

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

Código de TFG: FT32

Ondas gravitatorias y su detección

Gravitational waves and its detection

Supervisor/es: Antonio Dobado

**Daniel de Mercado Raposo**

Grado en Física

Curso académico 2020-21

Convocatoria de julio

**Resumen:**

Se realiza una revisión del formalismo que permite estudiar las ondas gravitatorias en el marco de la Relatividad General, exponiendo los resultados generales del límite de campo débil y otras situaciones menos restrictivas. Se plantean las fórmulas de radiación y su rango de validez, estudiando los procesos que generan estas ondas, así como las fuentes astrofísicas y cosmológicas detectadas o que se espera detectar y sus implicaciones para el desarrollo de la física. Posteriormente, se analizan los efectos que producen las ondas gravitatorias sobre masas prueba y sus aplicaciones para la construcción de detectores, concluyendo con un repaso general de los detectores existentes y los planificados para el futuro.

**Abstract:**

A review of the formalism that allows the study of gravitational waves within the framework of General Relativity is carried out, exposing the general results of the weak field limit and other less restrictive situations. Radiation formulas and their validity range are considered, studying the processes that generate these waves, as well as the astrophysical and cosmological sources detected or expected to be detected and their implications for the development of physics. Subsequently, the effects that gravitational waves produce on test masses and their applications for the construction of detectors are analyzed, concluding with a general review of existing detectors and those planned for the future.

# Índice

<b>1. Notación</b>	<b>3</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>3. Ondas gravitatorias en la Relatividad General</b>	<b>3</b>
3.1. Gravedad linealizada y ondas gravitacionales débiles en el vacío . . . . .	3
3.2. Aproximación de onda corta en el vacío . . . . .	5
3.3. Caso general . . . . .	6
<b>4. Fuentes de ondas gravitacionales</b>	<b>6</b>
4.1. Fórmulas de radiación generales para distintas fuentes . . . . .	6
4.1.1. Fuentes con gravedad débil, movimientos lentos y gravedad interna despreciable	7
4.1.2. Fuentes con gravedad débil, movimientos lentos pero gravedad interna no despreciable . . . . .	7
4.1.3. Fuentes con gravedad fuerte y movimientos lentos . . . . .	8
4.1.4. Fuentes con gravedad fuerte y movimientos rápidos . . . . .	9
4.2. Un ejemplo: Ondas gravitacionales generadas por sistemas estelares binarios . . . . .	9
4.3. Fuentes cosmológicas de ondas gravitacionales . . . . .	10
4.3.1. Coalescencia de sistemas binarios compactos (CBC) . . . . .	11
4.3.2. Pulsos no procedentes de coalescencias (Bursts) . . . . .	13
4.3.3. Señales continuas . . . . .	13
4.3.4. Señales estocásticas . . . . .	14
<b>5. Detección de ondas gravitacionales</b>	<b>14</b>
5.1. Efectos de las ondas gravitacionales sobre masas prueba . . . . .	14
5.2. Sistemas para la detección de ondas gravitatorias . . . . .	15
5.2.1. Métodos indirectos . . . . .	15
5.2.2. Métodos directos . . . . .	15
<b>6. Conclusiones</b>	<b>18</b>

## 1. Notación

Usaremos el convenio para la métrica  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Salvo que se indique lo contrario, utilizaremos un sistema de unidades con  $c = G_N = 1$ .

## 2. Introducción

La teoría clásica de la gravedad de Newton es una teoría incompleta. Según esta, las partículas masivas actúan como fuente del campo gravitatorio, que a su vez ejerce una fuerza sobre otras partículas masivas, proporcional al producto de sus masas, al inverso al cuadrado de la distancia que las separa y de manera instantánea. Para que esta ley fuera cierta, las perturbaciones del campo gravitatorio producidas por el movimiento de las fuentes deberían propagarse con velocidad infinita, violando el principio de causalidad. Este problema no fue resuelto hasta la publicación en 1915 de la teoría de la relatividad general, por Albert Einstein, que explica la gravedad como variaciones en la geometría del espaciotiempo producidas por los componentes energéticos del universo. Se puede demostrar [1] que recuperamos la teoría Newtoniana cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- El campo gravitatorio es débil: la métrica es una perturbación de la métrica de Minkowski.
- El campo gravitatorio es estacionario: la métrica no depende del tiempo.
- Las *masas de prueba* se mueven con velocidades no relativistas.

Si alguna de estas condiciones no se cumple, la Relatividad General predice desviaciones de la Gravedad Newtoniana. En concreto, al relajar la segunda condición (campo estacionario) obtenemos soluciones que describen perturbaciones del campo gravitatorio propagándose como ondas planas sobre el espaciotiempo de fondo, incluso en el límite de campo débil. Estas soluciones se denominan *ondas gravitacionales*, y el objetivo de este documento es estudiar los parámetros que las describen en el marco de la Relatividad General, los eventos cosmológicos que las producen y los distintos métodos experimentales para su detección.

## 3. Ondas gravitatorias en la Relatividad General

Las ecuaciones de campo de Einstein constituyen 10 ecuaciones diferenciales (ligadas por las 4 identidades de Bianchi contraídas) en derivadas parciales, de segundo orden y no lineales para la métrica  $g_{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Encontrar soluciones para estas ecuaciones no es una tarea sencilla y en la mayoría de situaciones es necesario recurrir a simulaciones numéricas. Sin embargo, en determinados casos límite y/o aprovechando simetrías presentes en la métrica, es posible encontrar soluciones analíticas para las mismas. En esta sección exploraremos algunas de estas soluciones para las ondas gravitacionales, resumiendo lo tratado en [2].

### 3.1. Gravedad linealizada y ondas gravitacionales débiles en el vacío

Supongamos que la métrica del espaciotiempo puede escribirse de la forma (límite de campo débil):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica del espaciotiempo de Minkowski. Desarrollando el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  a primer orden en  $h_{\mu\nu}$  y sus derivadas (lo que permite subir y bajar índices con  $\eta_{\mu\nu}$ ), y definiendo el tensor de traza inversa de un tensor simétrico  $h_{\mu\nu}$  como:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\alpha{}_\alpha \quad (3)$$

Las ecuaciones de campo toman la forma:

$$-\partial_\alpha\partial^\alpha\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta} + \partial_\nu\partial^\alpha\bar{h}_{\mu\alpha} + \partial_\mu\partial^\alpha\bar{h}_{\nu\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu}^{(0)} \quad (4)$$

Las componentes del tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}^{(0)}$  son pequeñas por consistencia (solo hay contribuciones de orden  $o(h)$  asociadas a las componentes materiales, las contribuciones debidas a la curvatura del espaciotiempo son despreciables). Busquemos ahora soluciones en el vacío ( $T_{\mu\nu}^{(0)} = 0$ ), la covariancia de las ecuaciones se puede interpretar en la teoría linealizada, para transformaciones de coordenadas infinitesimales, como una simetría gauge bajo transformaciones del tipo:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu \quad (5)$$

donde  $\xi_\mu$  son 4 funciones arbitrarias lo suficientemente pequeñas como para mantener  $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$ . Al igual que en la teoría electromagnética, la elección de un gauge adecuado simplifica las ecuaciones. En particular, tomando el gauge  $\partial_\alpha\bar{h}^{\alpha\mu} = 0$  las ecuaciones de campo se reducen a una Klein-Gordon sin masa:

$$\partial_\alpha\partial^\alpha\bar{h}_{\mu\nu} = \square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (6)$$

Esta elección para el gauge no es única, transformaciones gauge adicionales que satisfagan  $\square\xi_\mu = 0$  respetan la condición  $\partial_\alpha\bar{h}^{\alpha\mu} = 0$ . Esto nos permite elegir un gauge particular, conocido como *TT-gauge* (Transverse - Traceless), en el que las perturbaciones de la métrica satisfacen la ecuación de Klein-Gordon junto con las siguientes relaciones:

$$h_{0\mu}^{TT} = 0, \quad \partial_j h_{kj}^{TT} = 0, \quad h_{kk}^{TT} = 0 \quad (7)$$

En este gauge,  $h^\alpha{}_\alpha = 0$ , por lo que  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ . Las soluciones de onda plana para la ecuación de Klein-Gordon son de la forma:

$$h_{\mu\nu} = \text{Re} \left( A_{\mu\nu} e^{ikx} \right) \quad (8)$$

Donde  $A_{\mu\nu}$  es un tensor constante y simétrico, en general complejo, y  $\text{Re}()$  indica que tomamos la parte real. De la ecuación de Klein-Gordon y las condiciones del gauge TT se siguen las relaciones:

$$k_\mu k^\mu = -\omega^2 + \mathbf{k}^2 = 0, \quad A_{0\mu} = 0, \quad k^i A_{ij} = 0, \quad A_{ii} = 0 \quad (9)$$

