

→ Dominio de Estabilidad lineal y  
estabilidad-A para métodos de un peso/nivel

1). Motivación. (EDOs Rígidas)

$$\underline{(*)} \quad y' = \lambda y \quad t \in (0, \infty) \text{ ó } t \in (0, m)$$

"m es grande"

$$y(0) = y_0$$

donde  $\underline{\lambda} < 0$ . Observar que la solución de (\*)

es  $\underline{y(t) = y_0 e^{\lambda t}}$  como  $\lambda < 0 \Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

2) M. Euler explícito para (\*)

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f(t_i, \hat{y}_i)$$

$$= \hat{y}_i + h \lambda \hat{y}_i = (1 + h\lambda) \hat{y}_i$$

$$= (1 + h\lambda)^2 \hat{y}_{i-1} = \dots = (1 + h\lambda)^{i+1} y_0$$

$$\Rightarrow \hat{y}_i = (1 + h\lambda)^i y_0$$

2.i) El error de convergencia es:

$$\begin{aligned} |y(t_i) - \hat{y}_i| &= |y_0 e^{\lambda t_i} - y_0 (1 + \lambda h)^i| \\ &= |y_0| \underbrace{|e^{\lambda t_i}|}_{\alpha_i} - \underbrace{|(1 + \lambda h)^i|}_{\beta_i} \end{aligned}$$

si  $t_i \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \alpha_i \rightarrow 0$  para  $\beta_i \rightarrow 0$  si y solo si

$$|1 + \lambda h| < 1.$$

$$|1 + \lambda h| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 + \lambda h < +1$$

$$\Leftrightarrow -2 < \lambda h < 0 \Leftrightarrow h < -\frac{2}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow h < \frac{2}{|\lambda|}$$

3) Def. de Dominio de Estabilidad por métodos  
= de un nivel.

Sea la EDO:

(\*)  $y' = \lambda y, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$

donde  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La solución (\*) es

$$\leadsto y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

si y sólo si

$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ . Utilizando un método  
numérico de un nivel y de paso  $h$  (cte) para resolver (\*),  
entonces se define

el dominio D de estabilidad del método numérico  
como el conjunto de números complejos

$$h\lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_i = 0.$$

En otras palabras, el dominio D es el conjunto de  
números  $h\lambda$  para los cuales se obtiene un correcto  
comportamiento asintótico por (\*) cuando  $i \rightarrow \infty$

3.i) Para el método exp. de Euler.

$$\leadsto \hat{y}_i = (1+h\lambda)^i$$

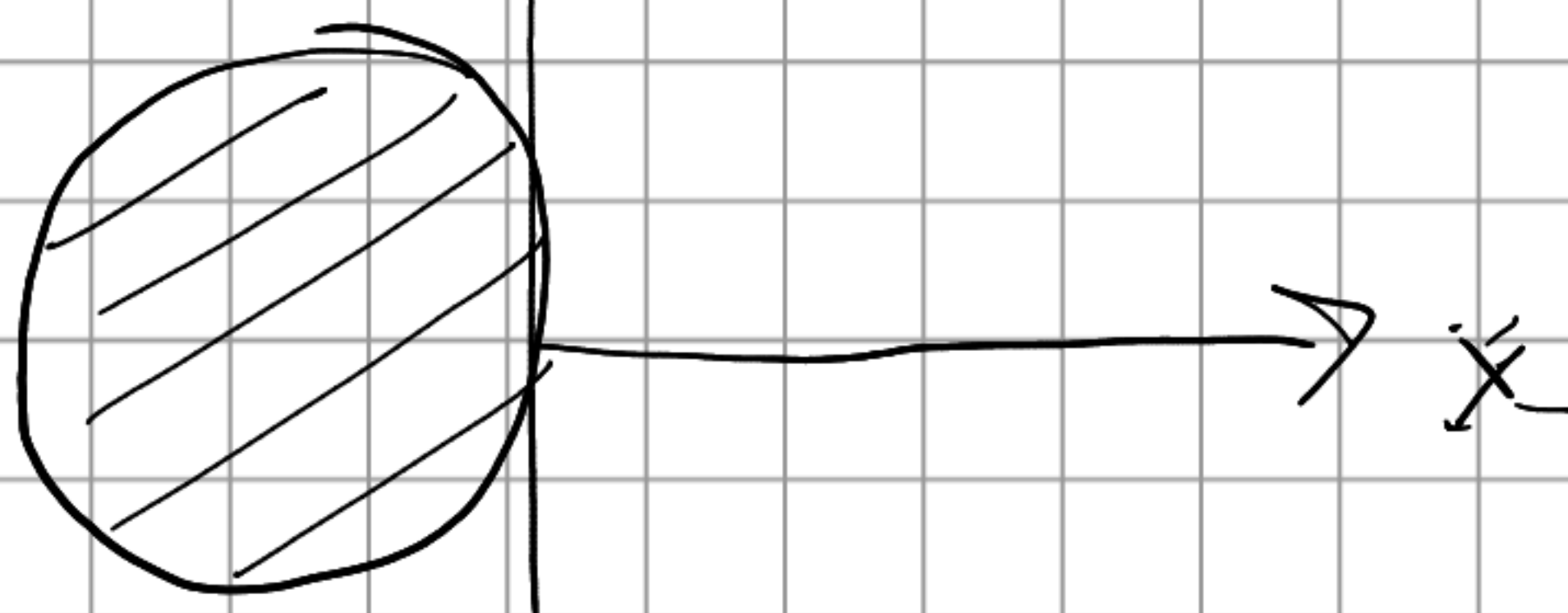
entonces para la sucesión  $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{\infty}$  tenemos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{y}_i = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \underbrace{|1+h\lambda| < 1}$$

