



**Politecnico
di Torino**

Relazione Progetto sui Metodi agli Elementi Finiti Lagrangiani per Problemi Ellittici e Parabolici

**Metodi Numerici per Equazioni alle
Derivate Parziali**

28 Gennaio 2024

Docenti:

Canuto Claudio, Berrone Stefano

Studenti:

Marco Accorinti

Francesco Turiano

Daniele Poggio

Matricola:

s319465

s318374

s305734

Contents

1	Introduzione	4
1.1	Formulazione del problema in forma forte e debole	4
1.2	Discretizzazione di Galerkin	4
1.3	Calcolo dell'errore e condizionamento matrice di rigidità	5
1.4	Definizione del dominio	5
1.5	Calcolo degli ordini di convergenza per errori in norma L^2 e H^1 e numero di condizionamento della matrice di rigidità.	6
2	Problema Ellittico Discretizzazione \mathbb{P}_1	8
2.1	Note teoriche per implementazione del codice	8
2.2	Test su ordini di convergenza in norma L^2 e H^1 e numero di condizionamento della matrice di rigidità	9
2.2.1	Test su problema diffusivo con condizioni di Dirichlet nulle	9
2.2.2	Test su problema diffusivo con condizioni di Dirichlet non nulle	10
2.2.3	Test su problema diffusivo con condizioni miste di Dirichlet e Neumann	10
2.3	Risultati ottenuti	11
2.4	Implementazione \mathbb{P}_1 con coefficienti variabili	13
2.4.1	Test per confronto tra \mathbb{P}_1 con e senza formule di quadratura	13
3	Problema Ellittico Discretizzazione \mathbb{P}_2	15
3.1	Note teoriche e modifiche del codice	15
3.2	Test su ordini di convergenza in norma L^2 e H^1 e numero di condizionamento della matrice di rigidità	16
3.2.1	Test su problema diffusivo con condizioni di Dirichlet nulle	16
3.2.2	Test su problema diffusivo con condizioni di Dirichlet non nulle	16
3.2.3	Test su problema diffusivo con condizioni miste di Dirichlet e Neumann	17
3.3	Risultati ottenuti	17
3.4	Confronto con risultati ottenuti con i \mathbb{P}_1	19
3.4.1	Test per confronto tra \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 su un problema ellittico.	19
4	Problema di diffusione-convezione: SUPG	22
4.1	Introduzione	22
4.2	Formulazione del problema	22
4.3	Il metodo SUPG	22
4.4	Simulazioni numeriche	23
4.4.1	Test 1: Visualizzazione della soluzione e ordini di convergenza	23
4.4.2	Test 2: Errore e numero di Pechlet	27
5	Problema di diffusione-reazione: Mass Lumping	29
5.1	Introduzione e presentazione del problema	29
5.2	Simulazioni numeriche	29
5.2.1	Test	29

6	Problema Parabolico	32
6.1	Introduzione.	32
6.2	Simulazioni, risultati e ordini di convergenza ottenuti.	33
6.2.1	Test 1.	33
6.2.2	Test 2: Ordine di convergenza per semi-discretizzazione in spazio. .	34
6.2.3	Test 3: Ordine di convergenza per semi-discretizzazione in tempo .	35
6.2.4	Test 4: variazione Test 3	36
6.2.5	Test 5: confronto tra Eulero Implicito e Crank Nicolson con elementi finiti \mathbb{P}_1	38

1 Introduzione

In questa relazione verranno presentati alcuni algoritmi implementati partendo dal metodo agli elementi finiti per la risoluzione di problemi ellittici e parabolici e verranno confrontati i risultati ottenuti con quelli attesi dalla teoria matematica dei metodi di Galerkin.

1.1 Formulazione del problema in forma forte e debole

Definiamo un problema ellittico generale con termini di diffusione, convezione e reazione su un generico dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \beta\nabla u + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = g_D & \text{su } \Gamma_D \\ \mu \frac{\partial u}{\partial n} = g_N & \text{su } \Gamma_N \end{cases} \quad (1)$$

La formulazione debole del problema (1) è data da:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mu \nabla u \cdot \nabla v + \beta \cdot \nabla u \cdot v + \sigma uv) dx \\ &= \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_D} g_D v ds + \int_{\Gamma_N} g_N v ds \end{aligned} \quad (2)$$

che è possibile riscrivere come:

$$a(u, v) = F(v), v \in H^1(\Omega) \quad (3)$$

Vista la linearità del problema ellittico, possiamo riscrivere la soluzione come $u = u_0 + \mathcal{R}g_D$ dove $\mathcal{R}g_D$ è il rilevamento di g_D , cioè una funzione tale che $\gamma_{\Gamma_D}(\mathcal{R}g_D) = g_D$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. A questo punto, possiamo riscrivere l'equazione (3) come:

$$a(u_0, v) = F(v) - a(\mathcal{R}g_D, v), v \in H_0^1(\Omega) \quad (4)$$

1.2 Discretizzazione di Galerkin

Dato uno spazio $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ tale che $\dim V_h = N_{dof} < \infty$ e con una base $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_{dof}}$. Allora ogni funzione $v_h \in V_h$ può essere scritta come $v_h = \sum_{i=1}^{N_{dof}} l_j(v) \phi_j$. Vogliamo dunque trovare una funzione u_h tale che:

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) - a(\mathcal{R}g_{D,h}, v_h), v_h \in V_h \quad (5)$$

Ma allora, siccome deve essere valido per ogni funzione nello spazio V_h , deve valere anche per le funzioni di base $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_{dof}}$, quindi, riscrivendo la (5) per ciascuna ϕ_i , possiamo ricavare il seguente sistema lineare:

$$Au_* = f - A_D u_d \quad (6)$$

che andremo poi a risolvere tramite il risolutore di MatLab.

1.3 Calcolo dell'errore e condizionamento matrice di rigidità

Una volta ottenuta una soluzione approssimata u_h del problema (5), per valutare la bontà dell'algoritmo, vorremmo poter confrontare la soluzione trovata come la soluzione esatta, e valutare l'errore nelle norme dello spazio in cui essa è definita. Supponiamo che $u \in V$ e $u_h \in V_h \subset V$, possiamo allora valutare l'errore nella norma di V .

Per come sono definiti gli elementi finiti, andremo a scrivere dunque:

$$\|u - u_h\|_V^2 = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|u - u_h\|_{V_E}^2 \quad (7)$$

Essendo che le norme di $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ sono definite da integrali, possiamo applicare delle formule di quadratura per approssimare l'integrale:

$$\|u - u_h\|_{0,E}^2 = \int_E (u - u_h)^2 = 2A \int_{\hat{E}} (\hat{u} - \hat{u}_h)^2 \approx \quad (8)$$

$$\approx 2A \sum_{q=1}^{N_q} \omega_q (\hat{u}_E - \hat{u}_{h,E})_q^2 \quad (9)$$

Si può fare un ragionamento analogo per la norma in $H_0^1(\Omega)$, dovendo prestare attenzione al passaggio di coordinate per i gradienti delle funzioni di base:

$$\hat{\nabla} \phi_i = B^{-t} \hat{\nabla} \hat{\phi}_i \quad (10)$$

In questo modo siamo in grado di valutare gli errori sia in norma L^2 che in norma H^1 . Dalla teoria, in base alle caratteristiche degli elementi finiti lagrangiani che vengono utilizzati, ci aspettiamo gli ordini di convergenza rispetto al parametro h della mesh illustrati nella tabella (1).

Altro parametro importante è il condizionamento della matrice di rigidità A , infatti se essa è mal condizionata allora risulterà difficile, se non impossibile ricavare la soluzione di (6).

Usando la disuguaglianza inversa, dalla teoria sappiamo che il numero di condizionamento dipende solamente dalla mesh e scala come h^{-2} , indipendentemente dal tipo di elementi finiti utilizzati.

	L^2	H^1	$cond(A)$
\mathbb{P}^1	2	1	-2
\mathbb{P}^2	3	2	-2

Table 1: Ordini di convergenza teorici degli errori in norma L^2 , in norma H^1 e del numero di condizionamento della matrice di rigidità A per il metodo degli elementi finiti lagrangiani, rispetto al parametro di discretizzazione h .

1.4 Definizione del dominio

Per semplicità, il dominio sul quale lavoreremo sarà $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ (vedi figura (1)). Distinguiamo nel dominio i 4 lati e li numeriamo per avere un riferimento quando si andrà a porre le condizioni di Dirichlet e Neumann:

- $L_1 = \{(x, y) \in \Omega \quad t.c. \quad y = 0, \quad x \in [0, 1]\};$
- $L_2 = \{(x, y) \in \Omega \quad t.c. \quad x = 1, \quad y \in [0, 1]\};$
- $L_1 = \{(x, y) \in \Omega \quad t.c. \quad y = 1, \quad x \in [0, 1]\};$
- $L_1 = \{(x, y) \in \Omega \quad t.c. \quad x = 0, \quad y \in [0, 1]\}.$

Per generare la mesh \mathcal{T}_h su Ω viene utilizzato lo script *Sample_Square.m* fornito dal Prof. Berrone Stefano. Come input viene inserita la grandezza dell'area di riferimento *area* e come output viene restituita una struttura dati contenente tutte le informazioni relative alla mesh.

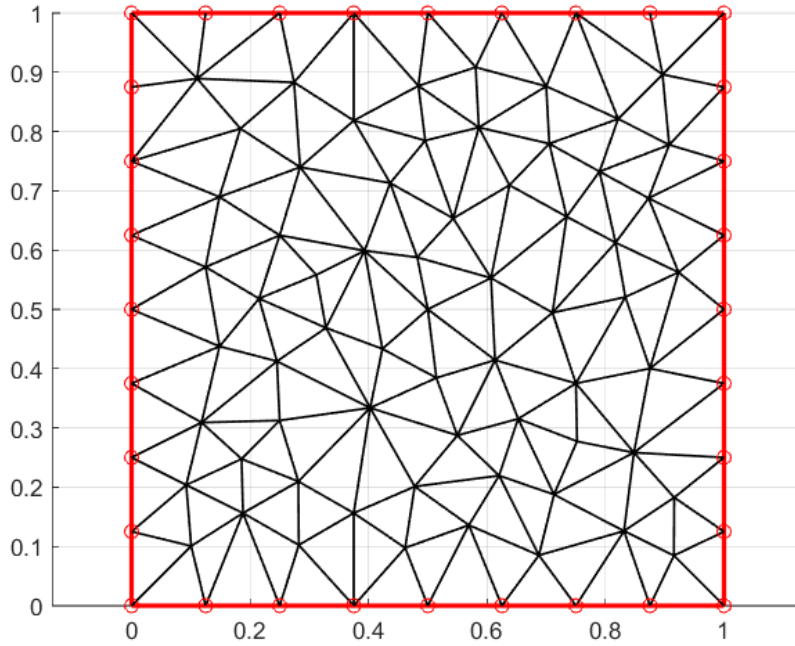


Figure 1: Dominio di lavoro $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ con triangolazione ottenuta con *Sample Square*, impostando *area*= 0.01.

1.5 Calcolo degli ordini di convergenza per errori in norma L^2 e H^1 e numero di condizionamento della matrice di rigidezza.

Per calcolare l'ordine di convergenza si è partiti dalla seguente osservazione: la teoria degli elementi finiti ci garantisce che tutte e tre le quantità di interesse possono essere scritte con la stessa struttura:

$$x \sim Ch^\alpha \quad (11)$$

Essendo tutti termini positivi, si applica la funzione logaritmo ad entrambi i membri dell'equazione e si ottiene:

$$\log(x) \sim \log(C) + \alpha \log(h) \quad (12)$$

In questo modo si può ricavare l'ordine di convergenza α tramite la funzione *polyfit* di Matlab.

L'approccio utilizzato è stato di calcolare le varie quantità di interesse per una mesh fissata \mathcal{T}_h , ricavare il valore $h = \max_{E \in \mathcal{T}}(\sqrt{A_E})$, eseguire una nuova mesh ponendo come input dell'algoritmo $\frac{h^2}{4}$ e ripetere il procedimento, partendo come valore iniziale $h^2 = 0.01$. Per ciascun caso sono stati eseguiti 3 raffinamenti, da cui poi sono stati interpolati gli ordini di convergenza.

2 Problema Ellittico Discretizzazione \mathbb{P}_1

In questa sezione verranno presentati i risultati ottenuti dall'implementazione del metodo di Galerkin agli elementi finiti lagrangiani \mathbb{P}_1 per la risoluzione di problemi ellittici di diffusione-convezione-reazione. Il codice implementato per la risoluzione di questo problema fornirà la struttura base per le successive estensioni che verranno presentate nei capitoli successivi.