Es decir, la solución (8) junto con (9) se corresponde con ondas planas propagándose en el vacío a la velocidad de la luz, descritas por un tensor espacial, perpendicular a la dirección de propagación, simétrico y de traza nula. Si tomamos una base ortonormal del plano perpendicular a la dirección de propagación, dada por los vectores  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , el tensor  $A^{ij}$  se puede reescribir como:

$$A^{ij} = A_+(e_1^i e_1^j - e_2^i e_2^j) + A_\times(e_1^i e_2^j + e_2^i e_1^j) = A_+ e_+^{ij} + A_\times e_\times^{ij} \quad (10)$$

Lo que muestra que las ondas gravitacionales producen deformaciones en el espacio perpendicular a la dirección de propagación (ondas transversales) y tienen dos polarizaciones independientes, la polarización  $\mathbf{e}_+$  y la polarización  $\mathbf{e}_\times$ . Generalmente escribiremos el tensor  $A^{ij}$  en la forma:

$$A^{ij} = A_0 e_P^{ij} = \frac{A_0}{\sqrt{|c_+|^2 + |c_\times|^2}} \left( c_+ e_+^{ij} + c_\times e_\times^{ij} \right) \quad (11)$$

con  $A_0$  real, y  $c_+$  y  $c_-$  números complejos. Estudiando las propiedades de  $A^{ij}$  bajo rotaciones en la dirección de propagación, se observa que las polarizaciones  $(\mathbf{e}_+ \pm i\mathbf{e}_\times)/\sqrt{2}$  son autoestados de la helicidad con autovalores  $\pm 2$  respectivamente, sugiriendo la identificación del hipotético gravitón como una partícula sin masa y espín 2.

La solución general de la ecuación de ondas es una superposición de estas ondas planas.

### 3.2. Aproximación de onda corta en el vacío

Para estudiar las ondas gravitacionales en espaciotiempos menos restrictivos que los de la gravedad linealizada, desarrollando ahora hasta segundo orden en  $h_{\mu\nu}$ , podemos usar el formalismo de la *aproximación de onda corta*. Supongamos que la métrica se puede descomponer en la suma de una métrica de fondo  $g_{\mu\nu}^{(B)}$  (no necesariamente plana) y una perturbación  $h_{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu} \quad (12)$$

donde la amplitud  $\mathcal{A}$  y longitud de onda reducida  $\lambda = \lambda/2\pi$  típicas de la perturbación, y el radio de curvatura  $\mathcal{R}$  típico del fondo satisfacen  $\mathcal{A} \ll 1$  y  $\lambda/\mathcal{R} \ll 1$ . La métrica total satisface las ecuaciones de campo en el vacío,  $R_{\mu\nu} = 0$ , que se convierten en otro conjunto de ecuaciones al descomponer el tensor de Ricci total en contribuciones asociadas a  $g_{\mu\nu}^{(B)}$  y  $h_{\mu\nu}$ . El desarrollo matemático completo de esta aproximación escapa a los objetivos de este trabajo, comentaremos únicamente los resultados más importantes.

En cuanto a la propagación de las ondas gravitatorias, recuperamos la estructura de la teoría linealizada con algunas modificaciones. El tensor de traza inversa se define como:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(B)}h^\alpha{}_\alpha \quad (13)$$

Los índices ahora se suben y bajan con la métrica de fondo  $g_{\mu\nu}^{(B)}$ . Mantenemos una simetría gauge asociada a transformaciones de coordenadas infinitesimales dada por  $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \nabla_\mu^{(B)}\xi_\nu + \nabla_\nu^{(B)}\xi_\mu$  ( $\nabla_\mu^{(B)}$  es la derivada covariante con respecto a la métrica de fondo). El gauge que simplifica las expresiones es  $\nabla_\alpha^{(B)}\bar{h}_\mu{}^\alpha = 0$ , obteniendo la siguiente ecuación para la propagación:

$$\nabla^{(B)\alpha} \nabla_\alpha^{(B)} \bar{h}_{\mu\nu} + 2R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(B)} \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (14)$$

Entre los efectos producidos por esta ecuación encontramos deflexiones en la dirección de propagación o corrimientos al rojo gravitatorios, análogos a los que sufre la luz, producidos por la curvatura del espaciotiempo de fondo. Sobre el gauge TT utilizado en la teoría linealizada, en esta aproximación solo podemos imponer la condición global de traza nula, pero no la de transversalidad.

El segundo resultado importante es la identificación del tensor de energía-momento asociado a las ondas gravitacionales. La métrica de fondo satisface las ecuaciones de campo:

$$R_{\mu\nu}^{(B)} - \frac{1}{2}R^{(B)}g_{\mu\nu}^{(B)} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(GW)} \quad (15)$$

$$T_{\mu\nu}^{(GW)} = \frac{1}{32\pi} \langle \nabla_\mu^{(B)} \bar{h}_{\alpha\beta} \nabla_\nu^{(B)} \bar{h}^{\alpha\beta} \rangle \quad \text{para} \quad \nabla_\alpha^{(B)} \bar{h}_\mu{}^\alpha = \bar{h}^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (16)$$

El operador  $\langle \rangle$  promedia el tensor de energía momento en una caja del tamaño de varias longitudes de onda. Las ondas gravitacionales por tanto llevan energía y momento, que a su vez modifica la

geometría del espaciotiempo de fondo, análogamente a los efectos que causarían otras ondas (como las electromagnéticas) lo suficientemente intensas.

Notemos que  $T_{\mu\nu}^{(GW)}$  depende cuadráticamente de derivadas de las perturbaciones  $h_{\mu\nu}$ . En el caso límite en el que los términos cuadráticos en  $h_{\mu\nu}$  y sus derivadas sean despreciables, una solución válida para la ecuación (15) es la métrica de Minkowski, recuperando así la teoría linealizada (como debe ser), y con el siguiente tensor de energía-momento asociado a las ondas gravitacionales en el *TT-gauge*:

$$T_{\mu\nu}^{(GW)} = \frac{1}{32\pi} \langle \partial_\mu h_{ij}^{TT} \partial_\nu h_{ij}^{TT} \rangle \quad (17)$$

Que produce efectos despreciables sobre la métrica Minkowskiana de fondo.

### 3.3. Caso general

Mediante desarrollos a ordenes superiores análogos a los de los apartados anteriores, buscando soluciones exactas o resolviendo numéricamente las ecuaciones de campo, es posible observar en las ondas gravitatorias efectos adicionales a los ya comentados, como refracciones o difracciones producidas por regiones con curvatura (ya sea esta la de fondo o la producida por otras ondas), auto-atracciones gravitatorias que pueden llevar a un pulso lo suficientemente intenso a colapsar en un agujero negro... No entraremos a analizar estos efectos, simplemente comentamos su existencia.

## 4. Fuentes de ondas gravitacionales

Demostrada la existencia de soluciones de tipo onda para las ecuaciones de campo, en esta sección trataremos el formalismo que permite estudiar los procesos las generan, así como las distintas fuentes cosmológicas que producen o podrían producir ondas gravitatorias detectables desde la tierra.

### 4.1. Fórmulas de radiación generales para distintas fuentes

Para obtener las formulas de radiación gravitatoria producida por distintos tipos de fuentes (cada una con diferentes aproximaciones asociadas), partiremos de las ideas desarrolladas en [3], secciones §36.9. y §36.10..

En primer lugar, asumimos que la fuente está aislada y el espaciotiempo se vuelve asintóticamente plano cuando nos alejamos de ella. Elegimos un sistema de coordenadas en el que la métrica tiende a la de Minkowski lo más rápido posible cuando nos alejamos de la fuente. Podemos definir en cualquier punto del espacio el símbolo:

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (18)$$

Que no es un tensor, pero abusando de la notación tensorial subiremos y bajaremos sus índices con  $\eta_{\mu\nu}$ , pudiendo definir así las cantidades:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h; \quad h \equiv h^\alpha_\alpha = h_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \quad (19)$$

Además, podemos escoger el sistema de coordenadas tal que la condición  $\partial_\alpha \bar{h}^\alpha_\mu = 0$  se cumpla en todos los puntos del espacio. Con todo esto, es trivial ver que los símbolos  $h_{\mu\nu}$  son las perturbaciones de la teoría linealizada (tensores bajo transformaciones de Lorentz) cuando estamos lo suficientemente alejados de la fuente. En la zona interna no tienen una interpretación clara. Con todo esto, las ecuaciones de campo exactas toman la forma:

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) \quad (20)$$

Donde  $T^{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento asociado a las “componentes materiales” y  $t^{\mu\nu}$  un pseudotensor de energía momento asociado al campo gravitatorio, cuadrático o superior en  $\bar{h}_{\mu\nu}$  y que contiene términos como la expresión (16). Esta ecuación se puede reescribir de forma integral usando las funciones de Green del operador D’Alembertiano. Imponiendo condiciones de contorno adecuadas (ondas salientes en el infinito), recuperamos la estructura de propagación retardada del electromagnetismo:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4 \int \frac{[T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}]_{\text{ret}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (21)$$

Las cantidades dentro de  $[\ ]_{\text{ret}}$  se evalúan en el punto  $(t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')$ . Notemos que  $\bar{h}^{\mu\nu}$  aparece también dentro de la integral a través de  $t^{\mu\nu}$ , por lo que encontrar soluciones generalmente no será tarea sencilla. Particularicemos ahora estas expresiones para distintos tipos de fuentes, categorizándolas según las aproximaciones válidas para cada una de ellas.

