Raízes de Equações

INF1608 – Análise Numérica

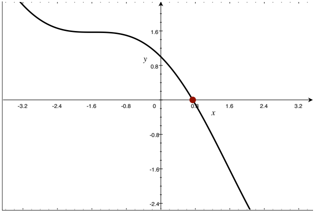
Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Raízes de Equações

Problema

- Dada $f(x)$, determinar r tal que $f(r) = 0$, isto é, r seja raiz da equação $f(x) = 0$



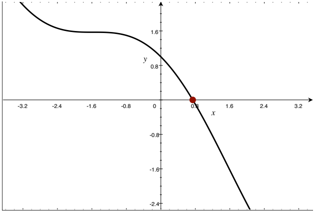
Raízes de Equações

Problema

- Dada $f(x)$, determinar r tal que $f(r) = 0$, isto é, r seja raiz da equação $f(x) = 0$

Métodos

- Bisseção
- Iteração de ponto fixo
- Newton-Raphson
- Secante
- Falsa posição
- Muller
- Interpolação quadrática inversa
- Brent



Método da Bisseção

Método fechado:

- Deve-se ter um intervalo $[a, b]$ que contenha a raiz

Método da Bisseção

Método fechado:

- Deve-se ter um intervalo $[a, b]$ que contenha a raiz
  - Se $f(x)$ é contínua e $f(a)\,f(b) < 0$, isto é, $f(x)$ tem seu sinal invertido, então $\exists\ r \in [a, b]$

Método da Bisseção

Método fechado:

- Deve-se ter um intervalo $[a, b]$ que contenha a raiz
  - Se $f(x)$ é contínua e $f(a)\,f(b) < 0$, isto é, $f(x)$ tem seu sinal invertido, então $\exists\ r \in [a, b]$

Método iterativo

- Dados $f(x)$ e o intervalor $[a, b]$
- Estima raiz: $c = \frac{a+b}{2}$
- Ajusta intervalo:
  - Se $f(a)f(c) < 0$ entao: $[a, b] \rightarrow [a, c]$
  - Senão: $[a, b] \rightarrow [c, b]$
- Até que alguma precisão seja alcançada

Método da Bisseção

Método fechado:

- Deve-se ter um intervalo $[a, b]$ que contenha a raiz
  - Se $f(x)$ é contínua e $f(a)\,f(b) < 0$, isto é, $f(x)$ tem seu sinal invertido, então $\exists\ r \in [a, b]$

Método iterativo

- Dados $f(x)$ e o intervalor $[a, b]$
- Estima raiz: $c = \frac{a+b}{2}$
- Ajusta intervalo:
  - Se $f(a)f(c) < 0$ entao: $[a, b] \rightarrow [a, c]$
  - Senão: $[a, b] \rightarrow [c, b]$
- Até que alguma precisão seja alcançada

- **Método retorna o meio do intervalo como solução**

Método da Bisseção

Quando terminar a iteração? Como avaliar o erro?

Método da Bisseção

Quando terminar a iteração? Como avaliar o erro?

Possíveis formas de **avaliação do erro**:

- Avaliação regressiva (*backward evaluation*)
  - Erro avaliado pela definição do problema (entrada)
- Avaliação progressiva (*forward evaluation*)
  - Erro avaliado pela solução do problema (saída)

Método da Bisseção

Quando terminar a iteração? Como avaliar o erro?

Possíveis formas de **avaliação do erro**:

- Avaliação regressiva (*backward evaluation*)
  - Erro avaliado pela definição do problema (entrada)

$$|f(c)| \approx 0$$

- Avaliação progressiva (*forward evaluation*)
  - Erro avaliado pela solução do problema (saída)

$$|r - c| \approx 0$$

Método da Bisseção

A avaliação de erro progressiva reguer o conhecimento da solução.

Como avaliar $|r - c|$?

Método da Bisseção

A avaliação de erro progressiva reguer o conhecimento da solução.

Como avaliar $|r - c|$?

