→ Convergencia de Métodos Numéricos para sistemas de EDOs con condición inicial

$$(*) \qquad \underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}) \quad t \in (a,b)$$
$$\underline{y}(a) = \underline{y}_0$$

es continua

1) Def: Una función $\underline{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Lipschitz en la variable $\underline{y}$ si existe $L > 0$ tal que

→ $\| \underline{f}(t, \underline{y}_1) - \underline{f}(t, \underline{y}_2) \| \leq L \| \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \|$

$(t, \underline{y}_1), (t, \underline{y}_2) \in D$, donde $\| \ \|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. Conmumente la Euclideana.

2) Sea $\underline{f} : D \to \mathbb{R}^n$ donde $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, D es convexo. Entonces si existe $L > 0$ tal que

→ (a) $\left| \dfrac{\partial f_i}{\partial y_k} \right| \leq L \quad i,k = 1, \ldots, n$

⇒ $\underline{f}$ satisface la condición de Lipschitz en la variable $\underline{y}$ en el dominio D.

3) Sea $\mathcal{D} = \{ (t, \underline{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid$

$a \leq t \leq b \ , \ -\infty < y_j < \infty \quad j = 1, \dots n \}$

el problema (1) tiene solución única.

4) Def: Un método numérico es convergente si:

$$\lim_{h \to 0^+} \max_{i=0 \dots N} \| \underline{y}(t_i) - \underline{\hat{y}}_i \| = 0.$$

$$\underline{e}_i := \underline{y}(t_i) - \underline{\hat{y}}_i$$

$$\lim_{h \to 0^+} \max_{i=0,\dots N} \| \underline{e}_i \| = 0. \leftarrow$$

$h = \dfrac{b-a}{N}$, N: # subintervalos que divide $[a,b]$.

5) Lemma 2. Sean t, s números reales positivos

Sea $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ una sucesión que satisface

i) $a_0 \geq -\dfrac{t}{s}$

ii) $a_{i+1} \leq (1+s) a_i + t$, $i = 0, \dots, k-1$

$$\Rightarrow \quad a_{i+1} \leq e^{(i+1)s} \left[a_0 + \frac{t}{s} \right] - \frac{t}{s}$$

6) El método de Euler para Problema $\underline{\underline{(*)}}$, es convergente. Suponiendo $\underline{f}$ satisface la condición de Lipschitz y $\|\underline{y}''(t)\| < M \ \forall t \in [a,b]$

$\underline{\underline{(**)}}$ $\hat{\underline{y}}_0 = \underline{y}_0$

$$\hat{\underline{y}}_{i+1} = \hat{\underline{y}}_i + h\,\underline{f}(t_i, \hat{\underline{y}}_i) \qquad i = 0, \dots, N$$

Por T. Taylor. $\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + h\,\underline{y}'(t_i) + \frac{h^2}{2}\underline{y}''(\underline{\xi}_i)$

$$[\underline{\xi}_i]_j \in (t_i, t_{i+1}) \quad j = 1, \dots, n$$

$\underline{\underline{(***)}}$ $\Rightarrow \underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + h\,f(t, \underline{y}(t_i)) + \frac{h^2}{2}\underline{y}''(\underline{\xi}_i)$

(**) (***)

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{y}(t_{i+1}) - \hat{\underline{y}}_{i+1}}_{\underline{e}_{i+1}} = \overbrace{\underline{y}(t_i) - \hat{\underline{y}}_i}^{\underline{e}_i} + h\left[\underline{f}(t_i, \underline{y}(t_i)) - \underline{f}(t_i, \hat{\underline{y}}_i)\right] + \frac{h^2}{2}\underline{y}''(\underline{\xi}_i)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \|\underline{a}+\underline{b}\| \le \|\underline{a}\| + \|\underline{b}\| \\ \|\lambda \underline{a}\| \le |\lambda|\,\|\underline{a}\| \end{array}}$$

$$\Rightarrow \|\underline{e}_{i+1}\| \le \|\underline{e}_i\| + h\,\|\underline{f}(t_i, \underline{y}(t_i)) - \underline{f}(t_i, \hat{\underline{y}}_i)\| + \frac{h^2}{2}\underbrace{\|\underline{y}''(\underline{\xi}_i)\|}_{< M}$$

$$\Rightarrow \|\underline{e}_{i+1}\| \leq \|\underline{e}_i\| + hL\,\|\overbrace{\underline{y}(t_i) - \hat{\underline{y}}_i}^{\underline{e}_i}\| + \frac{Mh^2}{2}$$

$$\leq \underbrace{[1+hL]}_{s}\,\|\underline{e}_i\| + \underbrace{\frac{Mh^2}{2}}_{t}$$

$a_i = \|\underline{e}_{i+1}\|$

$a_0 = 0 \geq -\frac{t}{s}$

Utilizamos el Lemma 2.

$$\|\underline{e}_{i+1}\| \leq e^{(i+1)hL}\left[0 + \frac{Mh^{\cancel{2}}}{2\cancel{h}L}\right] - \frac{Mh^{\cancel{2}}}{2\cancel{h}L}$$

$$\leq \frac{M}{2L}h\left[e^{(i+1)hL} - 1\right]$$

$$(i+1)h = (i+1)h \pm a = t_{i+1} - a$$

$$\Rightarrow \|\underline{e}_{i+1}\| \leq \frac{Mh}{2L}\left[e^{(t_{i+1}-a)L} - 1\right]$$

Recordemos $t_{i+1} \in [a,b]$ $\quad (t_{i+1} - a) \leq (b-a)$,
y la exponencial es una función creciente

$$\Rightarrow \|\underline{e}_{i+1}\| \leq \frac{Mh}{2L}\underbrace{\left[e^{(b-a)L} - 1\right]}_{cte}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \|\underline{e}_{i+1}\| \leq \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{Mh}{2L}\right)\cdot cte$$

$$\leq 0 \cdot cte = 0$$

∎