

→ métodos de Taylor de orden n

Burden - Faires 5.3

→ motivación:

(*) $y' = f(t, y), \quad t \in (a, b)$
 $y(a) = y_0$

método de diferencias gral:

$N := \# \text{ intervalos}$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

(**)

$$\hat{y}_0 = y_0$$

$$\hat{y}_i = \hat{y}_{i-1} + h \underbrace{\phi(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1})}_{t_i = a + ih \quad i=0, \dots, N}$$

→ $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

→ El error de truncamiento del método (**) se define como:

(***)
$$\tau_{i+1}(h) = \frac{1}{h} [y(t_{i+1}) - (y(t_i) - h \phi(t_i, y(t_i)))]$$
$$= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \phi(t_i, y(t_i))$$

* Ejemplo: m. de Euler:

$$\begin{aligned}\hat{y}_0 &= y_0 \\ \hat{y}_i &= \hat{y}_{i-1} + h f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) \quad i=0 \dots N\end{aligned}$$

$$\phi(t_i, \hat{y}_i) = f(\cdot, \cdot) \quad y'(t_i) = \phi(t_i) \quad \leftarrow$$

Teorema de Taylor:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h \overbrace{f(t_i, y(t_i))}^{y'(t_i)} + \frac{h^2}{2!} y''(\xi_i)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i) - f(t_i, y(t_i))}{h}}_{\tau_{i+1}(h)} = \frac{h}{2} y''(\xi_i) \quad \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

$$\Rightarrow \tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2} y''(\xi_i) = Ch = O(h^1) \quad \leftarrow$$

\Rightarrow el método de Euler tiene un error de truncamiento de orden 1
 \neq .

→ métodos de Taylor de orden n

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$$

⇒ Teorema de Taylor: $\Rightarrow \underline{*} \quad y' = f(t, y) \quad t \in (a, b)$

$$y(a) = y_0$$

Suponemos que la solución $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es

continuamente derivable hasta $(n+1)$ -veces

Por T. de Taylor expresando t_{i+1} alrededor t_i :

$$\underline{(**)} \quad y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2!} y''(t_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) \\ + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i), \quad \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

Usando:

$$y^{(j)} = \frac{d^j}{dt^j}(f) := f^{(j)}$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y(t_i)) + \dots$$

$$\hookrightarrow + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

→ El método de Taylor de orden n se obtiene eliminando el residuo:

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{y}_0 = y_0, \quad h = (b-a)/N, \quad t_i = a + ih, \quad i = 0 \dots N \\ \hat{y}_i = \hat{y}_{i-1} + h T^{(n)}(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) \quad i = 1 \dots N \end{cases}$$

$$\begin{aligned} * \quad \uparrow \quad T^{(n)}(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) &= f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) + \frac{h}{2} f'(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) + \dots \\ &\quad + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) \end{aligned}$$

→ El método de Euler es un método de Taylor de orden $n=1$.

→ Ejemplo:

$$y' = y - t^2 + 1 \quad t \in (0, 2)$$

$$y(0) = y_0 = 0.5$$

M. Taylor de orden $n=2$.

$$f(t, y) = y - t^2 + 1$$

$$T^{(2)}(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) = f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) + \frac{h}{2} f'(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1})$$

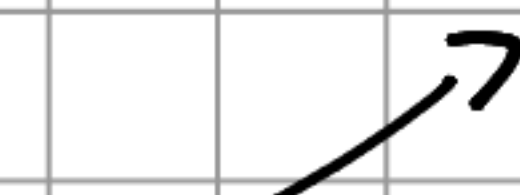
$$\Rightarrow f' = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$



$$\begin{aligned} &= (-2t) + 1 \cdot y' = -2t + y' \\ &= -2t + y - t^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} [f(t, y(t))] = \frac{d}{dt} [y - t^2 + 1]$$

$$= y' - 2t =$$



Teorema — El método de Taylor de orden n tiene un error de truncamiento de orden n , i.e.; $\tau_{n+1}(h) = Ch^n = O(h^n)$ con la suposición de que la solución y es derivable (continuamente) $n+1$ -veces.

→ Existencia y unicidad para EDOs.

1) Def. Una función $f(t, y)$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición de Lipschitz en la variable "y" en un conjunto

$D \subset \mathbb{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_2 - y_1|$$

donde $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. La constante L se llama constante de Lipschitz