- No caso do Método da Bisseção, podemos avaliar um limite superior:

$$\frac{b-a}{2} > |r - c|$$

  - Esta é uma vantagem do Método da Bisseção, não encontrada na maioria dos método numéricos

Método da Bisseção

A avaliação de erro progressiva reguer o conhecimento da solução.

Como avaliar $|r - c|$?

- No caso do Método da Bisseção, podemos avaliar um limite superior:

$$\frac{b - a}{2} > |r - c|$$

  - Esta é uma vantagem do Método da Bisseção, não encontrada na maioria dos método numéricos

Avaliação de erro relativo na bisseção:

$$\frac{|c^{k-1} - c^k|}{|c^k|}$$

Método da Bisseção

Algoritmo:

- Dados $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{while } \frac{b-a}{2} > \epsilon \\
&\quad c = \frac{a+b}{2} \\
&\quad \textbf{if } f(c) = 0 \\
&\quad\quad \textbf{break} \\
&\quad \textbf{if } f(a)f(c) < 0 \\
&\quad\quad b = c \\
&\quad \textbf{else} \\
&\quad\quad a = c \\
&\textbf{return } \frac{a+b}{2}
\end{aligned}
$$

Método da Bisseção

Algoritmo:

- Dados $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{while } \dfrac{b-a}{2} > \epsilon \\
\quad c = \dfrac{a+b}{2} \\
\quad \textbf{if } f(c) = 0 \\
\qquad \textbf{break} \\
\quad \textbf{if } f(a)f(c) < 0 \\
\qquad b = c \\
\quad \textbf{else} \\
\qquad a = c \\
\textbf{return } \dfrac{a+b}{2}
\end{array}
$$

- **Convergência garantida**

Método da Bisseção

Precisão e desempenho

- Desempenho medido pelo número de avaliações de $f(x)$
  - Avaliação de $f(x)$ pode ser computacionalmente custoso

Método da Bisseção

Precisão e desempenho

- Desempenho medido pelo número de avaliações de $f(x)$
  - Avaliação de $f(x)$ pode ser computacionalmente custoso

Quantas avaliações de $f(x)$ são necessárias por iteração?

Método da Bisseção

Precisão e desempenho

- Desempenho medido pelo número de avaliações de $f(x)$
  - Avaliação de $f(x)$ pode ser computacionalmente custoso

Quantas avaliações de $f(x)$ são necessárias por iteração?

$$\longrightarrow 1$$

(e implementação não pode avaliar mais)

Método da Bisseção

Precisão e desempenho

- Desempenho medido pelo número de avaliações de $f(x)$
  - Avaliação de $f(x)$ pode ser computacionalmente custoso

Quantas avaliações de $f(x)$ são necessárias por iteração?

$$\longrightarrow 1$$

(e implementação não pode avaliar mais)

Número total de avaliações de $f(x)$: $n + 2$

Método da Bisseção

Precisão da Solução

- Considerando n iterações

$$Erro = |c - r| < \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

Método da Bisseção

Precisão da Solução

- Considerando n iterações

$$Erro = |c - r| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

- Note:

n	$Erro$
0	$\|c - r\| < \frac{b-a}{2}$
1	$\|c - r\| < \frac{b-a}{4}$
2	$\|c - r\| < \frac{b-a}{8}$
$\ldots$	$\ldots$

Logo, a cada iteração:

- Faz-se 1 avaliação de $f(x)$
- Reduz-se o erro à metade

$\longrightarrow$ **Convergência linear**

Método da Bisseção

Definição

- Uma solução é correta com precisão de p casas decimais se:

$$erro < 0.5 \times 10^{-p}$$

Método da Bisseção

Definição

- Uma solução é correta com precisão de p casas decimais se:

$$erro < 0.5 \times 10^{-p}$$

Como predizer o número de iterações necessárias?

- Exemplo: determinar $r \in [0, 1]$ com precisão de 6 casas

Método da Bisseção

Definição

- Uma solução é correta com precisão de p casas decimais se:

$$erro < 0.5 \times 10^{-p}$$

Como predizer o número de iterações necessárias?

