→ Métodos de resolución para sistemas no-lineales

1) Método del Trapecio

$$y' = f(t,y) \quad t \in (a,b)$$
$$y(a) = y_0$$

$$\hat{y}_0 = y_0$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{y}}_{i+1} = \hat{\underline{y}}_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, \hat{\underline{y}}_i) + f(t_{i+1}, \hat{\underline{y}}_{i+1}) \right]$$

$$\hat{\underline{y}}_{i+1} = G_i(h, f, \hat{\underline{y}}_i, \hat{\underline{y}}_{i+1})$$

$$\uparrow$$

$$p \qquad p = G(p) \leftarrow$$

2) Def: Un número $p \in \mathbb{R}$ es un punto fijo para una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $g(p) = p$.

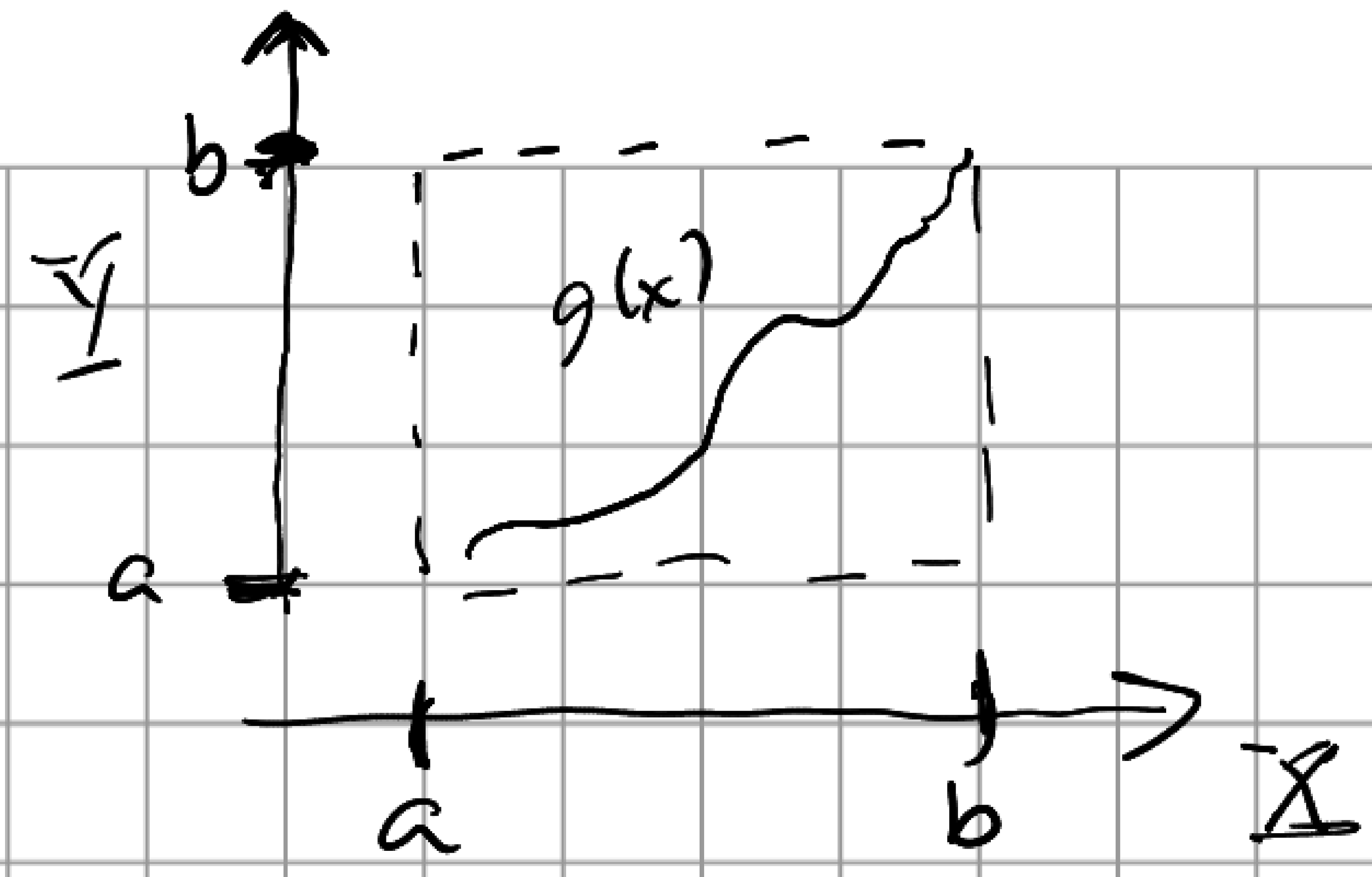
3) Teorema:

