Unidade 1 – Sentenças, Representação Simbólica, Tautologia, Contradição e Contingência.

1 – Introdução e Conceitos Iniciais:

Geralmente nos expressamos, em português, através de gestos da fala e da escrita. No caso da escrita utilizamos interrogações, exclamações e conjunções expressadas em sentenças, que por sua vez, podem ser verdadeira ou falsa. Existem sentenças do tipo:

- A nota obtida em lógica depende do número de questões que acertar.
- Dez é menor do que sete.
- Existem formas de vida em outros planetas.

Ou seja, observa-se que as sentenças são passíveis de serem verdadeiras ou falsas. E justamente a interpretação da veracidade de sentenças que a lógica trata.

Na lógica matemática temos duas regras fundamentas:
I – Princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
II – Princípio do terceiro excluído: Uma proposição é falsa ou verdadeira, não havendo um terceiro caso.

Proposição: É um conjunto de símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. Ou simplesmente, é uma frase que pode ser apenas verdadeira ou falsa. Exemplos:

- A lua é um satélite da terra. (verdadeira)
- $\pi > \sqrt{5}$. (falsa)
- Vasco da Gama descobriu o Brasil. (falsa)

Valores lógicos de uma proposição: O valor lógico de uma proposição é **V** se a proposição for verdadeira e **F** se ela for falsa.

Proposições simples e composta: Proposição simples é aquela que expressa uma única idéia, ou seja, não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Em geral são referenciadas por letras minúsculas. Já uma proposição composta é aquela formada por uma combinação de mais de uma proposição simples, estas são em geral referenciadas por letras maiúsculas. Exemplo:

q: Pedro é estudante.	**Q:** Carlos é careca e Pedro é estudante.
r: 25 é quadrado perfeito.	**R:** Se carlos é careta, então é feliz.

Quando deseja-se destacar que uma proposição composta ***P*** é formada pela combinação de proposições simples ***q***, ***r***, ***s***, ...; então escreve-se:

$$P(q, r, s, \ldots)$$

2 – Conectivos Lógicos:

Os conectivos são expressões utilizadas para compor novas proposições. Exemplos:

- P: O número 6 é par **e** o número 8 é cubo perfeito.
- Q: **Não** está chovendo.
- R: O triângulo é retângulo **ou** isósceles.
- S: O triângulo é equilátero **se e somente se** é equiângulo.
- T: **Se** Jorge é engenheiro, **então** sabe cálculo.

Assim, na lógica, destaca-se os conectivos usuais

e **não** **ou** **se e somente se** **se ... então**

3 – Tabela Verdade:

No caso de proposições compostas recorre-se ao uso da tabela verdade para verificar o valor lógico da proposição, ou seja, a tabela retrata todos os possíveis valores lógicos.
Exemplos:

1. Considerando a proposição $p(q, r)$ têm-se:

q	r
V	V
V	F
F	V
F	F

Temos $2^2 = 4$ combinações

2. Considerando agora a proposição $p(q, r, s)$ têm-se:

q	r	s
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Temos $2^3 = 8$ combinações

3. Considerando agora a proposição $p(q, r, s, t)$ têm-se:

q	r	s	t
V	V	V	V
V	V	V	F
V	V	F	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	V	F
V	F	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	F	F

Temos $2^4 = 16$ combinações

A notação mais usual para o valor lógico de uma proposição ***P*** é V(***P***), assim se ***P*** é verdadeira os falsa escreve-se; V(***P***) = **V** ou V(***P***) = **F.**

Por exemplo, a proposição:

"***R***: 2 é raiz da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$"

têm valor lógico V(***R***) = **F**.

4 – Exercícios:

1. Determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) O número 17 é primo. resp: verdadeiro

b) Tiradentes morreu afogado. resp: falso

c) 0,13131313... é uma dízima periódica. resp: Verdadeiro

d) As diagonais de um paralelogramo são iguais. resp: Falso

e) $sen^2 30 + sen^2 60 = 2$. resp: Falso

f) 0, 4 e -4 são raízes da equação $x^3 - 16x = 0$. resp: verdadeiro

g) $(3+5)^2 = 3^2 + 5^2$. resp: Falso

h) b) $-1 < -7$. resp: falso

i) Todo número divisível por 5 termina por 5. resp: Falso

j) O número 125 é cubo perfeito. resp: verdadeiro

k) $tg\frac{\pi}{4} < tg\frac{\pi}{6}$. resp: Falso

l) O produto de dois números ímpares é um número ímpar. resp: verdadeiro

5 – Operações Lógicas Sobre Proposições:

Negação (~): A negação da proposição ***P*** é representada por ***~P***, cuja tabela verdade fica:

P	***~P***
V	F
F	V

Exemplo:

1. P: $2+3=5$ ~P: $2+3\neq 5$
2. R: Carlos é mecânico ~R: Carlos não é mecânico
3. S: todos os homens são elegantes ~S: Nem todos os homens são elegantes
4. T: Nenhum homem é elegante ~T: Algum homem é elegante

Conjunção ($\wedge$, .): Dadas duas proposições ***P*** e ***Q***, a conjunção é representada por $P \wedge Q$ ou ***P.Q*** cuja tabela verdade fica:

P	***Q***	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo:

1. P: A neve é branca
   Q: $2<5$
   $P \wedge Q$: A neve é branca e $2<5$
2. R: $\pi > 4$
   S: $sen\frac{\pi}{2}=0$
   $R \wedge S$: $\pi > 4$ e $sen\frac{\pi}{2}=0$

Disjunção ($\vee$, +): Dadas duas proposições ***P*** e ***Q***, a disjunção é representada por $P \vee Q$ ou ***P*** + ***Q*** cuja tabela verdade fica:

P	***Q***	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo:

1. P: A neve é branca
   Q: $2<5$
   $P \vee Q$: A neve ou branca e $2<5$

2. R: $\pi > 4$
   S: $sen\frac{\pi}{2} = 0$

   R$\vee$S: $\pi > 4$ ou $sen\frac{\pi}{2} = 0$

Disjunção Exclusiva ($\underline{\vee}$, $\oplus$): Dadas duas proposições ***P*** e ***Q***, a disjunção exclusiva é representada por $\boldsymbol{P \underline{\vee} Q}$ ou $\boldsymbol{P \oplus Q}$ cuja tabela verdade fica:

A tabela verdade de duas proposições ***H*** e ***K***, da disjunção exclusiva fica:

P	Q	$P \underline{\vee} Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo:
1. Considere as proposições ***P*** e ***Q*** abaixo:

P: Carlos é médico ou professor.
Q: Mário é alagoano ou gaúcho.

Em ***P***, Carlos pode ser médico; pode ser professor ou ainda pode ser médico e professor. Mas em ***Q***, Mário é alagoano ou gaúcho. Assim em ***P*** temos a *disjunção inclusiva* (ou simplesmente disjunção) enquanto que em ***Q*** temos a *disjunção exclusiva*.

Condicional ($\to$): Dadas as proposições ***P*** e ***Q***, a condicional é representada por $\boldsymbol{P \to Q}$ cuja tabela verdade fica:

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplo:
1. P: O mês de maio têm 31 dias
   Q: A Terra é plana

   P$\to$Q : Se o mês de maio têm 31 dias, então a terra é plana
2. R: Dante escreveu os lusíadas
   S: Cantor criou a teoria dos Conjuntos

   R$\to$S: Se Dante escreveu os lusíadas, então Cantor criou a teoria dos conjuntos.

