→ Estabilidad Lineal para Métodos Multipaso

1) Recordemos la forma grl. de un método multipaso de m-niveles (escalar)

$$\underline{\underline{(*)}} \quad \hat{y}_{i+1} = a_{m-1}\hat{y}_i + a_{m-2}\hat{y}_{i-2} + \dots + a_0\hat{y}_{i+1-m}$$
$$+ h\left[b_m f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, \hat{y}_i) + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, \hat{y}_{i+1-m}) \right]$$

Si $b_m \neq 0$ entonces el método es implícito.

Si aplicamos $\underline{(*)}$ para resolver $\begin{cases} y' = \lambda y, & t>0, \ \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 & Re(\lambda) < 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow y(t) = e^{\lambda t}, \ y \to 0$ cuando $t \to \infty$

$\Rightarrow$

$$\underline{(*)} \quad (1 - \lambda h b_m)\hat{y}_{i+1} = (a_{m-1} + \lambda h b_{m-1})\hat{y}_i + (a_{m-2} + \lambda h b_{m-2})\hat{y}_{i-1} + \dots + (a_0 + \lambda h b_0)\hat{y}_{i+1-m}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{(*a)}} \quad (1 - \lambda h b_m)\hat{y}_{i+1} - (a_{m-1} + \lambda h b_{m-1})\hat{y}_i - (a_{m-2} + \lambda h b_{m-2})\hat{y}_{i-1} - \dots - (a_0 + \lambda h b_0)\hat{y}_{i+1-m} = 0.$$

este una relación recurrencia y su solución está relacionada con el polinomio característico:

$R(\xi, \lambda h) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ (polinomio en la variable ξ)

$$R(\xi, \lambda h) = (1 - \lambda h b_m)\xi^m - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})\xi^{m-1}$$

$$\to \quad - \dots - (a_0 + \lambda h b_0)\xi^0 \quad , \quad \hat{y}_{i+1-j} = \xi^{m-j}$$

2.i) Teorema.

Sean $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ raíces distintas de la

ecuación $\to R(\xi, h\lambda) = 0$.

$\Rightarrow$ la solución de $(**)$ es $\boxed{\hat{y}_i = \sum_{k=1}^{m} c_k (\xi_k)^i}$

donde los coeficientes c_k se obtienen de

la condiciones iniciales de $(**)$, esto es, de los

valores dados $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{m-1}$

2.ii) Corolario:

$$\hat{y}_i \to 0 \quad \text{cuando } i \to \infty$$

si y solo sí $|\xi_k| < 1$, $k = 1, \dots, \xi_m$

3) Def: El dominio de estabilidad del M. Multipaso

(*) $D = \{ z \in \mathbb{C} :$ las raíces $\overbrace{\xi_1, \dots, \xi_m}$

$\rightarrow$ de $R(\xi, z) = 0 \quad (z = \lambda h)$

son distintas y $|\xi_k| < 1, \ k = 1, \dots, m \}$

$$\begin{tikzcd} z \in \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \arrow[r] & {[\xi_1, \dots, \xi_n]} \in \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

4) En la práctica para calcular D observar que.

(***) $R(\xi, z) = 0$ implica que:

$$(1 - zb_m)\xi^m - (a_{m-1} + zb_{m-1})\xi^{m-1} - (a_{m-2} + zb_{m-2})\xi^{m-2}$$

$$- \dots - (a_0 + zb_0) = 0.$$

$$\Rightarrow \overbrace{\xi^m - a_{m-1}\xi^{m-1} - a_{m-2}\xi^{m-2} - \dots - a_0}^{\rho(\xi)}$$

$$z[\underbrace{-b_m \xi^m - b_{m-1}\xi^{m-1} - \dots - b_0}_{\sigma(\xi)}] = 0$$

(*□) $\Rightarrow \quad \rho(\xi) + z\sigma(\xi) = 0$

$\rho(\xi), \sigma(\xi) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$

(∝∝∝) $\rho(\xi) + z\,\sigma(\xi) = 0.$

Para $\underbrace{|\xi| < 1}$ $\rightarrow$ $z = -\dfrac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}.$

Para graficar D el proceso es el siguiente

i) Graficamos la frontera de D:

$$BD = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1 \}$$

$$D_{BD} = \{ z \in \mathbb{C} : z = -\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)},\ \xi \in BD \}.$$

ii) Graficamos algunos puntos dentro de D.

$$BD_{r_0} = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi| < r_0 \} \quad \text{donde } r_0 < 1$$

$$D_{r_0} = \{ z \in \mathbb{C} : z = -\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)},\ \xi \in BD_{r_0} \}.$$

5) Ejemplos

5.i) método de Adams-Bashfort (explícito)

$m=2$. Dados $\hat{y}_0, \hat{y}_1$ $[\tau_{i+1}(h) \sim h^2]$

(*) $\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2}\left[3f(t_i, \hat{y}_i) - f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1})\right].$