entonces  $D_{\text{Euler}} = \{z \in \mathbb{C} : |1+z| < 1\} \quad (z = \lambda h)$

$$z = x + yi$$

Domínio  
de estabilidade



# 4) Análisis de Estabilidad del método de Euler-Implícito BDFI

$$(*) \quad y' = \lambda y \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda < 0$$

$$= \quad y(0) = 1$$

$$\text{BDFI:} \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f(t, \hat{y}_{i+1})$$

$$= \hat{y}_i + \lambda h \hat{y}_{i+1}$$

$$(1 - \lambda h) \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{i+1} = \left[ \frac{1}{1 - \lambda h} \right] \hat{y}_i = \left[ \frac{1}{1 - \lambda h} \right]_{i+1}^2 \hat{y}_{i-1}$$

$$= \dots = \left[ \frac{1}{1 - \lambda h} \right]_{i+1}^i \hat{y}_0$$

$$\Rightarrow \hat{y}_i = \left[ \frac{1}{1 - \lambda h} \right]^i$$

$\hat{y}_i$  este definido siempre porque  $\lambda < 0 \Rightarrow$

$$1 - \lambda h > 0.$$

\* Entonces  $\hat{y}_i \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$  si y solo si

$$\Rightarrow \left[ \frac{1}{1 - \lambda h} \right] < 1 \Leftrightarrow 1 < 1 - \lambda h \Rightarrow 0 < -\lambda h$$

$$\Rightarrow h > 0.$$

⇒ El método Euler Imp. es incondicionalmente estable.

2.ii) Dominio de Estabilidad BDFI.

$$\text{Dom}_{\text{BDFI}} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{1}{1-z} \right| < 1 \right\}$$

$$z := \lambda h.$$

$$z = x + iy \quad \leftarrow$$

$$\frac{1}{1-z} \sim \tilde{x} + i\tilde{y} \quad \text{para graficar en matlab.}$$



$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-x)-iy} \cdot \frac{(1-x)+iy}{(1-x)+iy} = \frac{(1-x)+iy}{(1-x)^2 - i^2 y^2}$$

$$= \frac{(1-x)+iy}{(1-x)^2 + y^2} = \frac{1}{(1-x)^2 + y^2} [(1-x) + iy]$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{1-z} \right| = \frac{1}{(1-x)^2 + y^2} [(1-x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (|x+iy| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{[(1-x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \leftarrow$$



5) Análisis de Estabilidad del m. Taylor explícito de orden  $r=2$ .

$$y' = f(t, y) = \lambda y$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h T^2(\hat{y}_i)$$

$$\begin{aligned} T^2(y) &= f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y) \\ &= \lambda y + \frac{h}{2} \lambda^2 y \end{aligned}$$

$$f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \lambda y' = \lambda^2 y$$

$$T^2(y) = \lambda y + \frac{h}{2} \lambda^2 y$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \lambda h \hat{y}_i + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \hat{y}_i$$

$$= \hat{y}_i \left[ 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right]$$

