→ Los métodos explícitos Runge-Kutta (caso escalar)

1) Son métodos de orden superior (como los métodos de Taylor) que no requieren $f', f'', f^{(3)} \ldots$

2) Teorema de Taylor para dos variables (indep)

Sea $f(t,y)$ y todas sus derivadas parciales de orden menor o igual a $n+1$ continuas en $D = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le t \le b,\ c \le y \le d \}$

y sea $(t_0, y_0) \in D$. Entonces para todo punto $(t,y) \in D$

existe $(\xi, \mu) \in D$ tal que

$$f(t,y) = P_n(t,y) + R_n(t,y)$$

donde

$$P_n(t,y) = f(t_0,y_0) + \left[(t-t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y_0) \right]$$

$$+ \left[\frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0,y_0) + (t-t_0)(y_0-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0,y_0) + \frac{(y-y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0,y_0) \right]$$

$$+ \ldots + \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (t-t_0)^{n-j} (y-y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j} \partial y^j}(t_0,y_0) \right]$$

$$R_n(t,y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t-t_0)^{n+1-j} (y-y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j}(\xi,\mu)$$

3) Métodos de R.K. de orden $\underline{\underline{r=2}}$

i) Recordemos el M. de Taylor de orden $r=2$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h\,T^{(2)}(t_i, \hat{y}_i)$$

$$T^{(2)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2} f'(t,y)$$

ii) Queremos aproximar $T^{(2)}(t,y)$ con un error $O(h^2)$ con una expresión de la forma:

$$a_1 f(t+\alpha, y+\beta)$$

(*) $$T^{(2)}(t,y) = a_1 f(t+\alpha, y+\beta) + O(h^2) \quad , \alpha, \beta, a_1 \in \mathbb{R}$$

Queremos un error de $O(h^2)$ porque el método de Taylor de orden $r=2$ tiene un error de truncamiento / convergencia de orden 2

iii) $$f'(t,y) = \frac{d}{dt} f(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t,y)$$

en (*)

$$f(t,y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y} f(t,y) \simeq a_1 f(t+\alpha, y+\beta)$$

iv) Ahora utilizamos el T. de Taylor para 2 variable a $a_1 f(t+\alpha, y+\beta)$ en el punto (t,y)

$$a_1 f(t+\alpha, y+\beta) = a_1 f(t,y) + a_1\alpha \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + a_1\beta \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) + a_1 R_1(t+\alpha, y+\beta)$$

$$R_1(t+\alpha, y+\beta) = \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + \alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}(\xi,\mu) + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

Recordar que queremos $T^{(2)}(t,y) = a_1 f(t+\alpha, y+\beta)$

$$\Rightarrow \underline{f(t,y)} + \underline{\underline{\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}}}(t,y) + \underline{\underline{\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y} f(t,y)}} = \underline{a_1 f(t,y)} + a_1\alpha \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial t}}}(t,y) + a_1\beta \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}}(t,y) + a_1 R_1(t+\alpha, y+\beta)$$

Igualamos término x término

$$\underline{\underline{a_1 = 1}}, \quad \frac{h}{2} = a_1\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{h}{2}}}$$

$$\frac{h}{2} f(t,y) = \beta a_1 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = \frac{h}{2} f(t,y)}}$$

$$\Rightarrow T^{(2)}(t,y) = f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) + R_1(t+\alpha, y+\beta)$$

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) = \frac{h^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + \frac{h^2}{4} f(t,y)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}(\xi,\mu) + \frac{h^2}{8}(f(t,y))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

Si todas las derivadas parciales de orden 2 son continuas y acotadas, entonces

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) = O(h^2)$$

Este es el método del punto medio:

$$\begin{cases} \hat{y}_0 = y_0 \\ \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right), \quad i = 0, \dots, N \end{cases}$$

$\rightarrow$ El método de Euler modificado, se obtiene aproximando $T^{(2)}(t,y)$ con

$\Rightarrow$ $a_1 f(t,y) + a_2 f(t+\alpha, y+\beta f(t,y))$,

entonces utilizando el mismo proceso anterior obtenemos

$$T^{(2)}(t,y) = \frac{1}{2} f(t,y) + \frac{1}{2} f(t+h, y + h f(t,y)) + O(h^2)$$

Método de Euler Modificado

$$\rightsquigarrow \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \hat{y}_i) + \frac{h}{2} f(t_i + h, \hat{y}_i + h f(t_i, \hat{y}_i))$$