Aplicamos (*) a la ecuación $y' = \lambda y$, $t>0$, $\lambda \in \mathbb{C}$
$y(0)=1$ $\quad Re(\lambda) < 0.$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2}\left[3\lambda\hat{y}_i - \lambda\hat{y}_{i-1}\right].$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{i+1} - \left(1 - \frac{3}{2}\lambda h\right)\hat{y}_i + \frac{\lambda h}{2}\hat{y}_{i-1} = 0.$$

$z = \lambda h$, $\hat{y}_{i+1-j} = \xi^{m-j} = \xi^{2-j}$

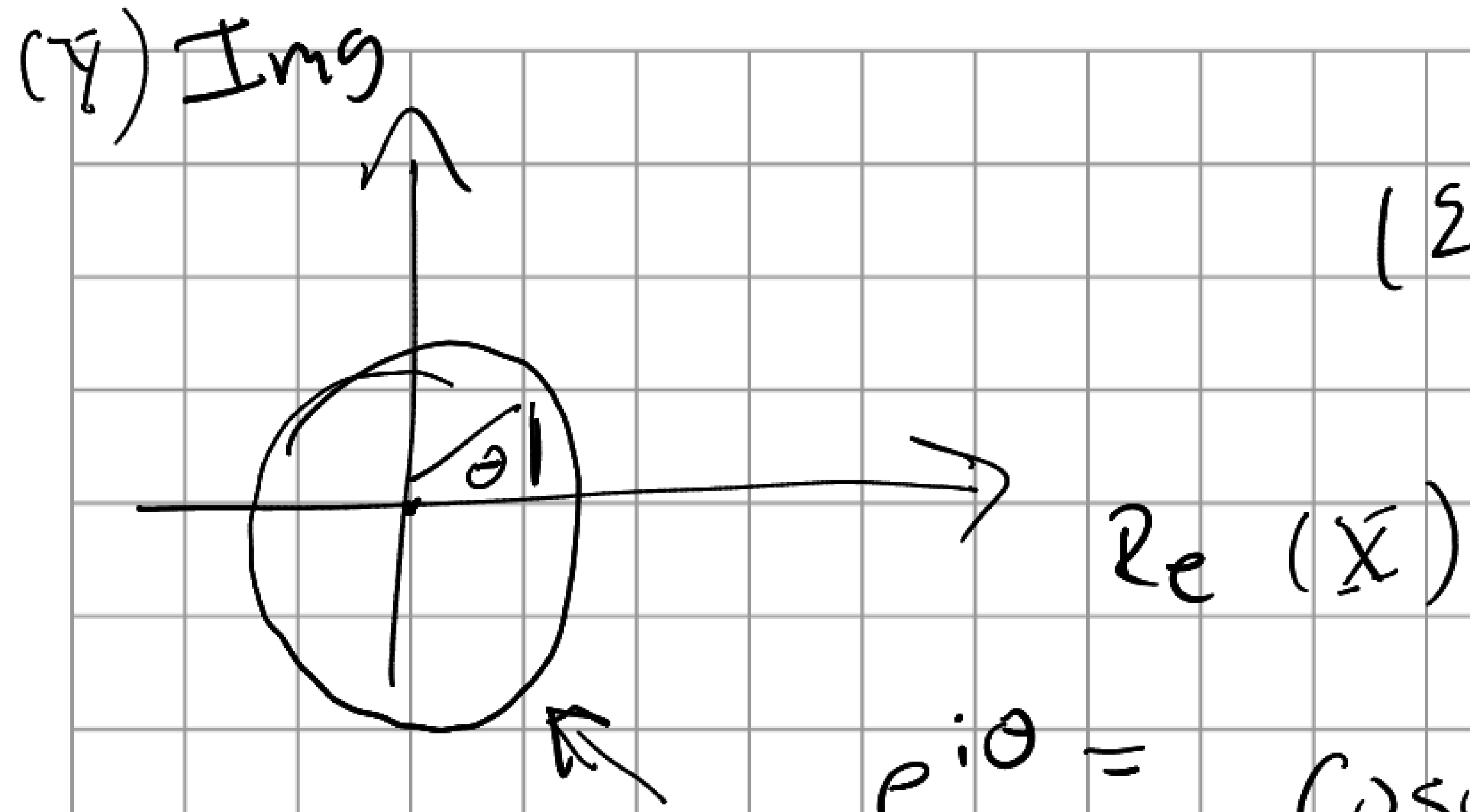
$$\Rightarrow R(\xi, z) = \xi^2 - \left(1 - \frac{3}{2}z\right)\xi + \frac{z}{2} = 0.$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\xi^2 - \xi)}_{\rho(\xi)} - z\underbrace{\left(\frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}\right)}_{\sigma(\xi)} = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{(\xi^2 - \xi)}{\frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}}.$$

$BD = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\}$

$Dom_{BD} = \{z \in \mathbb{C} : z = \dfrac{\xi^2 - \xi}{\frac{3\xi}{2} - \frac{1}{2}}, \xi \in BD\}.$



$|z| = 1$

$z = x + iy.$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta.$