#### 4.1.1. Fuentes con gravedad débil, movimientos lentos y gravedad interna despreciable

Este es el único tipo de fuentes que podríamos crear a día de hoy en el laboratorio. La condición de gravedad débil implica que no hay ninguna región en la fuente donde la gravedad no pueda ser descrita por la teoría Newtoniana. Si  $R$  es el tamaño de la fuente y  $M$  su masa, esta condición toma la forma matemática:

$$\frac{M}{R} \ll 1 \quad (22)$$

Es decir, el radio de Schwarzschild es mucho más pequeño que el tamaño de la fuente. Por otro lado, movimientos lentos significa que la fuente se mueve a velocidades no relativistas,  $v \ll c$ , que se puede expresar equivalentemente como  $R \ll \lambda$  ( $\lambda$  es la longitud de onda reducida de las ondas emitidas). La última condición, gravedad interna despreciable, implica que el movimiento de la fuente está dominado por fuerzas que no son gravitatorias.

Eligiendo un sistema de coordenadas en el que la fuente se encuentra en el origen, la condición de movimientos lentos implica que las únicas contribuciones importantes a la integral (21) vienen de la región cercana a la fuente (i.e.:  $|\mathbf{x}'| \leq L \sim R \ll \lambda$ ). Como nos interesa el campo en la zona de radiación ( $r \gg \lambda$  con  $r \equiv |\mathbf{x}|$ ), podemos expandir  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  en torno a  $\mathbf{x}' = 0$ , quedándonos únicamente con el término de orden cero (i.e.:  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow r$  en (21)). Las condiciones de gravedad débil y gravedad interna despreciable equivalen a  $t^{\mu\nu} = 0$  en cualquier punto del espacio. Con todo esto, llegamos a la expresión:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4}{r} \int T^{\mu\nu}(t - r, \mathbf{x}') d^3x' \quad (23)$$

Que es consistente con las ecuaciones de campo de la teoría linealizada. En la práctica esta relación apenas se usa, ya que las expresiones de la siguiente sección (para fuentes con gravedad interna no despreciable) son también válidas para estas fuentes con gravedad interna despreciable y relativamente más sencillas de computar.

#### 4.1.2. Fuentes con gravedad débil, movimientos lentos pero gravedad interna no despreciable

Las dos primeras condiciones son iguales a las del apartado anterior, pero ahora la contribución de la gravedad al movimiento de la fuente no es despreciable, llegando incluso a ser esta la fuerza dominante (siendo todavía el sistema describible mediante la teoría Newtoniana). Un ejemplo de este tipo de fuentes son los sistemas binarios estelares.

Que la gravedad interna no sea despreciable implica que ya no podemos ignorar el término  $t^{\mu\nu}$  en (21). Usando la ecuación de conservación del tensor de energía-momento, que con esta elección



de coordenadas toma la forma  $\partial_\nu(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0$ , y una serie de relaciones derivadas de la condición de gravedad débil, es posible demostrar ([3] sección §36.10.) que las perturbaciones de la métrica  $h^{\mu\nu}$  en gauge TT toman la siguiente forma en la región de radiación:

$$h_{jk}^{TT} = \frac{2}{r} \frac{d^2 \mathcal{I}_{jk}^{TT}(t-r)}{dt^2} \quad (24)$$

(solo nos interesan las componentes espaciales de  $h^{\mu\nu}$  ya que son las únicas no nulas en el gauge TT). El término  $\mathcal{I}_{jk}$  se denomina *momento cuadrupolar reducido de la fuente*:

$$\mathcal{I}_{jk}(t) = \int T^{00}(t, \mathbf{x}) (x^j x^k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) d^3x \quad (25)$$

El superíndice  $TT$  en (24) indica que la cantidad que entra en la ecuación es la componente sin traza y transversal del momento cuadrupolar reducido con respecto a la dirección de propagación (en este caso la dirección radial). Matemáticamente:

$$\mathcal{I}_{jk}^{TT} = P_{jl} \mathcal{I}_{lm} P_{mk} - \frac{1}{2} P_{jk} (P_{ml} \mathcal{I}_{ml}) \quad \text{con} \quad P_{lm} = \delta_{lm} - n_l n_m; \quad n_l = x^l / r \quad (26)$$

El primer resultado importante que contiene estas relaciones es que, a diferencia de la teoría electromagnética, el primer término que contribuye a la radiación al expandir multipolarmente la fuente no es el dipolo, sino el cuadrupolo. Sustituyendo (24) en (17) podemos obtener la luminosidad de la fuente como la energía que atraviesa una esfera de radio  $r$ :

$$L_{GW}(t, r) = \int T^{(GW)0r} r^2 d\Omega = \frac{1}{5} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{jk}(t-r) \ddot{\mathcal{I}}_{jk}(t-r) \rangle \quad (27)$$

Los puntos denotan derivada con respecto al tiempo y  $\langle \rangle$  un promedio a varios periodos característicos de la fuente. Si un sistema binario pierde energía debido a las ondas gravitatorias, también debe entonces perder momento angular a través de estas. El momento angular por unidad de tiempo que se llevan las ondas gravitacionales es:

$$\frac{dJ^j}{dt} = \frac{2}{5} \epsilon^{jkl} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{ka} \ddot{\mathcal{I}}_{al} \rangle \quad (28)$$

Estos efectos de pérdida de energía y momento angular de las fuentes se pueden describir modificando el potencial Newtoniano clásico con un término de “reacción a la radiación”:

$$\Phi = \Phi_{\text{clásico}} + \Phi_{\text{reacción}} \quad \text{con} \quad \Phi_{\text{reacción}} = \frac{1}{5} \frac{d^5 \mathcal{I}_{jk}}{dt^5} x^j x^k \quad (29)$$

#### 4.1.3. Fuentes con gravedad fuerte y movimientos lentos

Este es el caso de los sistemas binarios de agujeros negros en las etapas iniciales de la fusión. El tamaño del sistema comienza a aproximarse al radio de Schwarzschild. La expresión (24) de la sección anterior continua siendo válida, pero ahora el momento cuadrupolar reducido de la fuente toma la forma:

$$\mathcal{I}_{jk}(t) = \int (T^{00}(t) + t^{00}(t)) (x^j x^k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) d^3x \quad (30)$$

Es decir, las contribuciones de la curvatura del espaciotiempo al momento cuadrupolar reducido ya no son despreciables, lo que complica los cálculos. En general, para este tipo de fuentes suele ser necesario recurrir a expansiones post-Newtonianas, un formalismo donde los términos de orden más bajo corresponden con la teoría Newtoniana y los efectos de la relatividad general entran como perturbaciones en órdenes superiores.

#### 4.1.4. Fuentes con gravedad fuerte y movimientos rápidos

El tamaño de las fuentes ahora es del orden del radio de Schwarzschild y sus velocidades son relativistas. Es el tipo de emisión producida por sistemas binarios de agujeros negros en las etapas intermedias/finales de la fusión. No existe un método analítico para estudiar estas fuentes, es necesario recurrir a métodos numéricos para resolver las ecuaciones de campo (de hecho, existe una rama de la relatividad general llamada *relatividad numérica* o *numerical relativity*, dedicada exclusivamente a estos problemas).

El programa más rápido y preciso que existe a día de hoy para realizar estas simulaciones, desarrollado durante varias décadas por una extensa colaboración científica [4], se denomina *SpEC* (*Spectral Einstein Code*) [5] y es usado por LIGO para generar una biblioteca de señales artificiales con las que comparar las señales detectadas por el interferómetro.