→ Notación por **tablas** de los Métodos de Runge-Kutta

1) * Caso Explícito

K - etapas

K - variables intermedias

K:

$$\xi_1 = \hat{y}_i$$

$$\xi_2 = \hat{y}_i + h a_{21} f(t_i, \xi_1)$$

$$\xi_3 = \hat{y}_i + h a_{31} f(t_i, \xi_1) + h a_{32} f(t_i + c_2 h, \xi_2)$$

$$\vdots$$

$$\xi_K = \hat{y}_i + h \sum_{j=1}^{\boxed{K-1}} a_{Kj} f(t_i + c_j h, \xi_j)$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h \sum_{j=1}^{K} b_j f(t_i + c_j h, \xi_j)$$

Un método de Runge-Kutta está determinado por 4 cosas:

→ 1) K - etapas

2) $A = [a_{kj}]$, $\underline{b} = [b_j]$, $\underline{c} = [c_j]$

$A \in \mathbb{R}^{K \times K}$, $\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^K$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_K \end{bmatrix}$$ donde grel. $c_1 = 0$

Notación de tabla

$$\begin{array}{c|c} \underline{c} & A \\ \hline & \underline{b}^t \end{array}$$

A: es una matriz estrictamente triangular inferior

2) Ejemplo: Mét. del Punto medio.

$k=2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

i.e., $\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$\underline{b} = [0 \quad 1]^t$

$$\xi_1 = \hat{y}_i$$

$$\xi_2 = \hat{y}_i + \sum_{j=1}^{1} h a_{2j} f(t_i + c_j h, \xi_j)$$

$$= \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \hat{y}_i)$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \sum_{j=1}^{2} h b_j f(t_i + c_j h, \xi_j)$$

$$= \hat{y}_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \hat{y}_i)\right)$$

3) Método de Euler Modificado:

$k=2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

4) Métodos de Runge-Kutta de orden $\underline{\underline{3}}$

se busca aproximar

$$\rightsquigarrow T^{(3)}(t,y) = f\left(t + \alpha_1, y + \beta_1 f(t + \alpha_2, y + \beta_2 f(t,y))\right) + O(h^3)$$

4.i) método clásico de R.K. (orden 3)

$k=3$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

4.ii) método de Nystrom

$k=3$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 2/3 & 2/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}$$

4.iii) Notación extensa del met. clásico de R.K. orden 3

el número de etapas es $\underline{k=3}$

$$\xi_1 = \hat{y}_i$$

$$\underline{\xi_2} = \hat{y}_i + \sum_{j=1}^{1} h f(t_i + c_j h, \xi_j) \cdot a_{2j}$$

$$= \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \xi_1) \cdot$$

$$\xi_3 = \hat{y}_i + \sum_{j=1}^{2} h f(t_i + c_j h, \xi_j)\, a_{3j}$$

$$= \hat{y}_i - h f(t_i, \xi_1) + 2h f\left(t_i + \frac{h}{2}, \xi_2\right)$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \sum_{j=1}^{3} h b_j f(t_i + c_j, \xi_j) = \hat{y}_i + \frac{h}{6} f(t_i, \xi_1) + \frac{2h}{3} f\left(t_i + \frac{h}{2}, \xi_2\right) + \frac{h}{6} f(t_i + h, \xi_3)$$

#.

5) Método de Orden 4

$K=4$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

6) Métodos Implícitos de Runge-Kutta

Las variables intermedias $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k$ tienen la forma gral:

$$\xi_l = \hat{y}_i + h \sum_{j=1}^{\boxed{k}} a_{lj}\, f(t_i + c_j h, \xi_j), \quad l = 1, 2, \ldots, k$$

6.i) $K=2$, orden 3

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 1/4 & -1/4 \\
2/3 & 3/12 & 5/12 \\
\hline
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

$$\xi_1 = \hat{y}_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, \xi_1) - f(t_i + 2/3\, h, \xi_2) \right]$$

$$\xi_2 = \hat{y}_i + \frac{h}{12}\left[3f(t_i, \xi_1) + 5f(t_i + 2/3\, h, \xi_2) \right]$$

$$\underline{\underline{\hat{y}_{i+1}}} = \hat{y}_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, \xi_1) + 3f(t_i + \tfrac{2}{3} h, \xi_2) \right]$$

6.ii) $K=2$, orden 4

$$
\begin{array}{c|cc}
\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\
\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right) & \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right) & \frac{1}{4} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

7) Runge-Kutta para sistemas de EDOs

Se derivan del caso escalar

Ej. Mét. Euler Modificado

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1 & 1 & \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

caso escalar:
$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \hat{y}_i) + \frac{h}{2} f(t_i+h, \hat{y}_i + h f(t_i, \hat{y}_i))$$

caso para sistemas:
$$\underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + \frac{h}{2} \underline{f}(t_i, \underline{\hat{y}}_i) + \frac{h}{2} \underline{f}(t_i+h, \underline{\hat{y}}_i + h\, \underline{f}(t_i, \underline{\hat{y}}_i))$$

etc....