i) Si $g \in C[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow g$ tiene al menos un punto fijo

ii) Si adicionalmente $g'(x)$ en (a,b) y existe $0 < K < 1$ tal que

$$|g'(x)| \leq K \quad \forall x \in (a,b)$$

entonces el punto fijo p es único.



Prueba:

i) Si $g(a) = a$ ó $g(b) = b$ $\Rightarrow$ g tiene un punto fijo p en los extremos de $[a,b]$

sino $g(a) > a$ & $g(b) < b$ porque $g(x) \in [a,b]$

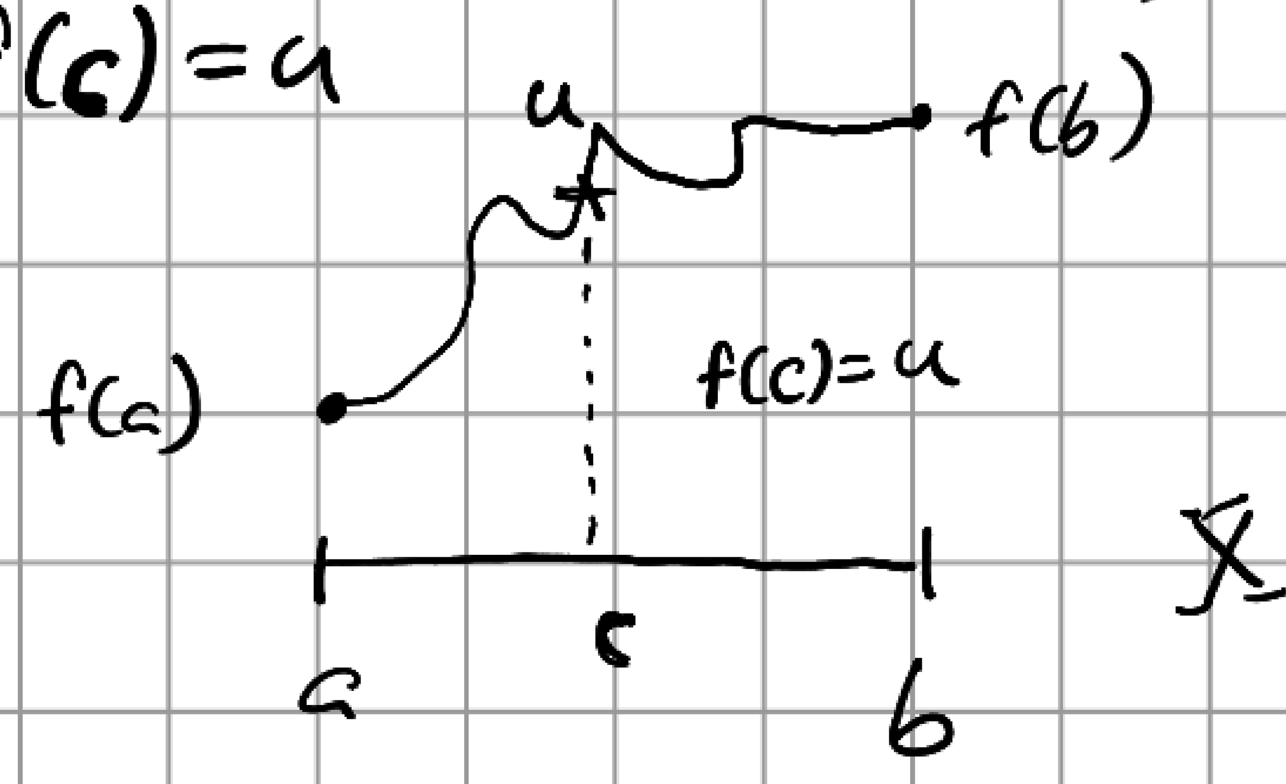
Sea $h(x) = g(x) - x$, y como $g(x)$ es continua $\Rightarrow$ $h(x)$ es continua