#### 4.2. Un ejemplo: Ondas gravitacionales generadas por sistemas estelares binarios

Apliquemos las expresiones de la sección 4.1.2 a un caso particular de interés. Supongamos un sistema formado por dos estrellas, de masas  $m_1$  y  $m_2$ , que por simplicidad siguen órbitas circulares en el plano  $xy$  de radios  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente, en torno al centro de masas ubicado en el origen. La separación entre las estrellas es  $L = r_1 + r_2$  y la masa reducida del sistema  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . Sea  $\omega$  la velocidad angular con la que orbitan las estrellas. La tercera ley de Kepler toma la forma  $L^3 \omega^2 = m_1 + m_2 = M$ . Para calcular el momento cuadrupolar reducido necesitamos la densidad de materia del sistema que, aproximando las estrellas como objetos puntuales, es de la forma:

$$T^{00}(t, \mathbf{x}) = m_1 \delta(x - r_1 \cos \omega t) \delta(y - r_1 \sin \omega t) \delta(z) + m_2 \delta(x + r_2 \cos \omega t) \delta(y + r_2 \sin \omega t) \delta(z) \quad (31)$$

Sustituyendo esta densidad en la expresión (25) obtenemos el momento cuadrupolar reducido del sistema binario:

$$I_{jk}(t) = \mu L^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t - \frac{1}{3} & \cos \omega t \sin \omega t & 0 \\ \cos \omega t \sin \omega t & \sin^2 \omega t - \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Pero lo que necesitamos es  $I_{jk}^{TT}(t)$ , tenemos que proyectar (32) según la expresión (26). Para aprovechar la simetría esférica en la dirección de propagación de las ondas, conviene hacer esta proyección en coordenadas esféricas, con la base ortonormal usual asociada a cada punto del espacio ( $\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ ,  $\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$ ,  $\mathbf{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ ). En estas coordenadas la proyección se convierte en una manipulación algebraica trivial. Obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{\theta\theta}^{TT}(t) &= -I_{\phi\phi}^{TT}(t) = \frac{\mu L^2}{4} [(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\omega t - 2\phi) - \sin^2(\theta)] \\ I_{\theta\phi}^{TT}(t) &= I_{\phi\theta}^{TT}(t) = \frac{\mu L^2}{2} \cos \theta \sin(2\omega t - 2\phi) \end{aligned} \quad (33)$$

Y el resto de componentes dan 0. Con esto, las perturbaciones de la métrica en gauge TT son:

$$\begin{aligned} h_+(t, \mathbf{x}) &\equiv h_{\theta\theta}^{TT}(t, \mathbf{x}) = -h_{\phi\phi}^{TT}(t, \mathbf{x}) = -\frac{2\mu M}{rL} (1 + \cos^2 \theta) \cos(2\omega(t - r) - 2\phi) \\ h_\times(t, \mathbf{x}) &\equiv h_{\theta\phi}^{TT}(t, \mathbf{x}) = h_{\phi\theta}^{TT}(t, \mathbf{x}) = -\frac{4\mu M}{rL} \cos \theta \sin(2\omega(t - r) - 2\phi) \end{aligned} \quad (34)$$

De nuevo, el resto de componentes son nulas. Para definir las polarizaciones  $+$  y  $\times$  hemos asociado a  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\phi$  el papel de  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  de la sección 3.1 respectivamente. El resultado (34) muestra que los sistemas binarios estelares emiten ondas gravitacionales con las dos polarizaciones  $h_+$  y  $h_\times$ , dependiendo la intensidad de estas del ángulo de observación con respecto al plano orbital. En

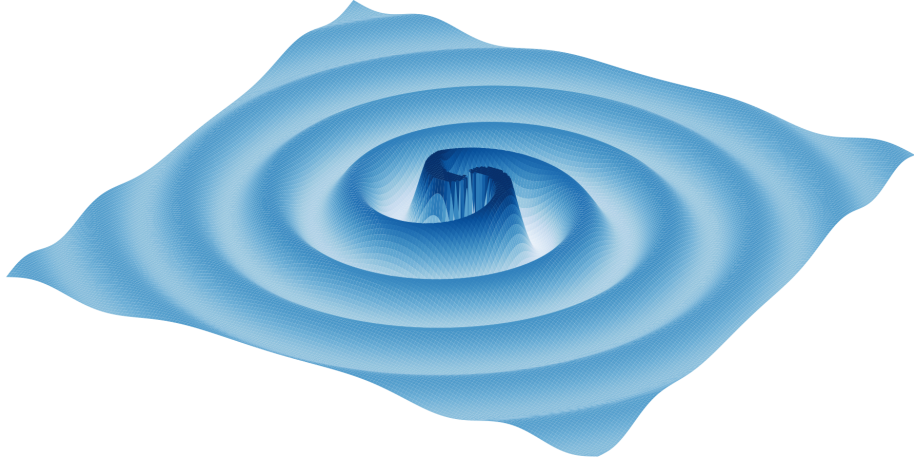


Figura 1: Ondas gravitacionales de un sistema binario estelar (polarización  $h_+$  emitida en el plano orbital). Se observa una estructura espiral, confirmando que estas ondas roban momento angular a la fuente.

concreto, la emisión es más intensa en la dirección de los polos ( $\theta = 0$  y  $\pi$ ) y más débil en la del plano orbital ( $\theta = \pi/2$ ), donde la polarización  $h_\times$  se anula. Además, la frecuencia de las ondas gravitacionales emitidas es el doble de la frecuencia orbital de las estrellas. La emisión será mayor cuanto más masivas sean las estrellas y más cerca orbiten. Usando la expresión (27) podemos calcular la luminosidad del sistema:

$$T^{(GW)0r} = \frac{M^3 \mu^2}{2\pi r^2 L^5} [1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta] \quad L_{GW}(t, r) = \frac{32}{5} \frac{M^3 \mu^2}{L^5} \quad (35)$$

Podemos usar esta luminosidad para estimar el ritmo con el que se acercan las estrellas debido a la pérdida de energía en forma de ondas gravitacionales.

$$\frac{dE}{dt} = -L_{GW} \quad \rightarrow \quad \dot{L} = -\frac{64}{5} \frac{M^2 \mu}{L^3} \quad (36)$$

$$L(t) = L_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_0}\right)^{1/4} \quad \text{con} \quad \tau_0 = \frac{5}{256} \frac{L_0^4}{\mu M^2} \quad (37)$$

$L_0$  es la separación inicial entre las estrellas y  $\tau_0$  se denomina *tiempo espiral*, es el tiempo que tardan las órbitas de las dos estrellas en decaer hasta la coalescencia. La tabla 1 resume las propiedades generales de algunos sistemas binarios.

### 4.3. Fuentes cosmológicas de ondas gravitacionales

En la búsqueda de fuentes detectables de ondas gravitatorias, debemos renunciar desde el comienzo a la posibilidad de crear estas fuentes en el laboratorio. El ejemplo que se suele dar ([3], sección §36.3) es el de una barra de acero, rotando alrededor de un eje que la atraviesa por la mitad, con la frecuencia máxima permitida por sus tensiones internas. Para una barra de 1 metro de radio, 20 metros de longitud, una masa de 490 toneladas y velocidad angular de 28 radianes por segundo, la luminosidad en forma de ondas gravitacionales es  $2,2 \times 10^{-29}$  julios por segundo, es decir, la barra debería girar durante 12 horas para emitir la misma energía que una única transición

Tipo de sistema	Nombre	Periodo	$m_1/M_\odot$	$m_2/M_\odot$	$\tau_0$	$L_{\text{(GW)}}$
Binaria visual	Sirio	49,94 yr	2,28	0,98	$7,2 \times 10^{21}$ yr	$1,1 \times 10^8$ W
Binaria eclipsante	UWCMa	4,395 day	40,0	31,0	$8,2 \times 10^9$ yr	$49 \times 10^{23}$ W
Caso favorable	WZ Sge	81 min	0,6	0,03	$1,1 \times 10^9$ yr	$0,5 \times 10^{23}$ W
Binaria neutrones	$L = 10^4$ km	12,2 sec	1,0	1,0	3,2 yr	$3,25 \times 10^{34}$ W

Tabla 1: ([3] Box 36.3) Parámetros de algunos sistemas binarios de interés. Para las binarias visuales típicas el tiempo espiral es muchos ordenes de magnitud superior a la edad del universo. Solo para algunas binarias eclipsantes y otros casos favorables el tiempo espiral es inferior a la edad del universo.

de la línea de 21 centímetros en un átomo de hidrógeno ( $9,411708 \times 10^{-25}$  J). Con la tecnología actual es imposible medir estas ondas incluso de forma indirecta (mediante los efectos que producen sobre la dinámica de la fuente).

Para tener posibilidades de detectar ondas gravitatorias debemos centrarnos en las fuentes más intensas que existen en el universo. Abusando de la expresión (35), extendiéndola al límite en el que deja de ser válida, observamos que la luminosidad de las fuentes aumenta cuanto mayor es su masa y menor es su tamaño, pero esta tendencia debe terminar en algún momento, si el tamaño de la fuente es inferior a su radio de Schwarzschild, entonces ningún tipo de radiación podrá escapar del horizonte de sucesos, ya que la fuente habrá colapsado en un agujero negro. El mismo argumento se puede usar ([3], sección §36.4) para estimar el orden de magnitud de la máxima luminosidad que podría tener cualquier tipo de fuente, independientemente de su naturaleza. Esta luminosidad límite, emitida en procesos como la coalescencia de dos agujeros negros, resulta ser del orden (ligeramente sobrestimado) de  $10^{52}$  J/s, equivalente a  $10^{26}$  soles.