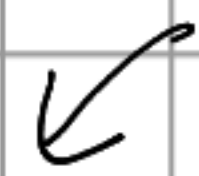
$$= \hat{y}_{i-1} \left[ \quad \right]^2 = \dots = \left[ \quad \right]^{i+1}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_i = \left[ 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right]^i$$

Est estable si y solo si  $\left| 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right| < 1$ .

$$z = \lambda h$$

$$\uparrow \quad h < ?$$



$$5.ii) \quad D_{T2} = \{z \in \mathbb{C} : |1 + z + \frac{z^2}{2}| < 1\}$$

Pour graphier en module

$$z = x + yi$$

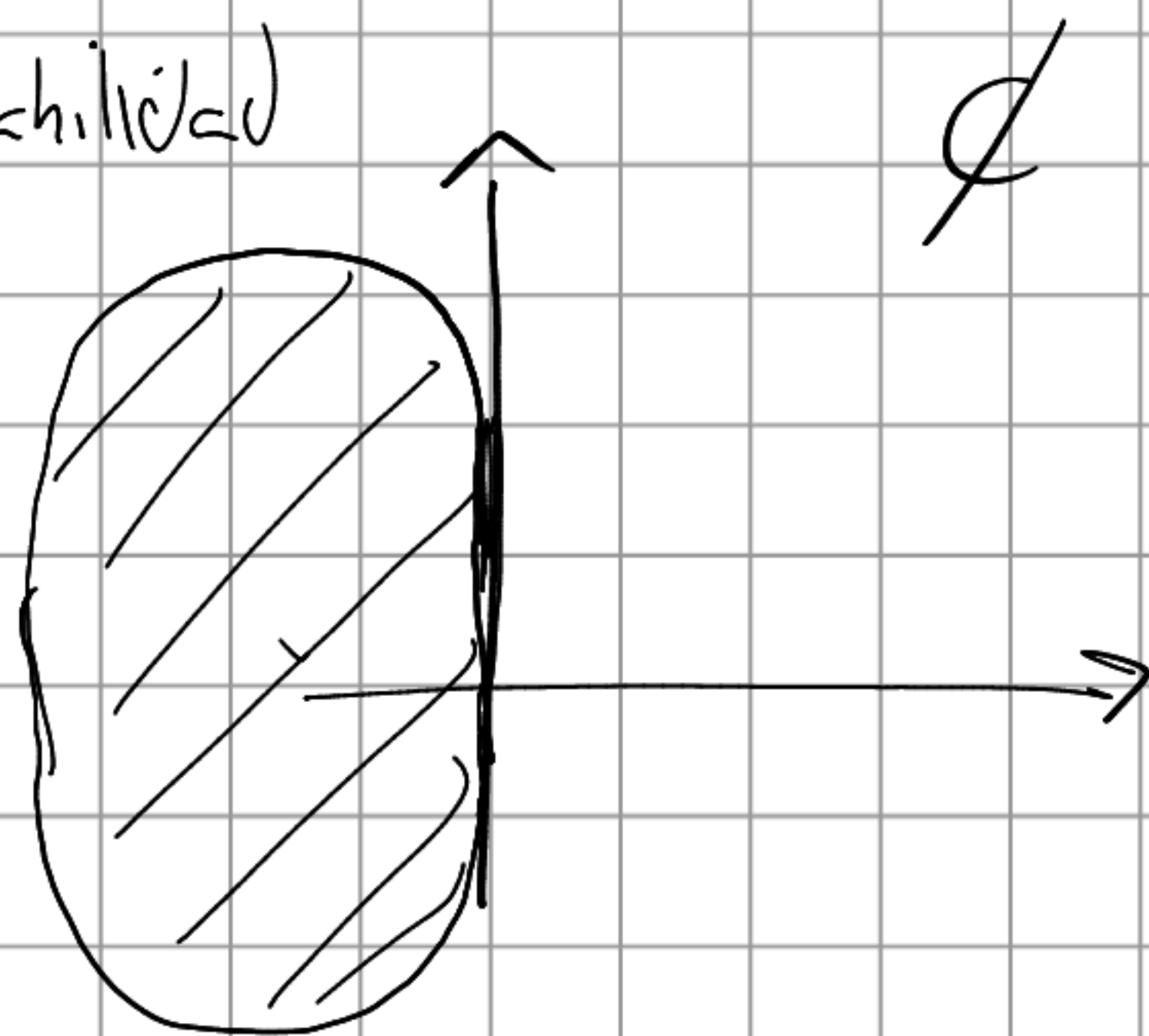
$$1 + z + \frac{z^2}{2} = 1 + x + iy + \frac{(x + iy)^2}{2}$$

$$(x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$= \left[ 1 + x + \frac{x^2 - y^2}{2} \right] + i(y + xy)$$