OBS: Uma condicional $\boldsymbol{P \to Q}$ <u>não afirma</u> que o consequente ***Q*** se <u>deduz</u> ou é consequência do antecedente ***P***. O que o condicional afirma é <u>uma relação entre os valores lógicos</u> de ***P*** e ***Q*** de acordo com a tabela verdade.

Bicondicional ($\leftrightarrow$): Dadas as proposições P e Q, o bicondicional é representado por $P \leftrightarrow Q$ cuja tabela verdade fica:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

O bicondicional também pode ser lido da seguinte maneira:

i) P é condição necessária e suficiente para Q, e
ii) Q é condição necessária e suficiente para P

Exemplo:

1. P: Lisboa é a capital de Portugal
   Q: $tg\frac{\pi}{4} = 3$

   P$\leftrightarrow$Q : Lisboa é a capital de Portugal se e somente se $tg\frac{\pi}{4} = 3$

2. R: A terra é plana
   S: $\sqrt{2}$ é um número racional

   R$\leftrightarrow$S: A terra é plana se e somente se $\sqrt{2}$ é um número racional

6 – Exercícios:

1. Sejam as proposições,

   P: Está frio
   Q: Está chovendo

Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições.

(a) $\sim P$ Não está frio.

(b) $P \wedge Q$ Está frio e está chovendo. Está frio e chovendo.

(c) $P \vee Q$ Está frio ou está chovendo. Está frio ou chovendo.

(d) $Q \leftrightarrow P$ Está chovendo se e somente se está frio.

2. Determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

(a) $3+2=7$ *e* $5+5=10$ Resp: F

(b) $1>0 \wedge 2+2=4$ Resp: V

(c) Roma é a capital da França ou $tg45=1$ Resp: V

(d) $5^2 = 10 \vee \pi$ *é racional* Resp: F

(e) *Se* $3+2=6$ *então* $4+4=9$ Resp: V

(f) $\sqrt{3} > \sqrt{2} \rightarrow 2^0 = 2$ Resp: F

(g) $tg\pi = 1$ *se e somente se* $sen\pi = 0$ Resp: F

(h) $\sqrt{-1} = -1 \leftrightarrow \sqrt{-2} = -2$ Resp: V

(i) Não é verdade que 12 é um número ímpar. Resp: V

(j) $2+2=4 \rightarrow (3+3=7 \leftrightarrow 1+1=4)$ Resp: V

(k) $\sim (sen 0 = 0 \ ou \ cos 0 = 1)$ Resp: F

(l) $\sim (2^3 \neq 8 \ e \ 4^2 \neq 4^3)$ Resp: F

3. Determinar $V(p)$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $V(q) = F \quad e \quad V(p \wedge q) = F$ Resp: $V(p) = V \quad ou \quad V(p) = F$

(b) $V(q) = F \quad e \quad V(p \vee q) = F$ Resp: $V(p) = F$

4. Determinar $V(p)$ e $V(q)$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $V(p \rightarrow q) = V \quad e \quad V(p \wedge q) = F$ Resp: $V(p) = F \quad e \quad V(q) = V$

(b) $V(p \leftrightarrow q) = V \quad e \quad V(p \wedge q) = V$ Resp: $V(p) = V \quad e \quad V(q) = V$

7 – Tabela Verdade de Uma Proposição Composta:

Com as proposições simples do tipo ***p***, ***q***, ***r***, ***s***, ... e fazendo uso dos conectivos **~, ∧, ∨, →, ↔** é possível construir proposições compostas tais como:

$$P(p, q) = \sim (p \wedge \sim q)$$

onde, com o emprego da tabela verdade é possível verificar todas as possibilidades de V e F.

Exemplo:

1. Construir a TV das proposições seguintes.

a) $P(p, q) = \sim (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$P \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

b) $P(p,\ q,\ r) = p \vee \sim r \to (q \wedge \sim r)$

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$q \wedge \sim r$	$p \vee \sim r \to q \wedge \sim r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

8 – Valor Lógico de Uma Proposição Composta:

Dada uma proposição $P(p,\ q,\ r,\ s, \ldots)$ pode-se determinar seu valor lógico conhecendo, a priori, os valores lógicos de ***p***, ***q***, ***r***, ***s***, ...

Exemplo:

1. Sabendo que $V(p) = V$ e $V(q) = F$, determinar $V(P)$, onde

$$P(p,q) = \sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q).$$

<u>*Resolução:*</u>

*Mediante os valores lógicos de **p** e **q** pode-se obter:*

$$V(P) = \sim (V \vee F) \leftrightarrow (\sim V \wedge \sim F) = \sim (V) \leftrightarrow (F \wedge V) = F \leftrightarrow F = V$$

2. Sejam as proposições $p : \pi = 3$ e $q : sen\frac{\pi}{2} = 0$. Determine o valor lógico da proposição: $P(p,q) = (p \to q) \to (p \to p \wedge q)$.

<u>*Resolução:*</u>

Como $V(P) = F$ *e* $V(q) = F$ *então têm-se:*

$$V(P) = (F \to F) \to (F \to F \wedge F) = V \to (F \to F) = V \to V = V$$

9 – Precedência e Eliminação de Parêntesis:

O uso de parêntesis se faz necessário para evitar qualquer ambiguidade, assim, por exemplo, a proposição $p \wedge q \vee r$ pode ser escrita como:

1) $(p \wedge q) \vee r$

2) $p \wedge (q \vee r)$

que não têm o mesmo significado (basta construir a TV de ambas).

A ordem de precedência para os conectivos é

1°) ~, o mais fraco

2°) $\wedge$ ***e*** $\vee$

3°) $\rightarrow$

4°) $\leftrightarrow$, o mais forte,

portanto se tivéssemos a proposição $\boldsymbol{p \rightarrow q \leftrightarrow s \wedge r}$, concluiríamos que ela é bicondicional. Para convertê-la numa condicional ou numa conjuntiva deve-se escrevê-las respectivamente nas formas:

$$\boldsymbol{p \rightarrow (q \leftrightarrow s \wedge r)}$$
$$\boldsymbol{(p \rightarrow q \leftrightarrow s) \wedge r}\ .$$

Pode-se fazer a eliminação de parêntesis quando um mesmo conectivo aparece sucessivamente repetido, fazendo associação a partir da esquerda, por exemplo,

$$\boldsymbol{((\sim(\sim(p \wedge q))) \vee (\sim p))} \quad\quad\quad \boldsymbol{((\sim(\sim(p \wedge q))) \vee (\sim p))}$$
$$\downarrow \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \downarrow$$
$$\boldsymbol{\sim\sim(p \wedge q) \vee \sim p} \quad\quad\quad \boldsymbol{(p \wedge \sim q) \wedge (r \wedge \sim p)}$$

10 – Exercícios:

1. Sejam as proposições,

P: Está frio
Q: Está chovendo

Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições.

(a) $\boldsymbol{P \rightarrow \sim Q}$ — Se está frio, então não está chovendo.

(b) $\boldsymbol{P \vee \sim Q}$ — Está frio ou não está chovendo.

(c) $\boldsymbol{\sim P \wedge \sim Q}$ — Não está frio e não está chovendo.

(d) $\boldsymbol{P \leftrightarrow \sim Q}$ — Está frio se e somente se não está chovendo.

(e) $\boldsymbol{P \wedge \sim Q \rightarrow P}$ — Se está frio e não está chovendo, então está frio.