2.1 Note teoriche per implementazione del codice

L'elemento finito di riferimento per questa implementazione è definito come il triangolo avente come vertici i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Essendo le funzioni definite sull'elemento di riferimento \hat{E} in \mathbb{P}^1 i gradi di libertà $l_j(v)$ saranno 3, definiti come il valore della funzione v nei vertici. Le funzioni base sono $\phi_1(x, y) = x$, $\phi_2(x, y) = y$, $\phi_3(x, y) = 1 - x - y$. Per l'implementazione dei termini diffusivi, reattivi e convettivi che definiscono la matrice di rigidità A , supponiamo che i coefficienti μ, β, σ possano essere approssimati in ciascun elemento $E \in \mathcal{T}$ con il valore relativo al baricentro dell'elemento che stiamo considerando. Inoltre per il calcolo degli integrali sfruttiamo il fatto che le funzioni base locali $\phi_i \in \mathbb{P}_1, \hat{i} = 1, 2, 3$. Possiamo definire quindi:

$$D_{i,j} = \sum_{E \in \mathcal{T}} D_{i,j}^E = \sum_{E \in \mathcal{T}} 2|E|\mu \frac{\delta y_i \cdot \delta y_j + \delta x_i \cdot \delta x_j}{4|E|} \quad (13)$$

$$C_{i,j} = \sum_{E \in \mathcal{T}} C_{i,j}^E = \sum_{E \in \mathcal{T}} 2|E| \frac{\beta_x \delta y_k + \beta_y \delta x_k}{6} \quad (14)$$

$$R_{i,j} = \sum_{E \in \mathcal{T}} R_{i,j}^E = \sum_{E \in \mathcal{T}} 2|E| \frac{\sigma|E|}{12} (1 + (\hat{j} == \hat{k})) \quad (15)$$

$$f_i = \sum_{E \in \mathcal{T}} f_i^E = \sum_{E \in \mathcal{T}} 2|E| \frac{f|E|}{6} \quad (16)$$

Per ogni elemento finito E avente un lato e sul bordo di Neumann del dominio, è possibile definire una parametrizzazione del lato a una variabile: $\gamma_e(t) = x_b + t(x_v - x_b)$, e che la composizione delle funzioni di base locali ϕ_i con γ_e genera dei polinomi di primo grado nell'intervallo $[0, 1]$.

Approssimiamo anche la funzione $g_N(\gamma_e)$ come un polinomio di primo grado, ponendo come vincoli il valore della funzione g_N ai vertici del lato e .

In particolare, le funzioni base associate ai vertici del lato posso essere riscritte come polinomi di primo grado tali che sia pari a 1 nel nodo corrispondente al grado di libertà e 0 sull'altro. Le funzioni sono:

$$\varphi_1(t) = 1 - t \quad (17)$$

$$\varphi_2(t) = t \quad (18)$$

Mentre la funzione g_N sarà scrivibile come:

$$g_N(t) = g_N(x_b)(1 - t) + g_N(x_v)t \quad (19)$$

In questo modo è possibile calcolare un'approssimazione degli integrali di bordo, in particolare otterremo:

$$G_{Ne} = \sum_{e \in Ne} G_{Ne}^e \quad (20)$$

dove se il j -esimo nodo è il vertice iniziale del lato e otteniamo

$$G_{Ne}(j) = |e|(\frac{g_N(x_b)}{3} + \frac{g_N(x_v)}{6}) \quad (21)$$

se invece il nodo è il vertice finale del lato:

$$G_{Ne}(j) = |e|(\frac{g_N(x_b)}{6} + \frac{g_N(x_v)}{3}) \quad (22)$$

2.2 Test su ordini di convergenza in norma L^2 e H^1 e numero di condizionamento della matrice di rigidezza

Per valutare la bontà dell'algoritmo implementato, sono stati eseguiti i test 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, calcolando gli errori in norma L^2 , H^1 e il numero di condizionamento della matrice di rigidezza A .

I risultati ottenuti sono stati utilizzati per confrontare gli ordini di convergenza di queste quantità rispetto il parametro $h = \sqrt{A_{max}}$, dove A_{max} corrisponde all'area massima della triangolazione \mathcal{T} . Per semplicità si è partiti da una soluzione nota, mantenendo i coefficienti costanti e fissando solo $\mu = 1$, mentre σ, β sono stati posti nulli.

Conoscendo la soluzione esatta e i coefficienti, è possibile dunque definire il termine forzante $f(x, y)$ e le condizioni al bordo di Dirichlet e di Neumann.

2.2.1 Test su problema diffusivo con condizioni di Dirichlet nulle

Per questo test poniamo:

- discretizzazione del dominio con elementi finiti lagrangiani \mathbb{P}_1 ;
- $\mu = 1$;
- $\beta = [0, 0]$
- $\sigma = 0$;
- soluzione $u(x, y) = 16x(1 - x)y(1 - y)$;
- si eseguono 3 esperimenti, per il primo si setta il parametro *area* del triangolatore pari a 0.01, successivamente si ricava l'area massima della triangolazione A_{max} e si esegue il raffinamento ponendo come input del triangolatore $\frac{A_{max}}{4}$;
- dalla definizione della soluzione, abbiamo condizioni di Dirichlet nulle su tutti i lati del dominio.

Dalla definizione dei coefficienti e della soluzione esatta si ricava l'espressione della forzante $f(x, y)$.

2.2.2 Test su problema diffusivo con condizioni di Dirichlet non nulle

Per questo test poniamo:

- discretizzazione del dominio con elementi finiti langrangiani \mathbb{P}_1 ;
- $\mu = 1$;
- $\beta = [0, 0]$
- $\sigma = 0$;
- soluzione $u(x, y) = 16x(1 - x)y(1 - y) + x + y$;
- si eseguono 3 esperimenti, per il primo si setta il parametro *area* del triangolatore pari a 0.01, successivamente si ricava l'area massima della triangolazione A_{max} e si esegue il raffinamento ponendo come input del triangolatore $\frac{A_{max}}{4}$;
- dalla definizione della soluzione, abbiamo condizioni di Dirichlet non nulle e non costanti su tutti i lati del dominio.

Dalla definizione dei coefficienti e della soluzione esatta si ricava l'espressione della forzante $f(x, y)$.

2.2.3 Test su problema diffusivo con condizioni miste di Dirichlet e Neumann

Per questo test poniamo:

- discretizzazione del dominio con elementi finiti langrangiani \mathbb{P}_1 ;
- $\mu = 1$;
- $\beta = [0, 0]$
- $\sigma = 0$;
- soluzione $u(x, y) = 16x(1 - x)y(1 - y) + x + y$;
- si eseguono 3 esperimenti, per il primo si setta il parametro *area* del triangolatore pari a 0.01, successivamente si ricava l'area massima della triangolazione A_{max} e si esegue il raffinamento ponendo come input del triangolatore $\frac{A_{max}}{4}$;
- dalla definizione della soluzione, abbiamo condizioni di Dirichlet non nulle e non costanti su tutti i lati 2,3 e 4 e condizioni di Neumann sul lato 1.

Dalla definizione dei coefficienti e della soluzione esatta si ricava l'espressione della forzante $f(x, y)$.

Ordine di Convergenza	Dirichlet Nulle	Dirichlet Non Nulle	Dirichlet e Neumann
L2	2.0635	2.0635	2.0974
H1	1.0299	1.0299	1.0297
condA	-2.0543	-2.0543	-2.0090

Table 2: Ordini di convergenza degli errori in norma L^2 , in norma H^1 e del numero di condizionamento della matrice di rigidità A per il metodo degli elementi finiti langragiani \mathbb{P}^1 su problema diffusivo con coefficiente di diffusione $\mu = 1$ (test 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3).

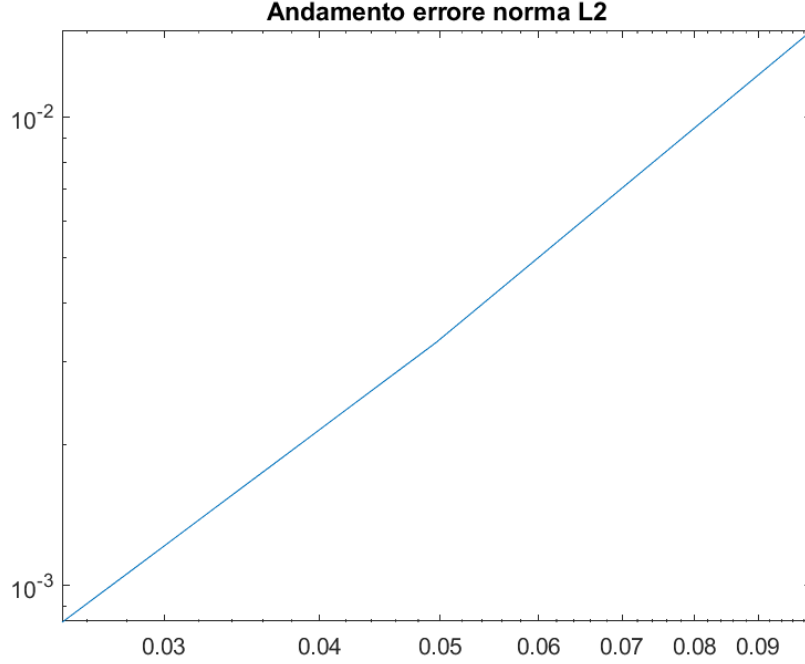


Figure 2: Andamento degli errori in norma L^2 in scala logaritmica per il test 2.2.3 al variare di h .

2.3 Risultati ottenuti

E' possibile osservare il riscontro dei risultati teorici attesi. Possiamo osservare come sia gli ordini di convergenza delle norme degli errori sia il numero di condizionamento della matrice non cambino passando da condizioni al bordo di Dirichlet nulle o non nulle, mentre invece cambiano quando vengono poste delle condizioni di Neumann su uno dei lati del dominio: la condizione di Neumann infatti non pone un vincolo puntuale sulla funzione al bordo nel problema variazionale, ma pone una condizione globale sull'intero bordo tramite un integrale di linea, inoltre i nodi della triangolazione sul bordo di Neumann sono gradi di libertà del problema, dunque anche la matrice di rigidità A viene modificata, giustificando il cambiamento empirico del numero di condizionamento e, di conseguenza, della stima del numero di condizionamento.

A titolo di esempio, nelle figure (2), (3), (4) si possono osservare i grafici in scala logaritmica degli errori nelle norme L^2 , H^1 e del numero di condizionamento della matrice di rigidità A al variare del parametro di mesh h per il test 2.2.3.

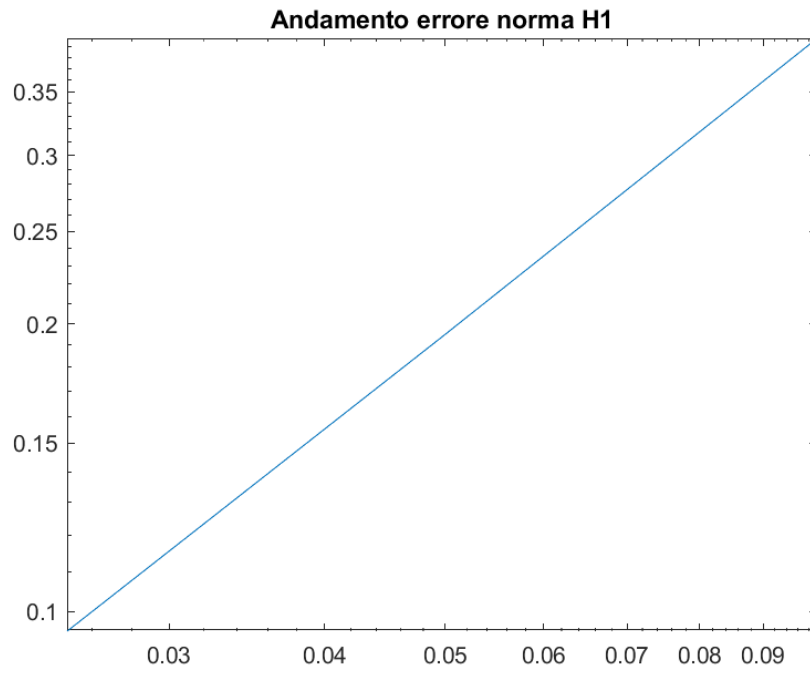


Figure 3: Andamento degli errori in norma $H1$ in scala logaritmica per il test 2.2.3 al variare di h .

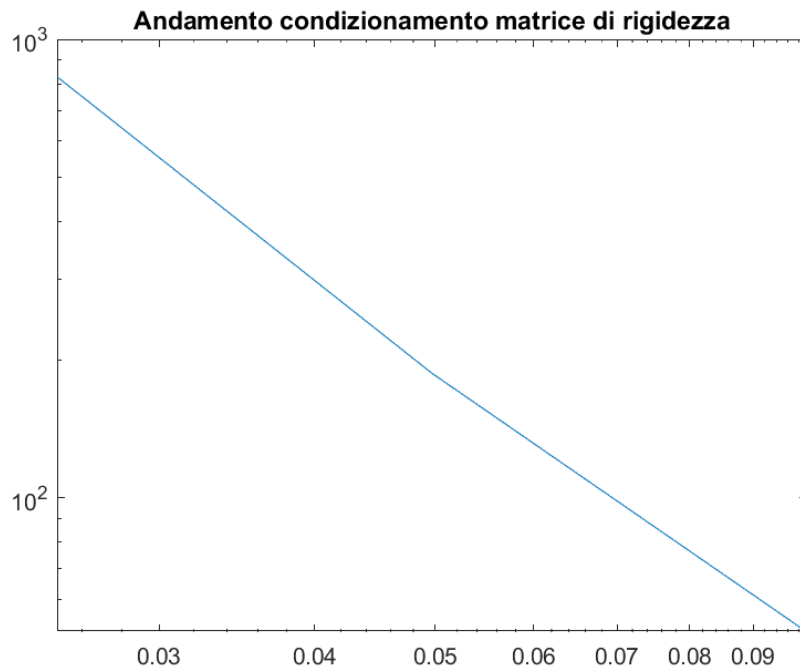


Figure 4: Andamento del numero di condizionamento della matrice di rigidezza A in scala logaritmica per il test 2.2.3 al variare di h .

2.4 Implementazione \mathbb{P}_1 con coefficienti variabili

Il metodo implementato funziona molto bene quando i coefficienti sono supposti costanti, tuttavia quando questa ipotesi non vale più, potrebbero verificarsi degli errori. Una possibile soluzione è di definire dei nodi di quadratura per gli integrali nell'area dell'elemento di riferimento \hat{E} .