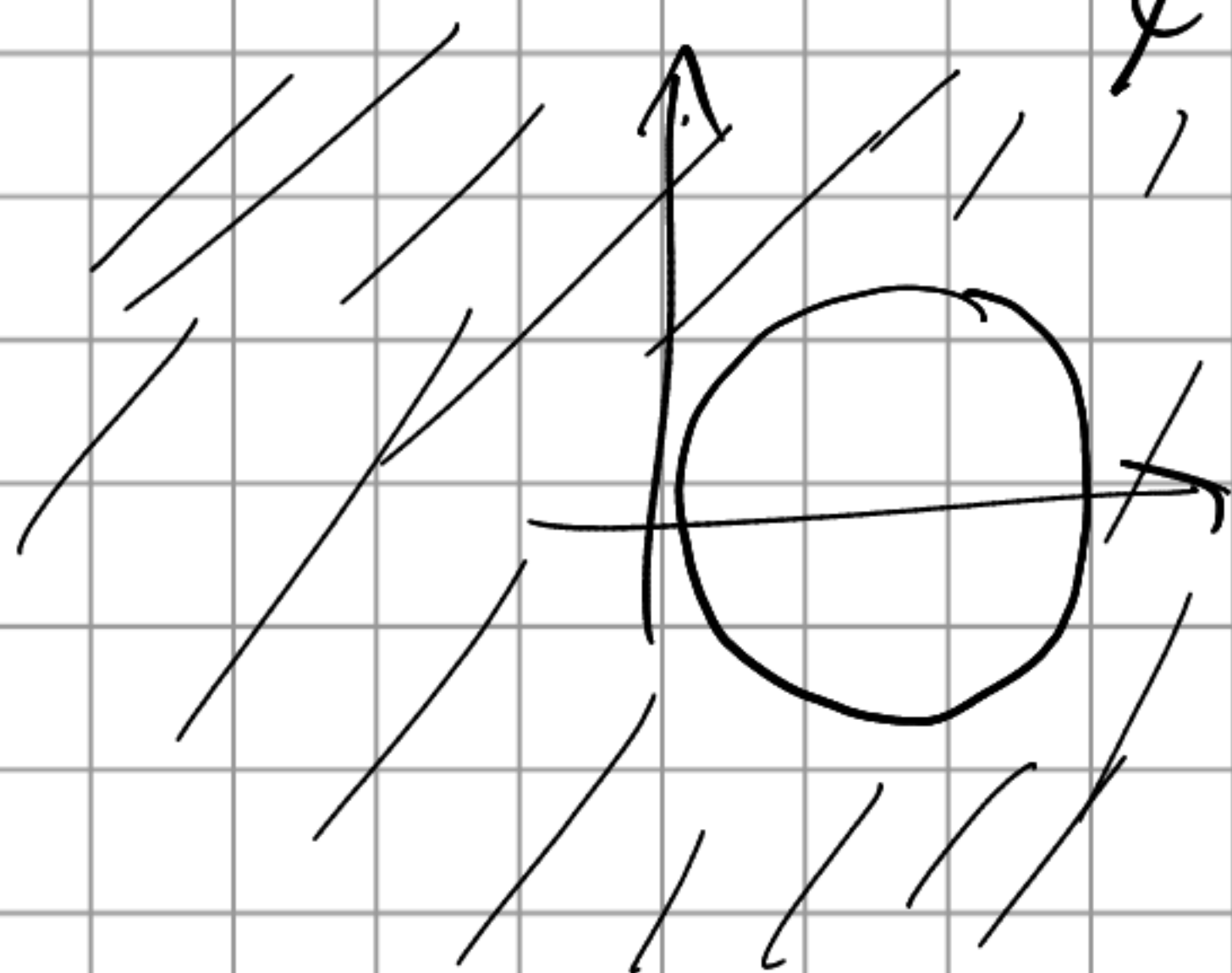
$$\left| 1 + z + \frac{z^2}{2} \right| = \left[ \left[ 1 + x + \frac{x^2 - y^2}{2} \right]^2 + [x + xy]^2 \right]^{1/2}$$