2. Sejam as proposições,

P: João é gaúcho
Q: Jaime é paulista

Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições.

(a) $\sim(P \wedge \sim Q)$ Não é verdade que João é gaúcho e Jaime não é paulista.

(b) $\sim\sim P$ Não é verdade que João não é gaúcho.

(c) $\sim(\sim P \vee \sim Q)$ Não é verdade que João não é gaúcho ou que Jaime não é paulista.

(d) $P \rightarrow \sim Q$ Se João é gaúcho, então Jaime não é paulista.

(e) $\sim P \leftrightarrow \sim Q$ João não é gaúcho se e somente se Jaime não é paulista.

(f) $\sim(\sim Q \rightarrow P)$ Não é verdade que, se Jaime não é paulista, então João é gaúcho.

3. Sejam as proposições,

P: Marcos é alto
Q: Marcos é elegante

Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições.

(a) Marcos é alto e elegante. $P \wedge Q$

(b) Marcos é alto, mas não é elegante. $P \wedge \sim Q$

(c) Não é verdade que marcos é baixo ou elegante. $\sim(\sim P \vee Q)$

(d) Marcos não é nem alto e nem elegante. $\sim P \wedge \sim Q$

(e) Marcos é alto ou é baixo e elegante. $P \vee (\sim P \wedge Q)$

(f) É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante. $\sim(\sim P \vee \sim Q)$

4. Construir a T.V. das seguintes proposições:

(a) $P \wedge \sim Q \rightarrow P$
(b) $\sim P \leftrightarrow \sim Q$
(c) $\sim(\sim P \vee \sim Q)$

11 – Lista de Exercícios. 1

1. Sejam as proposições,

P: Suely é rica
Q: Suely é feliz

Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições.

(a) Suely é pobre e infeliz. Resp: $\sim P \wedge \sim Q$

(b) Suely é pobre ou rica, mas é infeliz. Resp: $(\sim P \vee P) \wedge \sim Q$

2. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições matemáticas.

(a) $(x + y = 0 \;\; e \;\; z > 0) \;\; ou \;\; z = 0$ Resp: $(x + y = 0 \; \wedge \; z > 0) \; \vee \; z = 0$

(b) $x = 0 \;\; e \;\; (y + z > x \;\; ou \;\; z = 0)$ Resp: $x = 0 \; \wedge \; (y + z > x \; \vee \; z = 0)$

(c) $x \neq 0 \;\; ou \;\; (x = 0 \;\; e \;\; y < 0)$ Resp: $x \neq 0 \; \vee \; (x = 0 \; \wedge \; y < 0)$

(d) $(x = y \;\; e \;\; z = t) \;\; ou \;\; (x < y \;\; e \;\; z = 0)$ Resp: $(x = y \; \wedge \; z = t) \; \vee \; (x < y \; \wedge \; z = 0)$

(e) $Se \;\; x > 0 \;\; então \;\; y = 2$ Resp: $x > 0 \rightarrow y = 2$

(f) $Se \;\; x + y = 2 \;\; então \;\; z > 0$ Resp: $x + y = 2 \rightarrow z > 0$

3. Determinar o valor lógico (V ou F) da proposição $p \leftrightarrow q \wedge \sim r$, sabendo que $V(p) = V(r) = V$.

<u>Resolução:</u>

Em termos de valor lógico temos que: Se $V(q) = V$, *então* $V(p \leftrightarrow q \wedge \sim r) = V \leftrightarrow V \wedge \sim V = V \leftrightarrow V \wedge F = V \leftrightarrow F = F$. *Mas, se* $V(q) = F$, *então* $V(p \leftrightarrow q \wedge \sim r) = V \leftrightarrow F \wedge \sim V = V \leftrightarrow F \wedge F = V \leftrightarrow F = F$. *Portanto, independentemente do valor lógico de* q *a proposição será sempre falsa.*

4. Suprimir o maior número possível de parêntesis na proposição $((q \leftrightarrow (r \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\sim (\sim q))))$.

<u>Resolução:</u>

$$((q \leftrightarrow (r \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\sim (\sim q)))) \qquad (q \leftrightarrow (r \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\sim (\sim q)))$$

$$(q \leftrightarrow r \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim\sim q)$$

5. Determinar o valor lógico (V ou F) das seguintes proposições:

a) $p \wedge q \rightarrow p \vee r$, sabendo que $V(p) = V(r) = V$. Resp: Verdadeira

b) $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$, sabendo que $V(q) = F$ e $V(r) = V$. Resp: Verdadeira

6. Suprimir o maior número possível de parêntesis nas proposições:

a) $((p \wedge (\sim (\sim q))) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (r \vee q)))$ Resp: $p \wedge \sim\sim q \leftrightarrow (q \leftrightarrow r \vee q)$

b) $(((p \vee q) \rightarrow (\sim r)) \vee ((((\sim q) \wedge r) \wedge q)))$ Resp: $(p \vee q \rightarrow \sim r) \vee (\sim q \wedge r \wedge q)$

7. Sabendo que as proposições "$x = 0$" e "$x = y$" são verdadeiras e que as proposições "$y = z$" e "$y = t$" são falsas, determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $x = 0 \wedge x = y \rightarrow y \neq z$ Resp: Verdadeira

b) $x \neq y \vee y \neq z \rightarrow y = t$ Resp: Falsa

8. Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q são respectivamente F e V, determinar o valor lógico da proposição $(p \wedge (\sim q \rightarrow p)) \wedge \sim ((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow q \vee \sim p)$.
Resp: falsa

12 – Tautologia, Contradição e Contingência:

Tautologia é toda proposição composta que é verdadeira independentemente dos valores verdade das proposições simples que há compõem.

Exemplo:
1. Construir a TV das seguintes proposições:

a) $\sim(p \wedge \sim p)$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

tautologia

b) $p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$

P	q	$\sim q$	$q \wedge \sim q$	$p \vee (q \wedge \sim q)$	$p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V

tautologia

Observação: Se $P(p, q, r, \ldots)$ é uma tautologia, então $P(P_0, Q_0, R_0, \ldots)$ também é tautologia, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0.

Contradição é toda proposição cujo valor lógico não é tautológico, ou seja, a última coluna é sempre falsa.

Exemplo
1. Construir a TV das seguintes proposições:

a) $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

contradição

b) $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

contradição

Observação: Se $P(p, q, r, \ldots)$ é uma contradição, então $P(P_0, Q_0, R_0, \ldots)$ também é contradição, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0.

Contingência é toda proposição composta que não é tautológica nem contradição.

Exemplo:
3. Construir a TV da seguinte proposição:

$$x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$$

$x = 3$	$x \neq y$	$x \neq 3$	$x \neq y \rightarrow x \neq 3$	$x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

contingência

13 - Exercício:

1. Determinar quais das seguintes proposições são tautológicas, contraditórias, ou contingentes:

a) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

b) $\sim p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$

c) $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$

d) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow q) \rightarrow p$

e) $p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$

f) $\sim p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow q)$

g) $p \rightarrow (p \vee q) \vee r$

h) $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$

Resp: (a), (b), (c), (g), (h) tautológicas (d), (e), (f) contingências

14 – Implicação lógica:

A palavra "<u>implicar</u>" significa: Originar, produzir como conseqüência, ser causa de: ...uma filosofia definitiva, ...implicaria a imobilidade do pensamento humano (Antero de Quental).
[*DICMAXI Michaelis Português - Moderno Dicionário da Língua Portuguesa*]

(Teorema): $P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$ se e somente se a condicional, $P(p, q, r, \ldots) \rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$ é tautológica.

