Erros e Aproximações

INF1608 – Análise Numérica

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Análise numérica

Análise numérica: Aproximação *vs* Precisão

- Projeto e análise de técnicas aproximadas
- Soluções precisas para problemas complexos

Estudo de algoritmos: métodos numéricos

- Uso de aproximações numéricas
  - Em oposição a manipulação simbólica
- Avaliação e controle do **erro**

Fontes de erros

Erro de arredontamento

- Inerente ao uso de representação finita (computador)

$$\frac{1}{3} \approx 0.333333333$$

Fontes de erros

Erro de arredontamento

- Inerente ao uso de representação finita (computador)

$$\frac{1}{3} \approx 0.333333333$$

Erro de truncamento

- Uso de termos insuficiente na avaliação do resultado

$$\sin x = \sum_{0}^{\text{inf}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Fontes de erros

Erro de arredontamento

- Inerente ao uso de representação finita (computador)

$$\frac{1}{3} \approx 0.333333333$$

Erro de truncamento

- Uso de termos insuficiente na avaliação do resultado

$$\sin x = \sum_{0}^{\text{inf}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Erro humano

- Erro na escolha do método; erro de codificação

Fontes de erros

Erro de arredontamento

- Inerente ao uso de representação finita (computador)

$$\frac{1}{3} \approx 0.333333333$$

Erro de truncamento

- Uso de termos insuficiente na avaliação do resultado

$$\sin x = \sum_{0}^{\inf} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Erro humano

- Erro na escolha do método; erro de codificação

Erro devido a problema mal condicionado

- Instabilidade numérica; exige reformulação do problema

Erros e Aproximações

Fontes de erros:

1. Erro de arredondamento
2. Erro de truncamento
3. Erro humano
4. Erro devido a problema mal condicionado

Erros e Aproximações

Fontes de erros:

1. Erro de arredondamento
2. Erro de truncamento
3. Erro humano
4. Erro devido a problema mal condicionado

Principais causas

Representação de números

Problema

- Representação de números grandes
  - Ex. escala astronômica
- Representação de números pequenos
  - Ex. escala molecular

Representação de números

Problema

- Representação de números grandes
  - Ex. escala astronômica
- Representação de números pequenos
  - Ex. escala molecular

Representação científica

- Representação de ponto flutuante

$$732.48 \longrightarrow 7.3248 \times 10^2$$

$$0.00234 \longrightarrow 2.34 \times 10^{-3}$$

Representação de números

Problema

- Representação de números grandes
  - Ex. escala astronômica
- Representação de números pequenos
  - Ex. escala molecular

Representação científica

- Representação de ponto flutuante

$$732.48 \longrightarrow 7.3248 \times 10^2$$

$$0.00234 \longrightarrow 2.34 \times 10^{-3}$$

Espaço para a representação

$$\textbf{sinal} \quad \textbf{mantissa} \quad \text{base}^{\textbf{expoente}}$$

- onde a base é representada implicitamente

Representação finita

Exemplo: calculadora com 7 dígitos de mantissa

- Qual o resultado da avaliação da expressão abaixo?

$$52.34 \times 10^5 \quad + \quad 9.4 \times 10^{-5} \quad - \quad 5.234 \times 10^6$$

Representação finita

Exemplo: calculadora com 7 dígitos de mantissa

- Qual o resultado da avaliação da expressão abaixo?

$$52.34 \times 10^5 \quad + \quad 9.4 \times 10^{-5} \quad - \quad 5.234 \times 10^6$$

Representações:

```
5.234000E+5
9.400000E-5
5.234000E+5
```

Representação finita

Exemplo: calculadora com 7 dígitos de mantissa

- Qual o resultado da avaliação da expressão abaixo?

$$52.34 \times 10^5 \quad + \quad 9.4 \times 10^{-5} \quad - \quad 5.234 \times 10^6$$

Representações:

```
5.234000E+5
9.400000E-5
5.234000E+5
```

Resultado da soma:

```
523400.
      0.000094
-------------
523400.000094
```

Representação da soma:

```
5.234000E+5
```

Representação finita

Exemplo: calculadora com 7 dígitos de mantissa

- Qual o resultado da avaliação da expressão abaixo?

