PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Profº Agnaldo Cieslak

Probabilidades – condicional - propriedades

4- Regra da multiplicação para 2 eventos:

Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω.

Então $P(A \cap B) = \begin{cases} P(B)\,Pr(A|B) \\ P(A)\,Pr(B|A) \end{cases}$

Esse resultado nos permite calcular a probabilidade da interseção de dois eventos e é muito útil para modelar experimentos que têm caráter seqüencial, isto é, que são executados em etapas, uma seguida da outra.

Em tais situações, pode ser de ajuda desenhar um diagrama de árvore para ilustrar os eventos em questão.

Usaremos esta propriedade na próxima aula, quando trabalharmos com diagramas de árvore e teorema de Bayes.

Probabilidades – condicional

Exemplo: Foi lançado um dado Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, o evento A “face par” e o evento B “Face menor que 4”

- A = {
- B = {
- Sabendo que no 1º lançamento do dado saiu uma face menor que quatro. Qual a probabilidade de que no 2º lançamento saia uma face par, dado que **os eventos são dependentes**.

- {
- Opcional proposta por Emanuel:
- Um dado foi lançado duas vezes. (Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}). O evento A “face par” e o evento B “Face menor que 4”:
- A={2,4,6}
- B={1,2,3}
- Sabendo que no 1ª lançamento do dado saiu uma face menor que quatro e no segundo lançamento caiu qualquer uma das 6 faces. Qual a probabilidade de ambas as faces que saírem serem par?
- }

Probabilidades – condicional

Exemplo: Foi lançado um dado Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, o evento A “face par” e o evento B “Face menor que 4”

- A = {2, 4, 6}
- B = {1, 2, 3}
- Sabendo que no 1º lançamento do dado saiu uma face menor que quatro. Qual a probabilidade de que no 2º lançamento saia uma face par, dado que **os eventos são dependentes**.

$$\text{Logo, } P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{dado } P(B) > 0$$

$$P(B) = 3/6 = 1/2$$

$$P(A \cap B) = 1/6$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

- ✓ Assim, a probabilidade do evento A ficou alterada em função do conhecimento da ocorrência B.
- ✓ A e B são **eventos dependentes**.

Probabilidades

- Exercício em aula:

Em um estudo feito com 15 pessoas, foram coletadas informações sobre o estilo de vida de cada um (sedentário ou não) e sobre o peso de cada um (obeso ou não).

a,b)Foram observadas 5 pessoas obesas e 9 sedentárias;

Qual a probabilidade de:

a) Um indivíduo ser obeso **e** sedentário;

b) Um indivíduo ser obeso **ou** sedentário;

c) Um indivíduo ser obeso **dado que** ele é sedentário;

d) Um indivíduo ser sedentário **dado que** ele é obeso;

Probabilidades

- Exercício:

Em um estudo feito com 15 pessoas, foram coletadas informações sobre o estilo de vida de cada um (sedentário ou não) e sobre o peso de cada um (obeso ou não). Foi observado 5 pessoas obesas e 9 sedentárias; dentre as 5 pessoas obesas, 4 foram classificadas como sedentárias.

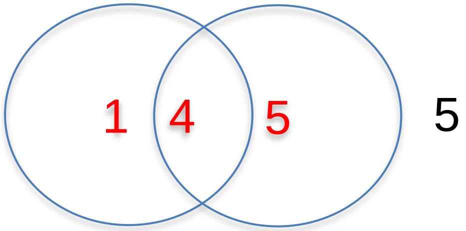
Qual a probabilidade de:

a) Um indivíduo ser obeso **e** sedentário;

b) Um indivíduo ser obeso **ou** sedentário;

c) Um indivíduo ser obeso **dado que** ele é sedentário;

d) Um indivíduo ser sedentário **dado que** ele é obeso;



a) P(O)=5/15; P(S)=9/15 P(O ∩ S) = 4/15

b) P(O U S) = P(O) + P(S) - P(O ∩ S) = 5/15 + 9/15 – 4/15= 10/15 = 2/3

c) P(O \ S) = P(O ∩ S) / P(S) = 4/15 ÷ 3/5= 4/15x5/3 = 20/45 = 4/9

d) P(S \ O) = P(S ∩ O) / P(O) = 4/15 ÷ 1/3 = 12/15

Probabilidades – condicional

Exercício: Um grupo de 100 alunos foi classificado quanto ao sexo e à atividade de lazer preferida, obtendo-se a distribuição dada na tabela abaixo.

Sexo	*Atividade de lazer*			
	Cinema	*Praia*	*Esporte*	*Total*
Masculino	10	12	13	20
Feminino	15	41	9	80
Total	25	53	22	100

1. Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso neste grupo ser do sexo masculino?