Aqui, deve-se reforçar que: os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ são distintos pois,

- O condicional é o resultado de uma **operação lógica**. Por exemplo, se considerarmos as proposições p e q, pode-se obter uma nova proposição expressa por $p \rightarrow q$.
- Já a implicação, estabelece uma **relação**. Por exemplo, que a condicional $p \rightarrow q$ é tautologia.

Exemplo:

1. Demonstre, mediante o teorema acima descrito, que $p \wedge \sim p \Rightarrow q$.

<u>*Resolução:*</u>

Para provarmos que $p \wedge \sim p \Rightarrow q$ deve-se mostrar que $p \wedge \sim p \rightarrow q$ *é tautológica, ou seja; da T. V. têm-se:*

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \wedge \sim p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

tautologia

assim pelo teorema têm-se que $p \wedge \sim p \Rightarrow q$.

2. Considere a proposição $(x = y \vee x < 4) \wedge x \not< 4$, o que se poderia concluir a respeito de x e y ?

<u>*Resolução:*</u>

$x = y$	$x < 4$	$x = y \vee x < 4$	$x \not< 4$	$(x = y \vee x < 4) \wedge x \not< 4$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Mediante a T. V. pode-se dizer que

$$(x = y \vee x < 4) \wedge x \nless 4 \Rightarrow x = y$$

$$(x = y \vee x < 4) \wedge x \nless 4 \Rightarrow x \nless y$$

15 – Equivalência Lógica

A palavra "<u>equivalência</u>" significa: Igualdade de valor, estimação entre duas coisas; correspondência. **[*DICMAXI Michaelis Português - Moderno Dicionário da Língua Portuguesa*]**

(Teorema): $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$ se e somente se a bicondicional, $P(p, q, r, ...) \leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$ é tautológica.

È importante lembrar que os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são distintos pois,

- O bicondicional é o resultado de uma **operação lógica**, enquanto que a equivalência estabelece uma **relação**. Por exemplo, que a condicional $p \leftrightarrow q$ é tautologia.

Exemplo:

1. Demonstre, mediante o teorema acima descrito, que a proposição bicondicional $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ é uma equivalência; onde $V(c) = F$.

<u>*Resolução:*</u>

Para provarmos que $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ representa $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$ deve-se mostrar que $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ *é tautológica, ou seja; da T. V. têm-se:*

p	q	c	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \wedge \sim q \rightarrow c$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V

tautologia

assim pelo teorema têm-se que $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$.

2. Considerando as seguintes proposições verifique a equivalência mediante a T. V:

a) $\sim\sim p \Leftrightarrow p$

<u>Resolução</u>: *A T. V. para a proposição é dada como:*

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

idênticas

b) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$

Resolução: A T. V. para a proposição é dada como:

p	$\sim p$	$\sim p \rightarrow p$
V	F	V
F	V	F

idênticas

c) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Resolução: A T. V. para a proposição é dada como:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

idênticas

OBS: Esta equivalência é de grande importância, pois aqui a condicional pode ser trocada por uma disjunção !

d) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Resolução: A T. V. para a proposição é dada como:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

idênticas

OBS: Esta equivalência também é de grande importância, pois aqui a bicondicional pode ser trocada por uma conjunção !

16 – Exercícios

1. Mostre que as equivalências são verdadeiras

a) $(p \wedge q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ é verdadeira.

<u>Resolução:</u>

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

tautologia

b) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

<u>Resolução</u>: A T. V. para a proposição é dada como:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V

idênticas

OBS: Esta equivalência é importante, pois a bicondicional pode ser trocada por uma disjunção !

17 – Lista de Exercícios. 2

1. Sejam as proposições P: Carlos fala Francês, Q: Carlos fala Inglês, R: Carlos fala Alemão. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Carlos fala Francês ou Inglês, mas não fala Alemão.

b) Carlos fala Francês e Inglês, ou não fala Francês e Alemão.

c) É falso que Carlos fala Francês mas que não fala Alemão.

d) É falso que Carlos fala Inglês ou Alemão mas que não fala Francês.

2. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições matemáticas.

a) $Se\ x = 1\ ou\ z = 2\ então\ y > 1$.

b) $Se\ Z > 5\ então\ x \neq 1\ e\ x \neq 2$.

c) $Se\ x \neq y\ então\ x + z > 5\ e\ y + z < 5$.

3. Determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $2 + 7 = 9\ e\ 4 + 8 = 12$

b) $0 > 1 \wedge \sqrt{3}\ é\ irracional$

c) $2 = 2 \vee sen\frac{\pi}{2} \neq tg\frac{\pi}{4}$

d) $Se\ |-1| = 0\ então\ sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

e) $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \rightarrow 2 = 2$

f) $1 > sen\frac{\pi}{2} \leftrightarrow cos\frac{\pi}{4} < 1$

4. Determinar $V(p)$ em cada um dos seguintes casos:

a) $V(q) = F \quad e \quad V(p \rightarrow q) = V$

b) $V(q) = V \quad e \quad V(p \leftrightarrow q) = F$

5. Determinar $V(p)$ e $V(q)$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $V(p \rightarrow q) = V \quad e \quad V(p \vee q) = F$

(b) $V(p \leftrightarrow q) = F \quad e \quad V(\sim p \vee q) = V$

6. Construir as tabelas verdade das seguintes proposições:

a) $\sim(p \rightarrow \sim q)$

b) $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow q \rightarrow p$

c) $q \leftrightarrow \sim q \wedge p$

d) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \sim r$

7. Sejam as proposições $P: tg(\pi - x) = ctg(x)$ e $Q: \pi < 2$. Determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

b) $(p \vee (\sim p \vee q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

8. Sabendo que a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira, determinar o valor lógico da condicional $p \wedge r \rightarrow q \rightarrow r$.

9. Mostrar que:

a) $q \Rightarrow p \rightarrow q$ b) $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$ c) $(x \neq 0 \rightarrow x = y) \wedge x \neq y \Rightarrow x = 0$

10. Mostre que $p \leftrightarrow \sim q$ *não implica* $p \rightarrow q$.

11. Mostre que as proposições p e q são equivalentes em cada um dos seguintes casos:

a) $p: 1+3=4;$ $q: (1+3)^2 = 16$
b) $p: sen\,0 = 1;$ $cos\,0 = 0$
c) $p: x = y;$ $q: x+z = y+z$ $(x, y, z \in R)$
d) $p: a \perp b;$ $q: b \perp a$
e) $p:$ *O triângulo ABC é retângulo em A;* $q: a^2 = b^2 + c^2$

12. Demonstre por tabela verdade as seguintes equivalências:

a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
b) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$
c) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

Unidade 2 – Lógica Proposicional (Álgebra das Proposições)

1 – Introdução:

A álgebra das proposições constitui-se numa ferramenta matemática de grande importância, pois através dela pode-se operar sobre proposições utilizando-se de equivalências "notáveis".

Uma de suas aplicações consiste no fato da simplificação de trechos de códigos computacionais, pois quanto mais simples o código mais simples será de ser entendido e poderá ser executado com maior rapidez.

