→ Dominio de Estabilidad lineal y estabilidad-A para métodos de un paso/nivel

1). Motivación. (EDOs Rígidas)

$\underline{\underline{(*)}}$ $\qquad y' = \lambda y \qquad t \in (0,\infty)$ ó $t \in (0,M)$

$y(0) = y_0$ "M es grande"

donde $\underline{\underline{\lambda}} < 0$. Observar que la solución de $\underline{(*)}$

es $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ como $\lambda < 0 \Rightarrow$

$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$

2) M. Euler explícito para $\underline{\underline{(*)}}$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f(t_i, \hat{y}_i)$$

$$= \hat{y}_i + h\lambda \hat{y}_i = (1+h\lambda)\hat{y}_i$$

$$= (1+h\lambda)^2 \hat{y}_{i-1} = \dots = (1+h\lambda)^{i+1} y_0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y}_i = (1+h\lambda)^i y_0$$

2.i) El error de convergencia es:

$$|y(t_i) - \hat{y}_i| = |y_0 e^{\lambda t_i} - y_0 (1+\lambda h)^i|$$

$$= |y_0| \, |\underbrace{e^{\lambda t_i}}_{\alpha_i} - \underbrace{(1+\lambda h)^i}_{\beta_i}|$$

si $t_i \to \infty$

$\Rightarrow \alpha_i \to 0$ pero $\beta_i \to 0$ si y solo si

$$|1+\lambda h| < 1.$$

$|1+\lambda h| < 1 \iff -1 < 1+\lambda h < +1$

$\iff -2 < \lambda h < 0 \iff h < -\dfrac{2}{\lambda}$

$\iff h < \dfrac{2}{|\lambda|}$

3) Def. de Dominio de Estabilidad para métodos de un nivel.

Sea la EDO:

(*) $$y' = \lambda y, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$. La solución (*) es

$$\rightsquigarrow y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

si y sólo si $Re(\lambda) < 0$. Utilizando un método numérico de un nivel y de paso h (cte) para resolver (*), entonces se define el dominio D de estabilidad del método numérico como el conjunto de números complejos

$$h\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad \lim_{t \to \infty} \hat{y}_i = 0.$$

En otras palabras, el dominio D es el conjunto de números $h\lambda$ para los cuales se obtiene un correcto comportamiento asintótico para (*) cuando $i \to \infty$

3.i) Pare el método exp. de Euler.

$$\hat{y}_i = (1+h\lambda)^i$$

entonces para la sucesión $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{\infty}$ tenemos que

$$\lim_{i\to\infty} \hat{y}_i = 0 \quad \text{si y solo si} \quad |1+h\lambda| < 1$$

entonces $D_{Euler} = \{ z \in \mathbb{C} : |1+z| < 1 \}$ $(z = \lambda h)$

$z = x + yi$

21) Análisis de Estabilidad del método de Euler-Implícito BDFI

$$(*) \quad \begin{cases} y' = \lambda y & t>0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

BDFI :

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f(t, \hat{y}_{i+1})$$
$$= \hat{y}_i + \lambda h \hat{y}_{i+1}$$

$$(1-\lambda h)\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y}_{i+1} = \left[\frac{1}{1-\lambda h}\right]\hat{y}_i = \left[\quad\right]^2 \hat{y}_{i-1}$$
$$= \cdots = \left[\quad\right]^{i+1}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y}_i = \underbrace{\left[\frac{1}{1-\lambda h}\right]^i}$$

$\hat{y}_i$ está definido siempre porque $\lambda < 0 \Rightarrow$

$$1 - \lambda h > 0.$$

* Entonces $\hat{y}_i \to 0$ cuando $i \to \infty$ si y solo si

$$\left[\frac{1}{1-\lambda h}\right] < 1 \iff 1 < 1 - \lambda h \Rightarrow 0 < -\lambda h$$

$$\Rightarrow \quad h > 0 .$$

$\#$

$\Rightarrow$ El método Euler Imp. es incondicionalmente estable.

4.ii) Dominio de Estabilidad BDFI.

$$\mathrm{Dom}_{BDFI} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{1}{1-z} \right| < 1 \right\}$$

$$z := \lambda h .$$

$$z = x + iy$$

$$\frac{1}{1-z} \sim \tilde{x} + i\tilde{y}$$ para graficar en Matlab.

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-x)-iy} \cdot \frac{(1-x)+iy}{(1-x)+iy} = \frac{(1-x)+iy}{(1-x)^2 - i^2y^2}$$

$$= \frac{(1-x)+iy}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1}{(1-x)^2+y^2}\left[(1-x)+iy\right]$$

$\Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{1-z}\right| = \frac{1}{(1-x^2)+y^2}\left[(1-x)^2+y^2\right]^{1/2}, \quad \left(|x+iy| = (x^2+y^2)^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left[(1-x^2)+y^2\right]^{1/2}}$$

5) Análisis de Estabilidad del M. Taylor explícito de orden $r=2$.

$$y' = f(t,y) = \lambda y$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h T^2(\hat{y}_i)$$

$$T^2(y) = f(t,y) + \frac{h}{2} f'(t,y)$$
$$= \lambda y + \frac{h}{2}$$

$$f'(t,y) = \cancel{\frac{\partial f}{\partial t}} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \lambda y' = \lambda^2 y$$

$$T^2(y) = \lambda y + \frac{h}{2} \lambda^2 y$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \lambda h \hat{y}_i + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \hat{y}_i$$
$$= \hat{y}_i \left[1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right]$$
$$= \hat{y}_{i-1} [\quad]^2 = \dots = [\quad]^{i+1}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_i = \left[\overbrace{1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}} \right]^i$$

Es estable si y solo si $\left| 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right| < 1$.

$z = \lambda h$

5. ii) $D_{T2} = \{ z \in \mathbb{C} : \left|1+z+\frac{z^2}{2}\right| < 1 \}$

Para graficar en Matlab

$z = x+yi$

$$1+z+\frac{z^2}{2} = 1+x+iy+\frac{(x+iy)^2}{2}$$

$$(x+iy)^2 = x^2+2xyi+i^2y^2 = x^2-y^2+2xyi$$

$$= \left[1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right] + i(y+xy)$$

$$\left|1+z+\frac{z^2}{2}\right| = \left[\left[1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right]^2 + [x+xy]^2\right]^{1/2}$$