2. Se a pessoa escolhida prefere a praia como atividade de lazer, qual é a probabilidade de que seja um homem?

Probabilidades – condicional

Exercício: Um grupo de 100 alunos foi classificado quanto ao sexo e à atividade de lazer preferida, obtendo-se a distribuição dada na tabela abaixo.

Sexo	*Atividade de lazer*			
	Cinema	*Praia*	*Esporte*	*Total*
Masculino	10	12	13	20
Feminino	15	41	9	80
Total	25	53	22	100

1. Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso neste grupo ser do sexo masculino?

Definição de eventos: M = "masculino"; F = "feminino"; C = "cinema"; Pr = "praia"; E = "esporte".

O problema pede P (M). Como há 20 homens dentre as 100 pessoas, temos que :

P (M) = 20/100 = 2 /10=1/5

2. Se a pessoa escolhida prefere a praia como atividade de lazer, qual é a probabilidade de que seja um homem?

O problema pede P(M | Pr). Por definição:

P (M | Pr) = P (M ∩ Pr) / P(Pr) = (12 / 100) / (53 /100) = 12 / 53 .

A probabilidade do evento "aluno do sexo masculino" se modifica quando sabemos que a pessoa prefere a praia como atividade de lazer, isto é: P(M | Pr) ≠ P (M).

Probabilidades – eventos independentes

- Suponha que dois eventos A e B ocorram independentes um do outro no sentido que a ocorrência ou não de um deles tenha nenhuma relação, ou seja, a ocorrência ou não do evento B não altera a probabilidade de A, então A e B são **eventos independentes.** Assim,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

1- A probabilidade de 3 jogadores marcarem um pênalti é respectivamente: 2/3; 4/5; 7/10 cobrando uma única vez. Qual a probabilidade de:

- A)Todos acertarem.
- B) Apenas um acertar.
- C) Todos errarem.

Probabilidades – eventos independentes

- Suponha que dois eventos A e B ocorram independentes um do outro no sentido que a ocorrência ou não de um deles tenha nenhuma relação, ou seja, a ocorrência ou não do evento B não altera a probabilidade de A, então A e B são **eventos independentes.** Assim,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

1- A probabilidade de 3 jogadores marcarem um pênalti é respectivamente: 2/3; 4/5; 7/10 cobrando uma única vez. Qual a probabilidade de:

- A)Todos acertarem. P(A∩ B ∩ C)= P(A) x P(B) x P(C) = 2/3*4/5*7/10 = 56/150 = 37,3%
- B) Apenas um acertar.
- 2/3*1/5*3/10 + 1/3*4/5*3/10 + 1/3*1/5*7/10 = 25/150=1/6= 16,67%
- C) Todos errarem. a=1-A, b=1-B, c=1-C
- P(a∩b∩c)= P(a) x P(b) x P(c) = 1/3 * 1/5 * 3/10 = 3/150 = 1/50 = 0,02 ou 2%

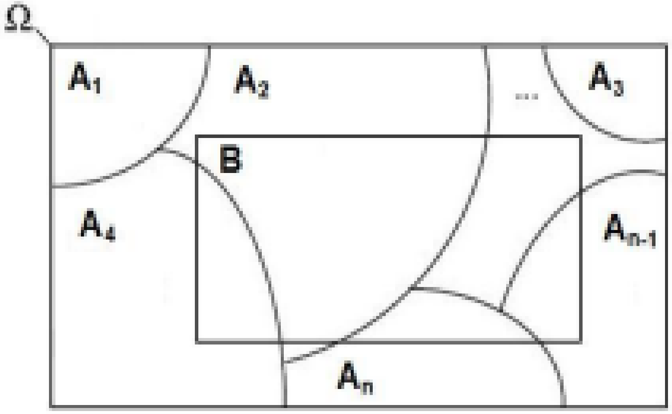
Probabilidades

- Teorema da Probabilidade Total

Definição:

Considere A_1, A_2, A_3 ... A_n uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer de Ω. A probabilidade do evento B ocorrer é dada por:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$



Tem-se: $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$

$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)]$

Aplicando o 3º axioma para eventos mutuamente excludentes:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

Aplicando a regra do produto:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \ldots + P(A_n).P(B/A_n)$$

Em aplicações prática, as probabilidades dos eventos da partição de Ω são conhecidas ou podem ser calculadas, por isso, $P(A_i)$ são chamadas de probabilidades *à priori* dos eventos A_i.

Probabilidades

- Teorema de Bayes

Definição:

Considere A_1, A_2, A_3 ... A_n uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer de Ω.