2 – Propriedades da Conjunção:

Considerando as proposições p, q e r; e sejam as proposições t e c tal que $V(t)=V$ e $V(c)=F$. Assim são válidas as seguintes propriedades:

a) INDEPOTENTE: $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Ex.: $x \neq 1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$

Obs.: Dizer por exemplo, que é válida a propriedade **indepotente** é o mesmo que verificar o teorema relativo à equivalência (página 19), ou seja:

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

como $p \wedge p \leftrightarrow p$ é tautológica, então pelo teorema da equivalência temos que $p \wedge p \Leftrightarrow p$.

Daqui por diante, para as próximas propriedades, as equivalências descritas são válidas, uma vez que sua validade pode ser aferida segundo o mesmo raciocínio descrito para a propriedade indepotente.

b) COMUTATIVA: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Ex.: $\pi > 3 \wedge \pi < 4 \Leftrightarrow \pi < 4 \wedge \pi > 3$

c) ASSOCIATIVA: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Ex.: $(x \neq 0 \wedge x > 1) \wedge x < 3 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge (x > 1 \wedge x < 3)$

d) IDENTIDADE: $p \wedge t \Leftrightarrow p$ e $p \wedge c \Leftrightarrow c$

Elemento neutro **Elemento absorvente**

Ex.: $x \neq 1 \wedge |x| \geq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ e $x \neq 1 \wedge |x| < 0 \Leftrightarrow |x| < 0$

3 – Propriedades da Disjunção:

Considerando novamente as proposições p, q e r; e ainda t e c onde $V(t)=V$ e $V(c)=F$, então são válidas as seguintes propriedades:

a) INDEPOTENTE: $p \vee p \Leftrightarrow p$

Ex.: $x \leq 1 \vee x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$

b) COMUTATIVA: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Ex.: $a > b \vee b < c \Leftrightarrow b < c \vee a > b$

c) ASSOCIATIVA: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Ex.: $(x \neq 1 \vee x \geq 2) \vee x < 4 \Leftrightarrow x \neq 1 \vee (x \geq 2 \vee x < 4)$

d) IDENTIDADE: $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$

Elemento absorvente **Elemento neutro**

Ex.: $x \neq 1 \vee |x| \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 0$ e $x \neq 0 \vee x^2 < 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

4 – Propriedades da Conjunção e Disjunção:

Sejam as proposições p, q e r; então têm-se que:

a) DISTRIBUTIVAS:

(i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

b) ABSORÇÃO:

(i) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (ii) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

c) REGRAS DE **DE MORGAN** (1806-1871):

(i) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (ii) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

5 – Negação da Condicional e da Bicondicional:

Dadas as proposições p, q têm-se que a negação da condicional é:

$$\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

e a negação da bicondicional será;

$$\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q).$$

6 – Exercícios:

1. Dar a negação em linguagem corrente da proposição:

“ Rosas são vermelhas e violetas são azuis”.

<u>*Resolução:*</u>

Denotando $p: rosas\, são\, vermelhas$ *e* $q: violetas\, são\, azuis$, *então teremos que a prop. Composta é:*

$$P = p \wedge q$$

logo a negação de P *será:*

$$\sim P = (\sim p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

Portanto em linguagem corrente teremos

“Rosas não são vermelhas ou violetas não são azuis”

2. Demonstrar as seguintes regras de **DE MORGAN** para três proposições:

a) $\sim (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$ b) $\sim (p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

3. Simplifique a expressão condicional, abaixo, de um trecho de programa pascal, após reescreva o comando.

```
IF (FLUXOEXT>FLUXOINT) AND NOT ( (FLUXOEXT>FLUXOINT) AND (PRESSÃO<1000) )  THEN
            COMANDO 1
 ELSE
            COMANDO 2.
```

<u>*Resolução:*</u>

Denotando $a: fluxoext > fluxoint;\ b: pressão < 1000$, *então teremos que a expressão condicional será dada por*

$$E = a \wedge \sim (a \wedge b)$$

que pode ser simplificada conforme:

$$E = a \wedge \sim (a \wedge b) = a \wedge (\sim a \vee \sim b) = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge \sim b) = F \vee (a \wedge \sim b) = (a \wedge \sim b)$$

portanto teremos que

$$E = (a \wedge \sim b)$$

que é equivalente a expressão original.

4. Considere o seguinte fragmento de um programa pascal:

```
for contador := 1 to 5 do
    begin
        read (a);
        if ((a < 5.0) and (2 * a < 10.7)) or (sqrt(5.0 * a) > 5.1) then
        writeln (a);
end;
```

Os valores de entrada para **a** são 1.0, 5.1, 2.4, 7.2 e 5.3. Quais são os valores de saída ?

Resolução:

Saídas:

5. Reescreva o programa pascal a seguir com uma expressão condicional simplificada:

```
if not ((valor1 < valor2) or odd(numero))
   or (not (valor1 < valor2) and odd(numero))
        comando1
else
        comando2;
```

6. (a) Verifique que $A \rightarrow B$ é equivalente a $A' \vee B$. (b) usando a parte (a) e outras equivalências, escreva a negação da sentença “ Se Pedro passar em seu curso de física, então ele se formará.”

7 – Regras de inferência para a lógica Proposicional:

Dadas as proposições $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ e Q (proposições quaisquer), denomina-se **“ argumento ”**, a toda afirmação de que; dada a sequência

$$P_1, P_2, P_3, ..., P_n$$

têm-se como consequência uma proposição final Q .

As proposições $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ são denominadas premissas do argumento e Q é denominada conclusão do argumento. Em geral indica-se um argumento como:

$$P_1, P_2, P_3, ..., P_n \vdash Q$$

ou na forma mais usual

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ \underline{P_n} \\ Q \end{array}$$

e este é válido se e somente se a conclusão Q é verdadeira toda vez que as premissas $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ são verdadeiras, logo dizemos que a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.

OBSERVAÇÃO: As premissas são verdadeiras ou admitidas como tal, a lógica só se preocupa com a validade dos argumentos e não com a verdade ou falsidade das premissas e das conclusões. A validade de um argumento depende exclusivamente da relação existente entre as premissas e a conclusão. Portanto dizer que um argumento é válido significa afirmar que as premissas estão relacionadas de tal modo com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas são verdadeiras.

<u>Teorema:</u> Um argumento $P_1, P_2, P_3, ..., P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a condicional $P_1, P_2, P_3, ..., P_n \rightarrow Q$ é tautológica.

Para demonstrar o argumento $P_1, P_2, P_3, ..., P_n \vdash Q$, pode-se fazer uso da T. V. e do teorema anterior. Se tivéssemos cinco proposições simples compondo um argumento, necessitaríamos construir uma T. V. de $2^5 = 32$ linhas, tarefa esta muito trabalhosa, porém correta. Para contornar este tipo de problema, faz-se a validação de uma argumentação através das regras de inferência, minimizando assim o trabalho a ser desenvolvido.

Uma outra consideração a ser comentada é: Considerando o argumento

$$\overbrace{p \wedge \sim q}^{P_1},\ \overbrace{p \rightarrow \sim r}^{P_2},\ \overbrace{q \vee \sim s}^{P_3}\ \vdash\ \overbrace{\sim (r \vee s)}^{Q}$$

chamamos de condicional associada a forma $(p \wedge \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim r) \wedge (q \vee \sim s) \rightarrow \sim (r \vee s)$.