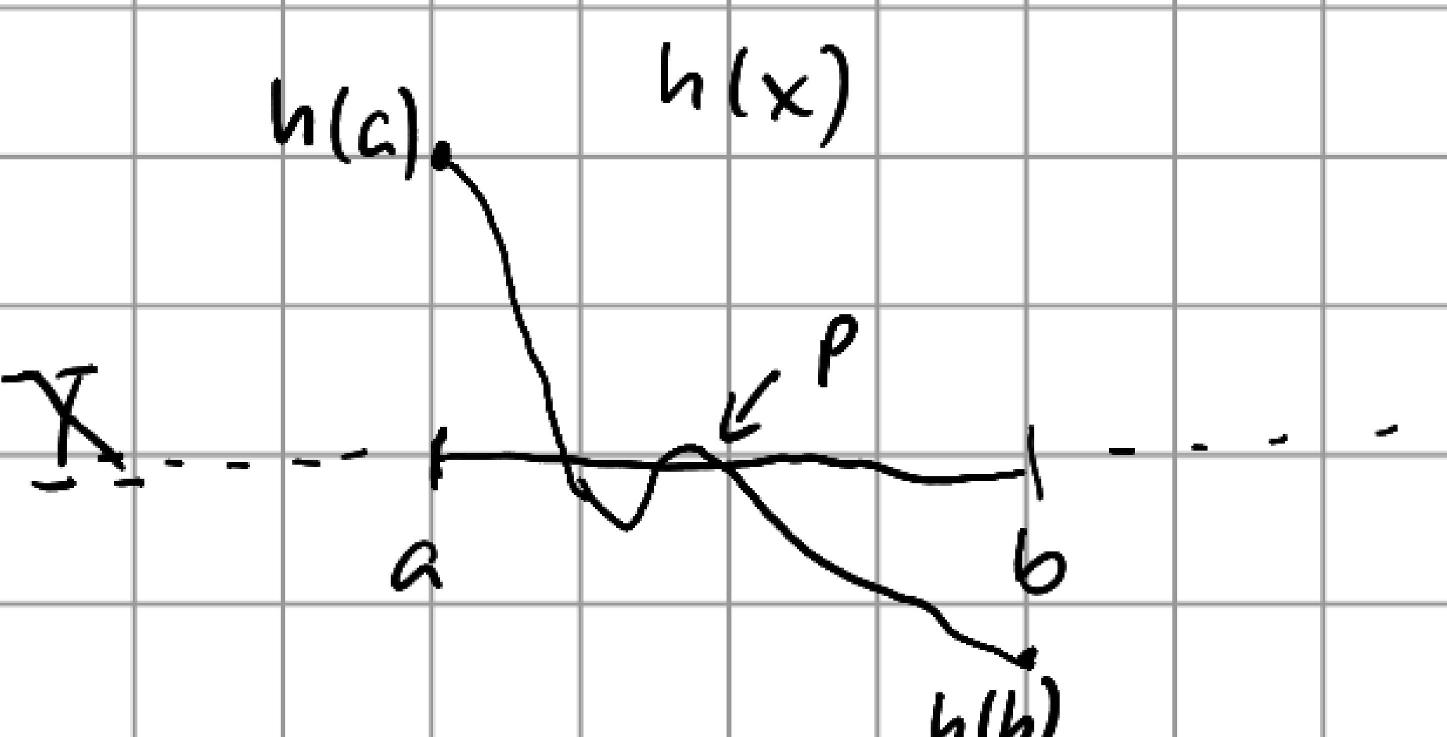
* $h(a) = g(a) - a > 0$ & $h(b) = g(b) - b < 0$