Veamos algunas de las fuentes más interesantes que podemos (o podríamos) encontrar en el cosmos y las señales que producen. Parte de lo que trataremos puede consultarse con más detalles en [6].

#### 4.3.1. Coalescencia de sistemas binarios compactos (CBC)

Entre estas fuentes encontramos las fusiones de estrellas de neutrones (NS-NS), las de estrellas de neutrones y agujeros negros (NS-BH) y las fusiones de agujeros negros (BH-BH). Estas son a día de hoy las únicas fuentes detectadas de forma directa en la tierra, primero mediante el observatorio LIGO y en colaboración con el observatorio Virgo después [7] [8] [9]. La forma de estas señales es relativamente bien conocida, gracias a las aproximaciones post-Newtonianas y las simulaciones numéricas comentadas en secciones anteriores. Se caracterizan por tener forma de pulso, con un progresivo aumento de frecuencia durante las primeras etapas, hasta alcanzar una frecuencia máxima cuando se produce la coalescencia. Posteriormente la señal se desvanece rápidamente, amortiguando las vibraciones (ringdown) que quedan en el remanente de la fusión.

La detección de estas señales puede suponer grandes avances para la astrofísica y la cosmología. Las ondas gravitatorias extienden los medios disponibles para observar eventos en el universo más allá del espectro electromagnético, los neutrinos y los rayos cósmicos. El primer ejemplo de astronomía multimensajero con ondas gravitacionales lo encontramos en la detección de la primera fusión de estrellas de neutrones [8], primero mediante ondas gravitacionales por LIGO-Virgo (GW170817) y 1,7 segundos después mediante un brote de rayos  $\gamma$  por el telescopio espacial Fermi (GRB 170817A). La futura detección de eventos como este, con detectores más sensibles en bandas de frecuencias más altas, podría permitir poner a prueba la ecuación de estado de las estrellas de neutrones [10]. Para ello, se analizarían las desviaciones de la señal detectada con respecto a la

esperada para dos masas puntuales, causadas por deformaciones de las estrellas debidas a fuerzas de marea.

Las CBC producidas en sistemas lejanos, en concreto las *sirenas estándar*, también pueden aportar luz al problema de la tensión en la constante de Hubble  $H_0$ , que indica el ritmo actual al que se expande el universo: el valor medido por el satélite Planck a partir del fondo cósmico de microondas y el modelo  $\Lambda$ CDM ( $H_0 = 67,36 \pm 0,54 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ) [11] es incompatible con el valor medido por la colaboración SH0ES a partir de estrellas cefeidas ( $H_0 = 74,03 \pm 1,42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ) [12], con una discrepancia de  $4,4\sigma$ . Para evitar posibles errores sistemáticos en la calibración de la escalera de distancias cósmicas, que podrían ser los responsables de esta discrepancia, necesitamos un método para medir distancias independiente a esta calibración. Las fusiones NS-NS nos brindan una oportunidad [13]: las ondas gravitatorias contienen suficiente información para estimar la distancia por luminosidad al evento, mientras que el corrimiento al rojo se puede determinar a partir de las emisiones electromagnéticas que las acompañan. Este método ha sido aplicado al evento [8], obteniendo  $H_0 = 70_{-8}^{+12} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , que es compatible con los datos de Planck y SH0ES. Habrá que esperar a la detección de nuevos eventos que reduzcan las incertidumbres.

En cuanto a las coalescencias de agujeros negros detectadas [14], la mayoría de señales corresponden a fusiones de dos cuerpos con masas comprendidas entre 20 y 40 masas solares, dando lugar a un agujero negro remanente de unas 60 masas solares. También se han detectado, en menor medida, fusiones de agujeros negros más ligeros de procedencia estelar (masas de entre 5 y  $20 M_\odot$ ). Que el número de detecciones “más masivas” sea mayor es algo esperable: cuanto mayor es la masa de los cuerpos implicados, mayor es la luminosidad del evento, por lo que el volumen efectivo de búsqueda es mayor para la misma sensibilidad en el detector.

Existen algunos problemas para explicar la existencia de agujeros negros con masas mayores que  $20 M_\odot$ . Si estos nacieron con colapso gravitatorio de estrellas, estas deberían tener algunas propiedades especiales como una muy baja metalicidad. Un caso especial lo encontramos en la señal GW190521 [9], correspondiente a la fusión de dos agujeros negros de masas  $85_{-14}^{+21} M_\odot$  y  $66_{-18}^{+17} M_\odot$ , con un remanente de  $142_{-16}^{+28} M_\odot$  (considerado el primer agujero negro de masa intermedia detectado). La particularidad de este evento reside [15] en la probabilidad del 99,0% de que uno de los agujeros iniciales esté en el rango de masas de  $65 - 120 M_\odot$ , rango en el que la inestabilidad de pares predice que no se pueden formar agujeros negros mediante colapsos estelares, ya que las estrellas que los formarían explotan en forma de supernova sin dejar remanente. Algunas soluciones han sido propuestas, entre ellas un modelo jerárquico en el que las masas de los agujeros negros van aumentando mediante fusiones sucesivas, que sean agujeros negros primordiales o la posibilidad de haber malinterpretado la señal como una CBC cuando no lo es. Nuevas señales de este tipo podrían orientarnos hacia la solución correcta.

Dos semanas antes de la entrega de este trabajo, la colaboración LIGO-Virgo-KAGRA anunció la detección de dos eventos (GW200105, GW200115) compatibles con la fusión de un agujero negro y una estrella de neutrones [16]. Las masas de los componentes de estos eventos ( $8,9_{-1,5}^{+1,2}$  y  $1,9_{-0,2}^{+0,3} M_\odot$ ;  $5,7_{-2,1}^{+1,8}$  y  $1,5_{-0,3}^{+0,7} M_\odot$  respectivamente) están dentro del rango esperado para agujeros negros de procedencia estelar y estrellas de neutrones, pero la ausencia en las señales de efectos de marea sobre la estrella de neutrones, y la ausencia de contrapartes electromagnéticas, impiden confirmar con total seguridad que el componente más ligero sea una estrella de neutrones. Aunque estas características son esperables debido a la mayor masa del agujero negro, no es posible descartar que los componentes ligeros sean otros objetos exóticos compactos, como agujeros negros primordiales. La ausencia de contrapartes electromagnéticas también impide usar estos dos eventos para estimar

la constante de Hubble.

#### 4.3.2. Pulsos no procedentes de coalescencias (Bursts)

Estas señales tendrían la estructura de un pulso, al igual que las CBC, pero a diferencia de estas la forma detallada de las ondas no es conocida ya que la dinámica de los eventos que las producen es mucho más complicada de entender y simular.

El primer ejemplo de este tipo de fuentes lo encontramos en las explosiones de supernovas dentro (o en las proximidades) de nuestra galaxia. Recordemos que los términos monopoles (como contracciones o expansiones con simetría esférica) no contribuyen a la radiación gravitatoria. Para que una supernova emita ondas gravitacionales es necesario que el colapso de la estrella presente algún tipo de asimetría. Se cree que el núcleo de la estrella sería el responsable de esta emisión. El mecanismo más sencillo es el siguiente [17]: a medida que el núcleo colapsa su momento de inercia disminuye y por conservación del momento angular aumenta su velocidad de rotación, llegando al punto en el que la fuerza centrífuga impide que el núcleo colapse en un único objeto y este acaba rompiéndose en varios fragmentos. El movimiento de estos fragmentos ya no presenta simetría esférica o axial, por lo que serían capaces de emitir ondas gravitatorias.

Otros mecanismos han sido propuestos, como oscilaciones del núcleo colapsado [18] que no requieren que este rote a grandes velocidades, pero todavía existen muchas incógnitas sobre los procesos que ocurren realmente, no es sencillo tratar un sistema en el que intervienen la física nuclear, la magnetohidrodinámica y la relatividad general. Al igual que las coalescencias de estrellas de neutrones, las ondas de estos eventos deben ir acompañadas de radiación electromagnética, cuyo análisis combinado puede ayudar a entenderlos mejor. Desde la puesta en funcionamiento de LIGO no se ha detectado dentro de la Vía Láctea ninguna supernova en el espectro electromagnético, por lo que no es extraño que tampoco la hallamos visto en forma de ondas gravitacionales.

