→ Los métodos explícitos Runge-Kutta (caso escalar)

1) Son métodos de orden superior (como los métodos de Taylor) que no requieren $f', f'', f^{(3)} \ldots$

2) Teorema de Taylor para dos variables (indep)

Sea $f(t,y)$ y todas sus derivadas parciales de orden menor o igual a $n+1$ continuas en $D = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq b,\ c \leq y \leq d \}$

y sea $(t_0, y_0) \in D$. Entonces para todo punto $(t,y) \in D$

existe $(\xi, \mu) \in D$ tal que

$$f(t,y) = P_n(t,y) + R_n(t,y)$$

donde

$$P_n(t,y) = f(t_0, y_0) + \left[(t-t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y_0) \right]$$

$$+ \left[\frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0,y_0) + (t-t_0)(y_0-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0,y_0) + \frac{(y-y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0,y_0) \right]$$

$$+ \ldots + \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (t-t_0)^{n-j} (y-y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j} \partial y^j}(t_0,y_0) \right]$$

$$R_n(t,y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t-t_0)^{n+1-j} (y-y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j}(\xi,\mu)$$

3) Métodos de R.K. de orden $r=2$

i) Recordemos el M. de Taylor de orden $r=2$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h\,T^{(2)}(t_i, \hat{y}_i)$$

$$T^{(2)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2} f'(t,y)$$

ii) Queremos aproximar $T^{(2)}(t,y)$ con un error $O(h^2)$ con una expresión de la forma:

$$a_1 f(t+\alpha, y+\beta)$$

$(*)$ $$T^{(2)}(t,y) = a_1 f(t+\alpha, y+\beta) + \underline{O(h^2)} \quad , \alpha, \beta, a_1 \in \mathbb{R}$$

Queremos un error de $O(h^2)$ porque el método de Taylor de orden $r=2$ tiene un error de truncamiento / convergencia de orden 2

iii) $$f'(t,y) = \frac{d}{dt} f(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t,y)$$

en $(*)$

$$f(t,y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y} f(t,y)} \simeq a_1 f(t+\alpha, y+\beta)$$

iv) Ahora utilizamos el T. de Taylor para 2 variable a $a_1 f(t+\alpha, y+\beta)$ en el punto (t,y)

$$a_1 f(t+\alpha, y+\beta) = a_1 f(t,y) + a_1\alpha \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + a_1\beta \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) + a_1 R_1(t+\alpha, y+\beta)$$

$$R_1(t+\alpha, y+\beta) = \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + \alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}(\xi,\mu) + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

Recordar que queremos $T^{(2)}(t,y) = a_1 f(t+\alpha, y+\beta)$

$$\Rightarrow \underline{f(t,y)} + \underline{\underline{\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}}}(t,y) + \underline{\underline{\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}}} f(t,y) = \underline{a_1 f(t,y)} + a_1\alpha \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial t}}}(t,y) + a_1\beta \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}}(t,y) + a_1 R_1(t+\alpha, y+\beta)$$

Igualamos término x término

$$\underline{\underline{a_1 = 1}}, \quad \frac{h}{2} = a_1\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{h}{2}}}$$

$$\frac{h}{2}f(t,y) = \beta a_1 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = \frac{h}{2}f(t,y)}}$$

$$\Rightarrow T^{(2)}(t,y) = f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) + R_1(t+\alpha, y+\beta)$$

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) = \frac{h^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial t}(\xi,\mu) + \frac{h^2}{4}f(t,y)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}(\xi,\mu) + \frac{h^2}{8}(f(t,y))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

Si todas las derivadas parciales de orden 2 son continuas y acotadas, entonces

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) = O(h^2)$$

Este es el método del punto medio:

$$\begin{cases} \hat{y}_0 = y_0 \\ \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right), \quad i = 0, \dots, N \end{cases}$$

$\rightarrow$ El método de Euler modificado, se obtiene

aproximando $\underline{\underline{T^{(2)}}}(t,y)$ con

$$\underline{a_1} f(t,y) + \underline{a_2} f(t + \underline{\alpha}, y + \underline{\beta} f(t,y)),$$

entonces utilizando el mismo proceso anterior obtenemos

$$T^{(2)}(t,y) = \frac{1}{2} f(t,y) + \frac{1}{2} f(t+h, y + h f(t,y)) + \underline{\underline{O(h^2)}}$$