# Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
# Tarea IV

Daniel Castañón Quiroz*[1]

[1]Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

November 23, 2025

## 1 Instrucciones generales

Todo los problemas en Matlab se deberán entregar en archivos diferentes con extensión `.m`. Por ejemplo el problema 1 deberá estar en el archivo `Problema_1.m`, etc.

Dentro de cada archivo se deberá poner el nombre del estudiante y su correo eléctronico. Utiliza comentarios cuando sea necesario. Todos los programas deberán correr y tener solamente el output que se específica utilizando el comando `disp` o la(s) gráfica(s) que se pide(n) utilizando el comando `plot`.

## 2 Problemas Teóricos

1. Demostrar analíticamente que el método del trapecio definido como

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{\Delta t}{2}(\lambda \hat{y}_i + \lambda \hat{y}_{i+1}),$$

es incondicionalmente estable para todo $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Adicionalmente gráficar su dominio de estabilidad lineal para $\lambda \in \mathbb{C}^-$ en Matlab.

2. Demostrar analíticamente que la región de estabilidad lineal del método BDF2:

$$\hat{y}_{i+2} - \frac{4}{3}\hat{y}_{i+1} + \frac{1}{3}\hat{y}_i = \frac{2}{3}\Delta t \lambda \hat{y}_{i+2},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^-$ contiene al eje real negativo:

$$-\infty < \lambda \Delta t < 0.$$

## 3 Problemas en Matlab

### 3.1 Instrucciones para los Problemas 3, 4 y 5

Todos los programas deberán correr y tener solamente el output que se específica utilizando el comando `disp`. Para todo los problemas, el único output del programa deber ser una tabla de la forma:

```
[N_vec' L2_err_norm' L2_err_rate' H1_err_norm' H1_err_rate']
```

*daniel.castanon@iimas.unam.mx

donde `N_vec` es el vector que contiene en cada entrada el número de subintervalos que divide al intervalo global para $N \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$, `L2_err_norm` el vector que contiene en cada entrada el error en la norma $L^2$, `L2_err_rate` el vector que contiene en cada entrada la tasa de convergencia de la norma $L^2$, y así similarmente para los vectores `H1_err_norm` y `H1_err_rate`. Tomar como referencia el script de matlab de interpolación de elementso finitos que esta en el website del curso.

3. Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de Lagrange de **primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x) \qquad \text{en} \quad D := (0,1), && \text{(1a)}\\
u(0) = u(1) &= 0, && \text{(1b)}
\end{aligned}
$$

   donde $f(x) = (4\pi)^2 \sin(4\pi x)$. Observar que $u(x) = \sin(4\pi x)$ es la solución del problema (1). Obtener entonces las tablas de convergencia como se indico al inicio de esta sección.

4. Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de Lagrange de **primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u &= f(x) \qquad \text{en} \quad D := (0,1), && \text{(2a)}\\
u(0) = 0, \frac{du}{dx}\Big|_{x=1} &= 0, && \text{(2b)}
\end{aligned}
$$

   donde $f(x) = -2e^x + 2(1-x)e^x + (1-x)^2e^x - 1$. Verificar que $u(x) = (1-x)^2e^x - 1$ es la solución del problema (2), y obtener entonces las tablas de convergencia como se indico al inicio de esta sección.

5. Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de **Lagrange de primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) &= f(x) \qquad \text{en} \quad D := (0,1), && \text{(3a)}\\
u(0) = 0,\ u(1) &= 0, && \text{(3b)}
\end{aligned}
$$

   donde
$$
f(x) = -12\pi\cos(4\pi x)x^2 + (16(x^3+1))\pi^2\sin(4\pi x),
$$
   y $k(x) = 1 + x^3$. Verificar que $u(x) = \sin(4\pi x)$ es la solución del problema (3), y obtener entonces las tablas de convergencia como se indico al inicio de esta sección . **Nota**: Para este problema se tiene que **obligatoriamente ensamblar la matriz del sistema y usar integración numérica** (por ejemplo la regla de Simpson).