

Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Tarea I

Daniel Castañón Quiroz^{*1}

¹Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

September 1, 2025

1 Problemas Teóricos

1. Utilizar el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial para demostrar que los siguientes problemas tienen solución única. Adicionalmente, para cada uno de los problemas encuentra su solución única:

(a) $y' = y \cos(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$.

(b) $y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 0$.

(c) $y' = \frac{4t^3 y}{1 + t^4}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$.

2. Demostrar que el método del punto medio definido como:

$$\hat{y}_0 = y_0$$
$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \Delta t \left(f \left(t_i + \frac{h}{2}, \hat{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \hat{y}_i) \right) \right) \text{ para } i \in \{0, \dots, N\},$$

que se emplea para aproximar la ecuación diferencial ordinaria escalar:

$$y' = f(t, y) \quad t \in (a, b)$$
$$y(a) = y_0.$$

tiene un error de truncamiento de orden $r = 2$. (**Sugerencia:** utilizar el hecho de que f satisface la condición de Lipschitz en la variable y , el teorema de Taylor varias veces, y la desigualdad $x \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$).

3. Utiliza el teorema de Taylor con residuo para obtener la siguiente aproximación de tercer orden para una función suficientemente derivable $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(x + 3h) = 3y(x + 2h) - 3y(x + h) + y(x) + Ch^3,$$

donde C es una constante.

4. Demostrar que el conjunto $D := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ es un conjunto convexo.

^{*}daniel.castanon@iimas.unam.mx

5. Sea la ecuación diferencial ordinaria escalar:

$$y' = f(t, y) \quad t \in (a, b), \quad (1)$$

$$y(a) = y_0. \quad (2)$$

Supongase lo siguiente:

- (a) La función $f(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y con constante Lipschitz L_1 .
- (b) $f'(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y con constante Lipschitz L_2 , donde $f'(t, y) := \frac{d}{dt}[f(t, y)]$.
- (c) $|\frac{d^3 y}{dt^3}(t)| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$.

Sea \hat{y}_i la aproximación de la solución $y(t_i)$ utilizando el método de Taylor (explícito) de orden $m = 2$. Entonces demostrar que

$$|y(t_i) - \hat{y}_i| \leq C\Delta t^2 \quad \text{para } i \in \{0, \dots, N\}, \quad (3)$$

donde C es una constante, N es el número de sub-intervalos que divide a $[a, b]$, y $\Delta t = (b - a)/N$. Supóngase adicionalmente que $\Delta t < 1$.