In questo modo possiamo approssimare un integrale su un elemento qualsiasi $E \in \mathcal{T}$ come:

$$\int_E f(x, y) dE = 2|E| \sum_{q=1}^{N_q} \omega_q \hat{f}(\hat{x}_q, \hat{y}_q) \quad (23)$$

dove (\hat{x}_q, \hat{y}_q) sono i nodi e ω_q sono i pesi associati ai nodi, per $q = 1, \dots, N_q$.

2.4.1 Test per confronto tra \mathbb{P}_1 con e senza formule di quadratura

Per confrontare i risultati degli elementi finiti \mathbb{P}_1 con e senza formule di quadratura, si è implementato il seguente test con coefficienti non costanti:

- $\mu = 1$;
- $\beta = [x, 0]$
- $\sigma = y$;
- soluzione $u(x, y) = 16x(1-x)y(1-y) + x + y$;
- si eseguono 3 esperimenti, per il primo si setta il parametro *area* del triangolatore pari a 0.01, successivamente si ricava l'area massima della triangolazione A_{max} e si esegue il raffinamento ponendo come input del triangolatore $\frac{A_{max}}{4}$;
- dalla definizione della soluzione, abbiamo condizioni di Dirichlet non nulle e non costanti su tutti i lati 2,3 e 4 e condizioni di Neumann sul lato 1.

Dalla definizione dei coefficienti e della soluzione esatta si ricava l'espressione della forzante $f(x, y)$.

Con questa impostazione gli ordini di convergenza ottenuti sono: 2.0991 per l'errore in norma L^2 , 1.0297 per l'errore in norma H^1 e -2.0090 per il numero di condizionamento della matrice di rigidezza.

In figura (5) è stato il confronto degli errori in norma L^2 tra l'algoritmo classico e l'algoritmo utilizzando invece le formule di quadratura: si può osservare quando il valore h della triangolazione è maggiore, allora avremo una maggiore discrepanza tra gli errori dei due algoritmi. Infatti aumentando le dimensioni di ciascun triangolo E , l'ipotesi che il valore nel baricentro dei vari coefficienti possa approssimare il valore dei coefficienti all'interno dell'elemento cade, tuttavia, almeno nel caso di parametri scelti, gli ordini di grandezza degli errori sono gli stessi per entrambi i metodi.

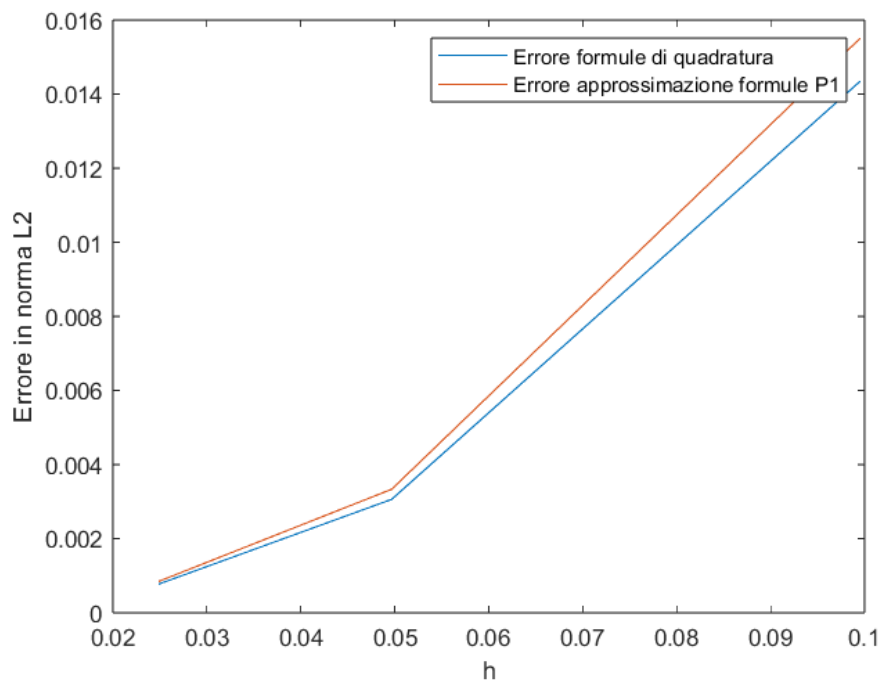


Figure 5: Confronto degli errori in norma L^2 tra il metodo \mathbb{P}^1 classico e con formule di quadratura nel test 2.4.1 al variare di h .

3 Problema Ellittico Discretizzazione \mathbb{P}_2

In questo capitolo verrà introdotta una ulteriore implementazione del metodo agli elementi finiti di Garlerkin lagrangiani, usando come funzioni base delle funzioni in \mathbb{P}_2 . In seguito verranno illustrati alcuni dei risultati ottenuti con questo metodo.

3.1 Note teoriche e modifiche del codice

Partendo dal codice implementato per i \mathbb{P}_1 con formule di quadratura per valutare gli integrali, è necessario effettuare due aggiornamenti:

1. aggiornare le funzioni di base utilizzate e il numero di gradi di libertà locali;
2. aggiornare il procedimento di calcolo delle condizioni in caso di bordo di Neumann.

La soluzione approssimata del problema (2) u_h ora è infatti un polinomio di secondo grado per ciascun elemento E della triangolazione \mathcal{T} , quindi per garantire che u_h sia definita sul singolo elemento $E \in \mathcal{T}$, essendo che lavoriamo in domini con 2 dimensioni, è necessario definire due funzioni di base.

Come gradi di libertà $l \in \mathcal{L}_E$ prendiamo i valori della funzione nei vertici e nei punti medi dei lati dell'elemento: $A = \{a_1, a_2, a_3, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{3,1}\}$. In particolare, essendo elementi lagrangiani, le funzioni base ϕ_j saranno definite come funzioni di secondo grado tali che:

$$\phi_j(a_k) = \delta_{j,k}, j = 1, \dots, 6, a_k \in A$$

In questo contesto è necessario aggiornare anche il procedimento di calcolo riguardo le condizioni al bordo di Neumann: infatti ora le funzioni sui lati non sono più approssimabili come funzioni lineari, ma sono definite come polinomi di secondo grado, dunque sono necessarie 3 condizioni per poter essere univocamente definite sul lato: le condizioni utilizzate saranno i valori del polinomio nei due vertici del lato e nel punto medio. Come per i \mathbb{P}^1 , per calcolare gli integrali eseguiamo una trasformazione affine F dall'elemento di riferimento \hat{E} all'elemento generico E . Così facendo possiamo calcolare gli integrali sul bordo supponendo che la soluzione approssimata u_h sul lato L_j di un generico elemento, definendo $\gamma(t) = a_j + t(a_{j+1} - a_j)$. Le funzioni di base sul lato saranno dunque:

$$\phi_1(t) = 2\left(\frac{1}{2} - t\right)(1 - t) \quad (24)$$

$$\phi_2(t) = 4t(1 - t) \quad (25)$$

$$\phi_3(t) = 2t\left(\frac{1}{2} - t\right) \quad (26)$$

e la funzione g_N sarà approssimabile come:

$$g_N(t) = g_N(x_b)\phi_1(t) + g_N(x_m)\phi_2(t) + g_N(x_e)\phi_3(t) \quad (27)$$

dove x_b, x_m, x_e sono rispettivamente: il punto iniziale, il punto medio e il punto finale del lato $e \in Ne$ rispetto al quale si sta eseguendo il calcolo. A questo punto sarà sufficiente calcolare gli integrali incrociati:

$$\int_0^1 \phi_i(t)\phi_j(t)dt, i, j = 1, 2, 3 \quad (28)$$

per ottenere un risultato di struttura simile a quanto fatto con i \mathbb{P}_1 .

3.2 Test su ordini di convergenza in norma L^2 e H^1 e numero di condizionamento della matrice di rigidezza

Per valutare la bontà dell'algoritmo implementato, sono stati eseguiti i test 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, calcolando gli errori in norma L^2 , H^1 e il numero di condizionamento della matrice di rigidezza A .

I risultati ottenuti sono stati utilizzati per confrontare gli ordini di convergenza di queste quantità rispetto al parametro $h = \sqrt{A_{max}}$, dove A_{max} corrisponde all'area massima della triangolazione \mathcal{T} . Per semplicità si è partiti da una soluzione nota, mantenendo i coefficienti costanti e fissando solo $\mu = 1$, mentre σ, β sono stati posti nulli.

3.2.1 Test su problema diffusivo con condizioni di Dirichlet nulle

Per questo test poniamo:

- discretizzazione del dominio con elementi finiti langrangiani \mathbb{P}_2 ;
- $\mu = 1$;
- $\beta = [0, 0]$
- $\sigma = 0$;
- soluzione $u(x, y) = 16x(1 - x)y(1 - y)$;
- si eseguono 3 esperimenti, per il primo si setta il parametro *area* del triangolatore pari a 0.01, successivamente si ricava l'area massima della triangolazione A_{max} e si esegue il raffinamento ponendo come input del triangolatore $\frac{A_{max}}{4}$;
- dalla definizione della soluzione, abbiamo condizioni di Dirichlet nulle su tutti i lati del dominio.

Dalla definizione dei coefficienti e della soluzione esatta si ricava l'espressione della forzante $f(x, y)$.

3.2.2 Test su problema diffusivo con condizioni di Dirichlet non nulle

Per questo test poniamo:

- discretizzazione del dominio con elementi finiti langrangiani \mathbb{P}_2 ;
- $\mu = 1$;
- $\beta = [0, 0]$
- $\sigma = 0$;
- soluzione $u(x, y) = 16x(1 - x)y(1 - y) + x + y$;
- si eseguono 3 esperimenti, per il primo si setta il parametro *area* del triangolatore pari a 0.01, successivamente si ricava l'area massima della triangolazione A_{max} e si esegue il raffinamento ponendo come input del triangolatore $\frac{A_{max}}{4}$;

- dalla definizione della soluzione, abbiamo condizioni di Dirichlet non nulle e non costanti su tutti i lati del dominio.

Dalla definizione dei coefficienti e della soluzione esatta si ricava l'espressione della forzante $f(x, y)$.

3.2.3 Test su problema diffusivo con condizioni miste di Dirichlet e Neumann

Per questo test poniamo:

- discretizzazione del dominio con elementi finiti langrangiani \mathbb{P}_2 ;
- $\mu = 1$;
- $\beta = [0, 0]$
- $\sigma = 0$;
- soluzione $u(x, y) = 16x(1 - x)y(1 - y) + x + y$;
- si eseguono 3 esperimenti, per il primo si setta il parametro *area* del triangolatore pari a 0.01, successivamente si ricava l'area massima della triangolazione A_{max} e si esegue il raffinamento ponendo come input del triangolatore $\frac{A_{max}}{4}$;
- dalla definizione della soluzione, abbiamo condizioni di Dirichlet non nulle e non costanti su tutti i lati 2,3 e 4 e condizioni di Neumann sul lato 1.

Dalla definizione dei coefficienti e della soluzione esatta si ricava l'espressione della forzante $f(x, y)$.

3.3 Risultati ottenuti

Come per i \mathbb{P}_1 , sono stati eseguiti dei test sull'ordine di convergenza degli errori in norma L^2 e H^1 e sul numero di condizionamento della matrice A .

Dalla teoria ci si aspetta, rispettivamente, gli ordini di convergenza: 3, 2, -2.

I risultati ottenuti solo illustrati nella tabella(4).

Come nel caso dei \mathbb{P}^1 è possibile osservare come il passaggio da condizioni nulle al bordo di Dirichlet a condizioni non nulle non cambi le stime sugli ordini di convergenza, mentre invece l'inserimento di condizioni di Neumann al bordo

Ordine di Convergenza	Dirichlet Nulle	Dirichlet Non Nulle	Dirichlet e Neumann
L2	2.9466	2.9466	2.9366
H1	1.9747	1.9747	1.9694
condA	-2.0918	-2.0918	-2.0720

Table 3: Ordini di convergenza degli errori in norma L^2 , in norma H^1 e del numero di condizionamento della matrice di rigidezza A per i test 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3.

Come nella sezione (2.3) si presentano, a titolo di esempio, i plot in scala logaritmica per gli errori in norma e il numero di condizionamento per il test 3.2.3 usando l'algoritmo per i \mathbb{P}_2 nelle figure (6), (7) e (8).

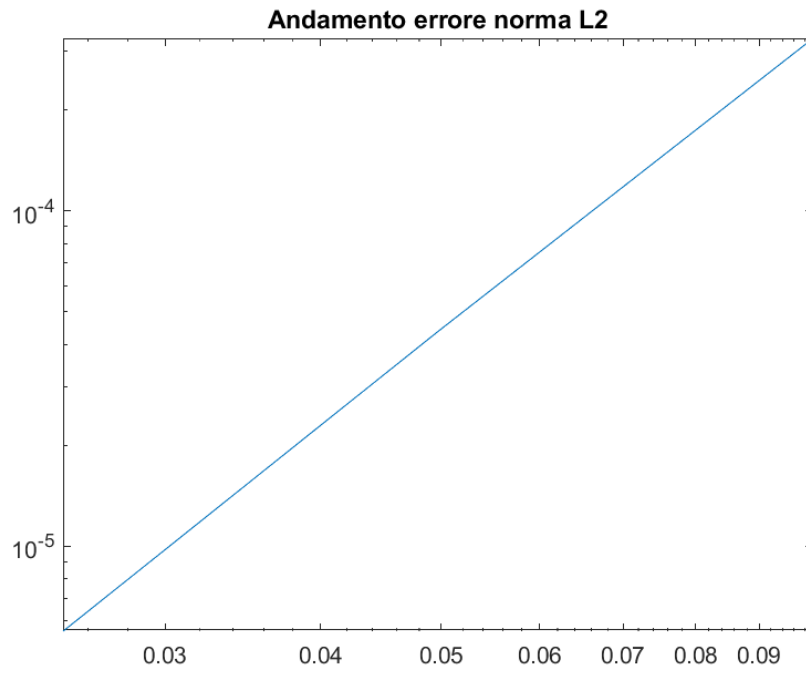


Figure 6: Andamento degli errori in norma L^2 in scala logaritmica per il test 3.2.3 al variare di h .