Recordamos el teorema del valor intermedio que nos dice que una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ tal que

$$f(a) < f(b) \Rightarrow \forall\, u \in (f(a), f(b))\ \exists\, c \in (a,b)$$

tal que $f(c) = u$





$\exists\, p \in (a,b)$ tal que

$h(p) = 0 \Rightarrow h(p) = g(p) - p$

$\Rightarrow 0 = g(p) - p \Rightarrow p = g(p)$ ∎

ii) $\exists\ K < 1$ tal que $|g'(x)| < K \quad \forall x \in (a,b)$

Supongamos que p, q son puntos fijos de $g(x)$

y $\underline{p \neq q}$ por el teorema del valor medio $\exists\ \xi \in [p,q]$

$p, q \in [a,b]$ tal que $\dfrac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi) \quad (*)$

$$\Rightarrow \quad |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)|\,|p - q|$$
$$< K\,|p-q|$$
$$|g(p) - g(q)| < |p - q|$$
$$|p - q| < |p - q|$$

contradicción.

$\Rightarrow \quad p = q \quad \blacksquare$

4) Algoritmo del punto fijo: Para solucionar $\underline{p = g(p)}$ dada una aproximación $\underline{p_0}$

Input: p_0, tolerancia $\epsilon > 0$, # máximo de iteraciones N_0

output: aproximación de $\underline{p}$ ó un mensaje de fallo

Algoritmo:

```
Paso de Init.   i = 1   (# de iteraciones)
Paso 1          while i ≤ N0 {  p = g(p0)   * ←
                                if |p - p0| < ε {
                                   then output(p)
                                        exit from program {
                                i = i + 1
                                p0 = p
                              {
```

output("el método ha fallado para No iteracciones")

$\boxed{\checkmark}$

5) Teorema de convergencia del Algoritmo del punto fijo

i) Sea $g \in C[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$
ii) g' existe en (a,b) y $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$

$$|g'(x)| \leq k \quad \forall x \in (a,b) \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Para todo número $p_0 \in [a,b]$, la sucesión definida por

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

converge al único punto fijo $p \in [a,b]$.

$g(p_{n-1}) - g(p) = g'(\xi)(p_{n-1} - p)$

Pf: $\cdot$ $|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)|$
$= |g'(\xi_n)| \, |p_{n-1} - p|$ por el teorema del valor medio
$\leq k \, |p_{n-1} - p|$

Recursivamente
$$|p_n - p| < k|p_{n-1} - p| < k^2 |p_{n-2} - p| < \dots < k^n |p_0 - p|$$

$(*) \Rightarrow |p_n - p| < k^n |p_0 - p|$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| < \left[\lim_{n\to\infty} k^n\right] |p_0 - p|$$

como $0 < k < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} k^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \boxed{\checkmark}.$$

6) Corolario.- Si $g(x)$ satisface las condiciones del teorema anterior, entonces:

$(*)$ i) $|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, p_0 - b\}$

ii) $|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|, \; n \geq 0$

Pf:

i) Por el teorema anterior, $|p_n - p| \leq k^n |p_0 - p|$

pero $p \in [a,b] \Rightarrow |p_0 - p| \leq \max\{|p_0 - a|, |p_0 - b|\}$

ii) $n \geq 1$,

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k|p_n - p_{n-1}| \quad \text{valor medio } |g'(\cdot)| \leq k$$
$$\leq k^2 |p_{n-1} - p_{n-2}|$$
$$\vdots$$
$$\leq k^n |p_1 - p_0|$$

