→ Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Computación científica

Uso de computadoras:

i) Resolver problemas de ciencia aplicada y la ingeniería

ii) obtener soluciones de modelos matemáticos que un fenómeno físico.

Para que se usa el cálculo científico?

1) Diseño
2) Problemas de ecología / biología, dinámica población determinísticos y estocásticos

Física de videojuegos.

Cálculo científico: conjunto de herramientas técnicas y teóricas que se requieren para resolver modelos matemáticos de la ciencia aplicada generalmente utilizando equipo de cómputo

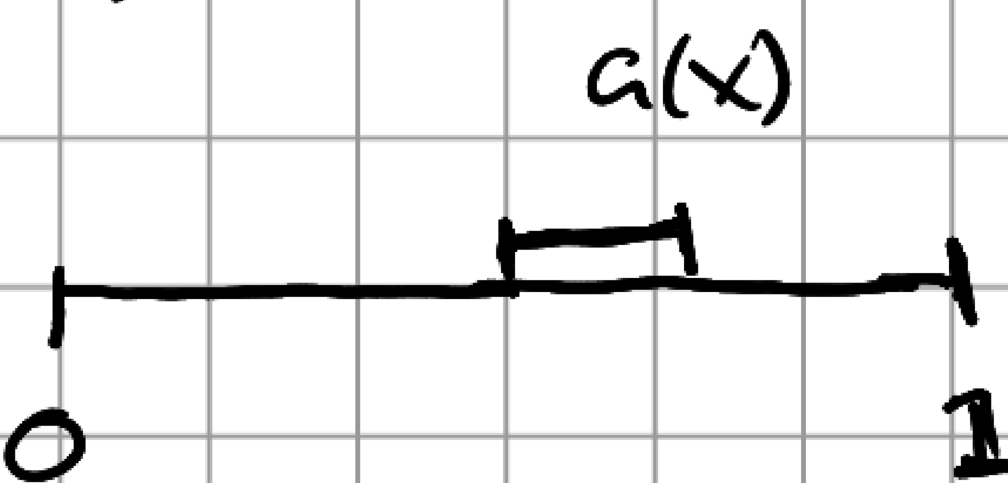
Ejemplo

Ecuación de Calor:

$$(*) \qquad -\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{du}{dx}\right] + b(x)u = f(x) \qquad x \in (0,1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad a(x) > 0, \; b(x) \geq 0$$

u: función de temperatura, °K

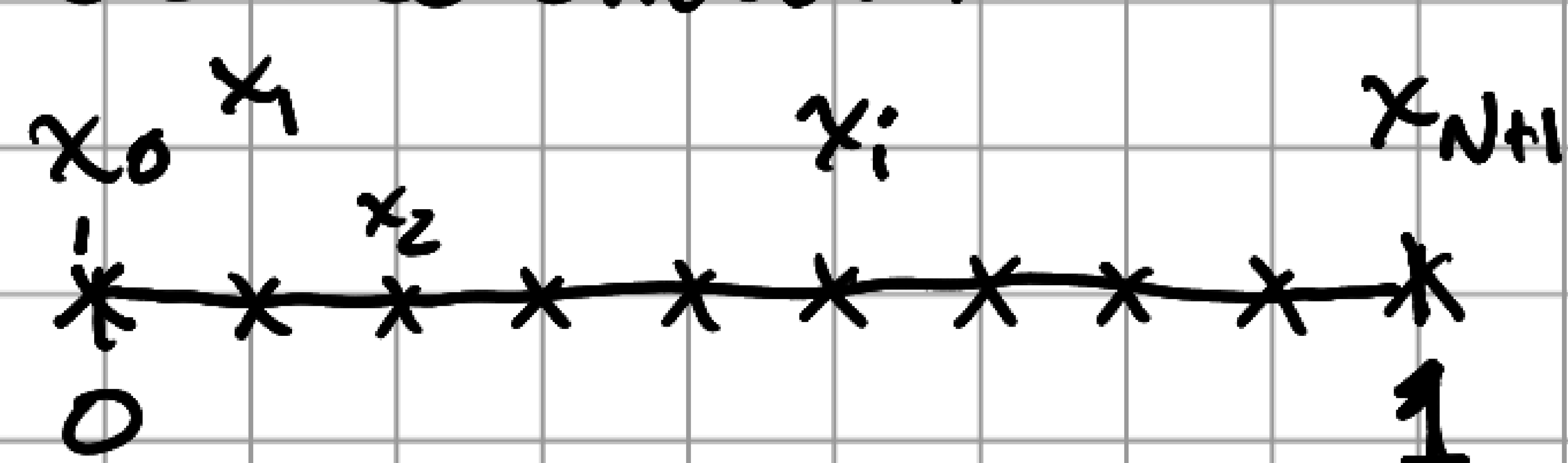


$u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

BVP.