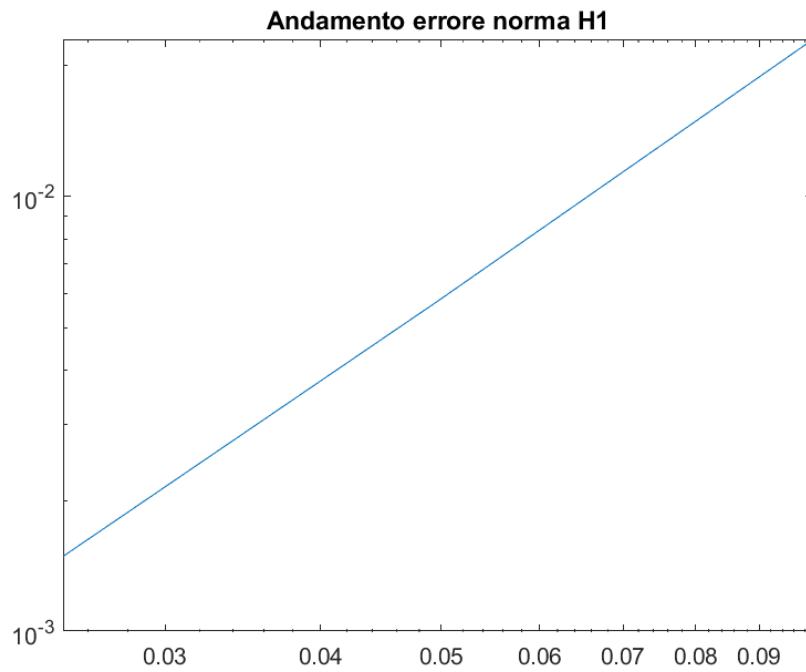


Figure 7: Andamento degli errori in norma H^1 in scala logaritmica per il test 3.2.3 al variare di h .

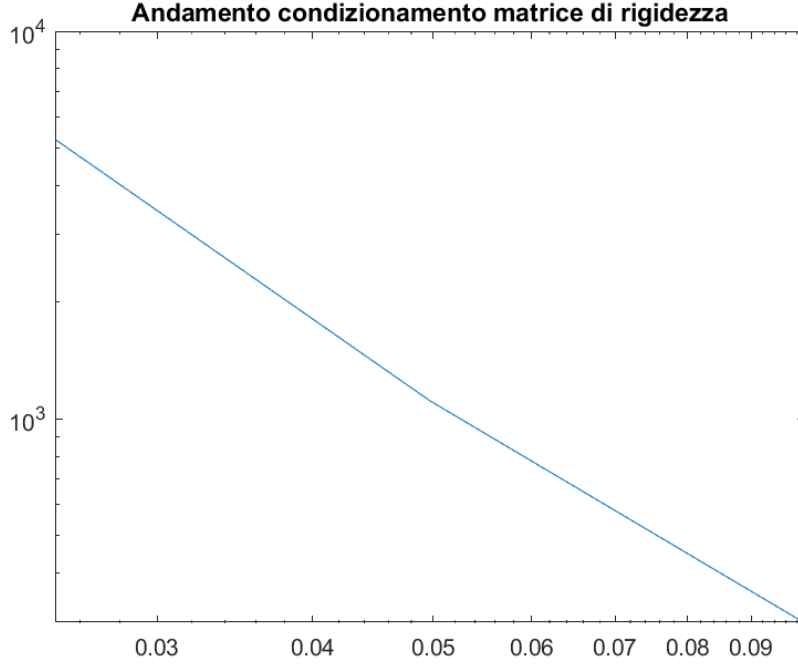


Figure 8: Andamento del numero di condizionamento della matrice di rigidezza A in scala logaritmica per il test 3.2.3 al variare di h .

3.4 Confronto con risultati ottenuti con i \mathbb{P}_1

In questa sezione andremo a confrontare i diversi risultati di convergenza ottenuti utilizzando due metodi implementati: l'algoritmo classico sui \mathbb{P}_1 (senza formule di quadratura) e l'algoritmo sui \mathbb{P}_2 . Dalla teoria ci aspettiamo un diverso ordine di convergenza al variare del parametro legato alla mesh \mathcal{T}_h degli errori in norma L^2 e H^1 .

Da un punto di vista empirico ci aspettiamo che l'algoritmo \mathbb{P}_2 fornisca un'approssimazione migliore e di conseguenza degli errori più piccoli.

3.4.1 Test per confronto tra \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 su un problema ellittico.

Per confrontare le performance degli algoritmi per \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 definiamo il seguente test:

- $\mu = 1$;
- $\beta = [3, 1]$
- $\sigma = 2$;
- soluzione $u(x, y) = 16x(1 - x)y(1 - y)$;
- si eseguono 3 esperimenti, per il primo si setta il parametro *area* del triangolatore pari a 0.01, successivamente si ricava l'area massima della triangolazione A_{max} e si esegue il raffinamento ponendo come input del triangolatore $\frac{A_{max}}{4}$;
- dalla definizione della soluzione, abbiamo condizioni di Dirichlet non nulle e non costanti sui lati 2,3 e 4 e condizioni di Neumann sul lato 1.

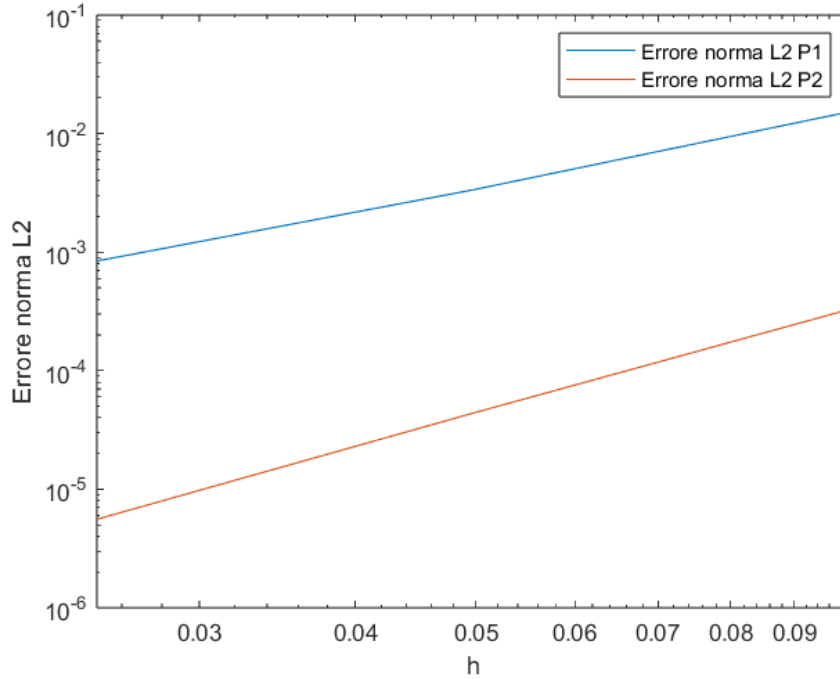


Figure 9: Confronto degli errori in norma L^2 delle soluzioni approssimate di un problema ellittico usando \mathbb{P}^1 e \mathbb{P}^2 in scala logaritmica su test 3.4.1. Si possono osservare: la differente pendenza delle due rette, che conferma il diverso ordine di convergenza dei due metodi e i due differenti ordini di grandezza a parità di parametro h della mesh.

Dalla definizione dei coefficienti e della soluzione esatta si ricava l'espressione della forzante $f(x, y)$.

Nelle figure (9) e (10) si osserva che gli errori per i \mathbb{P}^2 abbiamo un ordine di grandezza minore rispetto ai \mathbb{P}^1 . Inoltre le due rette presentano pendenze diverse, come ci si aspetta dalla teoria riguardo gli ordini di convergenza.

Nella figura (11) si osserva che i numeri di condizionamento sia per i \mathbb{P}_1 che per i \mathbb{P}_2 , hanno lo stesso ordine di convergenza al variare di h , infatti le due rette sono parallele. Per l'algoritmo \mathbb{P}_2 i valori di condizionamento della matrice A sono maggiori: infatti a parità di elementi finiti della triangolazione \mathcal{T}_h , avremo un maggior numero di gradi di libertà, dunque una matrice di rigidità con più termini e quindi un numero di condizionamento più grande.

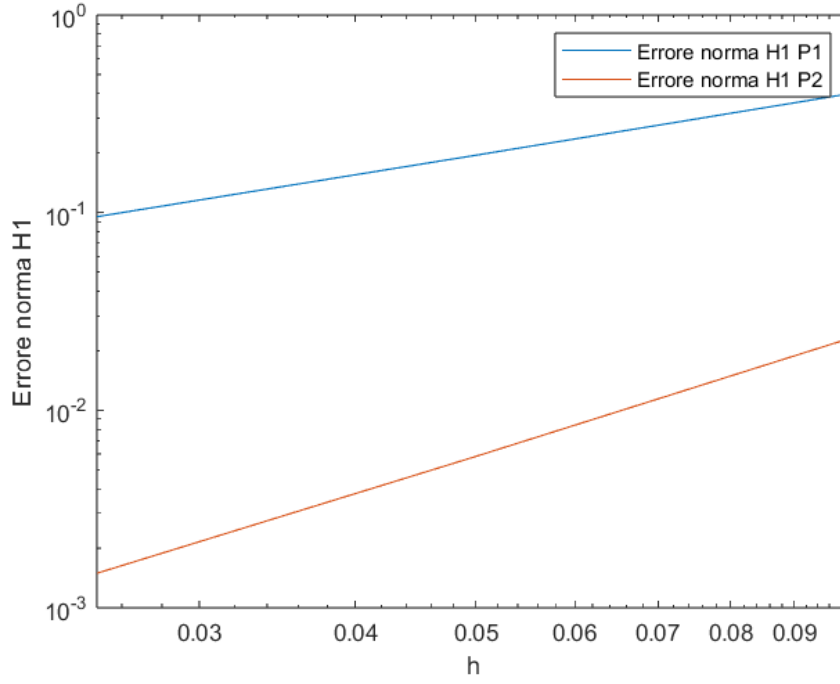


Figure 10: Confronto degli errori in norma H^1 delle soluzione approssimate di un problema ellittico usando \mathbb{P}^1 e \mathbb{P}^2 in scala logaritmica su test 3.4.1. Si possono osservare: la differente pendenza delle due rette, che conferma il diverso ordine di convergenza dei due metodi e i due differenti ordini di grandezza a parità di parametro h della mesh.

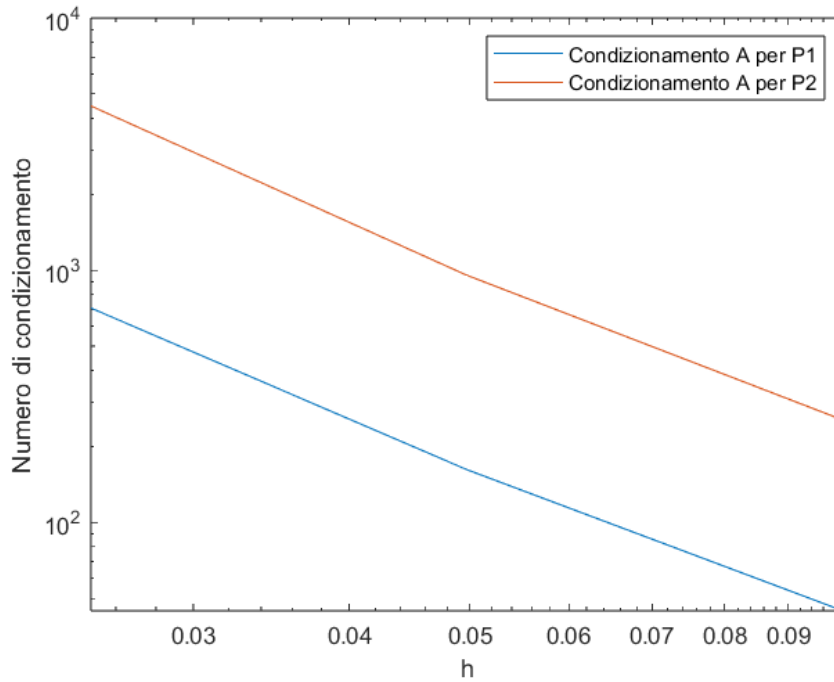


Figure 11: Confronto dei numeri di condizionamento della matrice di rigidità A generate dai metodi \mathbb{P}^1 e \mathbb{P}^2 in scala logaritmica su test 3.4.1 al variare del parametro di mesh h . A conferma del fatto che l'ordine dipende solamente dal parametro di mesh, le due rette hanno la stessa pendenza, confermando che hanno lo stesso ordine di convergenza.