Se especula con otras fuentes más exóticas que también podrían producir estas señales. Entre ellas tenemos las reconfiguraciones del campo magnético interno en los magnetars (estrellas de neutrones con un campo magnético extremadamente intenso)[19], que vendrían acompañadas por radiación electromagnética en forma de rayos  $\gamma$ ; o las “cúspides en las cuerdas cósmicas” [20]. Las cuerdas cósmicas son hipotéticos defectos topológicos unidimensionales del espacio, formados durante transiciones de fase con ruptura de simetría, como la transición de fase electrodébil (y posiblemente otras transiciones anteriores) en los comienzos del universo.

#### 4.3.3. Señales continuas

Las ondas emitidas por estas fuentes se caracterizan por ser prácticamente monocromáticas y durar largos periodos de tiempo. Los principales emisores son estrellas de neutrones galácticas en rápida rotación y sin simetría axial entorno al eje de rotación, y las etapas iniciales de la coalescencia de sistemas binarios compactos. Se pueden considerar monocromáticas ya que las pérdidas de energía por radiación son pequeñas, es decir, la escala de tiempos en la que el periodo de revolución se reduce apreciablemente es mucho mayor que el propio periodo de revolución. Si la frecuencia de rotación de la estrella de neutrones es medible mediante ondas electromagnéticas (e.g. un pulsar), entonces las posibles ondas gravitatorias deberían tener entorno al doble de esta frecuencia (en base a los resultados vistos en (34)). Estas señales serían, al igual que las coalescencias NS-NS, ideales para poner a prueba la ecuación de estado de las estrellas de neutrones.

#### 4.3.4. Señales estocásticas

La forma de estas señales sería aleatoria, siendo causadas principalmente por la detección simultánea de un gran número de fuentes independientes, sin ninguna correlación y a grandes distancias. Entre estas fuentes podríamos encontrar las cuerdas cósmicas, coalescencias lejanas de agujeros negros o estrellas de neutrones, señales continuas de estrellas de neutrones... y quizás el caso más interesante, un fondo cósmico de ondas gravitatorias [21], análogo al fondo cósmico de microondas (CMB).

A diferencia del CMB, que se desacopló de la materia cuando el universo tenía una edad de  $\sim 380.000$  años, las perturbaciones de pequeña escala en el campo gravitatorio deberían desacoplarse mucho antes, al ser esta la fuerza más débil de las 4 fundamentales. Detectar el hipotético fondo cósmico de ondas gravitatorias nos permitiría estudiar como era el universo apenas unos instantes después del Big Bang.

## 5. Detección de ondas gravitacionales

### 5.1. Efectos de las ondas gravitacionales sobre masas prueba

Para entender como funcionan los detectores modernos de ondas gravitatorias será de ayuda estudiar los efectos que estas producen sobre la materia. Seguiremos el procedimiento que aparece en [2] sección §35.5, usando la ecuación de desviación geodésica.

Nos interesa la evolución en el tiempo de la separación que observa una partícula A respecto a otra partícula B, ubicada en sus cercanías. Tomando el sistema de referencia propio de A, la ecuación de desviación geodésica para la separación toma la forma (notando que  $\mathbf{x}_A = 0$  y  $\tau$  es el tiempo propio de la partícula A):

$$\frac{D^2 x_B^j}{d\tau^2} = -R_{j0k0} x_B^k \quad (38)$$

Donde  $x_B^j$  es la posición espacial de la partícula B ( $\mathbf{x}_B$ ). La expresión (38) se evalúa sobre la posición de la partícula A, donde los símbolos de Christoffel se anulan por la elección de coordenadas. A primer orden en las perturbaciones  $h_{\mu\nu}$  de la métrica, podemos particularizar el sistema propio de A para que las ondas gravitacionales estén descritas en gauge TT, y tal que  $\tau$  coincida con  $t$ , el parámetro temporal con el que evolucionan las ondas. Estos resultados permiten reescribir la ecuación (38) como

$$\frac{d^2 x_B^j}{dt^2} = -R_{j0k0}^{TT} x_B^k = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{jk}^{TT}}{\partial t^2} x_B^k \quad (39)$$

recordando que la derivada temporal de las perturbaciones de la métrica se evalúa en la posición de A. Para una onda plana de la teoría linealizada propagándose en la dirección z, asumiendo que la partícula B se encontraba en reposo con respecto a la A antes de la llegada de la onda, la ecuación (39) se puede integrar en la expresión:

$$x_B^j(t) = x_{B(0)}^j + Re \left( \frac{1}{2} A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_P^{jk} x_{B(0)}^k \right) \quad (40)$$

Donde  $\mathbf{x}_{B(0)}$  es la posición en reposo de B. Notemos que el tensor  $e_P^{jk}$  es transversal a la dirección de propagación, es decir, la onda gravitatoria no modifica la separación entre las partículas a lo largo de la dirección de propagación, solo afecta a las componentes transversales de la posición. En

la figura 2 se representan los efectos de la ecuación (40) sobre un anillo de masas prueba colocado en el plano perpendicular a la dirección de propagación. En la figura 3 estos mismos anillos se han colocado de forma equidistante sobre el eje de propagación, teniendo en cuenta los desfases en cada posición causados por la velocidad de propagación finita de las ondas.

## 5.2. Sistemas para la detección de ondas gravitatorias

### 5.2.1. Métodos indirectos

Como veremos en la sección 5.2.2, construir detectores directos de ondas gravitatorias no es una tarea sencilla. Para justificar las grandes inversiones necesarias en el desarrollo de proyectos como LIGO, era imprescindible demostrar mediante otros medios indirectos la validez de la Relatividad General y sus predicciones sobre las ondas gravitacionales. Había que buscar un sistema en el que efectos similares a los tratados en la sección 4.2 fueran observables. El laboratorio ideal para estos experimentos llegó en 1974, con el descubrimiento por Russell Hulse y Joseph Taylor del pulsar binario PSR 1913+16, formado por dos estrellas de neutrones, una de ellas un pulsar de frecuencia 17 Hz; y con un periodo orbital de 8 horas. La proximidad entre las dos estrellas y la presencia en el sistema de un reloj preciso como lo es un pulsar, permitieron estudiar con gran detalle los efectos relativistas en las órbitas. Entre ellos, el más importante fue la observación de una disminución con el tiempo del periodo orbital del sistema [23], consistente (con gran precisión) con la pérdida de energía en forma de ondas gravitatorias predicha por la Relatividad General (figura 4), confirmando así la existencia de estas ondas. Hulse y Taylor fueron galardonados con el premio nobel de Física en 1993 por este descubrimiento.

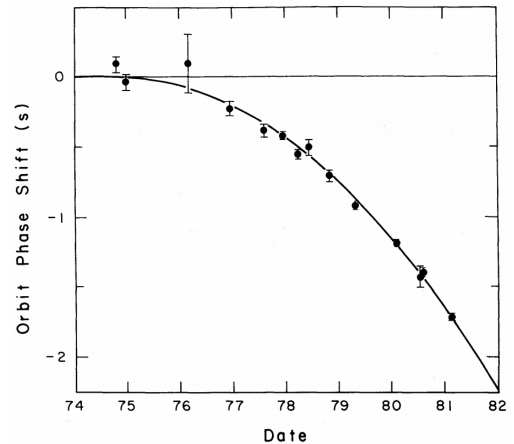


Figura 4: Evolución temporal del periodo orbital del sistema PSR 1913+16. Los puntos corresponden con los valores observados, la línea parabólica es la predicción de la Relatividad General. [J. H. Taylor, J. M. Weisberg [23]]

### 5.2.2. Métodos directos

Demostrada la existencia de ondas gravitatorias, todos los esfuerzos se centraron en construir el primer detector directo, es decir, el primer instrumento capaz de detectar estas perturbaciones del espaciotiempo en la Tierra. En la sección 5.1 vimos que detectar ondas gravitacionales se reduce a medir las variaciones que estas inducen en la separación de masas prueba. Como las variaciones son proporcionales a la separación original de las partículas, el observable que se suele medir se denomina *strain*, es la variación en la separación de dos puntos dividida entre su propia separación:  $h = \Delta l/l$ .

