

INF1608 – Análise Numérica

Projeto: Sistema Massa-Mola com Restrição

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

Descrição

Considere um sistema massa-mola 2D de partículas com restrições de barras rígidas, veja figura. A segunda lei de Newton rege o movimento de cada partícula:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{f}_i}{m_i}$$

onde \mathbf{x}_i representa a posição vetorial da partícula, (x, y) , \mathbf{f}_i representa o conjunto de forças que atuam na partícula e m_i é um escalar que representa a massa da partícula. Num sistema massa-mola com restrição, as forças atuantes são:

- Força de gravidade em cada partícula:

$$\mathbf{f}_{G_i} = m_i \mathbf{g}$$

onde \mathbf{g} é a aceleração da gravidade; \mathbf{f}_G atua na direção de \mathbf{g} .

- Força de mola em cada partícula, para cada mola conectada à partícula:

$$\mathbf{f}_{K_i} = -k(|d| - r)\hat{\mathbf{d}}$$

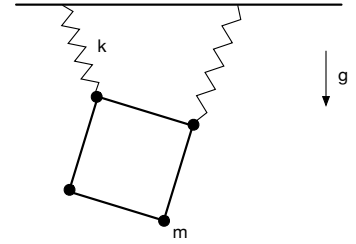
onde k é o coeficiente de rigidez da mola, d é a distância entre os extremos da mola e r é o comprimento natural (comprimento de repouso) da mola; \mathbf{f}_K atua na direção de \mathbf{d} .

- Força de restrição:

$$\mathbf{f}_C = J^T \lambda$$

onde \mathbf{f}_C representa o vetor de forças de restrição atuantes nas partículas, de dimensão $2n$ (onde n é o número de partículas do sistema), J é a matriz jacobiana das restrições (dimensão $m \times 2n$, sendo m o número de barras) e λ é o vetor multiplicador de Lagrange (dimensão m). Considerando que W representa a matriz diagonal inversa da matriz massa (dimensão $2n \times 2n$):

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & & & & \\ & \frac{1}{m_1} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \frac{1}{m_n} & \\ & & & & \frac{1}{m_n} \end{bmatrix}$$



λ que é obtido através da resolução do sistema linear:

$$JWJ^T\lambda = -JW\mathbf{f} - \dot{J}\mathbf{v}$$

onde \mathbf{f} é o vetor (dimensão $2n$) das demais forças atuantes nas partículas e \mathbf{v} o vetor velocidade (também com dimensão $2n$).

A matriz jacobiana J e sua derivada \dot{J} são inicialmente preenchidas com valores zero e então construídas adicionando as contribuições de cada barra de restrição. Supondo a existência de uma barra k ligando as partículas i e j , as seguintes contribuições (grandezas vetoriais de dimensão 2) são acumuladas às matrizes globais:

$$\begin{aligned} J_{[k,2i:2i+1]} + &= \frac{1}{|\mathbf{l}|} & J_{[k,2j:2j+1]} - &= \frac{1}{|\mathbf{l}|} \\ \dot{J}_{[k,2i:2i+1]} + &= \frac{1}{|\mathbf{l}|^3}(|\mathbf{l}|^2\dot{\mathbf{l}} - (\dot{\mathbf{l}})\mathbf{l}) & \dot{J}_{[k,2j:2j+1]} - &= \frac{1}{|\mathbf{l}|^3}(|\mathbf{l}|^2\dot{\mathbf{l}} - (\dot{\mathbf{l}})\mathbf{l}) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{l} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ e $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$.

Tarefa

O objetivo deste trabalho é fazer a simulação de um sistema mola-massa 2D com restrições de barra, como o ilustrado na figura. Para tanto, pede-se usar o método Runge-Kutta de ordem 4, com passo constante. Numa primeira etapa, o aluno pode substituir as barras rígidas por molas com grande rigidez. Numa segunda etapa, o aluno pode considerar as barras e as forças de restrição. Para resolução do sistema linear, o aluno pode escolher o método a ser empregado. Note que cada avaliação da força exige a resolução do sistema linear das forças de restrição. O aluno deve prover algum feedback visual do resultado da simulação. Por exemplo, pode-se salvar as posições das partículas a cada passo e então plotar num gráfico de pontos. O aluno deve também considerar mais de um exemplo de sistema, variando as posições/velocidades iniciais das partículas.

Análise

Ao desenvolver seu trabalho e testá-lo, procure, baseado em experimentos computacionais, responder as seguintes perguntas:

- O sistema com molas com alta rigidez no lugar das barras é numericamente estável? Funciona para passos de integração h relativamente grandes?
- O sistema com barras é numericamente estável? Funciona para passos de integração h relativamente grandes?
- Qual o desempenho da sua simulação? Ele roda em tempo real? Isto é, você itera o sistema em tempo físico menor que o passo de integração usado?
- Sua implementação é genérica para simular qualquer configuração massa-mola-barra de partículas?