- Exemplo: determinar $r \in [0, 1]$ com precisão de 6 casas

$$erro < \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Então:

$$\frac{1}{2^{n+1}} < 0.5 \times 10^{-6}$$

$$n \approx 19.93$$

Logo, precisamos de **20 iterações**

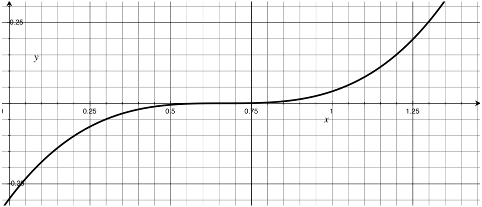
Método da Bisseção

Erros regressivo *vs* progressivo

- Em alguns casos, a falta de precisão para avaliar o erro regressivo impede a obtenção da solução dentro da precisão desejada

Exemplo:

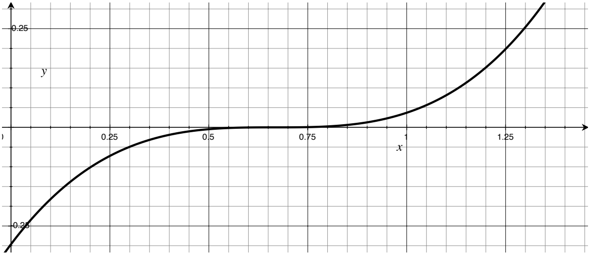
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$



Método da Bisseção

Exemplo:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$



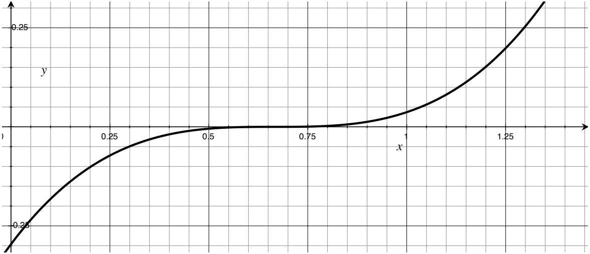
Solução do Método da Bisseção: 0.6667

- Não conseguimos melhorar, pois $f(x) = 0$ na precisão *double*

Método da Bisseção

Exemplo:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$



Solução do Método da Bisseção: 0.6667

- Não conseguimos melhorar, pois $f(x) = 0$ na precisão *double*

Obs:

- No caso, a raiz tem multiplicidade 3, situação que perdemos precisão, mas isso também pode ocorrer com multiplicidade 1.

Método da Bisseção

Método intervalar: $r \in [a, b]$

- Vantagem: convergência garantida
- Desvantagem: necessidade de conhecer $[a, b]$

Método da Bisseção

Método intervalar: $r \in [a, b]$

- Vantagem: convergência garantida
- Desvantagem: necessidade de conhecer $[a, b]$

Determinação de intervalos iniciais

- Busca incremental: δ

$$x_{i+1} = x_i + \delta$$

  - até encontrar $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$

Método da Bisseção

Método intervalar: $r \in [a, b]$

- Vantagem: convergência garantida
- Desvantagem: necessidade de conhecer $[a, b]$

Determinação de intervalos iniciais

- Busca incremental: δ

$$x_{i+1} = x_i + \delta$$

  - até encontrar $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$
- Qual δ usar?
  - Questão em aberto: eficiência *vs* eficácia

Método da Bisseção

Método intervalar: $r \in [a, b]$

- Vantagem: convergência garantida
- Desvantagem: necessidade de conhecer $[a, b]$

Determinação de intervalos iniciais

- Busca incremental: δ

$$x_{i+1} = x_i + \delta$$

  - até encontrar $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$
- Qual δ usar?
  - Questão em aberto: eficiência *vs* eficácia
- Se possível, usar $f'(a)$ e $f'(b)$:
  - Troca de sinal indica mínimo ou máximo da função
  - Intervalo deve ser melhor inspecionado

Métodos Abertos

Métodos abertos

- Não exigem $r \in [a, b]$
- Partem de uma **estimativa inicial**
  - Quanto mais perto de r, melhor
  - Menos restritivo que intervalar
- Podem não convergir

