t_{i+1}) - \hat{\underline{y}}_{i+1}}_{\underline{e}_{i+1}} = \overbrace{\underline{y}(t_i) - \hat{\underline{y}}_i}^{e_i} + h\left[\underline{f}(t_i, \underline{y}(t_i)) - \underline{f}(t_i, \hat{\underline{y}}_i)\right] + \frac{h^2}{2}\underline{y}''(\underline{\xi}_i)$$

$\|\underline{a} + \underline{b}\| \leq \|\underline{a}\| + \|\underline{b}\|$
$\|\lambda \underline{a}\| \leq |\lambda| \|\underline{a}\|$

$$\Rightarrow \|\underline{e}_{i+1}\| \leq \|\underline{e}_i\| + h\,\|\overbrace{\underline{f}(t_i, \underline{y}(t_i)) - \underline{f}(t_i, \hat{\underline{y}}_i)}\| + \frac{h^2}{2}\underbrace{\|\underline{y}''(\underline{\xi}_i)\|}_{< M}$$

$$\Rightarrow \|\underline{e}_{i+1}\| \le \|\underline{e}_i\| + hL\,\overbrace{\|\underline{y}(t_i) - \hat{\underline{y}}_i\|}^{\underline{e}_i} + \frac{Mh^2}{2}$$

$$\le \underbrace{[1+hL]}_{s}\|\underline{e}_i\| + \underbrace{\frac{Mh^2}{2}}_{t}$$

$a_i = \|\underline{e}_{i+1}\|$

$a_0 = 0 \ge -\frac{t}{s}$

utilizamos el Lemma 2.

$$\|\underline{e}_{i+1}\| \le e^{(i+1)hL}\left[0 + \frac{Mh^{\cancel{2}}}{2\cancel{h}L}\right] - \frac{Mh^{\cancel{2}}}{2\cancel{h}L}$$

$$\le \frac{M}{2L}h\left[e^{(i+1)hL} - 1\right]$$

$$(i+1)h = (i+1)h \pm a = t_{i+1} - a$$

$$\Rightarrow \|\underline{e}_{i+1}\| \le \frac{Mh}{2L}\left[e^{(t_{i+1}-a)L} - 1\right]$$

$$\lim_{h\to 0^+} \|\underline{e}_{i+1}\| \le \left(\lim_{h\to 0^+} \frac{Mh}{2L}\right)\underbrace{\left[\quad\right]}_{cte}$$

$$\le 0 \cdot cte = 0$$

$\blacksquare$

7) Método del Trapecio.

$$\hat{y}_{i+1}$$

$$\begin{cases} \underline{\hat{y}}_0 = y_0 \\ \underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + \dfrac{h}{2}\left[\underline{f}(t_i, \underline{\hat{y}}_i) + \underline{f}(t_{i+1}, \overbrace{\underline{\hat{y}}_{i+1}})\right] \end{cases}$$

$i = 0, \ldots, N$