Por outro lado, se considerarmos a condicional associada

$$(p \rightarrow q \vee r) \wedge (\sim s) \wedge (q \vee r \rightarrow s) \rightarrow (s \rightarrow p \wedge \sim q)$$

o argumento correspondente a esta condicional será

$$p \rightarrow q \vee r, \sim s, q \vee r \rightarrow s\ \vdash\ s \rightarrow p \wedge \sim q\,,$$

que também pode ser expressado sob a forma

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \vee r \\ \sim s \\ q \vee r \rightarrow s \\ \hline s \rightarrow p \wedge \sim q \end{array}.$$

8 – Argumentos válidos Fundamentais:

Os argumentos válidos fundamentais são utilizados para executar passo a passo uma dedução ou demonstração de um outro argumento mais complexo. Os argumentos fundamentais são:

1) Adição (AD)

i) $\dfrac{p}{p \vee q}$ ii) $\dfrac{p}{q \vee p}$

2) Simplificação (SIMP)

i) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ ii) $\dfrac{p \wedge q}{q}$

3) Conjunção (CONJ)

i) $\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$ ii) $\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline q \wedge p \end{array}$

4) Absorção (ABS)

$$\frac{p \to q}{p \to (p \wedge q)}$$

5) Modus Ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \quad q \end{array}$$

6) Modus Tollens (MT)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \ \ \sim p \end{array}$$

7) Silogismo Disjuntivo (SJ)

$$\text{i)} \begin{array}{l} \ p \vee q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \quad q \end{array} \qquad\qquad \text{ii)} \begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \quad p \end{array}$$

8) Silogismo Hipotético (SH)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r \quad} \\ p \to r \end{array}$$

9) Dilema Construtivo (DC)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{p \vee r \quad\ } \\ \ q \vee s \end{array}$$

10) Dilema Destrutivo

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{\sim q \vee \sim s} \\ \sim p \vee \sim r \end{array}$$

A validade dos 10 argumentos pode ser facilmente verifica mediante o teorema anterior, por exemplo, a seguir é verificada a validade do argumento Silogismo Hipotético

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$p \to q \wedge q \to r$	$(p \to q \wedge q \to r) \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Com o auxílio das regras de inferência pode-se deduzir outras regras, ou demonstrar a validade de outras regras, por exemplo; o que se pode concluir, abaixo, a partir das premissas dadas ?

$$\begin{array}{l} P_1: \quad p \wedge q \to r \\ P_2: \quad q \to r \wedge s \\ P_3: \quad \sim r \vee \sim (r \wedge s) \\ \hline Q: \quad \sim (p \wedge q) \vee \sim q \quad \text{DD} \end{array}$$

Exemplo: Verifique a validade do argumento: $p \to q,\ p \wedge r \ \vdash q$.

$$\begin{array}{lll} 1 - p \to q & & \\ 2 - p \wedge r & & \\ \hline 3 - & p & \text{2, SIM} \\ 4 - & q & \text{1,2, MP} \end{array}$$

9 – Exercícios de Aprendizagem:

1. Demonstre a validade dos seguintes argumentos:

a) $p \wedge q,\ p \vee r \to s \ \vdash p \wedge s$

b) $p \to (q \to r),\ p \to q,\ p \ \vdash r$

c) $e \to s,\ \sim t \to \sim j,\ e \wedge j \ \vdash t \vee s$

d) $p \to q.r,\ p,\ t \to q',\ t + s \ \vdash s$

2. O argumento abaixo é válido ?

$$x = y \to x = z,\ x \neq y \to x < z,\ x \geq z \vee y > z,\ y \neq z \wedge x \neq z \ \vdash y > z$$

3. Prove que o argumento seguinte é válido:

"Admitindo a linguagem assembly.
Se usamos a linguagem asssembly, então o programa será executado mais rapidamente.
Se usamos a linguagem asssembly, o programa terá mais linhas de código.
Portanto o programa será executado mais rapidamente e terá mais linhas de código"

4. Verifique a validade dos seguintes argumentos:

a)
$$\frac{\begin{array}{l} Se\ x^y = 16\ e\ y^x = 16,\ então\ x = y \\ x \neq y \end{array}}{Logo,\ x^y \neq 16\ ou\ y^x \neq 16}$$

b)
Se trabalho não posso estudar.
Trabalho ou serei aprovado em lógica. Trabalhei.
Por tanto, fui reprovado em lógica.

10 – Lista de Exercícios:

1. Usando todas as equivalências já estudadas até o momento e as propriedades da álgebra de proposições simplifique as seguintes proposições:

a) $\sim(\sim p \to \sim q)$, sugestão use a equivalência $\nabla \to \Sigma \Leftrightarrow \nabla' \vee \Sigma$

b) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

c) $\sim(p \vee \sim q)$

d) $\sim(\sim p \wedge q)$

e) $\sim(\sim p \vee \sim q)$

f) $(p \vee q) \wedge \sim p$

g) $(p \to q) \wedge (\sim p \to q)$

h) $p \wedge (p \to q) \wedge (p \to \sim q)$

2. Provar t' dadas as premissas:

1. $p \to s$
2. $p.q$
3. $s.r \to t'$
4. $q \to r$

2. Prove que os seguintes argumentos são válidos

a) $t \to r, \sim r, t \vee s \;|\!\!— s$

b) $(s.q) \wedge (t \to q') \wedge (t' \to r) \to (r + s)$

3. Provar que $x + y = 5$ dadas as premissas

1. $3x + y = 11 \leftrightarrow 3x = 9$
2. $(3x = 9 \to 3x + y = 11) \leftrightarrow y = 2$
3. $y \neq 2 \vee x + y = 5$

Resposta:

1. (a) $\sim p \wedge q$ (b) $\sim p$ (c) $\sim p \wedge q$ (d) $p \vee q$ (e) $p \wedge q$

(f) $\sim p \wedge q$ (g) q (h) F (falsa)

Unidade 3 – Quantificadores, Predicados e validade

1 – Introdução:

Considere a sentença dada por “para todo x, $x > 0$”, admitindo que seja verdadeira sobre inteiros, não é possível expressar a sentença, apenas, através de proposições e ou conectivos lógicos. Pois ela contém dois elementos novos que são: “para todo x” e “$x > 0$”.

O elemento “para todo” é denominado **quantificador** e o elemento $x > 0$ é denominado **predicado**. O quantificador “para todo” é mais precisamente denominado como **quantificador universal** e simbolizado por “$\forall$”, este pode ser expresso também como “qualquer que seja” ou “para todo o valor de”.

Portanto a sentença “para todo x, $x > 0$” pode ser simbolizada como $(\forall x)(x > 0)$, já uma expressão genérica, relacionada ao quantificador universal, pode ser simbolicamente escrita na forma $(\forall x)(\,P(x)\,)$, onde $P(x)$ é um predicado qualquer.

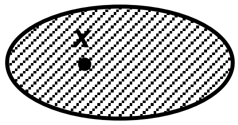
Considere agora a sentença “existe x tal que $x > 0$”, admitindo que seja verdadeira também sobre inteiros, não é possível expressar a sentença, apenas, através de proposições e ou conectivos lógicos, devido ao fato de conter também dois elementos novos; “existe x” e “$x > 0$”. O quantificador “existe” é denominado **quantificador existencial** e simbolizado por “$\exists$”, este é equivalente também a, “existe um” ou “para pelo menos um” ou ainda “para algum”.

Sendo assim, a sentença “existe x, $x > 0$” pode ser simbolizada sob a forma $(\exists x)(x > 0)$, já uma expressão genérica pode ser expressada por $(\exists x)(\,P(x)\,)$, onde $P(x)$ é um predicado qualquer.