Iteração de Ponto Fixo

Exemplo

- Avaliação contínua de $\cos x$

Iteração de Ponto Fixo

Exemplo

- Avaliação contínua de $\cos x$

Resultado: ≈ 0.739

$x_0 = 1$
0.54030230586814
0.85755321584639
0.65428979049778
0.79348035874257
0.70136877362276
0.76395968290065
0.72210242502671
0.75041776176376
0.73140404242251
0.74423735490056
0.73560474043635
0.74142508661011
0.73750689051324
0.74014733556788
0.73836920412232
0.73956720221226
0.73876031987421

Iteração de Ponto Fixo

Exemplo

- Avaliação contínua de $\cos x$

Resultado: ≈ 0.739

Logo, $x = \cos x$ para $x = 0.739$

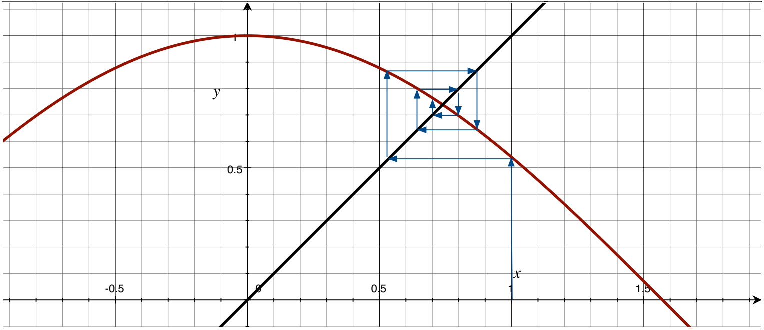
- Diz-se que 0.739 é **ponto fixo** da função $f(x) = \cos x$

$x_0 = 1$
0.54030230586814
0.85755321584639
0.65428979049778
0.79348035874257
0.70136877362276
0.76395968290065
0.72210242502671
0.75041776176376
0.73140404242251
0.74423735490056
0.73560474043635
0.74142508661011
0.73750689051324
0.74014733556788
0.73836920412232
0.73956720221226
0.73876031987421

Iteração de Ponto Fixo

Graficamente

- $f(x) = \cos(x)$

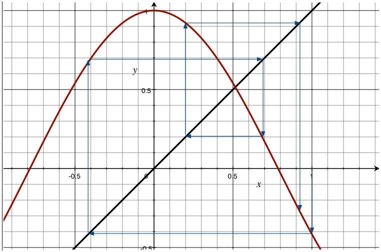


$$|f'(r)| < 1 \Rightarrow \text{há convergência}$$

Iteração de Ponto Fixo

Graficamente

- $f(x) = \cos(2x)$



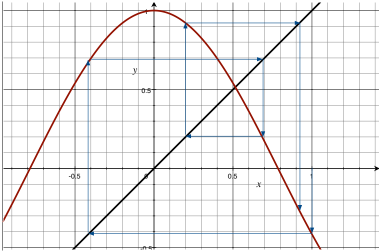
$$|f'(r)| > 1$$

$=>$ não há convergência

Iteração de Ponto Fixo

Graficamente

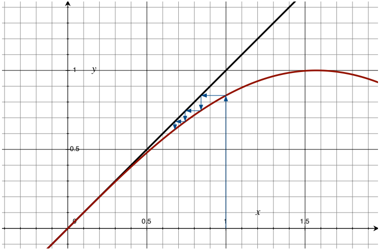
- $f(x) = \cos(2x)$



$|f'(r)| > 1$

$=>$ não há convergência

- $f(x) = \sin(x)$



$|f'(r)| = 1$

$=>$ limite da convergência

Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

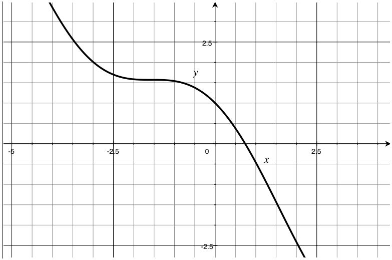
- Quando há convergência, podemos usar para determinar raízes

Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

- Quando há convergência, podemos usar para determinar raízes

Exemplo: $f(x) = cos(x) - x$

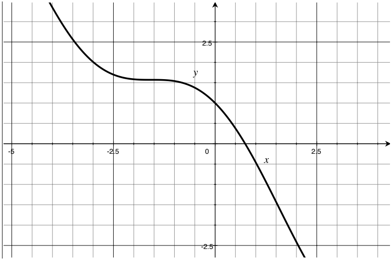


Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

- Quando há convergência, podemos usar para determinar raízes

Exemplo: $f(x) = cos(x) - x$



$$cos(x) - x = 0$$
$$x = cos(x)$$

- Logo: $r = 0.739$

Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

- Transformação: $f(x) \Rightarrow g(x) - x$
  - Achar ponto fixo de $g(x)$

Iteração de Ponto Fixo

Método por iteração de ponto fixo

- Transformação: $f(x) \Rightarrow g(x) - x$
  - Achar ponto fixo de $g(x)$
- Algoritmo
  - Dado x_0

$$
\begin{array}{l}
x = x_0 \\
\textbf{while } |g(x) - x| > \epsilon \\
\qquad x = g(x) \\
\textbf{return } x
\end{array}
$$

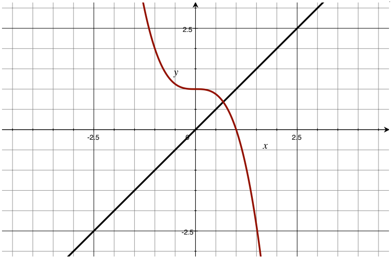
Iteração de Ponto Fixo

Exemplo: $x^3 + x = 1$

Iteração de Ponto Fixo

Exemplo: $x^3 + x = 1$

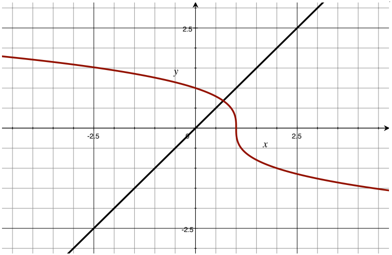
1. $x = 1 - x^3$
   - Não converge



Iteração de Ponto Fixo

Exemplo: $x^3 + x = 1$

1. $x = 1 - x^3$
   - Não converge
2. $x = \sqrt[3]{1 - x}$
   - Converge lentamente



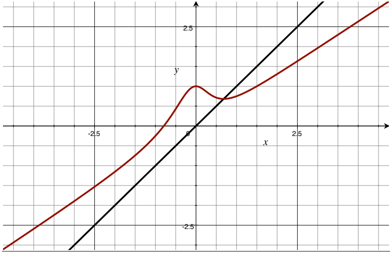
Iteração de Ponto Fixo

Exemplo: $x^3 + x = 1$

1. $x = 1 - x^3$
   - Não converge
2. $x = \sqrt[3]{1 - x}$
   - Converge lentamente
3. Somando $2x^3$ nos dois lados:

$$3x^3 + x = 2x^3 + 1$$
$$(3x^2 + 1)x = 2x^3 + 1$$
$$x = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 1}$$

   - Converge rapidamente



Iteração de Ponto Fixo

Determinação de raiz quadrada de um número

$$\sqrt{z} = ?$$

Iteração de Ponto Fixo

Determinação de raiz quadrada de um número

$$\sqrt{z} = ?$$

Estimativa inicial: x_0

- Se $x_0 < r$ então $\frac{z}{x_0} > r$

Iteração de Ponto Fixo

Determinação de raiz quadrada de um número

$$\sqrt{z} = ?$$

Estimativa inicial: x_0

- Se $x_0 < r$ então $\frac{z}{x_0} > r$
  - Vejamos:

$$\frac{z^2}{x_0^2} > r^2 \therefore x_0^2 < \frac{z^2}{r^2}$$

$$x_0^2 < z, \text{ pois } r^2 = z$$

- Analogamente, se $x_0 > r$ então $\frac{z}{x_0} < r$

Iteração de Ponto Fixo

Determinação de raiz quadrada de um número

$$\sqrt{z} = ?$$

Estimativa inicial: x_0

- Se $x_0 < r$ então $\frac{z}{x_0} > r$
  - Vejamos:

$$\frac{z^2}{x_0^2} > r^2 \therefore x_0^2 < \frac{z^2}{r^2}$$

$$x_0^2 < z, \text{ pois } r^2 = z$$

- Analogamente, se $x_0 > r$ então $\frac{z}{x_0} < r$

Logo, dado x_0, uma boa estimativa é adotar o valor médio do intervalo $[x_0, \frac{z}{x_0}]$.

- Algortimo: ponto fixo de função

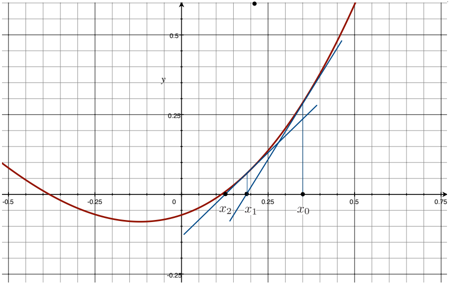
$$g(x) = \frac{x + \frac{z}{x}}{2}$$

Método de Newton-Raphson

Isaac Newton & Joseph Raphson

Método aberto

- Estimativa inicial x_0
- Assume ser possível avaliação de $f'(x)$



Equação da reta tangente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Método de Newton-Raphson

Equação da reta tangente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ponto de interseção da reta com eixo x:

$$\begin{aligned} y = 0 \therefore f'(x_0)(x - x_0) &= -f(x_0) \\ x - x_0 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Método de Newton-Raphson

Equação da reta tangente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ponto de interseção da reta com eixo x:

$$\begin{aligned} y = 0 \therefore f'(x_0)(x - x_0) &= -f(x_0) \\ x - x_0 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Método de Newton-Raphson:

$$x_0 = \text{estimativa inicial}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 1, 2, 3, ...$$

Análise de Convergência

Convergência linear:

$$\frac{e_{i+1}}{e_i} = s, \text{ onde: } s < 1$$

Análise de Convergência

Convergência linear:

$$\frac{e_{i+1}}{e_i} = s, \text{ onde: } s < 1$$

- Método da bisseção

$$s = \frac{1}{2}$$

Análise de Convergência

Convergência linear:

$$\frac{e_{i+1}}{e_i} = s, \text{ onde: } s < 1$$

- Método da bisseção

$$s = \frac{1}{2}$$

- Método por iteração de ponto fixo

$$s = |g'(r)|$$

Análise de Convergência

Convergência linear:

$$\frac{e_{i+1}}{e_i} = s, \text{ onde: } s < 1$$

- Método da bisseção

$$s = \frac{1}{2}$$

- Método por iteração de ponto fixo

$$s = |g'(r)|$$

Convergência quadrática:

$$M = \lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} < \infty$$

Método de Newton-Raphson

Análise do erro

- O método de NR pode ser deduzido considerando 2 termos da série de Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Método de Newton-Raphson

Análise do erro

- O método de NR pode ser deduzido considerando 2 termos da série de Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

- Na interseção com o eixo x, $f(x_{i+1}) = 0$. Então:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\therefore x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Método de Newton-Raphson

Análise do erro

- Se a série inteira fosse usada, x_{i+1} seria r:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(r - x_i) + \frac{f''(c)}{2}(r - x_i)^2, \quad c \in [x_i, r]$$

Método de Newton-Raphson

Análise do erro

- Se a série inteira fosse usada, x_{i+1} seria r:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(r - x_i) + \frac{f''(c)}{2}(r - x_i)^2, \quad c \in [x_i, r]$$

  - Logo:

$$-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = r - x_i + \frac{(r - x_i)^2}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_i)}$$

$$x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - r = \frac{(r - x_i)^2}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_i)}$$