Dom. de Stabilité





Domínio de Estabilidade para Euler Implícito



6) Análisis de Estabilidad del Método del Trapecio.

$$(*) \quad y' = \lambda y \quad t > 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R},$$

$$y(0) = 1$$

$$\text{M.T. :} \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2} [P(\hat{y}_i) + f(\hat{y}_{i+1})]$$

$$= \hat{y}_i + \frac{h}{2} [\lambda \hat{y}_i + \lambda \hat{y}_{i+1}]$$

$$\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) \hat{y}_{i+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) \hat{y}_i$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{i+1} = \left[ \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right] \hat{y}_i = \left[ \quad \quad \quad \right]^2 \hat{y}_{i-1}$$

$$\hat{y}_i = \left[ \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right]^i$$

$$\left| \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{\lambda h}{2} < 1 + \frac{\lambda h}{2} < 1 - \frac{\lambda h}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2 + \frac{\lambda h}{2} < \frac{\lambda h}{2} \quad \text{and} \quad \frac{\lambda h}{2} < -\frac{\lambda h}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2 < 0 \quad \text{and} \quad \frac{\lambda h}{2} < 0$$

$$h > 0 \quad \checkmark$$

Dem. Estabilidad ( $z = \lambda h$ )

$$\mathcal{D}_{TR} = \{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \right| < 1 \}$$

$$z = x + iy$$

$$\frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2}i}{1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}i} \cdot \frac{(1 - \frac{x}{2}) + \frac{y}{2}i}{(1 - \frac{x}{2}) + \frac{y}{2}i} = \frac{(1 - \frac{x^2}{4}) - \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2}i}{(1 - \frac{x}{2})^2 + \frac{y^2}{4}}$$

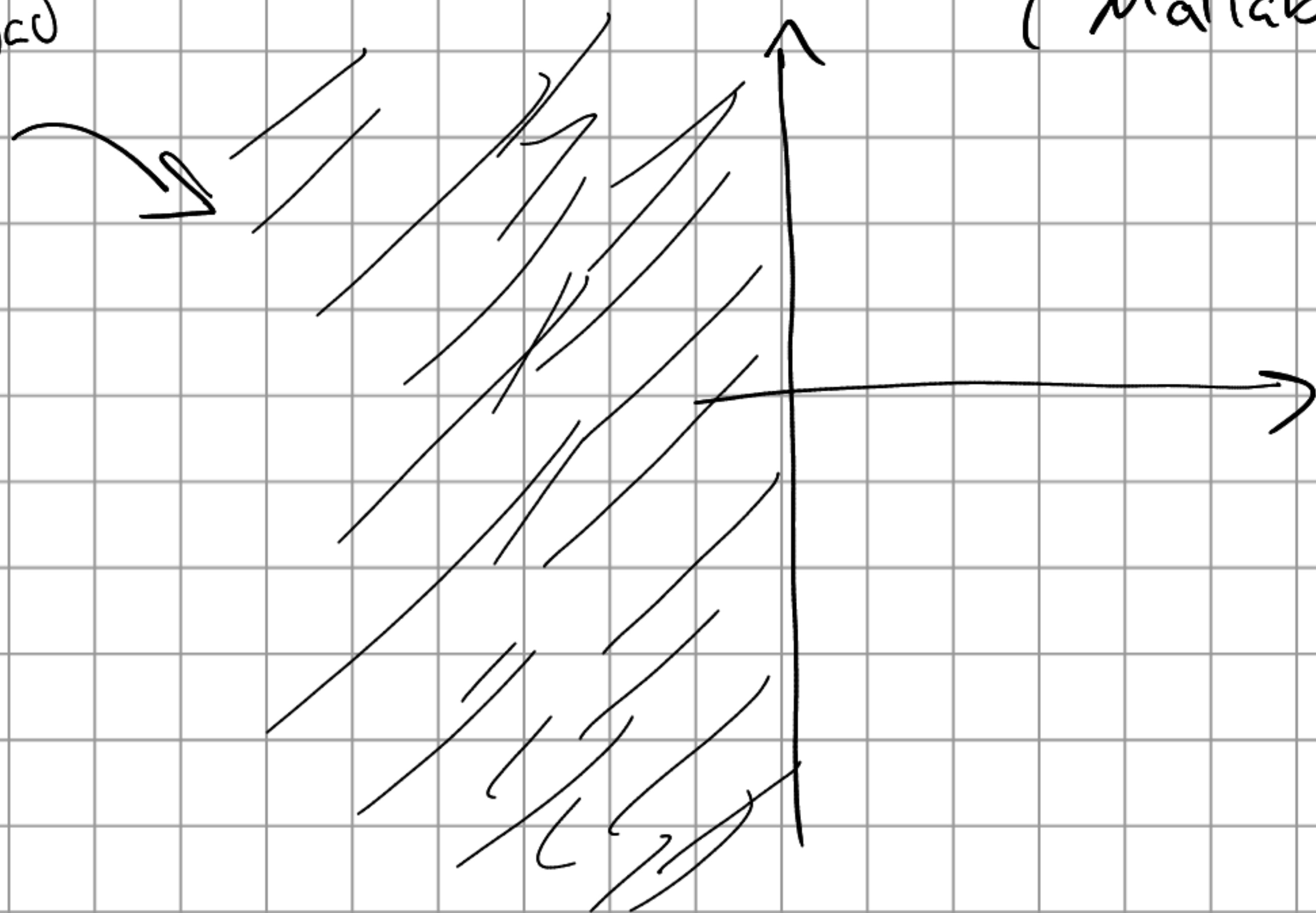
$$\left| \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \right| = \frac{1}{r} \left[ \left( 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \right)^2 + \frac{y^2}{4} \right]^{1/2}$$