2 – Quantificadores:

Quantificador Universal:

Seja $P(x)$ uma sentença em um conjunto não vazio A e seja V_P o seu conjunto verdade, onde $V_P = \{\,x\,/\,x \in A \wedge P(x)\,\}$. Quando $V_P = A$, isto é, todos os elementos do conjunto A satisfazem a sentença $P(x)$, pode-se afirmar que:



$V_P = A$

- para todo elemento x de A, $P(x)$ é verdadeira;
- ou, qualquer que seja o elemento x de A, $P(x)$ é verdadeira;

simbolicamente indica-se tal fato por

$$(\forall x \in A)(P(x)) \Leftrightarrow V_P = A\,.$$

Quando A é um conjunto finito, isto é, $A = \{a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ a_4\,,\ ...,\ a_n\}$ têm-se que

$$(\forall x \in A)(P(x)) \Leftrightarrow (P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge P(a_4) \wedge ... \wedge P(a_n)).$$

Exemplo:

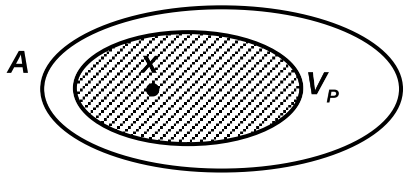
1) Seja $A = \{3,\ 5,\ 7\}$ e $P(x)$*: x é primo*, descreva como é a expressão predicada $(\forall x \in A)(x\, é\, primo)$

2) Verifique a veracidade das proposições

a) $(\forall n \in N)(n + 5 > 3)$ b) $(\forall n \in N)(n + 3 > 7)$ c) $(\forall x \in R)(x^2 \geq 0)$

Quantificador Existencial:

Seja $P(x)$ uma sentença em um conjunto não vazio A e V_P o seu conjunto verdade onde $V_P = \{\,x\,/\,x \in A \wedge P(x)\,\}$. Quando V_P não é vazio, então pelo menos um elemento do conjunto A satisfaz a sentença $P(x)$, assim pode-se afirmar que:



- existe pelo menos um elemento x de A tal que $P(x)$ é verdadeira;
- ou que para algum elemento x de A, $P(x)$ é verdadeira;

simbolicamente indica-se tal fato por

$$(\exists x \in A)(P(x)) \Leftrightarrow V_P\,.$$

Quando A é um conjunto finito, isto é, $A = \{a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ a_4\,,\ ...,\ a_n\}$ têm-se que

$$(\exists x \in A)(P(x)) \Leftrightarrow (P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee P(a_4) \vee ... \vee P(a_n)).$$

Exemplo:

3) Seja $A = \{3,\ 5,\ 7\}$ e $P(x):\ x\ é\ par$, descreva como é a expressão predicada $(\exists x \in A)(x\ é\ par)$

4) Verifique a veracidade das proposições

a) $(\exists n \in N)(n + 4 < 8)$ b) $(\exists n \in N)(n + 5 < 3)$ c) $(\exists x \in R)(x^2 < 0)$

Quantificador de Existência e Unicidade:

Considere a seguinte sentença em R ;

i) $x^2 = 16$ ii) $x^3 = 27$.

Os valores em R que satisfazem (i) são: $a = -4$ e $b = 4$, então podemos escrever,

$$(\exists a, b \in R)(a^2 = 16 \wedge b^2 = 16 \wedge a \neq b)$$

Agora, o valor em R que satisfaz (ii) é $c = 3$, logo escrevemos

$$(\exists c \in R)(c^3 = 27).$$

Como o único valor que satisfaz o quantificador acima é $c = 3$, então dizemos que existe um único número real. Desta forma a expressão quantificada (ii) é expressa na forma

$$(\exists !\ x \in R)(x^3 = 27).$$

Existem muitas proposições que enunciam afirmações de existência e unicidade, assim por exemplo, no universo R, é verdadeiro afirmar que

$$m \neq 0 \Rightarrow (\forall n)(\exists !\ x)(mx = n).$$

Exemplo:

5) Verifique a veracidade das proposições

a) $(\exists !\ x \in N)(x^2 - 9 = 0)$ b) $(\exists !\ x \in Z)(-1 < x < 1)$ c) $(\exists !\ x \in R)(|x| = 0)$

3 – Negação de Proposições Quantificadas

Sejam as proposições;

i) Toda pessoa fala inglês;

ii) Alguém foi a lua.

A negação dessas proposições é dada por

i´) Nem toda pessoa fala inglês;

ii´) Ninguém foi a lua.

assim a negação de proposições quantificadas é expressa como:

$$\sim [(\forall x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow [(\exists x \in A)(\sim p(x))]$$

$$\sim [(\exists x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow [(\forall x \in A)(\sim p(x))]$$

que são denominadas como **segundas regras de De Morgan**.

Exemplos:

1) Dê a negação das seguintes proposições:

a) $(\forall n \in N)(n + 2 > 8)$

b) $(\forall x \in R)(3x - 5 = 0)$

c) $(\exists x \in R)(sen(x) = 0)$

Unidade 3 – Quantificadores, Predicados e validade

4 – Lista de Exercícios

1. Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $(\forall x \in R)(|x| = x)$ b) $(\exists x \in R)(x^2 = x)$ c) $(\exists x \in R)(|x| = 0)$

d) $(\exists x \in R)(x + 2 = x)$ e) $(\forall x \in R)(x + 1 > x)$ f) $(\forall x \in R)(x^2 = x)$

2. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$ b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$ c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$

d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$ e) $(\exists x \in A)(3^x > 72)$ f) $(\exists x \in A)(x^2 + 2x = 15)$

3. Dar a negação das proposições abaixo:

a) $(\forall x \in R)(|x| = x)$ b) $(\exists x \in R)(x^2 = x)$ c) $(\exists x \in R)(|x| = 0)$

d) $(\exists x \in R)(x + 2 = x)$ e) $(\forall x \in R)(x + 1 > x)$ f) $(\forall x \in R)(x^2 = x)$

4. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dar a negação das proposições abaixo

a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$ b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$ c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$

d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$ e) $(\exists x \in A)(3^x > 72)$ f) $(\exists x \in A)(x^2 + 2x = 15)$

5 – Contra - Exemplo

Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall x \in A)(p(x))$ é falsa basta mostrar que a sua negação, $(\exists x \in A)(\sim p(x))$, é verdadeira. Isto é, que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa. O elemento x_0 é chamado de **contra – exemplo** para a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$.

Exemplos:

1. Mostre que as proposições abaixo são falsas, exibindo um contra exemplo:

a) $(\forall n \in N)(2^n > n^2)$ b) $(\forall x \in R)(|x| \neq 0)$

c) $(\forall x \in R)(x^2 > x)$ d) $(\forall x \in R)((x+2)^2 = x^2 + 4)$

6 – Lista de Exercícios

1. Sendo $A = \{2, 3, 4, 5, ..., 9\}$, dar um contra exemplo para cada uma das seguintes proposições:

a) $(\forall x \in A)(x + 5 < 12)$ b) $(\forall x \in A)(x \text{ é } primo)$ c) $(\forall x \in A)(x^2 > 1)$

d) $(\forall x \in A)(x \text{ é } par)$ e) $(\forall x \in A)(0^x = 0)$

2. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dar a negação das proposições abaixo

a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$ b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$ c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$

d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$ e) $(\exists x \in A)(3^x > 72)$ f) $(\exists x \in A)(x^2 + 2x = 15)$