Do teorema da probabilidade total tem-se: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$

Onde $P(A_i)$ são as probabilidade *à priori* dos eventos A_i.

Vamos supor agora que o evento B tenha ocorrido e desejamos determinar a probabilidade *à posteriori* do evento A_i, ou seja, $P(A_i/B)$.

Por definição, tem-se: $P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

Aplicando a regra do produto e o teorema da probabilidade total:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

Probabilidades

- Teorema de Bayes
- Definição – teorema de Bayes

Apesar das probabilidades P(A|B) e P(B|A) serem parecidas, elas significam algo diferente cada uma.

Sendo P(A|B) a probabilidade de uma loja especializada em uma marca de pneus prestar um bom serviço dentro da garantia.

Então, P(B|A) é a probabilidade de uma loja de pneus que presta bons serviços dentro da garantia ser especializada em uma marca de pneus.

No primeiro momento quando lemos, muitas vezes não percebemos a diferença entre as duas afirmações, porém probabilisticamente são diferentes, pois:

- na primeira selecionamos lojas especializadas em uma marca de pneus e depois dentre estas as que prestam bom serviço dentro da garantia;
-
- na segunda afirmação, selecionamos as lojas que prestam um bom serviço e depois dentre essas, as que são especializadas em uma marca de pneu.

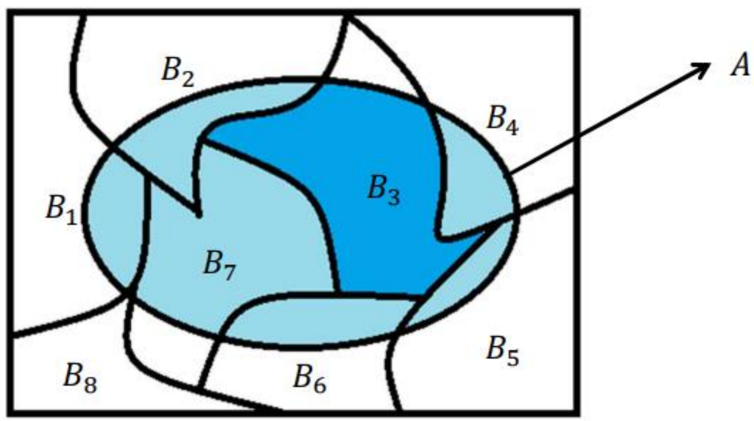
A inversão das afirmações faz a probabilidade estatística ser completamente diferente, pois isso devemos cuidar muito bem no momento em que fazemos à formulação estatística.

Probabilidades

- Teorema de Bayes
- Definição – teorema de Bayes

Definição teórica do teorema de Bayes - O teorema de Bayes é conhecido com ao probabilidade das causas e consiste na partição do espaço amostral em mais de 2 subconjuntos, cujas probabilidades sejam conhecidas.

Dado um evento A e uma partição do espaço amostra $(B_1, \dots, B_k)$ tem-se:



$$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}$$

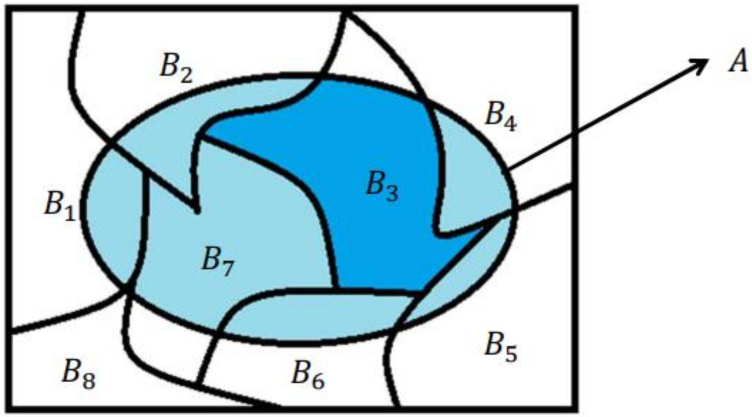
Probabilidades

https://www.youtube.com/watch?v=k6FAZJGTZJo

- Teorema de Bayes
- Definição – teorema de Bayes

Definição teórica do teorema de Bayes - O teorema de Bayes é conhecido com ao probabilidade das causas e consiste na partição do espaço amostral em mais de 2 subconjuntos, cujas probabilidades sejam conhecidas.

