INF1608 – Análise Numérica

Lab 8: Integração Numérica Adaptativa

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

O objetivo deste laboratório é experimentar Simpson Adaptativo e Quadratura de Gauss.

1. A Regra de Simpson aproxima a integração de uma função pela integração de uma parábola:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,b]} = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right], \quad h = b - a$$

onde o erro da aproximação é dado por:

$$E_{[a,b]} = -\frac{1}{2880}h^5 f^{iv}(c)$$

Se adotarmos um passo igual a $\frac{h}{2}$, fazendo duas aproximações de Simpson, chegamos a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,c]} + S_{[c,b]}, \quad c = \frac{a+b}{2}$$

com erro dado por:

$$E'_{[a,b]} = E_{[a,c]} + E_{[c,b]} = \frac{E_{[a,b]}}{16}$$

Podemos então fazer:

$$\int_a^b f(x)dx = S_{[a,b]} + E_{[a,b]} = S_{[a,c]} + S_{[c,b]} + \frac{E_{[a,b]}}{16}$$
$$\left|S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}\right| = \frac{15}{16}E_{[a,b]}$$

Logo, a avaliação de $S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}$ nos fornece um valor 15 vezes maior que o erro de $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$. Com isso, podemos implementar um procedimento para realizar Integração de Simpson Adaptativa. Tentamos integrar o intervalo de a a b em um passo e em dois semi-passos, avaliando a diferença $\Delta = \left|S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}\right|$. Se esta diferença for menor que 15 vezes a tolerância adotada, podemos assumir o valor $S_{[a,c]} + S_{[c,b]} + \frac{\Delta}{15}$ como resultado da integral; senão, dividimos o intervalo em 2 e repetimos o processo, avaliando as integrais e suas respectivas diferenças nos sub-intervalos. Para cada sub-intervalo, a tolerância deve ser reduzida à metade, a fim de garantir que o erro total esteja dentro da tolerância original.

(a) Implemente uma função que calcule o valor de integral adotando um passo e dois semi-passos de integração, usando a Regra de Simpson. Sua função deve retornar o erro avaliado por $\left|S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}\right|$ dividido por 15, isto é, o valor de $\frac{\Delta}{15} = \frac{E_{[a,b]}}{16}$. A função também deve preencher o valor da integral $S_{[a,c]} + S_{[c,b]} + \frac{\Delta}{15}$ no endereço de memória v passado, seguindo o protótipo:

```
double DoubleSimpson (double a, double b, double (*f) (double x), double* v);
```

(b) Implemente uma função recursiva que implemente a Integração por Simpson Adaptativa, usando a função do item anterior. Sua função deve receber o intervalo de integração, a função e a tolerância de erro desejada, e retornar o valor total da derivada no intervalo dentro da tolerância, seguindo o protótipo:

```
double AdaptiveSimpson (double a, double b, double (*f) (double x), double tol);
```

2. O método de Quadratura de Gauss usa espaçamentos não regulares de amostras para aproximar a função por polinômios no intervalo de integração, de tal forma que o erro seja minimizado. O valor da integral usando Quadratura de Gauss no intervalo de -1 a 1 é dado por:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

onde n representa o número de amostras e c_i, x_i, para $n = 2, 3$, são dados pela tabela a seguir:

n	x_i	c_i
2	$-\sqrt{1/3}$	1
	$\sqrt{1/3}$	1
3	$-\sqrt{3/5}$	5/9
	0	8/9
	$\sqrt{3/5}$	5/9

Para intervalos quaisquer, fazemos a transformação indicada a seguir:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

(a) Implemente uma função para calcular a integral usando Quadratura de Gauss com $n = 2$, seguindo o protótipo:

```
double Quadratura2 (double a, double b, double (*f) (double x));
```

(b) Implemente uma função para calcular a integral usando Quadratura de Gauss com $n = 3$, seguindo o protótipo:

```
double Quadratura3 (double a, double b, double (*f) (double x));
```

Para testar e comparar a precisão dos métodos, escreva um programa que use Simpson Adaptativo (com 7 dígitos de precisão) e Quadratura de Gauss (com 2 e 3 amostras) para achar uma solução das integrais abaixo:

$$\int_0^1 \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+9}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{\frac{-x^2}{2}}\ dx \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^3 e^{-x^2}\ dx$$

Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo "simpson.h" e as implementações em um módulo "simpson.c". Escreva o teste em outro módulo "main.c".

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos "simpson.c", "simpson.h" e "main.c") deve ser enviados via página da disciplina no EAD. O prazo final para envio é **quinta-feira, dia 18 de outubro**.