$$52.34 \times 10^5 \quad + \quad 9.4 \times 10^{-5} \quad - \quad 5.234 \times 10^6$$

Representações:

```
5.234000E+5
9.400000E-5
5.234000E+5
```

Resultado da soma:

```
523400.
      0.000094
-------------
523400.000094
```

Representação da soma:

```
5.234000E+5
```

Resultado: 0

- Ao invés de 9.4×10^{-5}
- Valor menor foi despresível frente ao número maior na soma

Representação finita

Orientação

- Não adicionoar um número pequeno a um número grande

Representação finita

Orientação

- Não adicionoar um número pequeno a um número grande

Exercício:

Qual seria a melhor forma de calcular o somatório de números de diferentes grandezas?

Representação finita

Exemplo: achar raízes da equação $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

Representação finita

Exemplo: achar raízes da equação $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Temos então:

$$x = \frac{-9^{12} \pm \sqrt{9^{24} + 12}}{2}$$

Representação finita

Exemplo: achar raízes da equação $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Temos então:

$$x = \frac{-9^{12} \pm \sqrt{9^{24} + 12}}{2}$$

- Na soma, 12 é insignificante; ficamos então com:

$$x_1 = \frac{-9^{12} - \sqrt{9^{24}}}{2} = -9^{12}$$

  - OK, a perda de 12 é insignificante

Representação finita

Exemplo: achar raízes da equação $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Temos então:

$$x = \frac{-9^{12} \pm \sqrt{9^{24} + 12}}{2}$$

- Na soma, 12 é insignificante; ficamos então com:

$$x_1 = \frac{-9^{12} - \sqrt{9^{24}}}{2} = -9^{12}$$

  - OK, a perda de 12 é insignificante

$$x_2 = \frac{-9^{12} + \sqrt{9^{24}}}{2} = 0$$

  - ERRO, a perda de 12 é significante!

Representação finita

Raízes da equação $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Solução: re-fatorar a fórmula de Bhaskara para x_2

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Representação finita

Raízes da equação $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Solução: re-fatorar a fórmula de Bhaskara para x_2

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

Representação finita

Raízes da equação $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Solução: re-fatorar a fórmula de Bhaskara para x_2

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

$$x_2 = \frac{b^2 - 4ac - b^2}{2a\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{-2c}{\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

Representação finita

Raízes da equação $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Solução: re-fatorar a fórmula de Bhaskara para x_2

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

$$x_2 = \frac{b^2 - 4ac - b^2}{2a\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{-2c}{\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

Substituindo os valores da equação:

$$x_2 = \frac{-2(-3)}{\left(9^{12} + \sqrt{9^{24} + 12}\right)} = \frac{6}{2(9^{12})} = 1.0622 \times 10^{11}$$

Erro de arredondamento

Regra de arredondamento

- Considerando a calculadora de 7 dígitos de mantissa

Número		**Representação**
1.2345678	$\longrightarrow$	1.23456$\underline{8}$
1.0004532	$\longrightarrow$	1.00045$\underline{3}$
4.2348465000000	$\longrightarrow$	?

Erro de arredondamento

Regra de arredondamento

- Considerando a calculadora de 7 dígitos de mantissa

Número		**Representação**
1.2345678	$\longrightarrow$	$1.23456\underline{8}$
1.0004532	$\longrightarrow$	$1.00045\underline{3}$
4.2348465000000	$\longrightarrow$	?

- Para não favorecer um dos lados,
  fazemos o arredondamento baseado no $6^{\underline{0}}$ dígito:
  - Se < 5: arredonda para baixo
  - Se ≥ 5: arredonda para cima

Erro de arredondamento

Regra de arredondamento

- Considerando a calculadora de 7 dígitos de mantissa

Número		**Representação**
1.2345678	$\longrightarrow$	1.23456$\underline{8}$
1.0004532	$\longrightarrow$	1.00045$\underline{3}$
4.2348465000000	$\longrightarrow$	?

- Para não favorecer um dos lados,
  fazemos o arredondamento baseado no $6^{\underline{0}}$ dígito:
  - Se < 5: arredonda para baixo
  - Se ≥ 5: arredonda para cima
- Logo, no exemplo acima, ficamos com: 4.234847
  - Pois $6 \geq 5$