  - Tomando um passo de NR com $e_i = x_i - r$:

$$x_{i+1} - r = e_i^2 \frac{f''(c)}{2f'(x_i)}$$

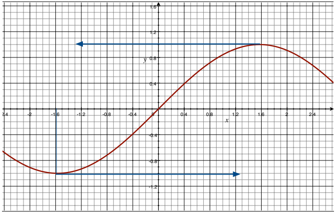
$$e_{i+1} = e_i^2 \left| \frac{f''(c)}{2f'(x_i)} \right|$$

- Logo, NR pode ter convergência quadrática

$$\lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = \frac{f''(c)}{2f'(x_i)}$$

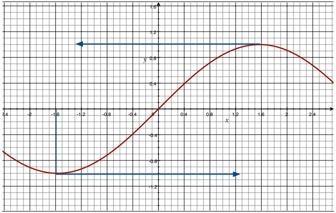
Método de Newton-Raphson

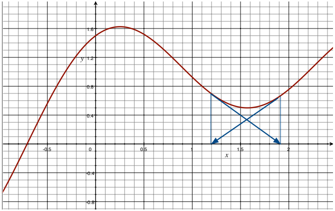
Exemplos de não convergência



Método de Newton-Raphson

Exemplos de não convergência





Método de Newton-Raphson

Exemplos de convergência linear

- Raiz de $f(x) = x^2$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2}{2x_i}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2}$$

Logo:

$$e_{i+1} = \frac{e_i}{2}$$

Método de Newton-Raphson

Exemplos de convergência linear

- Raiz de $f(x) = x^2$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2}{2x_i}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2}$$

Logo:

$$e_{i+1} = \frac{e_i}{2}$$

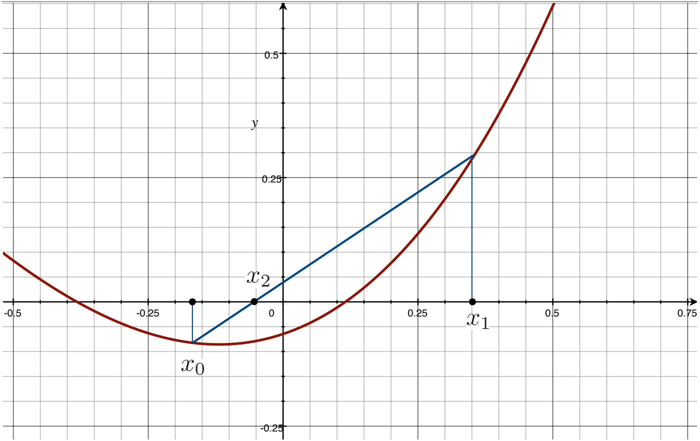
Importante

- Uma implementação de NR deve sempre limitar o número de iterações, pois pode não convergir

Método da Secante

Usa a reta secante para aproximar $f'(x)$

- Preserva características do Método de Newton-Raphson
- Usa 2 estimativas iniciais



Método da Secante

Avalia $f'(x)$ por diferenças finitas

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Substituidno na fórmula de NR:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

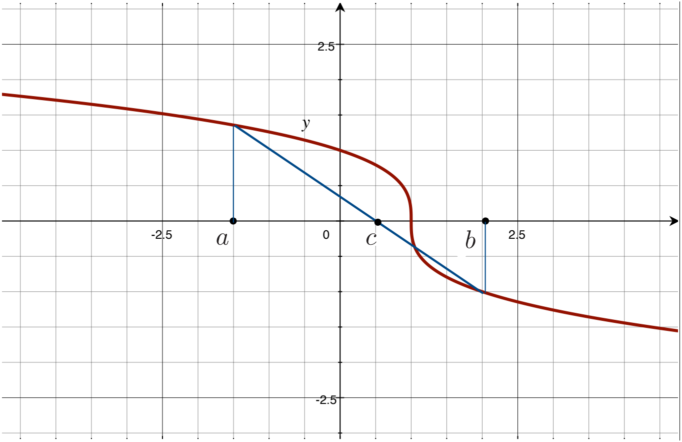
Importante

- Método **aberto**, pode não convergir

Método da Falsa Posição

Combina Método da **Bisseção** com Método da **Secante**

- Método intervalar: $f(a)f(b) < 0$
- Tende a convergir mais rápido que Bisseção



Método da Falsa Posição

Bisseção: $$c = \frac{a+b}{2}$$

Método da Falsa Posição

Bisseção:
$$c = \frac{a+b}{2}$$

Falsa Posição:

