→ Dominio de Estabilidad lineal y estabilidad - A para métodos de un paso/nivel

1). Motivación. (EDOs Rígidas)

$\underline{\underline{(*)}}$ $$y' = \lambda y \qquad t \in (0, \infty) \text{ ó } t \in (0, M)$$
$$y(0) = y_0$$

"M es grande"

donde $\underline{\underline{\lambda}} < 0$. Observar que la solución de $\underline{(*)}$ es $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ como $\lambda < 0 \Rightarrow$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

2) M. Euler explícito para $\underline{\underline{(*)}}$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f(t_i, \hat{y}_i)$$
$$= \hat{y}_i + h \lambda \hat{y}_i = (1 + h\lambda) \hat{y}_i$$
$$= (1 + h\lambda)^2 \hat{y}_{i-1} = \ldots = (1 + h\lambda)^{i+1} y_0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y}_i = (1 + h\lambda)^i y_0$$

2.i) El error de convergencia es:

$$|y(t_i) - \hat{y}_i| = |y_0 e^{\lambda t_i} - y_0 (1+\lambda h)^i|$$

$$= |y_0| \, | \underbrace{e^{\lambda t_i}}_{\alpha_i} - \underbrace{(1+\lambda h)^i}_{\beta_i} |$$

si $t_i \to \infty$

$\Rightarrow \alpha_i \to 0$ pero $\beta_i \to 0$ si y solo si

$$|1+\lambda h| < 1.$$

$|1+\lambda h| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1+\lambda h < +1$

$\Leftrightarrow -2 < \lambda h < 0 \Leftrightarrow h < -\frac{2}{\lambda}$

$$\Leftrightarrow h < \frac{2}{|\lambda|}$$

3) Def. de Dominio de Estabilidad para métodos de un nivel.

Sea la EDO:

(*) $y' = \lambda y \; , \; t \geq 0 \; , \; y(0) = 1$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$. La solución (*) es

$\rightsquigarrow y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = 0$

si y sólo si $Re(\lambda) < 0$. Utilizando un método numérico de un nivel y de paso h (cte) para resolver (*), entonces se define el dominio $\mathcal{D}$ de estabilidad del método numérico

como el conjunto de números complejos

$h\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{t \to \infty} \hat{y}_i = 0$.

En otras palabras, el dominio $\mathcal{D}$ es el conjunto de números $h\lambda$ para los cuales se obtiene un correcto comportamiento asintótico para (*) cuando $i \to \infty$

3.i) Pare el método exp. de Euler.

$$\hat{y}_i = (1+h\lambda)^i$$

entonces para la sucesión $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{\infty}$ tenemos que

$$\lim_{i\to\infty} \hat{y}_i = 0 \quad \text{si y solo si} \quad |1+h\lambda| < 1$$

entonces $D_{Euler} = \{ z \in \mathbb{C} : |1+z| < 1 \}$

$z = x + yi$