$$r = \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{y^2}{4}$$

Dominio

de estabilidad

(Matlab)



7) Def:

Un método numérico es A-estable

si su dominio de estabilidad incluye el semiplano

$$\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0 \}.$$

$$\underline{y}' = \underline{A} \underline{y} \quad \underline{A} = \underline{V} \underline{D} \underline{V}^{-1}$$

$$y' = \lambda_i y$$

## 8) Análisis de Estabilidad de los Met. R.K Explícitos

### 8.i) Método de Euler Modificado

$$\begin{aligned}\hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(\hat{y}_i) + \frac{h}{2} f(\hat{y}_i + h f(\hat{y}_i)) \\ &= \hat{y}_i + \frac{h}{2} \lambda \hat{y}_i + \frac{h}{2} \lambda (\hat{y}_i + h \lambda \hat{y}_i) \\ &= \hat{y}_i \left[ 1 + \frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2} + \frac{h^2 \lambda^2}{2} \right] \\ \hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i \left[ 1 + \lambda h + \frac{h^2 \lambda^2}{2} \right]\end{aligned}$$

es la misma que obtuvimos para el Met. Taylor Ex.  
 $r=2$ .

$$\text{Dom}_{\text{Em}} = \text{Dom}_{T_2} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| 1 + z + \frac{z^2}{2} \right| < 1 \right\}$$

8.ii) El método del punto medio:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + h f\left(\hat{y}_i + \frac{h}{2} f(y_i)\right) \\ &= \hat{y}_i + h \lambda \left(\hat{y}_i + \frac{h}{2} \lambda \hat{y}_i\right) \\ &= \hat{y}_i \left[1 + h\lambda + \frac{h^2 \lambda^2}{2}\right]\end{aligned}$$

es la misma que obtuvimos para M.FM y  
M.Taylor  $r=2$ .

9) Los métodos de R.K. explícitos que tienen  
el mismo número de etapas, tienen el mismo  
dominio de estabilidad \*

→ Recordamos la forma gen. de un método explícito  
de R.K.:

$k$ -niveles

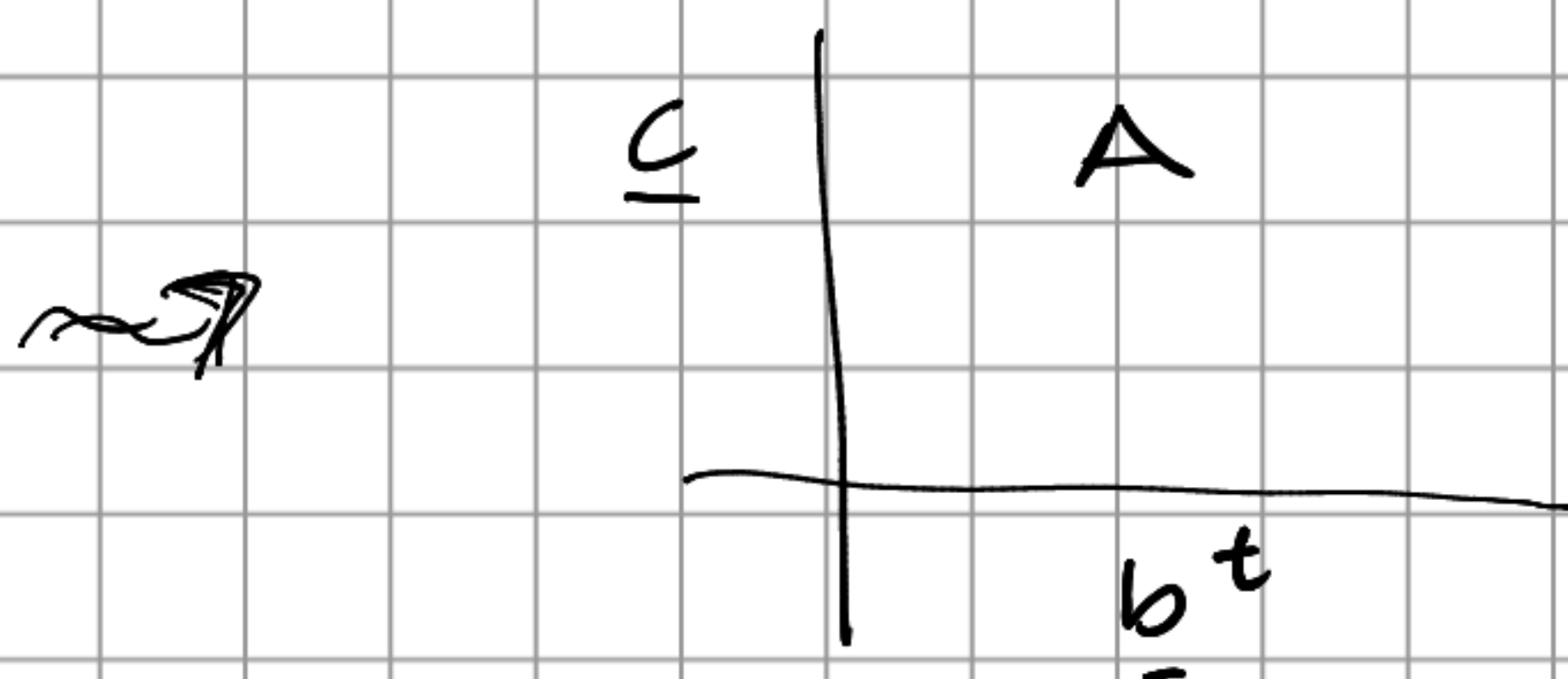
$$\left\{ \begin{aligned}\xi_1 &= \hat{y}_i \\ \xi_2 &= \hat{y}_i + h a_{21} f(t_i, \xi_1) \\ \xi_3 &= \hat{y}_i + h a_{31} f(t_i, \xi_1) + h a_{32} f(t_i + c_2 h, \xi_2) \\ &\vdots \\ \xi_k &= \hat{y}_i + h \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} f(t_i + c_j h, \xi_j) \\ \hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + h \sum_{j=1}^k b_j f(t_i + c_j h, \xi_j)\end{aligned}\right.$$

Recordar que un método de Runge-Kutta está determinado

por 4 factores: 1) #k-etapas

$$2) A = [a_{kj}], \underline{b} = [b_j], \underline{c} = [c_j]$$

$$A \in \mathbb{R}^{k \times k}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^k$$



9.i) Utilizando el método R.K. Exp. gen. de k-niveles

a la ecuación

$$y' = \lambda y \quad t > 0$$

$$y(0) = 1$$

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{i+1} = R(h\lambda) \hat{y}_i, \quad R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$$

$s$  entero.

donde

$$R(z) = 1 + z \sum_{j=1}^k b_j + z^2 \sum_{j,l=1}^k b_j a_{jl} + z^3 \sum_{j,l,k=1}^k b_j a_{jl} a_{lm} + \dots$$



9.ii) Teorema.  $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^k}{k!}$

Corolario: El Dominio de estabilidad de un método R.K. explícito de  $k$ -etapas es.

$$\text{Dom } R_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^k}{k!} \right| < 1 \right\}$$

Corolario: Dado un número entero  $k$ , todos los métodos Explícitos de R.K. de  $k$ -niveles, tienen el mismo dominio de estabilidad.