$a(x)$: coeficiente de conductividad térmica

2) Error de discretización: $\quad (0,1) = \Omega$



$\begin{cases} u(x) \text{ solución analítica} \\ \hat{u}(x_i) \text{ solución discreta} \end{cases}$

$|u(x_i) - \hat{u}(x_i)|$ error absoluto

$$\frac{|u(x_i) - \hat{u}(x_i)|}{|u(x_i)|} \qquad \text{relativo}$$

→ La ecuación del Péndulo Simple

i) la cuerda no tiene masa

no es elástica

ii) no hay resistencia del aire

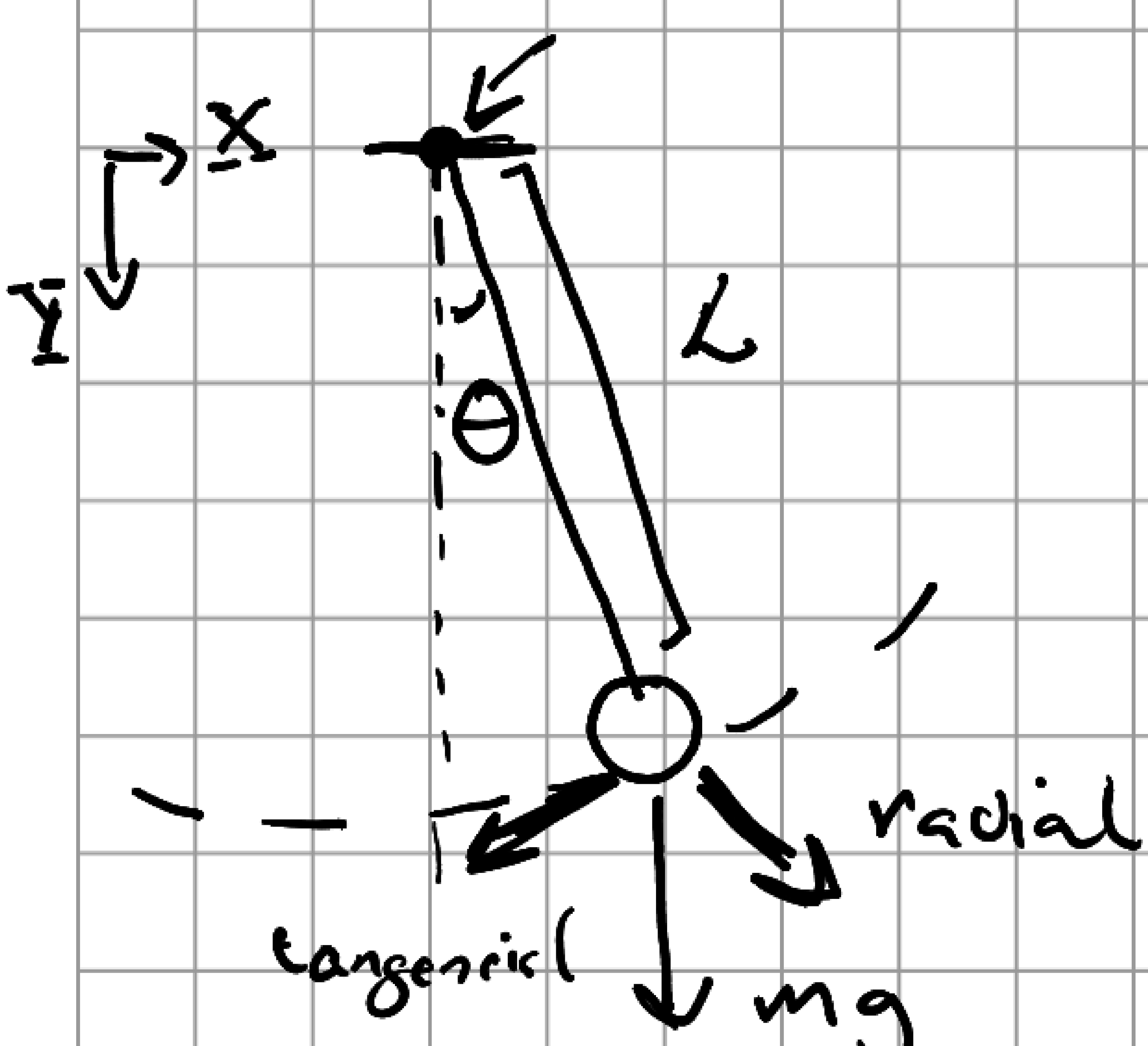
iii) Movimiento es de una partícula - masa Kg

