

→ los métodos explícitos Runge-Kutta (caso escalar)

1) Son métodos de orden superior (como los métodos de Taylor) que no requieren $f', f'', f^{(3)} \dots$

2) Teorema de Taylor para dos variables (indep)

Sea $f(t, y)$ y todas sus derivadas parciales de orden menor o igual a $n+1$ continuas en $D = \{ (t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq b, c \leq y \leq d \}$

y sea $(t_0, y_0) \in D$. Entonces para todo punto $(t, y) \in D$

existe $(\xi, \mu) \in D$ tal que

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y)$$

donde

$$P_n(t, y) = f(t_0, y_0) + \left[(t-t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y-y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right] \\ + \left[\frac{(t-t_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + (t-t_0)(y-y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) + \frac{(y-y_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \right] \\ + \dots + \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (t-t_0)^{n-j} (y-y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j} \partial y^j}(t_0, y_0) \right]$$

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t-t_0)^{n+1-j} (y-y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j}(\xi, \mu)$$

3) Métodos de R.K. de orden $r=2$

i) Recordemos el M. de Taylor de orden $r=2$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h T^{(2)}(t_i, \hat{y}_i) \quad \leftarrow$$

$$\underline{T^{(2)}(t, y)} = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y) \quad \leftarrow$$

ii) Queremos aproximar $T^{(2)}(t, y)$ con un error $O(h^2)$ con una expresión de la forma:

$$a, f(t+\alpha, y+\beta)$$

$$\underline{(*)} \quad T^{(2)}(t, y) = a, f(t+\alpha, y+\beta) + \underline{O(h^2)} \quad , \alpha, \beta, a, \in \mathbb{R}$$

Queremos un error de $O(h^2)$ porque el método de Taylor de orden $r=2$ tiene un error de truncamiento/convergencia de orden 2

$$iii) \quad f'(t, y) = \frac{d}{dt} f(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y)$$

$$en \quad (**) \quad f(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y) \simeq a, f(t+\alpha, y+\beta)$$

iv) Ahora utilizamos el T. de Taylor para 2 variables a $a, f(t+\alpha, y+\beta)$ en el punto (t, y)

$$a_1 f(t+\alpha, y+\beta) = a_1 f(t, y) + a_1 \alpha \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + a_1 \beta \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + a_1 R_1(t+\alpha, y+\beta)$$

↪

$$R_1(t+\alpha, y+\beta) = \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \alpha \beta \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu)$$

Recordar que queremos $T^{(2)}(t, y) = a_1 f(t+\alpha, y+\beta)$

$$\Rightarrow \underbrace{f(t, y)} + \underbrace{\frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t, y)} + \underbrace{\frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)} = \underbrace{a_1 f(t, y)} + \underbrace{a_1 \alpha \frac{\partial f}{\partial t}(t, y)} + \underbrace{a_1 \beta \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)} + \underbrace{a_1 R_1(t+\alpha, y+\beta)}$$

Iguamos término x término

$$\underline{a_1 = 1}, \quad \underline{\frac{h}{2} = a_1 \alpha} \Rightarrow \underline{\alpha = \frac{h}{2}}$$

$$\frac{h}{2} f(t, y) = \beta a_1 \Rightarrow \underline{\beta = \frac{h}{2} f(t, y)}$$

$$\Rightarrow T^{(2)}(t, y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) + R_1(t+\alpha, y+\beta)$$

$$R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) = \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \frac{h^2}{4} f(t, y) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{h^2}{8} (f(t, y))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu)$$

Si todas las derivadas parciales de orden 2 son continuas y acotadas, entonces

$$R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) = O(h^2)$$

Este es el método del punto medio:

$$\hat{y}_0 = y_0$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right), \quad i=0, \dots, N$$



→ El método de Euler modificado, se obtiene

aproximando $T^{(2)}(t, y)$ con

$$\alpha_1 f(t, y) + \alpha_2 f\left(t + \alpha, y + \beta f(t, y)\right),$$

entonces utilizando el mismo proceso anterior obtenemos

$$T^{(2)}(t, y) = \frac{1}{2} f(t, y) + \frac{1}{2} f\left(t+h, y + h f(t, y)\right) + \underline{\underline{O(h^2)}}$$

método de Euler modificado

$$\leadsto \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \hat{y}_i) + \frac{h}{2} f\left(t_i + h, \hat{y}_i + h f(t_i, \hat{y}_i)\right)$$

→ Notación por tablas de los métodos de Runge-Kutta

1) * Caso Explícito

k -etapas

k -variables
intermedias

k :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \hat{y}_i \\ \xi_2 &= \hat{y}_i + h a_{21} f(t_i, \xi_1) \\ \xi_3 &= \hat{y}_i + h a_{31} f(t_i, \xi_1) \\ &\quad + h a_{32} f(t_i + c_2 h, \xi_2) \\ &\vdots \\ \xi_k &= \hat{y}_i + h \sum_{j=1}^{\boxed{k-1}} a_{kj} f(t_i + \underline{c_j} h, \underline{\xi_j}) \\ \hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + h \sum_{j=1}^k b_j f(t_i + c_j h, \xi_j) \end{aligned}$$

Un método de Runge-Kutta está determinado por 4 cosas:

1) k -etapas

2) $A = [a_{kj}]$, $\underline{b} = [b_j]$, $\underline{c} = [c_j]$
 $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^k$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

donde gral. $\underline{c}_1 = 0$

Notación de tabla

\underline{c}	A
	\underline{b}^t

A : es una matriz estrictamente triangular inferior

2) Ejemplo: mét. del punto medio.

$k=2$

0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0
	1

i.e., $\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$
 $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^t$

$$\xi_1 = \hat{y}_i$$

$$\xi_2 = \hat{y}_i + \sum_{j=1}^1 h a_{2j} f(t_i + c_j h, \xi_j)$$

$$= \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \hat{y}_i)$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \sum_{j=1}^2 h b_j f(t_i + c_j h, \xi_j)$$

$$= \hat{y}_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \hat{y}_i)\right) \checkmark$$

3) Método de Euler Modificado:

$k=2$

0	
1	1
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$

4) Métodos de Runge-Kutta de orden 3

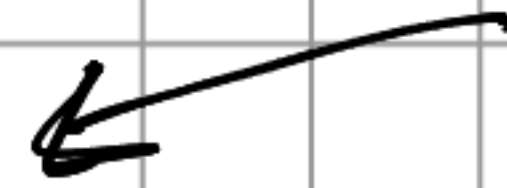
se busca aproximar

$$T^{(3)}(t, y) = f\left(t + \alpha_1, y + \beta_1 f\left(t + \alpha_2, y + \beta_2 f(t, y)\right)\right) + \underline{\underline{O(h^3)}}$$

4.i) método clásico de R.K. (orden 3)

$k=3$

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	-1	2	
<hr/>			
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$



4.ii) método de Nyström

$k=3$

0			
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
<hr/>			
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$