4 Problema di diffusione-convezione: SUPG

4.1 Introduzione

In questa sezione si studia un particolare caso dei problemi a convezione dominante. Ciò può avvenire, nell'ambito del modello agli elementi finiti, qualora si riscontrino diversi ordini di grandezza di differenza tra il termine diffusivo ϵ ed il termine convettivo β uniti ad elevati gradienti della soluzione durante la modellazione di un determinato problema fisico. Pertanto, nel seguente paragrafo si presenta il metodo "Streamline Upwind Petrov Galerkin" (SUPG) al fine di risolvere i problemi di instabilità numerica che ne derivano analizzandone i risultati ottenuti.

4.2 Formulazione del problema

Si consideri il seguente problema di diffusione e convezione:

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega & \epsilon \ll 1 \\ u = g_D & \text{su } \partial\Omega & \beta > 0, \quad \nabla \cdot \beta = 0 \end{cases} \quad (29)$$

I quali dati relativi alla formulazione variazionale del problema rispettano la seguente disuguaglianza:

$$\|\sqrt{\epsilon} \nabla u\|_{L_2} \leq \left\| \frac{f}{\sqrt{\epsilon}} \right\|_{L_2} \quad (30)$$

Da quest'ultima relazione ne deriva che per valori di $\epsilon \rightarrow 0$ si ha una perdita del controllo sui dati del problema e non si può garantire stabilità della soluzione. Inoltre, si dimostra come nel caso in questione la soluzione si possa esprimere in relazione ad un importante parametro del problema definito come $Pe_h = \frac{\beta h}{2\epsilon}$ il quale prende il nome di "numero di Pechlet". In particolare, si è visto nel caso monodimensionale, la dipendenza della soluzione rispetto a tale parametro risulta essere del tipo:

$$u_i \sim \left(-\frac{Pe_h + 1}{Pe_h - 1} \right)^i \quad (31)$$

Il quale può causare un comportamento oscillatorio della soluzione, infatti, ne consegue che:

$$\begin{cases} 0 \leq Pe_h \leq 1 & \text{soluzione stabile} \\ Pe_h \geq 1 & \text{soluzione oscillante} \end{cases} \quad (32)$$

Questo risultato si presenta come conseguenza della discretizzazione del problema e non come mal condizionamento dello stesso, per cui potrebbe essere sufficiente, al fine di recuperare la stabilità numerica, un raffinamento della triangolazione. Purtroppo, tale contromisura può risultare onerosa in termini computazionali e nel caso di problemi di grandi dimensioni essere proibitiva.

4.3 Il metodo SUPG

Il metodo del SUPG prevede l'introduzione di una viscosità numerica τ la quale, aumentando il valore della viscosità del problema, interviene nella definizione del numero di Pechlet garantendo la condizione di stabilità $Pe_h \leq 1$. Inoltre, al fine di non modificare la

soluzione, è necessario considerare una viscosità che influisca solo nella direzione parallela al moto del campo convettivo e pertanto si definisce il seguente tensore che garantisce tale condizione:

$$\bar{\bar{\tau}}_{xy} = U \bar{\bar{\tau}}_{tn} U^T \quad (33)$$

Dove

$$U = \left[\left\{ \hat{t} \right\}, \left\{ \hat{n} \right\} \right], \quad \bar{\bar{\tau}}_{tn} = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{t} = \frac{1}{\|\beta\|} \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix}, \quad \hat{n} = \frac{1}{\|\beta\|} \begin{bmatrix} -\beta_y \\ \beta_x \end{bmatrix}$$

Dunque, applicando il tensore alla viscosità numerica ed introducendola nell'equazione è possibile ottenere una formulazione equivalente del problema variazionale della seguente forma:

$$(\epsilon \nabla u, \nabla v) + (\beta \nabla u, v) - (f, v) + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \tau_E (\epsilon \Delta u_h + \beta \nabla u_h - f, \beta^T \nabla v)_E = 0 \quad (34)$$

Avendo considerato i coefficienti β ed ϵ costanti nell'elemento della triangolazione. Dunque, essendo $Pe_E = m_k \frac{\|\beta\|_E h_E}{2\epsilon}$, si definisce:

$$\tau_E = \begin{cases} m_k \frac{h_E^2}{4\epsilon} & Pe_E \leq 1 \\ \frac{h_E}{2\|\beta\|_E} & Pe_E > 1 \end{cases} \quad \text{con} \quad m_k = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = 1 \\ \frac{1}{24} & k = 2 \end{cases}$$

Dove k è il grado dei polinomi di approssimazione. Attraverso tale metodo si ottiene il seguente risultato:

$$\epsilon \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \tau_E \|\mathcal{D}_\beta u - \mathcal{D}_\beta u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{C} \sum_{E \in \mathcal{T}_h} h_E^{2k} |u|_{k+1,E} \quad (35)$$

Il quale garantisce il controllo sull'errore della soluzione.

4.4 Simulazioni numeriche

In questa sezione si propongono dei test su un particolare problema di diffusione e convezione al fine di confrontare e quantificare l'efficacia del metodo implementato.

4.4.1 Test 1: Visualizzazione della soluzione e ordini di convergenza

Si consideri il problema (29) con i seguenti dati:

- Discretizzazione del dominio Ω con elementi finiti Lagrangiani \mathbb{P}^2 ;
- $u(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-10(x^2 + y^2 - \frac{1}{2})}}$;
- Condizione di Dirichlet: $g_D = \frac{1}{1 + e^{-10(x^2 + y^2 - \frac{1}{2})}}$;
- $\epsilon = 10^{-6}$;

- $\beta = [1, 1]$;
- Numero elementi triangolazione = 81;
- Per lo studio degli ordini di convergenza dell'errore sono stati considerati 3 passi di iterazione dove ad ognuno è stato diviso per 4 il valore di $h^2 = Area_{max}$, avendolo inizializzato ad un valore $h^2 = 0.02$;

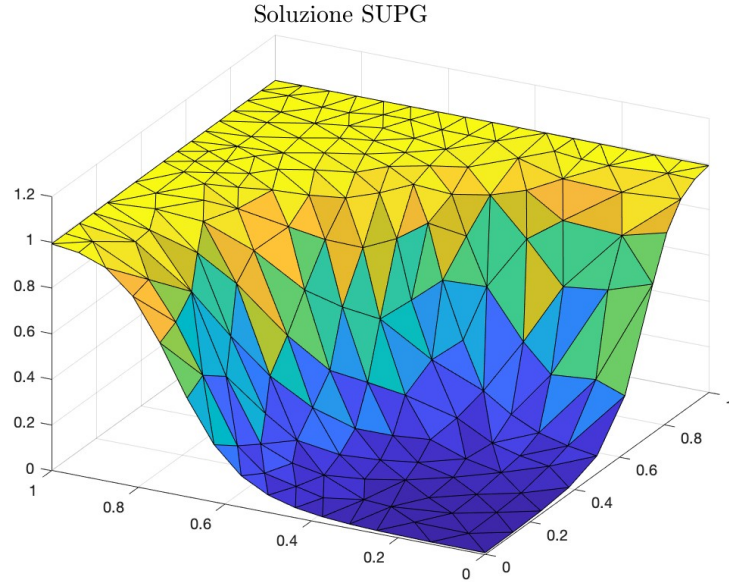


Figure 12: Soluzione del problema (29) di parametri definiti in (4.4.1) con implementazione del SUPG.

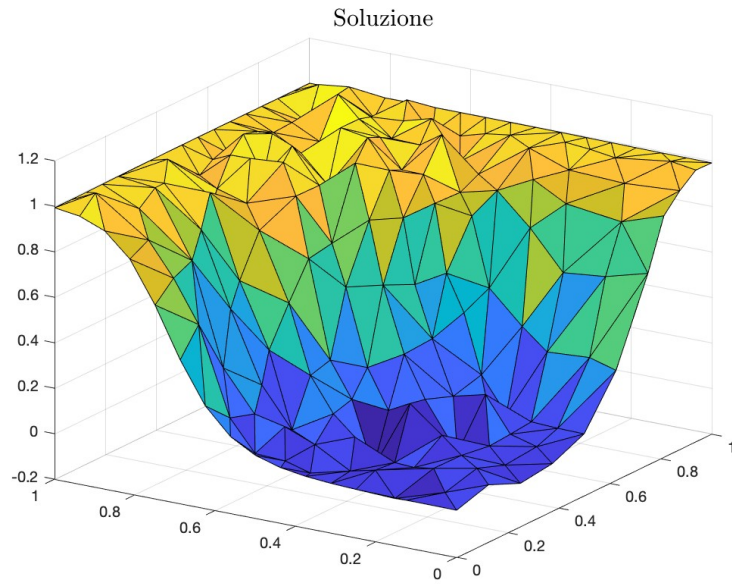


Figure 13: Soluzione del problema (29) con i \mathbb{P}^2 con parametri definiti in 4.4.1.

Per verificare la bontà del metodo implementato si presentano i seguenti risultati relativi agli ordini di convergenza per il metodo SUPG rispetto ai \mathbb{P}^2 :

	L_2	H_1
\mathbb{P}^2 SUPG	2.6677	1.8212
\mathbb{P}^2	1.4588	0.6140

Table 4: Confronto dell'ordine di convergenza della soluzione in norma L_2 e in norma H_1 tra i \mathbb{P}^2 e l'implementazione del SUPG nel problema (29) con parametri definiti in 4.4.1.

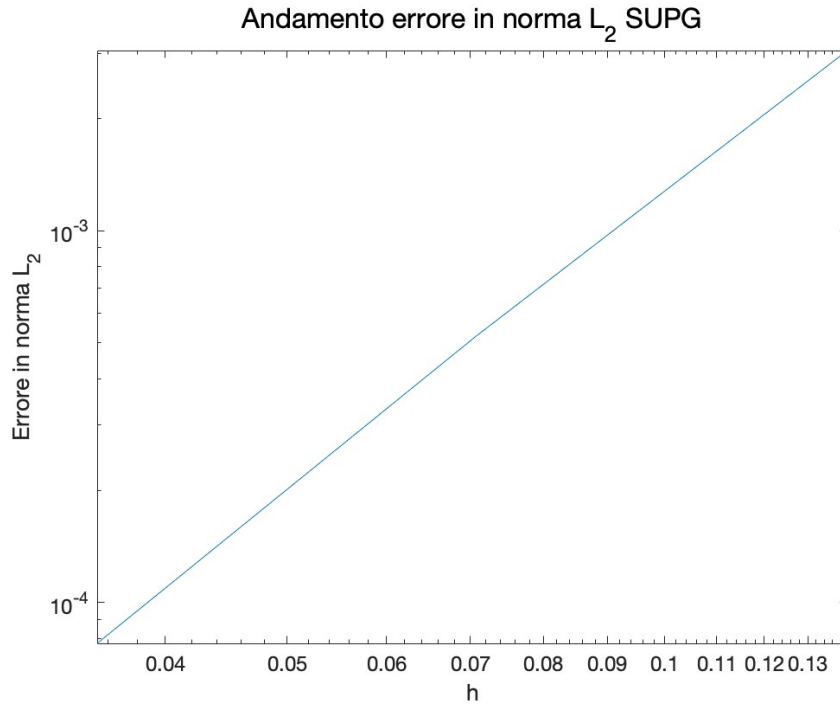


Figure 14: Andamento errore in scala logaritmica in norma L_2 per il problema (29) di parametri 4.4.1 con implementazione del SUPG.

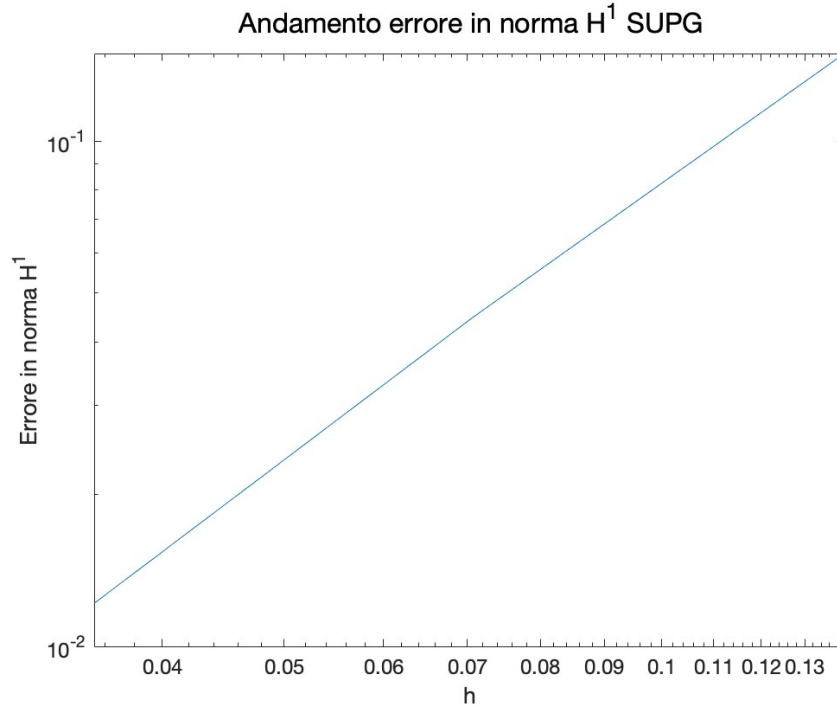


Figure 15: Andamento errore in scala logaritmica in norma H_1 per il problema (29) di parametri 4.4.1 con implementazione del SUPG.