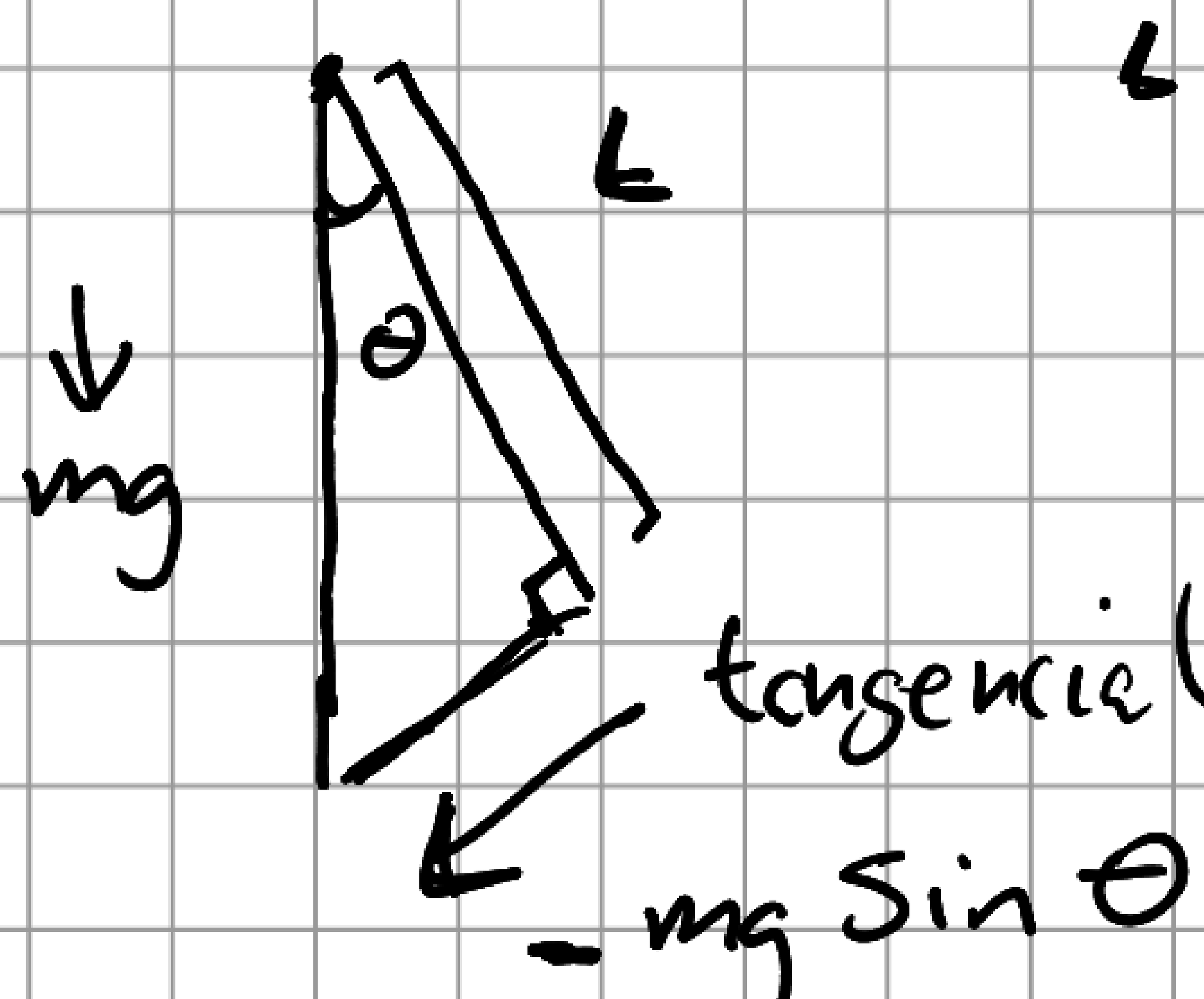
2° Ley de Newton

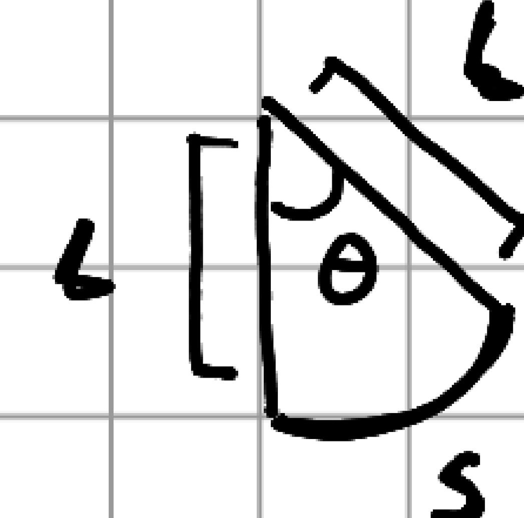
$$F = ma$$

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}$$

$$a = \frac{d^2}{dt^2}$$







$$s = L\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

θ:

t: tiempo

$$-\cancel{m}g \sin\theta = \cancel{m} L \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

i) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ No-Lineal $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$-15^\circ \le \theta \le 15^\circ$

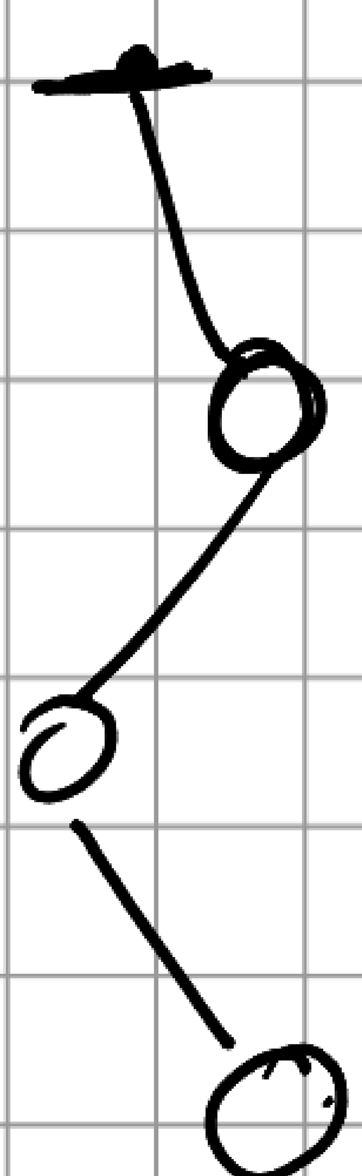
Posición inicial

$\theta(0) = \theta_0$

$\sin\theta \approx \theta$

$\frac{d\theta}{dt}(0) = V_\theta$

ii) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$ Lineal



Triple péndulo

Método de Euler

Burden - Faires 5.2.