Para $m > n \geq 1$

$$|p_m - p_n| = |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - p_{m-2} + p_{m-2} + \cdots + p_{n+2} - p_{n-1} + p_{n+1} - p_n|$$
$$\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+2} - p_{n+1}| + |p_{n+1} - p_n|$$
$$\leq k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \cdots + k^{n+1}|p_1 - p_0| + k^n |p_1 - p_0|$$
$$(\approx) \quad (=) \; k^n |p_1 - p_0| \left[1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-2} + k^{m-n-1}\right]$$

Como $p_m \to p$ cuando $m \to \infty \Rightarrow$ cte

$$|p - p_n| = \lim_{m\to\infty} |p_m - p_n| \leq \left[\lim_{m\to\infty} k^n |p_1 - p_0|\right]\left[\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m-n-1} k^j\right]$$

$$|p - p_n| \leq k^n |p_1 - p_0| \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} k^j}$$

Como $0 < k < 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} k^j = \frac{1}{1-k}$

$$\Rightarrow |p - p_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| \quad \boxtimes.$$

7) Ejemplo: La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene solución única en $[1,2]$. Encontrar la solución utilizando el método del Punto Fijo.

Sol.:

i) $\tilde{g}_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \Rightarrow \tilde{g}_1(x) + x = x + x^3 + 4x^2 - 10$

y definimos $g_1(x) = \tilde{g}_1(x) + x$

Si x^* es P.F. de $g_1(x^*) \Rightarrow \tilde{g}_1(x^*) = 0$.

$g_1(x) = x + x^3 + 4x^2 - 10$.

$g_1(1) = 1 + 1 + 4 - 10 = 6 - 10 = -4 \notin [1,2]$.

$g_1(x)$ no satisface las condiciones del Teorema P.F.

ii) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 10 - x^3 \Rightarrow 4x = \frac{10}{x} - x^2, \; x \neq 0$

$$\Rightarrow x = \left[\frac{10}{x} - 4x\right]^{1/2}$$

utilizando el hecho de que la solución es única

$g_2(x) = \left[\frac{10}{x} - 4x\right]^{1/2}, \quad x^* = g_2(x^*)$

$$g_2(x) = \left[\frac{10}{x} - 4x\right]^{1/2} \qquad x = 2 \quad [1,2]$$

$$g_2(2) = \sqrt{5-8}$$, $g_2(2)$ no esta definida

$$\frac{10}{x} - 4x < 0 \Rightarrow \frac{10}{x} < 4x \Rightarrow 10 < 4x^2$$

$$\Rightarrow 1 < 4 < \frac{5}{2} < x^2 \Rightarrow 1 < x$$

$g_2(x)$ no esta definida en $(1,2]$.

iii) $x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$

$$x = \frac{1}{2}\left[10 - x^3\right]^{1/2} =: g_3(x) \qquad [1,2]$$

$$g_3'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)[10-x^3]^{-1/2}[-3x^2] = -\frac{3}{4}x^2[10-x^3]^{-1/2} \leq 0$$

$g_3(x)$ es decreciente en $[1,2]$

$$g_3(2) = \frac{1}{4}[10-8]^{1/2} \approx 2.12 \notin [1,2]$$

Como $g_3(x)$ es decreciente, es más conveniente analizar $g_3(x)$ en el intervalo $[1, 3/2]$

$$g_3(3/2) \approx 1.28 \in [1, 3/2]$$

$$g_3(1) = \frac{1}{2}[10-1]^{1/2} = \frac{3}{2} \in [1, 3/2] \Rightarrow g_3(x) \in [1, 3/2]$$

✓

$|g_3'(x)| \leq 1$ Graficando en Matlab

$$g_4(x) = \left[\frac{10}{4+x}\right]^{1/2} \quad , [1,2]$$

$g_4(x)$ cumples las condiciones (ejercicio).