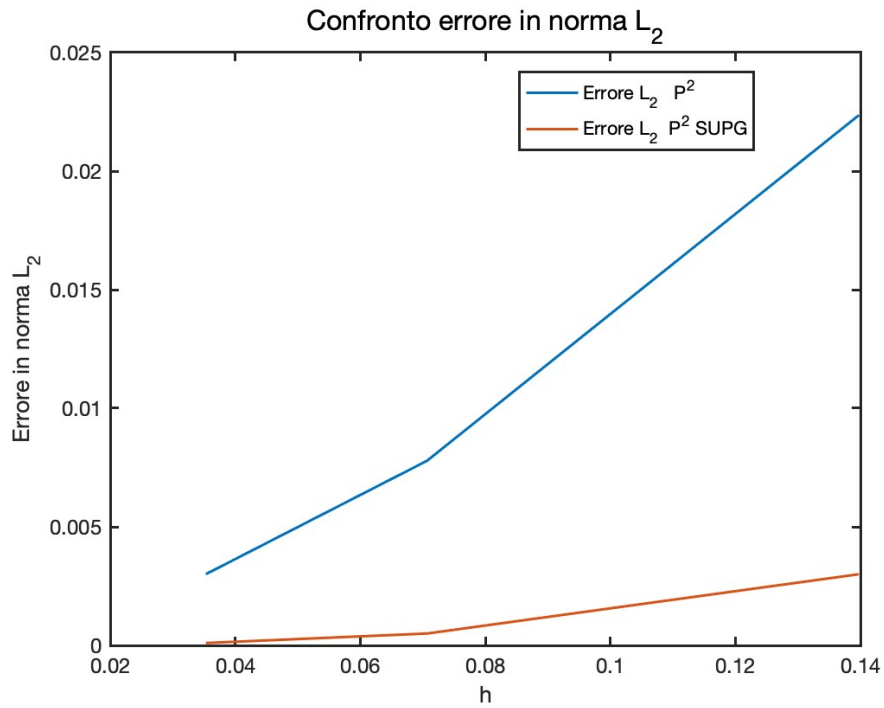


Figure 16: Andamento errori in norma L_2 per il problema (29) di parametri 4.4.1 per i P^2 e P^2 con implementazione del SUPG .

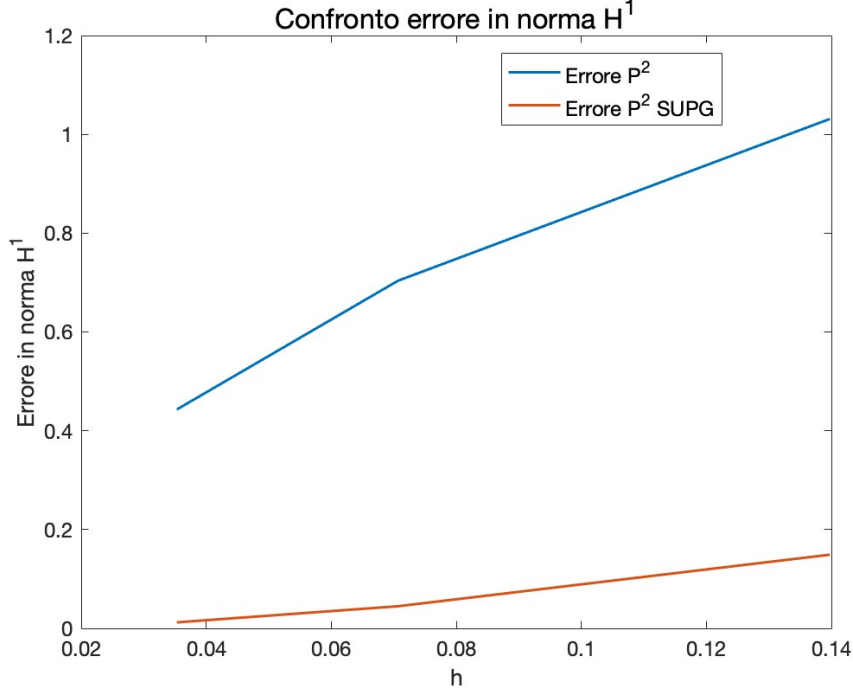


Figure 17: Andamento errori in norma H_1 per il problema (29) di parametri 4.4.1 per i \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^2 con implementazione del SUPG.

4.4.2 Test 2: Errore e numero di Pechlet

Tramite il seguente test si vuole analizzare in che misura, al variare del numero di Pechlet, l'implementazione del SUPG contribuisca alla diminuzione dell'errore e dunque all'esattezza della soluzione a cui conduce il metodo. A tal fine si è considerato il problema di convezione e diffusione (29) con i seguenti parametri:

- Discretizzazione del dominio Ω con elementi finiti Lagrangiani \mathbb{P}^2 ;
- $u(x, y) = \frac{1}{1+e^{-10(x^2+y^2-\frac{1}{2})}}$;
- Condizione di Dirichlet: $g_D = \frac{1}{1+e^{-10(x^2+y^2-\frac{1}{2})}}$;
- $\epsilon(t) = \frac{10^{-2}}{10^{2t}}$ con $t = 0, 1, 2$;
- $\beta = [1, 1]$;
- Numero elementi triangolazione = 81;
- Per lo studio dell'errore si è fatto variare il parametro diffusivo $\epsilon(t)$ nel tempo osservando il comportamento dell'errore in norma infinito rispetto al numero di Pechlet;

Si presentano i risultati ottenuti confrontando l'errore che si ottiene attraverso l'utilizzo dei \mathbb{P}^2 con l'implementazione del SUPG:

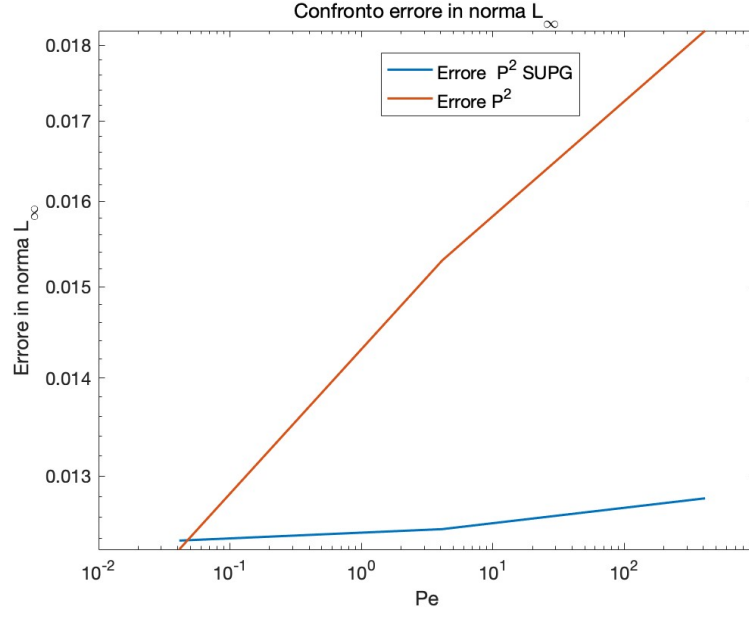


Figure 18: Andamento errori in norma infinito al variare del numero di Pechlet studiando il problema (29) di parametri 4.4.2 per i \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^2 con implementazione del SUPG.

5 Problema di diffusione-reazione: Mass Lumping

5.1 Introduzione e presentazione del problema

Considerando il problema di reazione e diffusione:

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = g_D & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (36)$$

Si riscontrano, nel caso di reazione dominante in cui si ha $\epsilon \ll 1$ e $\sigma \simeq 1$, casi di instabilità numerica. Infatti, considerando la dipendenza della soluzione dal parametro $Se = \frac{\sigma h^2}{6\epsilon}$ si osserva come questa oscilla nei casi in cui risulti $Se > 1$. Sotto tali condizioni, per cui si osserva instabilità, è possibile far vedere come, nel caso in cui il valore numerico Se coinvolga unicamente i termini appartenenti alla diagonale della matrice di reazione, si riesce ad ottenere una migliore stabilità numerica. Attraverso tali considerazioni, si effettua una rielaborazione della matrice di reazione $\mathcal{R}_{jk} = (\sigma \phi_j, \phi_k)$ concentrando tutti i contributi dovuti ai vari elementi sulla diagonale per poi risolvere il sistema assemblando una nuova matrice di rigidezza \mathcal{A}_{m-l} .

5.2 Simulazioni numeriche

Per studiare l'effetto dovuto all'implementazione del Mass Lumping si considera il problema (36) definendo un ϵ molto piccolo e paragonando i risultati ottenuti.

5.2.1 Test

Si considerino i seguenti parametri per il problema (36):

- Discretizzazione del dominio Ω con elementi finiti Lagrangiani \mathbb{P}^1 ;
- $u(x, y) = 2 - \frac{1}{\tanh(\frac{x}{10} + 30y + 1)}$;
- $\epsilon = 10^{-6}$;
- $\sigma = 1$;
- Condizione di Dirichlet $g_D = 2 - \frac{1}{\tanh(\frac{x}{10} + 30y + 1)}$ su $\partial\Omega$;
- Numero elementi triangolazione = 81;
- Per lo studio dell'errore in norma infinito è stato fatto variare il parametro $h^2 = Area_{max}$ per 3 iterazioni iniziandolo ad un valore $h^2 = 0.02$ e dividendolo per 3 ad ogni passo di iterazione;

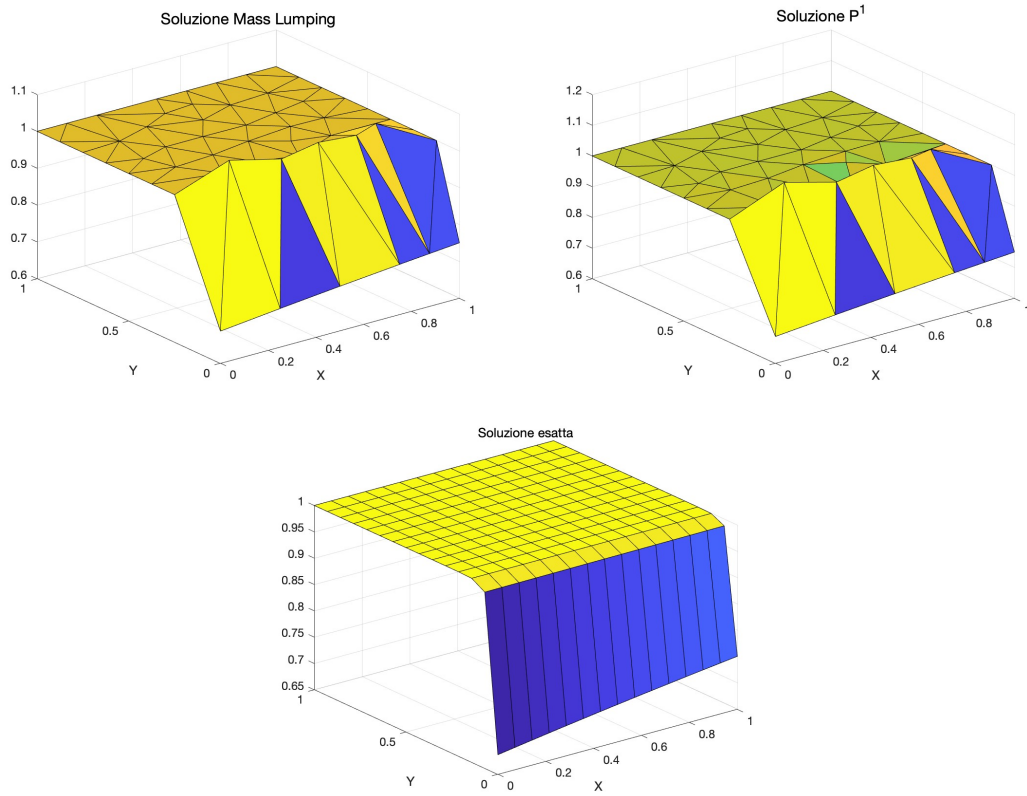


Figure 19: Soluzioni numeriche del problema (36) di parametri (5.2.1) con implementazione del Mass Lumping, con i \mathbb{P}^1 e soluzione esatta.

Si osserva come, attraverso l'utilizzo del Mass Lumping, si ottengano degli smorzamenti delle oscillazioni anche se in misura contenuta, infatti, per quantificare ancora l'effetto che ne deriva, si considera il confronto degli errori in norma infinito rispetto al solo utilizzo dei \mathbb{P}^1 :

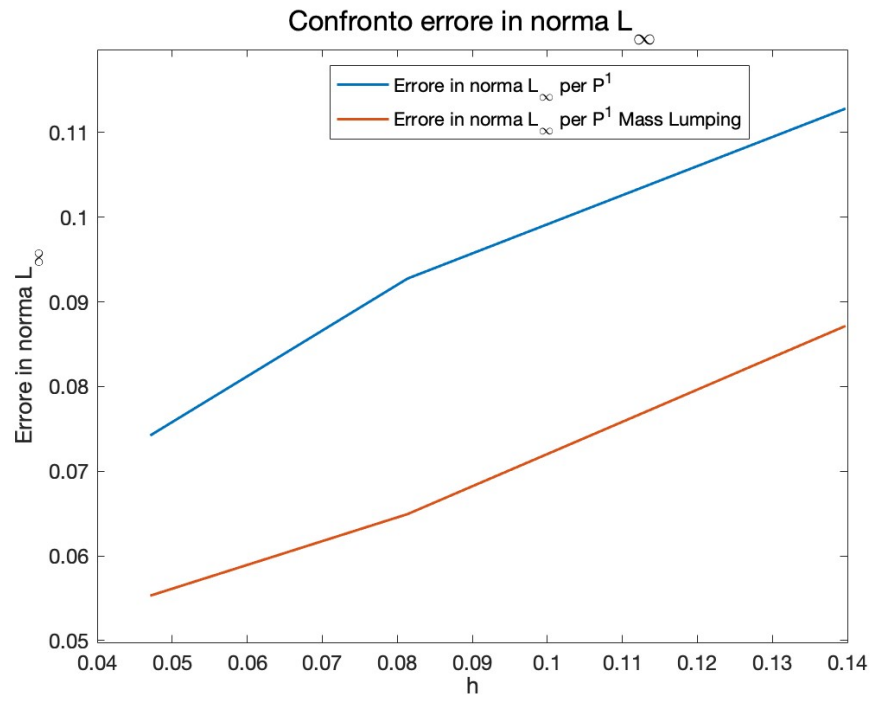


Figure 20: Confronto errori in norma infinito tra \mathbb{P}_1 e Mass Lumping del problema (36) con parametri 5.2.1.