Los primeros intentos de detección [24] fueron llevados a cabo por J. Weber. Su experimento consistía en una serie de antenas resonantes, formadas por cilindros de aluminio; cuando una onda gravitatoria atravesara la tierra, esta induciría fuerzas de marea sobre las antenas. Si la frecuencia de la onda coincidía con la de resonancia del cilindro, este comenzaría a vibrar en respuesta a la onda. Weber aseguraba detectar varios de estos eventos al día, pero sus resultados no pudieron ser recreados por otros grupos experimentales. Esto era consistente con las predicciones de K. Thorne [24]: se esperaba que las ondas gravitatorias que atravesaran la tierra no indujeran strains



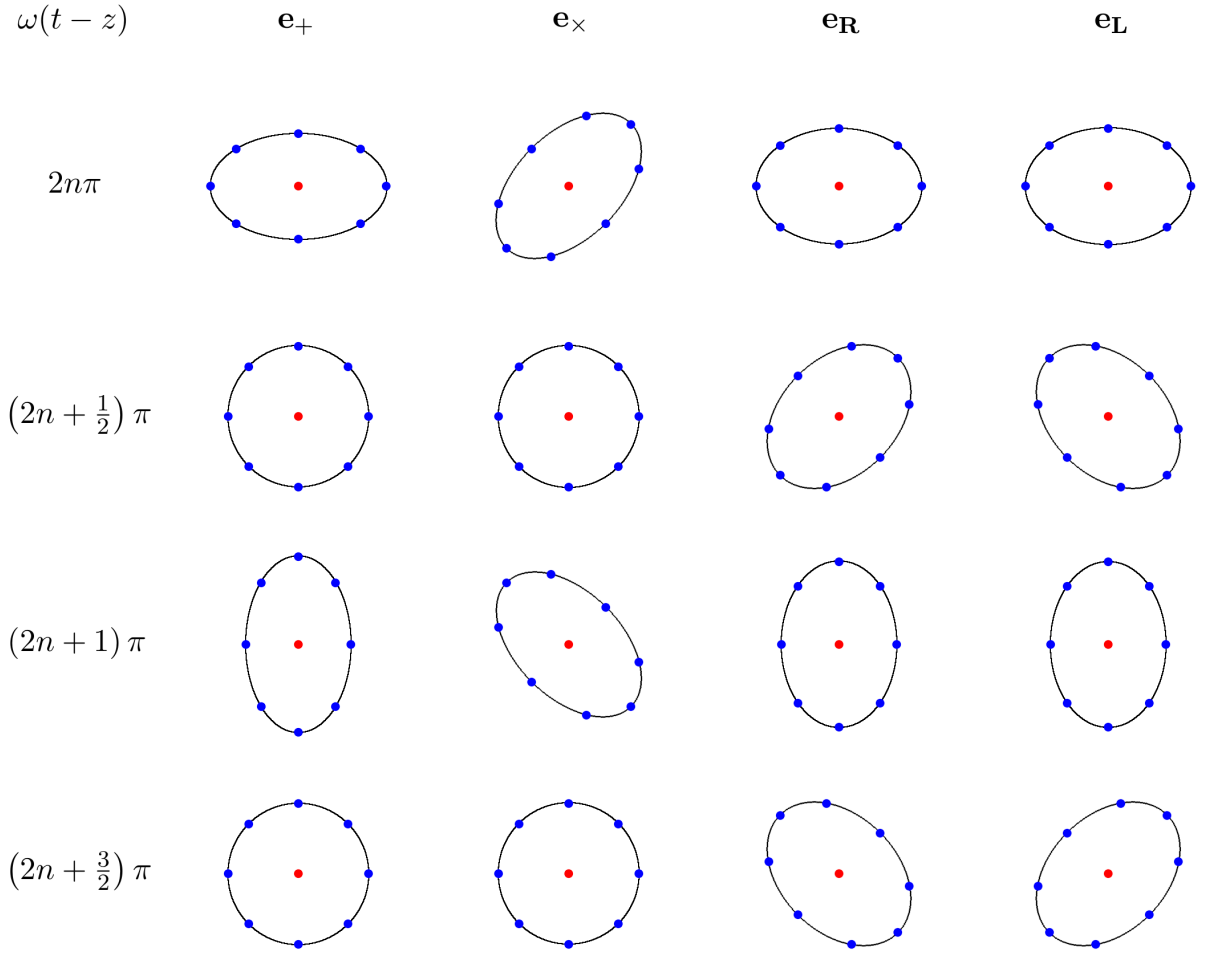


Figura 2: Efectos de varias polarizaciones de una onda gravitacional sobre las posiciones de masas prueba (azul) en un anillo perpendicular a la direcci3n de propagaci3n, vistas desde una masa prueba en el centro (rojo), para distintas fases de la onda. Las polarizaciones  $\mathbf{e}_R = (\mathbf{e}_+ + i\mathbf{e}_\times)/\sqrt{2}$  y  $\mathbf{e}_L = (\mathbf{e}_+ - i\mathbf{e}_\times)/\sqrt{2}$  son los autoestados de la helicidad.  $n$  es un n3mero entero arbitrario.

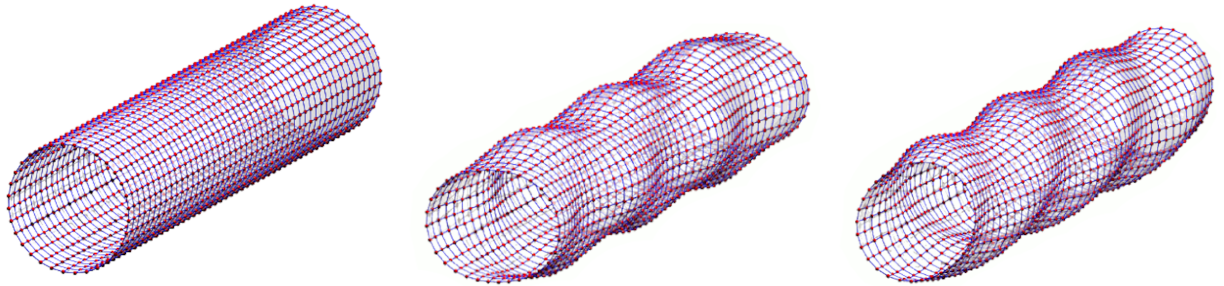


Figura 3: Izquierda: cilindro de masas prueba en un espaciotiempo plano, sin ondas gravitatorias. Centro: mismo cilindro siendo atravesado por una onda gravitacional de polarizaci3n  $\mathbf{e}_+$  a lo largo de su eje. Derecha: misma situaci3n que en el centro, ahora con polarizaci3n  $\mathbf{e}_R$ . [Im3genes cortesía de Markus P3ssel [22]]

superiores a  $10^{-21}$  en la banda de los kHz, mientras que las barras de Weber tenían una sensibilidad de  $h \sim 10^{-15}$  en esta región.

Pronto se hizo evidente que, para alcanzar esas sensibilidades, iba a ser necesario utilizar otro tipo de detector. El instrumento que se erigió como sustituto es el interferómetro de Michelson: una fuente de luz, en general un haz láser, es dividido en dos partes por un divisor de haz; estos dos haces independientes pasan a propagarse a lo largo de los dos brazos perpendiculares del interferómetro (en forma de L) y son reflejados en unos espejos al final de los mismos, volviendo hasta el divisor de haz, donde se superponen en interferencia constructiva o destructiva dependiendo de la longitud óptica de cada brazo. Midiendo la variación de esta interferencia óptica entre haces podemos inferir las variaciones en la longitud de los brazos. La geometría de este instrumento es además excelente para detectar ondas gravitatorias (con la polarización y dirección de propagación adecuada): si colocamos el interferómetro sobre la polarización  $e_+$  de la figura 2, con los brazos orientados en la dirección norte-sur este-oeste, la onda gravitatoria alargará uno de los brazos y simultáneamente acortará el otro, maximizando las variaciones en la interferencia de los haces.

Pero construir un detector de este tipo con la sensibilidad suficiente no es una tarea sencilla. Una sensibilidad  $h \leq 10^{-21}$  en un interferómetro con brazos de 4 kilómetros (como LIGO) equivale a detectar variaciones en la longitud de los brazos de  $\Delta l \leq 4 \times 10^{-18}$  metros (es decir, 200 veces más pequeñas que el tamaño de un protón). Una forma de reducir este problema es hacer que la luz recorra varias veces los brazos, aumentando así su longitud óptica efectiva. Además, para construir los dos interferómetros de LIGO (LIGO Hanford & LIGO Livingston), los primeros exitosos en la búsqueda directa de ondas gravitatorias (primera detección en 2015 [7]), fue necesario analizar e intentar reducir al máximo todas las posibles fuentes de ruido que limitaran su funcionamiento [24]. Entre las más importantes encontramos ruidos sísmicos procedentes de la corteza terrestre, ruidos térmicos en las suspensiones pendulares de los espejos y en sus recubrimientos, y ruidos cuánticos como *shot noise* (producido por la aleatoriedad en la emisión de fotones del láser) y de presión de radiación. La sensibilidad actual de LIGO es de  $h \sim 10^{-23}$  en la región de 100 Hz [25]. Mejoras en estos aspectos continúan implementándose actualmente en los detectores; es mucho más importante hacer paradas para añadirles que realizar observaciones durante largos periodos de tiempo: el strain es proporcional a la amplitud de las perturbaciones en la métrica (ecuación (40)), que a su vez es proporcional al inverso de la distancia con la fuente (ecuación (34)), esto implica que un aumento de un orden de magnitud en la sensibilidad equivale a un aumento en un factor 1000 del volumen efectivo de búsqueda para un mismo evento.