3. Sendo A um conjunto qualquer, dar a negação de cada uma das seguintes proposições:

a) $(\forall x \in A)(p(x)) \wedge (\exists x \in A)(q(x))$ b) $(\exists x \in A)(p(x)) \vee (\forall x \in A)(q(x))$

c) $(\exists x \in A)(\sim p(x)) \vee (\vee\, x \in A)(\sim q(x))$ d) $(\exists x \in A)(p(x)) \rightarrow (\forall x \in A)(\sim q(x))$

4. Dar a negação de cada uma das seguintes sentenças:

a) $(\forall x)(x + 2 \leq 7) \wedge (\exists x)(x^2 - 1 = 3)$ b) $(\exists x \in A)(x^2 = 9) \vee (\forall x)(2x - 5 \neq 7)$

7 – Quantificação de Sentenças Abertas com Mais de Uma Variável

Quantificação Parcial

Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ o universo das variáveis x, y e considere também a seguinte sentença,

$$(\exists x \in A)(2x + y < 7).$$

Essa sentença não pode ser considerada uma proposição, pois o seu valor lógico não depende da variável **x** (**variável aparente**), mais sim da variável **y** (**variável livre**). Desta forma chama-se essa sentença de **sentença aberta em y**; cujo conjunto verdade é $\{1, 2, 3, 4\}$, pois somente para $y = 5$ não existe $x \in A$ tal que $2x + y < 7$.

Analogamente, seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ o universo das variáveis x, y e considere também a seguinte sentença,

$$(\forall y \in A)(2x + y < 10).$$

Essa sentença também não pode ser considerada uma proposição, pois o seu valor lógico não depende da variável **y** (**variável aparente**), mais sim da variável **x** (**variável livre**). Assim, temos que essa sentença é na verdade uma **sentença aberta em x**; cujo conjunto verdade é $\{1, 2\}$, pois somente para $x = 1$ ou $x = 2$ se tem $2x + y < 10$ para todo $y \in A$.

Quantificação Múltipla

Toda sentença aberta precedida de quantificadores, um para cada variável, é uma proposição, pois assume um dos valores lógicos V ou F. São exemplos de proposições as seguintes expressões:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(p(x, y))$$

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(p(x, y))$$

$$(\exists x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in C)(p(x, y, z))$$

Exercícios:

1) Considere os conjuntos $H = \{Jorge, Claudio, Paulo\}$, $M = \{Suely, Carmen\}$ e seja $p(x, y)$ a sentença aberta em $H \times M:$ "**x** é irmão de **y**". Discuta o significado das proposições:

$$A: (\forall x \in H)(\exists y \in M)(p(x, y)) \qquad B: (\exists y \in M)(\forall x \in H)(p(x, y))$$

2) Interprete, e discuta a equivalência

$$(\forall x \in N)(\forall y \in N)((x + y)^2 > x^2 + y^2) \Leftrightarrow (\forall x, y \in N)((x + y)^2 > x^2 + y^2)$$

3) Verifique o valor lógico de

$$(x+y)^2 > x^2 + y^2, \forall x, y \in N$$

$$(x+y)^2 > x^2 + y^2, \forall x, y \in R$$

4) Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e a sentença aberta em $A \times B:$ " $2x + y = 8$ ". Verifique o valor lógico das proposições:

$$S: (\forall x \in A)(\exists y \in B)(2x + y = 8)$$

$$M: (\forall y \in B)(\exists x \in A)(2x + y = 8)$$

$$N: (\exists y \in B)(\forall x \in A)(2x + y = 8)$$

$$T: (\exists x \in A)(\forall y \in B)(2x + y = 8)$$

Operações Sobre Quantificadores

Quantificadores de mesma espécie podem ser comutados, ou seja,

$$(\forall x)(\forall y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(p(x,y))$$

$$(\exists x)(\exists y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(p(x,y)).$$

Quantificadores de espécies diferentes não podem em geral ser comutados;

Exemplo: Seja **x**, **y** variáveis no universo dos números naturais. A proposição

$$(\forall x)(\exists y)(y > x)$$

é verdadeira, mas a proposição

$$(\exists y)(\forall x)(y > x)$$

é falsa .

Exercício:

4) Sendo $A = \{1, 2, 3, ..., 9, 10\}$, determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

$M: (\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 14)$ $\qquad$ $N: (\exists y \in A)(\forall x \in A)(x + y < 14)$

Negação de Proposições com Quantificadores

A negação de proposições com mais de um quantificador se obtém mediante a aplicação sucessiva das regras de negação para proposições com um único quantificador, assim têm-se, por exemplo que;

1) $\sim(\forall x)(\forall y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x)[\sim(\forall y)(p(x,y))] \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\sim p(x,y))$

2) $\sim(\exists x)(\exists y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)[\sim(\exists y)(p(x,y))] \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\sim p(x,y))$

3) $\sim(\forall x)(\exists y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x)[\sim(\exists y)(p(x,y))] \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\sim p(x,y))$

4) $\sim(\exists x)(\forall y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)[\sim(\forall y)(p(x,y))] \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\sim p(x,y))$

5) $\sim(\exists x)(\exists y)(\forall z)(p(x,y,z)) \Leftrightarrow (\forall x)[\sim(\exists y)(\forall z)(p(x,y,z))] \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\sim p(x,y,z))$

etc. ...

8 - Lista de Exercícios

1) Sendo $\{1,2,3,4,5\}$ o universo das variáveis x e y, determinar o conjunto verdade de cada uma das seguintes sentenças abertas:

a) $(\exists y)(2x+y<7)$ b) $(\forall x)(2x+y<10)$

2) Sendo $\{1,2,3\}$ o universo das variáveis x e y, determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $(\exists x)(\forall y)(x^2<y+1)$ b) $(\forall x)(\exists y)(x^2+y^2<12)$

c) $(\forall x)(\forall y)(x^2+y^2<12)$ d) $(\forall x)(\forall y)(x^2+2y<10)$

e) $(\exists x)(\forall y)(x^2+2y<10)$ f) $(\forall x)(\exists y)(x^2+2y<10)$

g) $(\exists x)(\exists y)(x^2+2y<10)$

3) Sendo $\{1,2,3\}$ o universo das variáveis x, y e z, determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(x^2+y^2<2z^2)$ b) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(x^2+y^2<2z^2)$

4) Sendo ***R*** o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $(\forall y \in R)(\exists x \in R)(x + y = y)$ b) $(\forall x \in R)(\exists y \in R)(x + y = 0)$

c) $(\forall x \in R)(\exists y \in R)(x \,.\, y = 1)$ d) $(\forall y \in R)(\exists x \in R)(y < x)$

5) Dar a negação de cada uma das seguintes proposições:

a) $(\forall x)(\exists y)(p(x) \vee q(y))$ b) $(\exists x)(\forall y)(p(x) \vee \sim q(y))$

c) $(\exists y)(\exists x)(p(x) \wedge \sim q(y))$ d) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \rightarrow q(y))$

e) $(\exists x)(\forall y)(p(x, y) \rightarrow q(x, y))$

6) Indique o valor verdade de cada uma das proposições abaixo onde o domínio consiste nos estados do Brasil;

$Q(x, y)$*: x é ao norte de y*

$P(x)$*: x começa com a letra p* e

a é Paraná.

a) $(\forall x)(P(x))$ b) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x, y) \wedge Q(y, z) \rightarrow Q(x, z))$

c) $(\exists y)(\exists x)Q(y, x)$ d) $(\forall x)(\exists y)(P(y) \wedge Q(x, y))$

e) $(\exists y)(Q(a, y))$