6 Problema Parabolico

6.1 Introduzione.

In questo capitolo si presenta la discretizzazione del problema parabolico. A titolo di esempio, si è considerata l'equazione di diffusione evolutiva, ovvero la nota equazione del calore

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu \nabla u) = f & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ u = g_D & \text{in } \Gamma_D \times (0, T], \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = g_N & \text{in } \Gamma_N \times (0, T], \\ u(t=0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{array} \right. \quad (37)$$

L'approccio seguito per discretizzare tale problema è il cosiddetto *metodo delle linee*, che prevede una semi-discretizzazione in spazio di Galerkin e successivamente una semi-discretizzazione in tempo, nel nostro caso utilizzando il *metodo di Crank-Nicholson*, metodo del secondo ordine in tempo.

Una volta scritta la formulazione variazionale del problema ed effettuato una semi-discretizzazione in spazio di Galerkin, si perviene al seguente sistema lineare:

$$M\mathbf{u}'(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}_N(t) - M_D\mathbf{u}'_D(t) - K_D\mathbf{u}_D(t) \quad (38)$$

dove $M, K \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times N_{dof}}$ rappresentano la matrice di massa, definita come $m_{jk} = (\phi_k, \phi_j)$, e la nota matrice di rigidezza, mentre $M_D, K_D \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times N_D}$ sono le matrici di massa e di rigidezza relative alle funzioni di base con dato di Dirichlet. $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{G}_N(t)$ sono il termine noto e il termine derivante dalla condizione di Neumann, già visti nel problema ellittico, questa volta con la dipendenza dal tempo, mentre $\mathbf{u}_D(t)$ è il rilevamento della condizione di Dirichlet.

E' possibile riscrivere (38) in *forma normale*, ovvero nella forma

$$\mathbf{u}'(t) = \mathcal{L}(\mathbf{u}(t), t) \quad (39)$$

in modo che, introdotta un'opportuna discretizzazione temporale, sia possibile applicare al sistema di ODE (39) il metodo di Crank-Nicholson e ottenere la relazione

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} (\mathcal{L}(\mathbf{u}(t^n), t^n) + \mathcal{L}(\mathbf{u}(t^{n+1}), t^{n+1})) \quad (40)$$

Pertanto, nel nostro caso, applicando il metodo di Crank-Nicholson a (38) si ottiene

$$\begin{aligned} (M + \frac{\Delta t}{2}K)\mathbf{u}_{n+1} = (M - \frac{\Delta t}{2}K)\mathbf{u}_n - \frac{\Delta t}{2} \Big(& M_D\mathbf{u}'_D(t^n) + K_D\mathbf{u}_D(t^n) + \\ & + M_D\mathbf{u}'_D(t^{n+1}) + K_D\mathbf{u}_D(t^{n+1}) + \\ & - (\mathbf{F}(t^n) + \mathbf{F}(t^{n+1})) - (\mathbf{G}_N(t^n) + \mathbf{G}_N(t^{n+1})) \Big), \end{aligned} \quad (41)$$

relazione effettivamente implementata nel codice.

6.2 Simulazioni, risultati e ordini di convergenza ottenuti.

In questa sezione si presentano diverse simulazioni relative all'implementazione del problema parabolico. Si precisa che tale implementazione ricorre alle funzioni di base in \mathbb{P}_2 .

E' inoltre noto dalla teoria che l'errore tra la soluzione esatta e quella discretizzata soddisfa le relazioni

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq c_1 \Delta t^2 + c_2 h^3 \quad \text{per } i \in \mathbb{P}_2, \quad (42)$$

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq c_1 \Delta t^2 + c_2 h^2 \quad \text{per } i \in \mathbb{P}_2. \quad (43)$$

Verrà pertanto mostrato che le simulazioni effettuate preservano gli ordini di convergenza, in spazio e in tempo, previsti da (42) e (43).

6.2.1 Test 1.

In prima battuta, si è voluto testare la bontà del codice implementato relativo al problema parabolico. A tal fine, si è considerato il problema (37) con i seguenti dati:

- $u(x, y, t) = \cos(3x + 3y - \pi t)$;
- $f(x, y, t) = 18 \cos(3x + 3y - \pi t) + \pi \sin(3x + 3y - \pi t)$;
- $\mu = 1$;
- Condizione di Dirichlet: $g_D = \cos(3x + 3y - \pi t)$ sui lati 2, 3, 4 del dominio;
- Condizione di Neumann: $g_N = 3 \sin(3x + 3y - \pi t)$ sul lato 1 del dominio.

Come intervallo temporale si è considerato $I_t = [0, 0.8]$ con passo $\Delta t = 0.4$.

Si mostrano, quindi, alcuni grafici della soluzione discretizzata, all'evolvere del tempo, e della soluzione esatta.

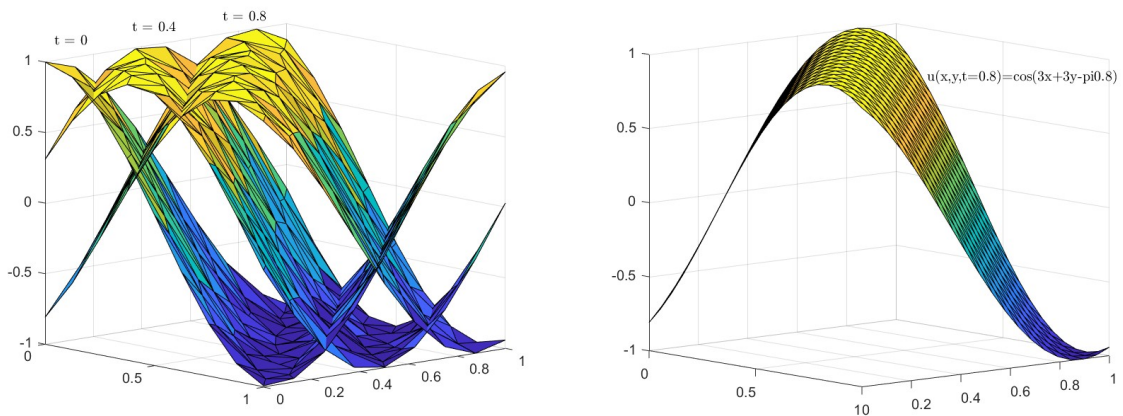


Figure 21: Immagine relativa al test 6.2.1: a sinistra alcuni grafici della soluzione discretizzata, ottenuta tramite il codice FEM, agli istanti $t = 0, 0.4, 0.8$. A destra un grafico della soluzione esatta all'istante $t = 0.8$.

6.2.2 Test 2: Ordine di convergenza per semi-discretizzazione in spazio.

Sfruttiamo questo test per mostrare come l'ordine di convergenza in spazio ottenuto sia coerente con (42) e (43). Consideriamo, pertanto, il problema (37) con i seguenti dati:

- $u(x, y, t) = t^2 + \sin(x + y)$;
- $f(x, y, t) = 2 \sin(x + y) + 2t$;
- $\mu = 1$;
- Condizione di Dirichlet: $g_D = t^2 + \sin(x + y)$ sui lati 2, 3, 4 del dominio;
- Condizione di Neumann: $g_N = -\cos(x + y)$ sul lato 1 del dominio.

Per calcolare l'errore in spazio, si è fatto variare il parametro di mesh h^2 ($h = \sqrt{A_{\max}}$) partendo da $h^2 = 0.01$ e dividendolo per 4 per 3 iterazioni. L'intervallo temporale considerato è $I_t = [0, 5]$ con passo $\Delta t = 0.5$. Si ottengono i seguenti ordini di convergenza:

Norma	Ordine in spazio
L2	3.0599
H1	2.0482

Table 5: Ordini di convergenza relativi alla semi-discretizzazione in spazio per il test 6.2.2.

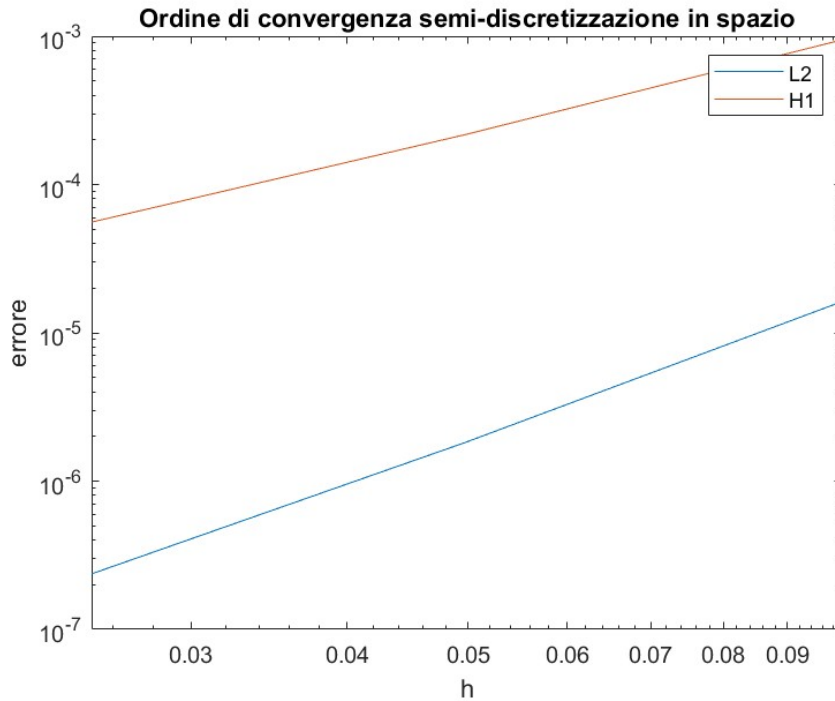


Figure 22: Andamento dell'errore in spazio in scala logaritmica relativo al test 6.2.2.

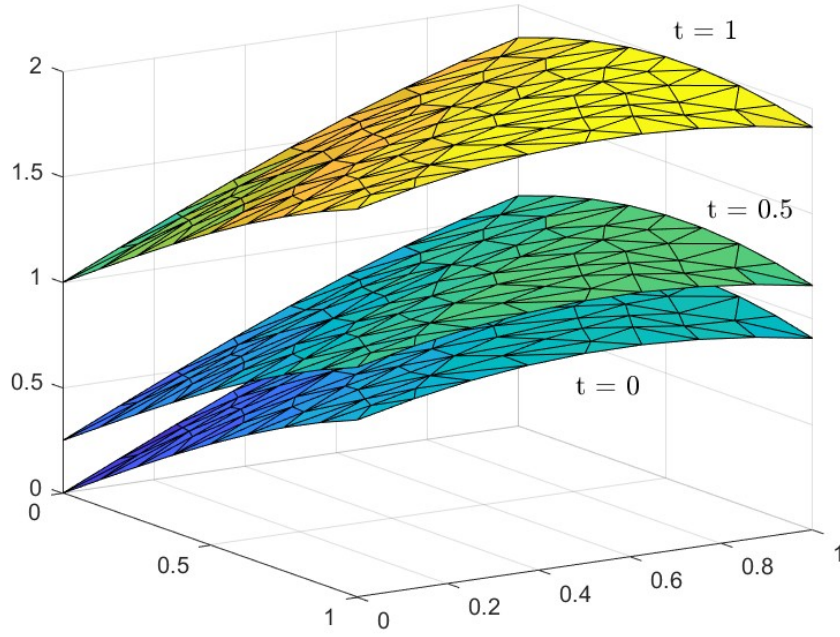


Figure 23: Grafico della soluzione discretizzata relativa al test 6.2.2 a tre istanti di tempo distinti. Qui è stata considerato l'intervallo temporale $I_t = [0, 1]$ con passo $\Delta t = 0.1$, mentre come parametro di mesh $h^2 = 0.01$ fissato.

6.2.3 Test 3: Ordine di convergenza per semi-discretizzazione in tempo

Analogamente al ruolo che il test 6.2.2 gioca per l'errore in spazio, sfruttiamo questo test per mostrare come l'ordine di convergenza in tempo ottenuto sia coerente con (42) e (43). Consideriamo, quindi, il problema (37) con i seguenti dati:

- $u(x, y, t) = x + y + \sin(t)$;
- $f(x, y, t) = \cos(t)$;
- $\mu = 1$;
- Condizione di Dirichlet: $g_D = x + y + \sin(t)$ sui lati 2, 3, 4 del dominio;
- Condizione di Neumann: $g_N = -1$ sul lato 1 del dominio.

