$\Rightarrow$ Estabilidad Lineal para Métodos Multipaso

1) Recordemos la forma grd. de un método multipaso de m-niveles (escalar)

$\underline{\underline{(*)}}$
$$\hat{y}_{i+1} = a_{m-1}\hat{y}_i + a_{m-2}\hat{y}_{i-2} + \dots + a_0\hat{y}_{i+1-m}$$
$$+ h\left[b_m f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, \hat{y}_i) + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, \hat{y}_{i+1-m}) \right]$$

Si $b_m \neq 0$ entonces el método es implícito.

Si aplicamos $\underline{(*)}$ para resolver $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

$\Rightarrow$

$\underline{(*)}$
$$(1 - \lambda h b_m)\hat{y}_{i+1} = (a_{m-1} + \lambda h b_{m-1})\hat{y}_i + (a_{m-2} + \lambda h b_{m-2})\hat{y}_{i-1} + \dots + (a_0 + \lambda h b_0)\hat{y}_{i+1-m}$$

$\Rightarrow$

$\underline{\underline{(*a)}}$
$$(1 - \lambda h b_m)\hat{y}_{i+1} - (a_{m-1} + \lambda h b_{m-1})\hat{y}_i - (a_{m-2} + \lambda h b_{m-2})\hat{y}_{i-1} - \dots - (a_0 + \lambda h b_0)\hat{y}_{i+1-m} = 0. \quad \leftarrow$$

este una relación recurrencia y su solución esta relacionada con el polinomio característico:

$R(\xi, \lambda h) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ (polinomio en la variable ξ)

$$R(\xi, \lambda h) = (1 - \lambda h b_m)\xi^m - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})\xi^{m-1} - \cdots - (a_0 + \lambda h b_0)\xi^0 \,, \quad \hat{y}_{i+1-j} = \xi^{m-j}$$

2.i) Teorema.

Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ raíces distintas de la ecuación $R(\xi, h\lambda) = 0$.

La solución de $(\underline{**})$ es $\hat{y}_i = \sum_{k=1}^{m} c_k (\xi_k)^i$

donde los coeficientes c_k se obtienen de la condiciones iniciales de $(\underline{**})$, esto es, de los valores dados $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{m-1}$

2.ii) Corolario:

$\hat{y}_i \to 0$ cuando $i \to \infty$

si y solo sí $|\xi_k| < 1$, $k = 1, \ldots, \xi_m$