Dado um evento A e uma partição do espaço amostra $(B_1, \ldots, B_k)$ tem-se:



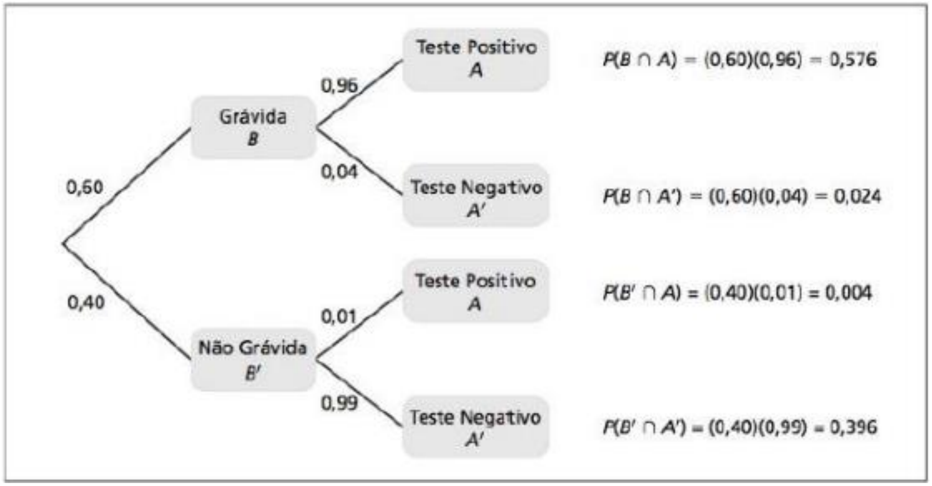
$$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}$$

Probabilidades

- Exemplo simples do teorema de Bayes
- Suponha que 60% das mulheres que compram kits de gravidez instantâneos estão, de fato, grávidas. Para um kit de uma marca específica, se a mulher estiver grávida, o teste fornecerá resultado positivo 96% das vezes e negativo 4% das vezes (um “falso negativo"). Se ela não estiver grávida, o teste resultará positivo em 1% das vezes (um “falso positivo”) e negativo 99% das vezes (figura 1). Suponha que um teste resulte positivo. Qual a probabilidade de que a mulher esteja realmente grávida? (ANDERSON, 2003)
- P(B|A) – probabilidade de grávida e o teste ter dado positivo
- P(A|B) – probabilidade de o teste ter dado positivo e estar grávida
- P(B) – probabilidade de estar grávida

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(B')P(A \mid B')}$$

$$P(A \mid I) = \frac{0,96 * 0,60}{0,96 * 0,60 + 0,01 * 0,40}$$



Probabilidades

Exercício em sala – Teorema da probabilidade total e Bayes:

Determinadas peças são produzidas em três fábricas F1 , F2 , e F3 , sendo que a fábrica 1 e 2 produzem a mesma proporção de peças e a fábrica 3 produz o dobro das peças que cada uma das outras duas fábricas produzem. Sabe-se também, que 2% das peças produzidas pela fábrica 1 são defeituosas e que a proporção para as fábricas 2 e 3 são 3% e 4%, respectivamente. Qual a probabilidade de que uma peça defeituosa tenha origem da fábrica 2?

Probabilidades – condicional

- **Tarefa sala – Probabilidades - 1**
- **1- Uma urna contém 5 bolas pretas, 3 vermelhas e 2 brancas. Três bolas são retiradas. Qual a probabilidade de retirar 2 pretas e 1 vermelha?**
- **a) Sem reposição**
- **b) Com reposição**

- **2- Numa classe há 10 homens e 20 mulheres, metade dos homens e metade das mulheres possui olhos castanhos. Ache a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser homem ou ter olhos castanhos.**

- **3- A probabilidade de que um homem esteja vivo daqui a 30 anos é 2/5; a de sua mulher é de 2/3. Determinar a probabilidade de que daqui a 30 anos:**
  a) ambos estejam vivos;
  b) somente o homem esteja vivo;
  c) somente a mulher esteja viva;
  d) nenhum esteja vivo;
  e) pelo menos um esteja

- **4- Faça o exercício anterior considerando 0,5 a chance de o homem estar vivo e 0,2 a chance da mulher estar viva e compare os resultados.**

- **5- De um total de 500 empregados, 200 possuem plano pessoal de aposentadoria complementar, 400 contam com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa e 200 empregados possuem ambos os planos. Sorteia-se aleatoriamente um empregado dessa empresa.**
- **5.1. Qual é a probabilidade de que ele tenha algum plano de aposentadoria complementar? R: 4/5**
- **5.2. Qual é a probabilidade de que ele não possua qualquer plano de aposentadoria complementar? R: 1/5**
- **5.3. Se o empregado conta com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa, qual é a probabilidade de que ele tenha plano pessoal de aposentadoria complementar? R: 1/2**
- **5.4. Se o empregado tem plano pessoal de aposentadoria complementar, qual é a probabilidade de que ele conte com o plano de aposentadoria complementar da empresa? R: 1**