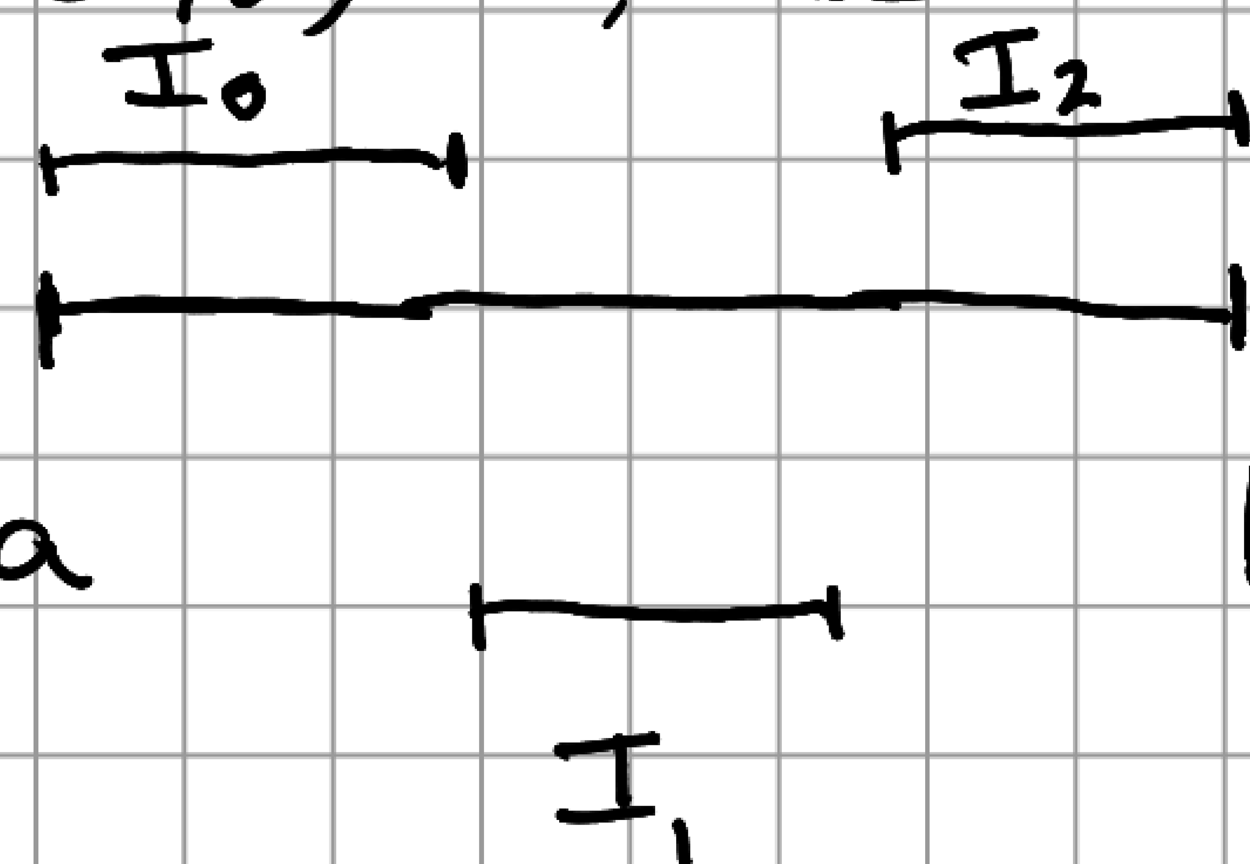
1) $$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad , \quad t \in (a,b)$$

$$y(a) = \alpha = y_0 \in \mathbb{R}$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f es derivable en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2) $\Omega := (a,b)$, $\overline{\Omega} := [a,b]$