Métodos Implícitos:

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}) & t \in [a, b] \\ \underline{y}(a) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

1) Trapecio

$$\underline{\hat{y}}_0 = \underline{y}_0$$

$$\underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + \frac{h}{2} \left[\underline{f}(t_i, \underline{\hat{y}}_i) + \underline{f}(t_{i+1}, \underline{\hat{y}}_{i+1}) \right]$$

El método del Trapecio tiene error de convergencia de $O(h^2)$

2) Método Euler-Implícito

$$\underline{\hat{y}}_0 = \underline{y}_0$$

$$\underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + h\, \underline{f}(t_{i+1}, \underline{\hat{y}}_{i+1})$$

Error de convergencia de $O(h)$

Euler explícito

$$\underline{\hat{y}}_0 = \underline{y}_0$$

$$\underline{\hat{y}}_{i+1} = \underline{\hat{y}}_i + h\, \underline{f}(t_i, \underline{\hat{y}}_i)$$

→ Método de Newton

⇒ Para resolver $f(p) = 0$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\underline{\underline{(*)}}$

1) Sea $f \in C^2[a,b]$, $p_0, p \in [a,b]$, p es la solución de $\underline{(*)}$ y p_0 es una aproximación p tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p_0 - p|$ es "pequeño"

⇒ Usando Taylor para $f(p)$ alrededor de $f(p_0)$

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi)$$

$\xi \in (p_0, p)$ ó (p, p_0)

como $f(p) = 0$

$$0 = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi)$$

Como $|p_0 - p|$ es "pequeño" ⇒ $(p - p_0)^2 \approx 0$

$$\Rightarrow \quad 0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$$

$$\Rightarrow \quad p = p_0 - \frac{f(p)}{f'(p_0)}$$

Algoritmo de Newton.

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \qquad \underline{\underline{(**)}}$$

2) Algoritmo de Newton para aproximar la solución de $f(p) = 0$.

muy cercano 0

Input: Aproximación inicial p_0, tol $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ ($\delta = 10^{-12}$)
número máximo de iteraciones N_0

output: Aproximación p ó un mensaje de error/fallo.

Algoritmo:

Init. $i = 1$

```
while i ≤ No
{
    if (|f'(p0)| < 0)
    {
        output ("El método fallo (división por cero)")
        exit-program;
    }
    p = p0 - f(p0)/f'(p0)
    if |p - p0| < ε then
    {  output(p);
       exit-program();
    }
    i = i+1;  p0 = p;
}
output ("El método de Newton fallo para
        No-iteraciones")
```

3) Algoritmo de Newton para una aprox. de EDO.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} y' = f(t,y) & , t \in (a,b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Método numérico de la forma

$$\hat{y}_0 = y_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\hat{y}_{i+1}} = \hat{y}_i + \phi(t_i, h, \hat{y}_i, \hat{y}_{i+1}, f) \quad , \quad \hat{y}_{i+1} \text{ es la } \underline{\text{incognita}}$$

$$\rightsquigarrow G(\hat{y}_{i+1}) = -\hat{y}_{i+1} + \hat{y}_i + \phi(, \dots)$$

queremos resolver $G(\underline{\hat{y}_{i+1}}) = 0$

ver (**)

1) Teorema de convergencia del método de Newton.