Questa volta, però, si è tenuto fisso il parametro di mesh $h^2 = 0.01$, ed è stato fatto variare il passo temporale Δt , partendo da $\Delta t = 0.05$ e dividendolo per 4 per 4 iterazioni. L'intervallo temporale considerato è $I_t = [0, 1]$. Si ottengono i seguenti ordini di convergenza:

Norma	Ordine in tempo
L2	2.0001
H1	2.0000

Table 6: Ordini di convergenza relativi alla semi-discretizzazione in tempo per il test 6.2.3.

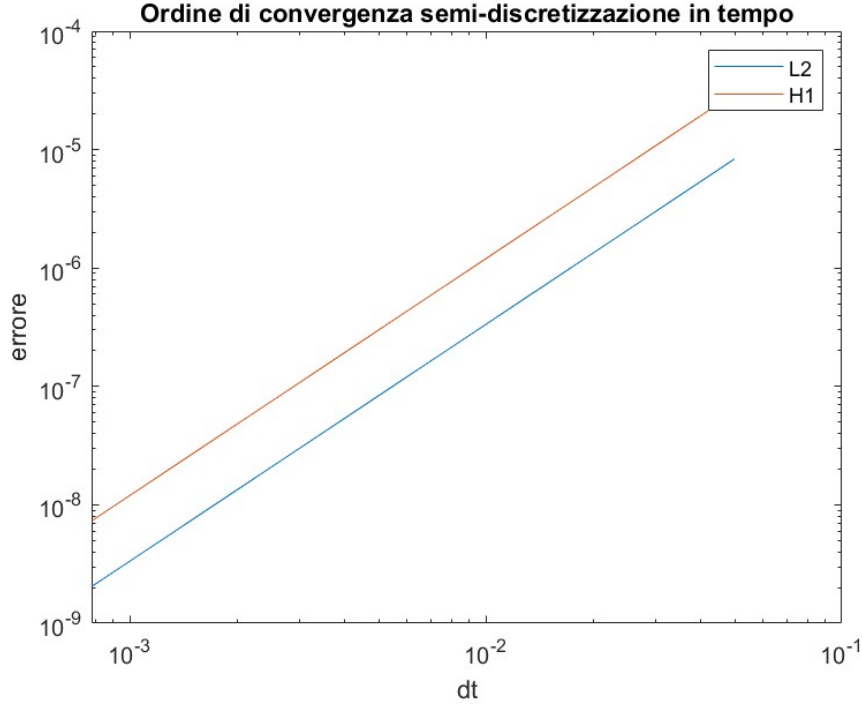


Figure 24: Andamento dell'errore in tempo in scala logaritmica relativo al test 6.2.3.

6.2.4 Test 4: variazione Test 3

Consideriamo una variazione del test 6.2.3. L'aver implementato il problema parabolico con i \mathbb{P}_2 ci permette di studiare l'errore in spazio anche per il problema (37) con i seguenti dati:

- $u(x, y, t) = x^2 + y^2 + \sin(t)$;
- $f(x, y, t) = \cos(t) - 4$;
- $\mu = 1$;
- Condizione di Dirichlet: $g_D = x^2 + y^2 + \sin(t)$ sui lati 2, 3, 4 del dominio;
- Condizione di Neumann: $g_N = -2y$ sul lato 1 del dominio.

Con lo stesso parametro di mesh h e gli stessi parametri sulla discretizzazione temporale si ottengono i seguenti ordini di convergenza:

Norma	Ordine in tempo
L2	2.0001
H1	2.0000

Table 7: Ordini di convergenza relativi alla semi-discretizzazione in tempo per il test 6.2.3. Ancora una volta la simulazione è coerente con la teoria.

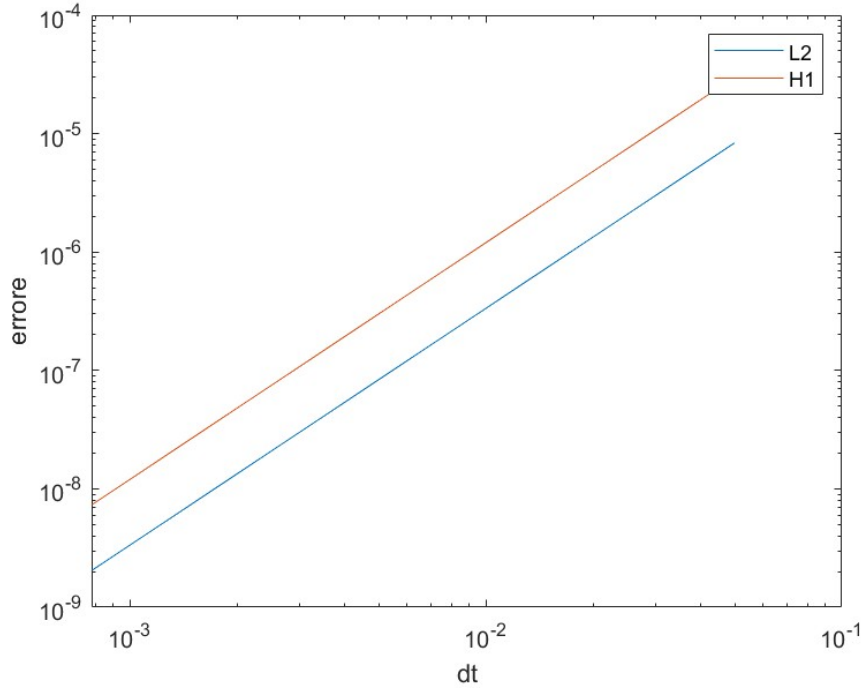


Figure 25: Andamento dell'errore in tempo in scala logaritmica relativo al test 6.2.4.

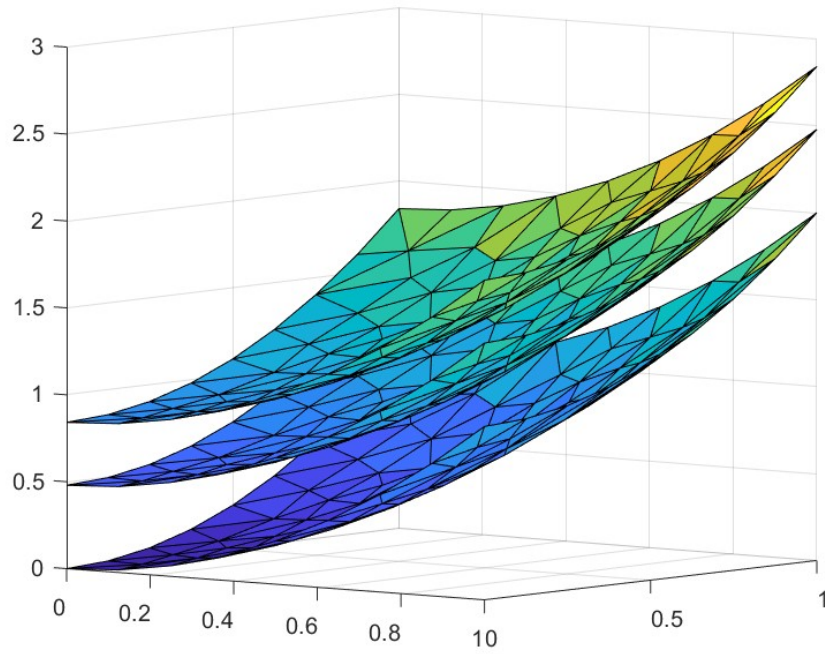


Figure 26: Grafico della soluzione discretizzata relativa al test 6.2.4 a tre istanti di tempo distinti $t = 0, 0.5, 1$. Qui è stato considerato l'intervallo temporale $I_t = [0, 1]$ con passo $\Delta t = 0.1$, mentre come parametro di mesh $h^2 = 0.01$ fissato.

6.2.5 Test 5: confronto tra Eulero Implicito e Crank Nicolson con elementi finiti \mathbb{P}_1

Confrontiamo gli errori in tempo tra il metodo di Crank Nicolson e il metodo Eulero di implicito. In particolare implementiamo il test con i seguenti dati:

- discretizzazione del dominio con elementi finiti langrangiani \mathbb{P}_1 ;
- $\rho = 1$;
- $\mu = 1$;
- $\beta = [0, 0]$
- $\sigma = 0$;
- periodo totale $T = 2$;
- soluzione $u(x, y) = x + y + \sin(t)$;
- si setta l'area del triangolatore con $h^2 = 0.01$;
- si eseguono 3 esperimenti, per il primo si setta il parametro $\Delta t = 0.1$ e si esegue il raffinamento in ciascun esperimento successivo ponendo $\frac{\Delta t}{4}$;
- settiamo condizioni di Dirichlet ai bordi.

Dalla definizione dei coefficienti e della soluzione esatta si ricava l'espressione della forzante $f(x, y)$.

Nelle figure (27) e (28) e la tabella (8) si osserva che i due metodi presentano ordini di convergenza in tempo diversi, come ci aspettiamo dalla teoria. Inoltre in entrambe le norme, gli errori per Crank-Nicolson sono di ordini di grandezza minori rispetto agli errori per Eulero Implicito.

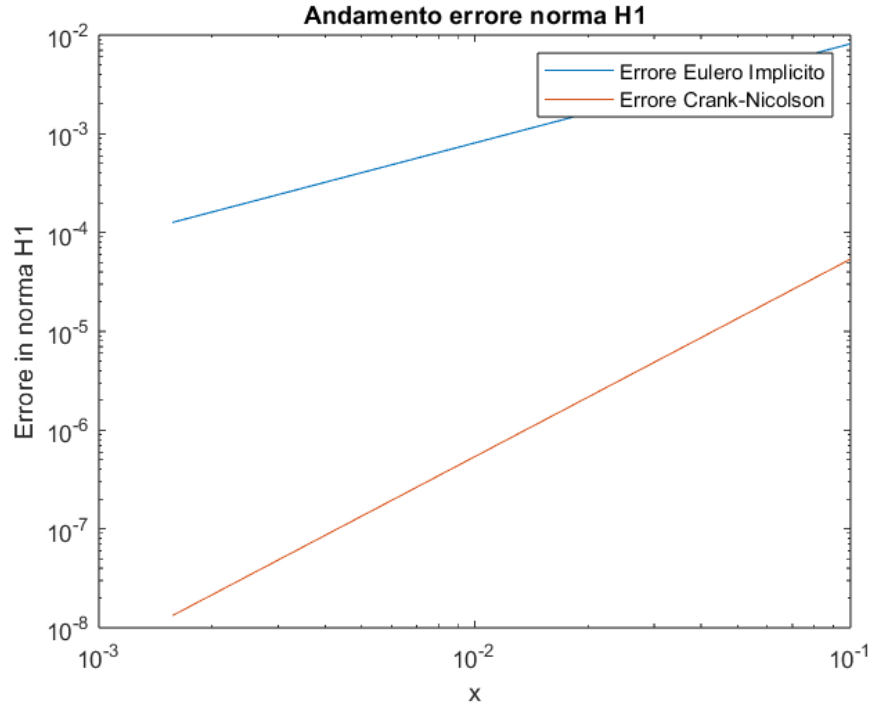


Figure 27: Confronto in scala logaritmica dell'errore in norma H1 al variare di Δt per il test 6.2.5.

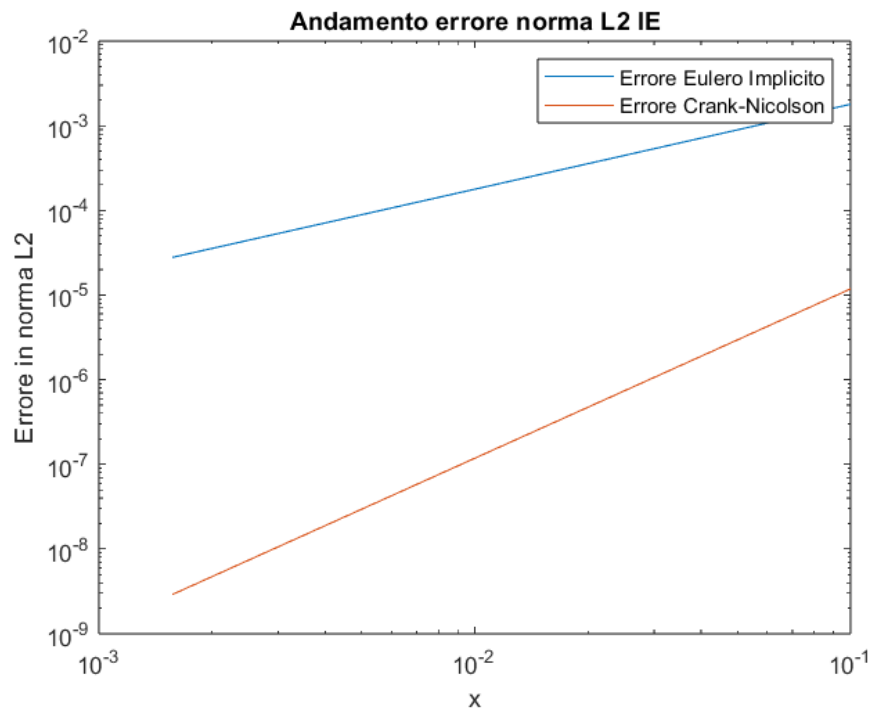


Figure 28: Confronto in scala logaritmica dell'errore in norma L^2 al variare di Δt per il test 6.2.5.

Ordine di Convergenza	Norma L^2	Norma H^1	Condizionamento matrice di massa
Crank-Nicolson	2.0002	2.0004	9.55e-17
Eulero Implicito	1.0022	1.0023	9.55e-17

Table 8: Ordini di convergenza degli errori in norma L^2 , in norma H^1 e del numero di condizionamento della matrice di massa B rispetto a Δt per il test 6.2.5.