- Por semelhança de triângulo

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{f(a)}{f(a)-f(b)}$$
$$c = a + \frac{f(a)(b-a)}{f(a)-f(b)}$$
$$c = \frac{a\,f(a) - a\,f(b) + b\,f(a) - a\,f(a)}{f(a)-f(b)}$$

Método da Falsa Posição

Bisseção:
$$c = \frac{a+b}{2}$$

Falsa Posição:

- Por semelhança de triângulo

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{f(a)}{f(a)-f(b)}$$
$$c = a + \frac{f(a)(b-a)}{f(a)-f(b)}$$
$$c = \frac{a\,f(a) - a\,f(b) + b\,f(a) - a\,f(a)}{f(a)-f(b)}$$

- Logo:

$$c = \frac{b\,f(a) - a\,f(b)}{f(a)-f(b)}$$

Método da Falsa Posição

Bisseção:
$$c = \frac{a+b}{2}$$

Falsa Posição:

- Por semelhança de triângulo

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{f(a)}{f(a)-f(b)}$$
$$c = a + \frac{f(a)(b-a)}{f(a)-f(b)}$$
$$c = \frac{a\,f(a) - a\,f(b) + b\,f(a) - a\,f(a)}{f(a)-f(b)}$$

- Logo:

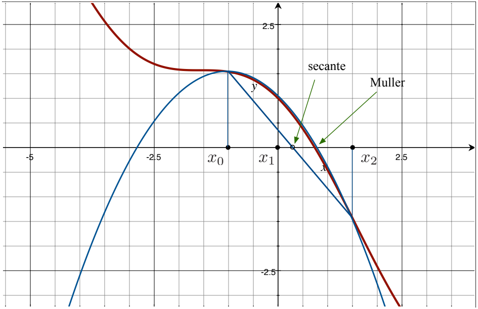
$$c = \frac{b\,f(a) - a\,f(b)}{f(a)-f(b)}$$

- **Implementação igual a Bisseção**

Método de Muller

Método aberto

- Parte de 3 estimativas iniciais: x_0, x_1, x_2
- Determina parábola interpolante: $p(x)$
- Raízes da parábola interceptam o eixo x
- Adota como x_3 a raiz mais próxima de x_2
- Cicla as estimativas, descartando a mais antiga (x_0)



Método da Interpolação Quadrática Inversa

Método aberto

- Parte de 3 estimativas iniciais: x_0, x_1, x_2
- Determina parábola interpolante inversa: $p(y)$
- Adota interseção de **y** com eixo x: $p(0) = c$
- Cicla as estimativas, descartando a mais antiga (x_0)

Método de Brent

Método intervalar com convergência rápida

- Função `fzero` do MatLab usa uma versão desse método

Dados $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$

- Estimativas iniciaiis:
  - $x_2 = \frac{a+b}{2}$
  - Defina x_0 e x_1, usando critério de Bisseção
    - Se $f(a)f(x_2) < 0$: $x_0 = b$ e $x_1 = a$
    - Senão: $x_0 = a$ e $x_1 = b$
- Usa Bisseção com x_1 e x_2, achando x_3
- Aplica IQI com x_1, x_2 e x_3, achando x_3'
- Substitui x_3 por x_3' se:
  - Erro regressivo diminui: $f(x_3') < f(x_3)$
  - Se intervalo de busca diminui
- Senão, aplica mesma tentativa com Método da Secante

Exercício Proposto

Considere a equação $x^3 - 2x - 2 = 0$.
Aplique duas iterações dos métodos:

- Bisseção com $[a, b] = [1, 2]$
- Newton-Raphson com $x_0 = 2$
- Secante com $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$
- Falsa Posição com $[a, b] = [1, 2]$
- Interpolação Quadrática Inversa com $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 0$