→ Métodos Multipaso (caso escalar)

1) $$y' = f(t,y) \quad t \in (a,b)$$
$$y(a) = y_0$$

$$\hat{y}_0 = y_0$$
$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \phi(h, t_i, f, \hat{y}_i, \hat{y}_{i+1}) \longleftarrow$$

$\hat{y}_{i+1}$ puede depender de los puntos $\hat{y}_{i-1}, \hat{y}_{i-2}, \hat{y}_{i-3}, \dots, \hat{y}_0$

Por ejemplo $\hat{y}_3$ puede utilizar $\hat{y}_2, \hat{y}_1$

2) Los métodos multipaso son métodos que utilizan aproximaciones anteriores a la aproximación anterior

Formalmente:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{y}_{i+1} &= \overbrace{a_{m-1}\hat{y}_i + a_{m-2}\hat{y}_{i-1} + \dots + a_0 \hat{y}_{i+1-m}}^{m+1 \text{- puntos anteriores}} \\ &\quad + h\big[\underline{\underline{b_m}} f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, \hat{y}_i) + b_{m-2} f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) \\ &\quad + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, \hat{y}_{i+1-m}) \big] \end{aligned} \right.$$

$i = m-1, m, \dots, N-1$, $h = \frac{b-a}{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$

son constantes. Si $b_m \neq 0$ entonces es un mét. implícito.

Tenemos valores iniciales $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{m-1}$

3) Ejemplos:

3.i) Mét. Adams-Moulton. Dados: $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{24}\left[9f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + 19 f(t_i, \hat{y}_i) - 5 f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) + f(t_{i-2}, \hat{y}_{i-2}) \right] \quad i = 2, \dots, N$$

Cuando $i=2$ necesitamos para calcular $\hat{y}_3$: $\hat{y}_2, \hat{y}_1, \hat{y}_0$

$t_i = a + ih$, (Recordar)

3.ii) Adams-Bashfort. Dados los valores aproximados $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{24}\left[55f(t_i, \hat{y}_i) - 59 f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, \hat{y}_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, \hat{y}_{i-3}) \right]$$

$$i = 3, \dots, N$$

4) Derivación de los métodos multipaso

$$(*) \quad y' = f(t,y) \quad t \in (a,b)$$
$$y(a) = y_0$$

$y' = \frac{dy}{dt}$, integrando en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dy}{dt}\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \overline{y(t_{i+1})} = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, \overline{y(t)})\,dt$$

Como no tenemos la solución exacta $y(t)$, no podemos evaluar la integral de forma exacta. La técnica de los métodos multipaso es aproximar $f(t, y(t))$ por un polinomio $P_{m-1}(t) \in \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{R})$

($\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{R}) = \{$ conjunto de polinomios de hasta grado o igual de $m-1$ $\}$)

que interpola los m-puntos:

$$(t_i, f(t_i, \hat{y}_i)), \ (t_{i-1}, f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1})), \ (t_{i-2}, f(t_{i-2}, \hat{y}_{i-2})) \ldots$$

$$(t_{i+1-m}, f(t_{i+1-m}, \hat{y}_{i+1-m}))$$

y entonces obtenemos la aproximación sig.:

$$y(t_{i+1}) \simeq y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_{m-1}(t)\,dt$$

5) Repaso de interpolación Polinomial

Notación Sea $P_n(x) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

5.i) Polinomios de interpolación con "diferencias divididas "por atrás"" "atrasadas"

Sea $\{\rho_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión. Se introduce el operador de "diferencia atrasada" como $\nabla \rho_j = \rho_j - \rho_{j-1} \quad j \geq 1$

Recursivamente se define $\nabla^k \rho_j = \nabla(\nabla^{k-1} \rho_j)$ y $\nabla^0 \rho_j = \rho_j$

Por ejemplo: $\nabla^2 \rho_j = \nabla(\nabla \rho_j) = \nabla(\rho_j - \rho_{j-1})$

$$= \nabla \rho_j - \nabla \rho_{j-1}$$
$$= (\rho_j - \rho_{j-1}) - (\rho_{j-1} - \rho_{j-2})$$
$$= \underline{\rho_j} - \underline{2} \rho_{j-1} + \underline{\ } \rho_{j-2}$$

$$\nabla^3 \rho_j = \nabla(\nabla^2 \rho_j) = \nabla(\rho_j - 2\rho_{j-1} + \rho_{j-2})$$
$$= \nabla \rho_j - 2\nabla \rho_{j-1} + \nabla \rho_{j-2}, \quad \nabla(a\rho_j) = a\nabla \rho_j$$
$$= \rho_j - \rho_{j-1} - 2(\rho_{j-1} - \rho_{j-2}) + (\rho_{j-2} - \rho_{j-3})$$
$$= \underline{\rho_j} - \underline{3} \rho_{j-1} + \underline{3} \rho_{j-2} \underline{-} \rho_{j-3}$$

5.ii) $\underline{\text{Def}}$. Sean los $(n+1)$-puntos ordenados, distintos y equidistantes

$x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$, i.e., $x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = \dots = x_1 - x_0 := \underline{h}$

$x_n > x_{n-1} > x_{n-2} \dots > x_1 > x_0$

Entonces, para $x = x_n + sh$, s es un entero positivo

Dado $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces se define

$$P_n(x) = f(x_n) + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n)$$

$$+ \dots + (-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f(x_n) = f(x_n) + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

donde $\binom{-s}{k} = (-1)^k s(s+1)(s+2)\cdot\ldots(s+k-1)$, $k \geq 1$

5.iii) Teorema de interpolación polinomial por diferencias atrasadas

Sean los $(n+1)$-puntos $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ equidistantes, distintos y ordenados. y sea $f \in C^{n+1}[a,b]$. Entonces para

$$x = x_n + sh, \quad s \in \mathbb{Z}^+, \quad h = x_n - x_{n-1} = \ldots = x_1 - x_0$$

$x \in [a,b]$, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$