$\rightsquigarrow f(x)=0$

Sea $\underline{f \in C^2[a,b]}$. Si $p \in (a,b)$ tal que $f(p)=0$

& $f'(p) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ \delta>0$ tal que el método de Newton genere una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cual converge a p para toda aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

$\rightarrow g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$\begin{cases} \text{i)} & g(x) \in [a,b] \\ \text{ii)} & |g'(x)| \leq k, \quad 0<k<1. \end{cases}$

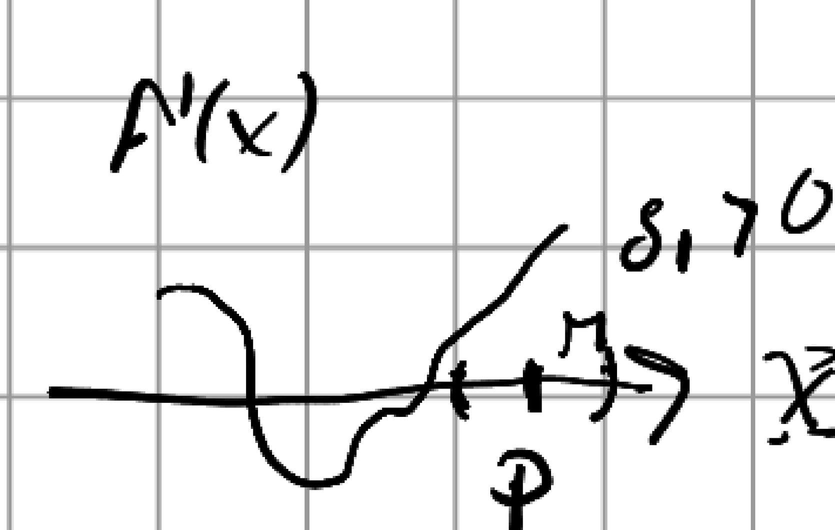
i) La prueba consistirá en encontrar $\delta>0$ y $k>0$ tal que

$g(x) \in [p-\delta, p+\delta]$, $|g'(x)| \leq k$, $k<1$ $\forall x \in (p-\delta, p+\delta)$

$g(x)$ es continua.

Como f' es continua & $f'(p) \neq 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que.

$f'(x) \neq 0 \quad \forall\ x \in [p-\delta_1, p+\delta_1]$



g está definida

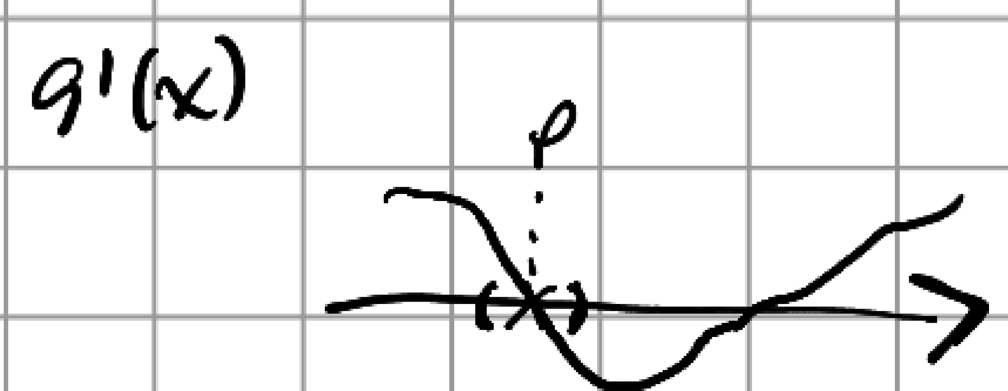
$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \cancel{1} - \frac{\cancel{f'(x)^2}}{\cancel{f'(x)^2}} + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{\underbrace{f'(x)^2}_{}} \leftarrow$$

Como $f(p) = 0 \Rightarrow g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{\underbrace{f'(p)^2}_{}} = 0$

Como $f \in C^2[a,b] \Rightarrow g'(x)$ es continua en $[p-\delta_1, p+\delta_1]$

y como $\underbrace{g'(p) = 0}_{}$. $\exists\ \delta > 0$ tal que $|g'(x)| \leq K$, $K < 1$.