$N = 3$



i) $t_i = a + ih$

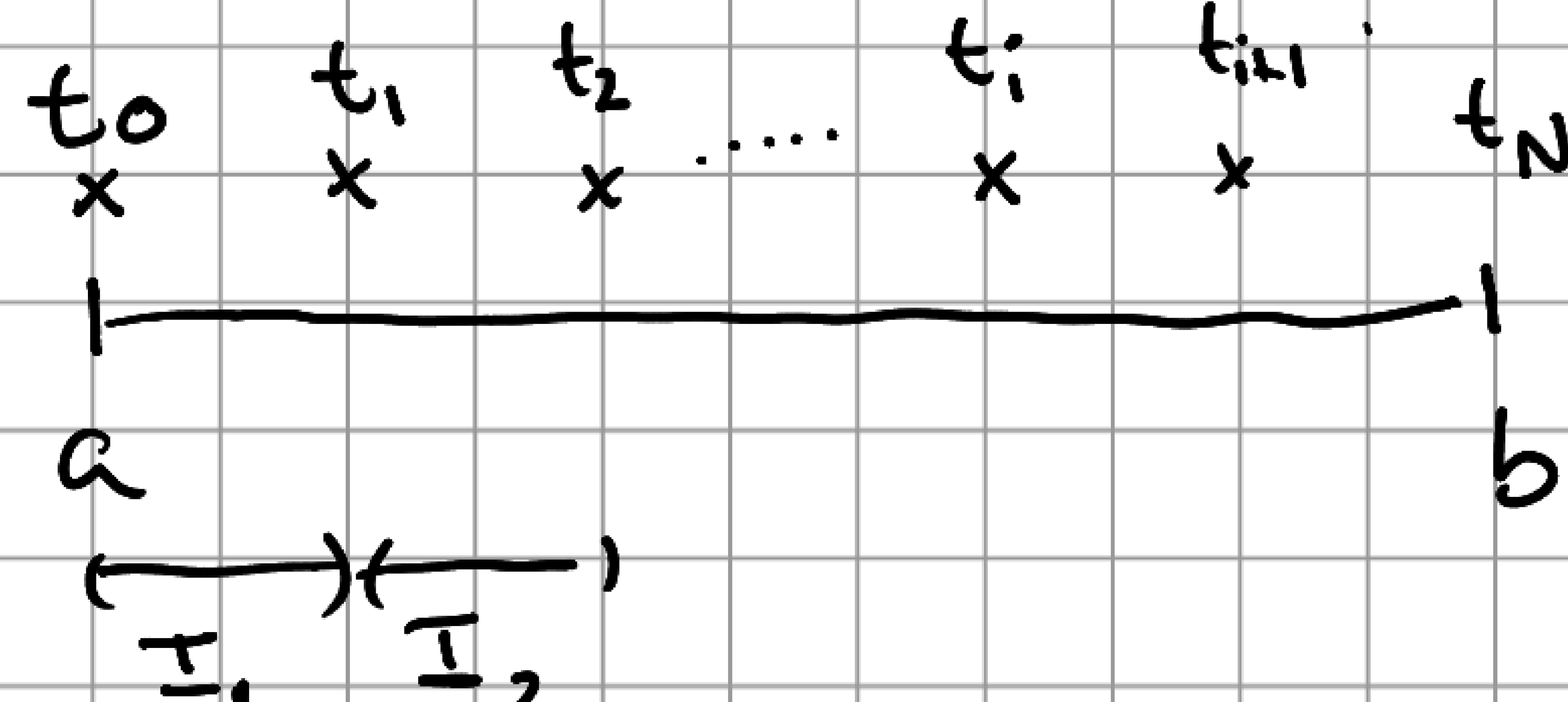
ii) $h = \dfrac{b-a}{N}$

$|I_i| =: h$ es la longitud de cada subintervalo

N: es el # de subintervalos que dividen $\Omega = [a,b]$

$\Rightarrow I_i = (t_{i-1}, t_i)$

$t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $N+1$ puntos de discretización



→ división uniforme

→ malla uniforme

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \leftarrow$$

3) $\boxed{y(t_i)} \leftarrow$ valor de la solución analítica en el punto t_i

4) Teorema de Taylor con residuo diferencial

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable $(k+1)$-veces en $[\bar{a}, \bar{b}]$, entonces $x \in [\bar{a}, \bar{b}]$

$$g(x) = g(\bar{a}) + g'(\bar{a})(x-\bar{a}) + \frac{g''(\bar{a})}{2!}(x-\bar{a})^2 + \dots + \frac{g^{(k)}(\bar{a})}{k!}(x-\bar{a})^k + \frac{g^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-\bar{a})^{k+1}, \quad \xi \in [\bar{a}, \bar{b}]$$

$\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$

5) $y(t_{i+1})$ alrededor de $y(t_i)$

$$(*) \quad y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\, y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2!} y''(\xi_i)$$

exacta

$$\hat{y}(t_{i+1}) \approx y(t_{i+1}), \quad \hat{y}_i = \hat{y}(t_i)$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f(t_i, \hat{y}_i)$$ método de Euler.

Algoritmo Método Euler.

Aproximamos la solución de

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in (a,b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Algoritmo:

Input: a, b, N, y_0

Output: $\hat{y}_i, \quad i = 0, \dots, N$

→ Init: $h = \dfrac{b-a}{N}$

$t = a$

$\hat{y}_0 = y_0$

Step 1: For $i = 1, \dots, N$

$\hat{y}_i = \hat{y}_{i-1} + h f(t, \hat{y}_{i-1})$

$t = a + ih$

Done, stop.