

# Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Tarea II

Daniel Castañón Quiroz<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

September 12, 2022

### 1 Problemas Teóricos

1. Utilizar el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial para demostrar que los siguientes problemas tienen solución única. Adicionalmente, para cada uno de los problemas encuentra su solución única:

(a)  $y' = y \cos(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ .

(b)  $y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ .

(c)  $y' = \frac{4t^3 y}{1 + t^4}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ .

2. Demostrar que el método del punto medio definido como:

$$\hat{y}_0 = y_0$$
$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h \left( f \left( t_i + \frac{h}{2}, \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \hat{y}_i) \right) \right) \text{ para } i \in \{0, \dots, N-1\},$$

que se emplea para aproximar la ecuación diferencial ordinaria escalar:

$$y' = f(t, y) \quad t \in (a, b)$$
$$y(a) = y_0.$$

tiene un error de truncamiento de orden  $r = 2$ . (**Sugerencia:** utilizar el hecho de que  $f$  satisface la condición de Lipschitz en la variable  $y$ , el teorema de Taylor varias veces, y la desigualdad  $x \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$ ).

3. Utiliza el teorema de Taylor con residuo para obtener la siguiente aproximación de tercer orden para una función suficientemente derivable  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$y(x + 3h) = 3y(x + 2h) - 3y(x + h) + y(x) + Ch^3,$$

donde  $C$  es una constante.

4. Demostrar que el conjunto  $D := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$  es un conjunto convexo.

---

<sup>\*</sup>[daniel.castanon@iimas.unam.mx](mailto:daniel.castanon@iimas.unam.mx)

5. Sea la ecuación diferencial ordinaria escalar:

$$y' = f(t, y) \quad t \in (a, b), \quad (1)$$

$$y(a) = y_0. \quad (2)$$

Supongase lo siguiente:

- (a) La función  $f(t, y)$  satisface la condición de Lipschitz en la variable  $y$  con constante Lipschitz  $L_1$ .
- (b)  $f'(t, y)$  satisface la condición de Lipschitz en la variable  $y$  con constante Lipschitz  $L_2$ , donde  $f'(t, y) := \frac{d}{dt}[f(t, y)]$ .
- (c)  $|\frac{d^3 y}{dt^3}(t)| \leq M$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Sea  $\hat{y}_i$  la aproximación de la solución  $y(t_i)$  utilizando el método de Taylor de orden  $m = 2$ . Entonces demostrar que

$$|y(t_i) - \hat{y}_i| \leq Ch^2 \quad \text{para } i \in \{0, \dots, N\}, \quad (3)$$

donde  $C$  es una constante,  $N$  es el número de sub-intervalos que divide a  $[a, b]$ , y  $h = (b-a)/N$ . Supóngase adicionalmente que  $h < 1$ .

---