Solo falta demostrar que $g(x) \in [p-\delta, p+\delta]\ \forall x \in [p-\delta, p+\delta]$

Por el teorema del valor medio. ($x \in [p-\delta, p+\delta]$)

$$g(x) - g(p) = g'(\xi)(x-p) \qquad \xi \in (p-\delta, p+\delta)$$

$$g(p) = p - \frac{\cancel{f(p)}}{f'(p)} = p$$

$$\Rightarrow |g(x) - p| = |g'(\xi)(x-p)| \leq K|x-p| < \delta$$

$$\Rightarrow |g(x) - p| < \delta \Rightarrow g(x) \in [p-\delta, p+\delta]$$

Todas las hipótesis del T. del P. Fijo se cumplen

$\Rightarrow$ la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ generada por

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n})}{f'(p_{n-1})} \quad , n \geq 1$$

converge a p $\forall$ $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$

$\boxtimes$.

→ El método del Punto Fijo para sistemas no-lineales.

Def: Una función $\underline{G} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ tiene un punto fijo $\underline{p} \in D$ si $\underline{G}(\underline{p}) = \underline{p}$.

Teorema: i) Sea $D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n,\ a_i, b_i \in \mathbb{R} \}$

ii) la función $\underline{G} : D \to \mathbb{R}^n$ es continua y

$$\underline{G}(\underline{x}) \in D \quad \forall\ \underline{x} \in D$$

iii) la función $\underline{G}$ tiene derivadas parciales continuas tales que $\exists\ 0 < K < 1$:

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n} \quad \underline{x} \in D$$

$i, j = 1, \ldots, n$ y $\underline{G}(\underline{x}) = [\, g_1(\underline{x}) \ \ g_2(\underline{x}) \ \ldots \ g_n(\underline{x}) \,]^t$

⇒ la sucesión $\{\underline{x}_m\}_{m=1}^{\infty}$ definida por

$$\underline{x}_m = \underline{G}(\underline{x}_{m-1}), \quad m \geq 1$$

donde $\underline{x}_0 \in D$, entonces $\underline{x}_m \to \underline{p}$, p es el único punto fijo de $\underline{G}$ &

$$\| \underline{x}_m - \underline{p} \|_\infty \leq \frac{K^m}{1-K} \| \underline{x}_1 - \underline{x}_0 \|_\infty$$

→ El método de Newton para sistemas no lineales de EDOs.

1) $\underline{\underline{(*)}}$ $\quad \underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y})$, $t \in (a,b)$ $\quad \underline{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\underline{y}(a) = \underline{y}_0$

Método numérico de la forma

incógnita

$$(**) \begin{cases} \hat{\underline{y}}_0 = \underline{y}_0 \\ \hat{\underline{y}}_{i+1} = \hat{\underline{y}}_i + \underline{\phi}(t_i, h, \hat{\underline{y}}_i, \hat{\underline{y}}_{i+1}, \underline{f}) \end{cases}$$

Queremos resolver $\underline{G}(\hat{\underline{y}}_{i+1}) = 0$

$$G(\hat{\underline{y}}_{i+1}) := -\hat{\underline{y}}_{i+1} + \hat{\underline{y}}_i + \underline{\phi}(\dots).$$

2) Para resolver $\underline{G}(\underline{x}) = 0$, el Algoritmo de Newton es:

$$\underline{x}^k = \underline{x}^{k-1} - \underline{J}(\underline{x}^{k-1})^{-1} \underline{G}(\underline{x}^{k-1})$$

J: es la matrix Jacobiana de tamaño $n \times n$

$$[\underline{J}(x)]_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

$$\underline{G}(\underline{x}) = [\, g_1(\underline{x}) \quad g_2(\underline{x}) \quad \dots \quad g_n(\underline{x}) \,]^t$$

$\overbrace{A^{-1}x}^{y}$ $\qquad$ $Ay = x$