La alta sensibilidad de estos dispositivos los hace susceptibles de detectar señales falsas, producidas por eventos locales (vehículos, tormentas, etc) o por los propios ruidos aleatorios del instrumento. Con el fin de filtrarlas, se suelen buscar coincidencias con otros interferómetros (este es el motivo por el que LIGO Hanford y LIGO Livingston están colocados en puntas opuestas de Estados Unidos). Una red de interferómetros, ubicados por todo el planeta y trabajando en sincronía, tendría ventajas adicionales: a partir de los retardos de milisegundos en la llegada de la señal a cada detector (causados por la velocidad de propagación finita de las ondas gravitatorias) podríamos identificar con alta precisión la región del cielo en la que se encontraba la fuente, y gracias a las distintas orientaciones de sus brazos, obtendríamos mayor información sobre la polarización de las ondas. Esta red está actualmente en construcción, de ella forman ya parte los dos detectores LIGO en Estados Unidos, el detector Virgo en Italia, y la reciente incorporación del interferómetro KAGRA en Japón [26]. IndIGO, en India, podría unirse a ellos en torno a 2024 [27]. Como ya comentamos en secciones anteriores, estos detectores han triunfado en la búsqueda de coalescencias de sistemas binarios compactos. Se espera que, a medida que sus sensibilidades aumenten, nuevas CBC, otros pulsos e incluso algunas señales continuas sean observadas.

De cara a un futuro más lejano, nuevos detectores de “tercera generación” han sido propuestos, como el *Cosmic Explorer* en Estados Unidos [28], con brazos de 40 kilómetros; o el *Einstein Telescope* en Europa [29], con tres brazos de 10 kilómetros, modificando la geometría en forma de L a la de un triángulo equilátero. La mayor longitud de sus brazos, unido a mejoras en el tratamiento del ruido, supondrían un aumento de en torno a un orden de magnitud adicional en la sensibilidad a lo largo de todo el espectro. Se planifica que estos detectores entren en funcionamiento a lo largo de la década de 2030.

También se han propuesto detectores espaciales como LISA [30], que funcionaría de forma ligeramente distinta a los interferómetros terrestres. Este observatorio consistiría en tres astronaves en órbitas heliocéntricas siguiendo a la Tierra, escogidas tal que las tres naves siempre formen entre sí un triángulo equilátero con aristas de 2,5 millones de kilómetros. En el interior de cada una de las naves, una masa prueba se movería libremente, en caída libre siguiendo las trayectorias geodésicas alrededor del Sol. Interferómetros láser montados en las naves medirán constantemente la separación entre estas masas prueba, detectando cualquier perturbación inducida por el paso de una onda gravitatoria. LISA sería sensible a la región del espectro comprendida entre 0.1 mHz y 1 Hz, por debajo del rango de operación de los interferómetros terrestres. En este rango de frecuencias se espera detectar las ondas gravitatorias producidas por coalescencias de agujeros negros supermasivos en el centro de galaxias, o la acreción de objetos compactos mucho más pequeños por estos agujeros negros supermasivos. Su lanzamiento también está planificado para la década de 2030.

Otras búsquedas se están realizando actualmente en regiones todavía más bajas del espectro, dentro del rango de los nHz, mediante los experimentos conocidos como *Pulsar Timing Array* [31]. Mediante el uso de radiotelescopios, colaboraciones como European Pulsar Timing Array (EPTA) o NANOGrav se dedican a buscar desviaciones correlacionadas en los tiempos entre las señales de radio emitidas por una colección de pulsares, de periodos conocidos y extremadamente precisos. Esto es equivalente a decir que cada uno de estos pulsares se comporta como un brazo de un detector, donde la longitud óptica efectiva de cada brazo es la distancia entre la Tierra y ese determinado pulsar. Todavía no se ha confirmado ninguna detección con este método, pero esto es algo que no debería extrañarnos: las ondas que se pretenden detectar tienen periodos del orden de años, por lo que es necesario realizar observaciones durante largos periodos de tiempo. Al igual que con LISA, se busca detectar las ondas emitidas por sistemas binarios de agujeros negros supermasivos y sus coalescencias, que podrían aportar información muy importante para los modelos de formación de galaxias.

Por último, también se están buscando ondas gravitacionales primordiales, producidas durante el periodo inflacionario, en los modos-B de la polarización del fondo cósmico de microondas. Aunque estos modos han sido detectados, se cree que la mayor parte es causada por el polvo galáctico [32]. El objetivo actual es separar las contribuciones del polvo de las que realmente pertenecen al CMB.

## 6. Conclusiones

Las ondas gravitatorias prometen ser uno de los campos de estudio más importantes para la física en los próximos años. Dentro de la Relatividad General, nuevos avances matemáticos podrían producirse en los formalismos para describir las ondas o las fuentes, a los que habría que añadir mejoras en el entendimiento de la gravedad en los regímenes más intensos, gracias al desarrollo de las simulaciones numéricas. Como hemos visto a lo largo de este trabajo, es prácticamente seguro

que las ondas gravitatorias también serán responsables de grandes contribuciones a campos como la astrofísica, la cosmología e incluso la física de partículas: permitirán estudiar la ecuación de estado y la estructura interna de las estrellas de neutrones, conocer las poblaciones existentes de agujeros negros en los distintos rangos de masas, aportando datos importantes para modelos cosmológicos y de síntesis de galaxias; resolver el problema de la tensión en la constante de Hubble, realizar observaciones de épocas tempranas del universo... La lista continúa aumentando cada día. Pero esto no es todo, construir detectores más sensibles requerirá diseñar nuevas tecnologías capaces de reducir aún más los niveles de ruido en los instrumentos, que se traducirán en avances en óptica e ingeniería. Sin duda, habrá que mantenerse expectante ante el futuro desarrollo de este campo.

## Referencias

- [1] Matthias Blau. *Lecture Notes on General Relativity* - 2.8 Newtonian Limit of the Geodesic Equation
- [2] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. *Gravitation* - Chapter 35, Propagation of gravitational waves
- [3] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. *Gravitation* - Chapter 36, Generation of gravitational waves
- [4] K.S. Thorne. *Nobel Lecture: LIGO and gravitational waves III*
- [5] Spectral Einstein Code. <https://www.black-holes.org/code/SpEC.html>
- [6] K. Riles, arXiv:1209.0667v3
- [7] B. P. Abbott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 061102
- [8] B. P. Abbott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 161101
- [9] R. Abbott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **125** (2020) 101102
- [10] D. Lai, F.A. Rasio and S.L. Shapiro, *Astroph. J.* **406** (1993) L63
- [11] N. Aghanim *et al.*, *Planck 2018 results, Astronomy & Astrophysics*, **641** (sep, 2020) A6.
- [12] A. G. Riess *et al.*, *The Astrophysical Journal* **876** (2019) 85
- [13] B. F. Schutz, *Nature* **323**, 310 (1986)
- [14] R. Abbott *et al.*, arXiv:2010.14527
- [15] R. Abbott *et al.*, 2020 ApJL **900** L13
- [16] R. Abbott *et al.*, 2021 ApJL **915** L5
- [17] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. *Gravitation* - Figure 24.3
- [18] Christian D. Ott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 201102
- [19] A. Corsi, B. J. Owen, *Physical Review D* **83**, 104014 (2011)

- [20] T. Damour, A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3761
- [21] B. Allen, arXiv:gr-qc/9604033
- [22] Markus Pössel, *Gravitational Waves and How They Distort Space*  
<https://www.universetoday.com/127255/gravitational-waves-101/>
- [23] J. H. Taylor, J. M. Weisberg. *Astrophys. J.* **253**, 908
- [24] R. Weiss. *Nobel Lecture: LIGO and the discovery of gravitational waves I*
- [25] B. C. Barish *Nobel Lecture: LIGO and gravitational waves II*
- [26] KAGRA Observatory, *Update on LIGO-Virgo-KAGRA observing run plans*  
<https://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/archives/1489>
- [27] Nature, *The golden age of neutron-star physics has arrived*  
<https://www.nature.com/articles/d41586-020-00590-8>
- [28] Cosmic Explorer <https://cosmicexplorer.org/>
- [29] Einstein Telescope <http://www.et-gw.eu/>
- [30] Laser Interferometer Space Antenna - arXiv:1702.00786
- [31] J. P. W. Verbiest, S. Osłowski, S. Burke-Spolaor - arXiv:2101.10081
- [32] CMB Polarization - <https://lweb.cfa.harvard.edu/~cbischoff/cmb/>