POLITECNICO
MILANO 1863

Metodi di Ottimizzazione della Ricerca Operativa

Year 2019/2020

SOLUZIONE AL PROBLEMA DELLE n REGINE SU SCACCHIERA $n \times n$

1. MODELLIZZAZIONE GENERICO CASO nxn

1.1 VARIABILI

Le variabili utilizzate sono tutte variabili binarie, e ognuna rappresenta la generica “casella” della scacchiera, che è quindi stata modellizzata come una matrice di dimensione $n \times n$.
La generica variabile x_{ij} assumerà valori binari in questo modo:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ la\ regina\ occupa\ la\ casella\ (i,j) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

1.2 FUNZIONE OBIETTIVO

La funzione obiettivo non è strettamente necessaria per questo problema. Tuttavia è comunque necessario inserirla ai fini della soluzione del problema tramite l’ottimizzazione lineare. Per questo motivo è stato deciso di utilizzare una funzione obiettivo più utile: è sicuramente interessante scoprire se esistono soluzioni nelle quali una regina occupa una casella che è stata determinata a priori (1), o più regine occupano più caselle (2), massimizzando le dette caselle:

$$max \sum_{k=1}^{N} x_{ij_k} \quad i, j \in [1, n]$$

Dove N è il numero di caselle nelle quali si vuole ci sia la regina
Nel caso (1) ci sarà: $N = 1$
Nel caso (2) ci sarà: $1 < N < n \times n$

Questo tipo di funzione obiettivo oltre che essere interessante da un punto di vista qualitativo, può essere anche utile: facendo ciclare una per volta le caselle, massimizzando ogni casella a ogni iterazione del problema, e risolvendo i relativi problemi associati (che saranno $n \times n$ problemi), si ottengono in output tutte le soluzioni possibili per il problema delle n regine su una scacchiera $n \times n$.
Essendo scritto in forma generale, è utile anche capire cosa succede al problema ad ogni iterazione $n + 1$. Infatti, i vincoli, le variabili e quindi potenzialmente il numero di problemi da risolvere per scoprire tutte le soluzioni con il metodo appena descritto, aumentano. Questa analisi è stata svolta una volta completato il modello, e si trova a Pag. 6.

1.3 VINCOLI

I vincoli del problema stabiliscono delle condizioni logiche, le quali seguendo le regole di movimento che la regina ha sulla scacchiera, devono per forza essere verificate.

Per prima cosa, c'è il vincolo che avrà il compito di definire quante regine ci sono sulla scacchiera, imponendo la sommatoria di tutte le variabili binarie uguale al numero di regine:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = n$$

Ci saranno poi dei vincoli i quali esprimono che ci può essere al massimo una regina per ogni orizzontale della scacchiera:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \ \ \forall i$$

E saranno un numero n di vincoli.

Poi ci saranno dei vincoli i quali esprimono che può esserci al massimo una regina per ogni verticale della scacchiera:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \ \ \forall j$$

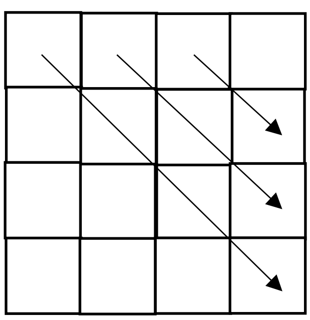
E anche questi saranno n vincoli.

Infine ci saranno i vincoli per i quali una e una sola regina può trovarsi su ciascuna diagonale:

a) Diagonali sopra la diagonale principale (compresa):

$$\sum_{i=1}^{n-k} x_{i,i+k} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n-2$$

Graficamente, le diagonali coperte dal vincolo sono quelle in figura, dove è stata presa come esempio una scacchiera 4×4:



Un esempio di ciclo per ottenere i vincoli descritti dalla formula, è:

$k = 0$ (prima iterazione, k assume quindi il valore 0)
    $i = 1$ (mantengo costante il valore di k a 0, ciclo sulla i seguendo la sommatoria)
    $i = 2$
    .
    .
    .
    $i = n - k$ (ultima iterazione di i, seguendo la sommatoria avrà valore $i = n - k$)

$k = 1$ (seconda iterazione, k assume valore 1 e ripeto il ciclo sulla i)
    $i = 1$
    $i = 2$
    .
    .
    .
    $i = n - k$
.
. (ripeto questo schema per diversi valori di k)
.

$k = n - 2$ (ultimo valore che k dovrà assumere è $k = n - 2$)
    $i = 1$
    $i = 2$
    .
    .
    .
    $i = n - k$

Ad ogni valore assunto da k viene quindi generato un nuovo vincolo da aggiungere al modello.

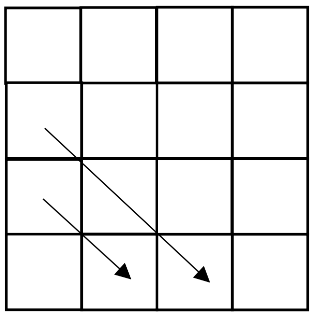
Le successive lettere nell'elenco sono le diagonali rimanenti, ma la logica con cui sono stati scritti i vincoli segue la stessa appena descritta.

b) Diagonali sotto la diagonale principale:

$$\sum_{i=1}^{n-1-k} x_{i+1+k,i} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n-3$$

Noto che se $n = 2$ il vincolo non si applica. ($\nexists k : k > 0 \,\cap\, k < -1$)

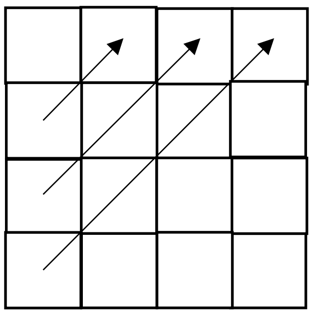
Graficamente i vincoli sono i seguenti:



c) Diagonali sopra la diagonale secondaria (compresa):

$$\sum_{i=0+k}^{n-1} x_{n-i,i+1-k} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n-2$$

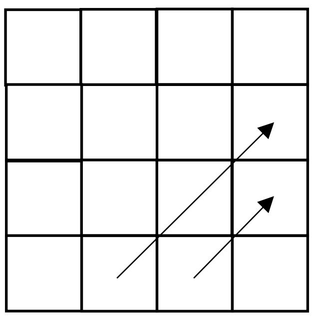
Situazione grafica:



d) Diagonali sotto la diagonale secondaria:

$$\sum_{i=0}^{n-2-k} x_{n-i,i+2+k} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n-3$$

Situazione grafica:



1.4 MODELLO

Il modello di ottimizzazione lineare per la soluzione del problema in forma generale delle n regine su una scacchiera di dimensione $n \times n$, risulta essere il seguente:

$$max \sum_{k=1}^{N} x_{ij_k} \qquad i,j \in [1,n]$$

$$subject\ to \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{n-k} x_{i,i+k} \leq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n-2$$

$$\sum_{i=1}^{n-1-k} x_{i+1+k,i} \leq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n-3$$

$$\sum_{i=0+k}^{n-1} x_{n-i,i+1-k} \leq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n-2$$

$$\sum_{i=0}^{n-2-k} x_{n-i,i+2+k} \leq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n-3$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i;\ \forall j$$

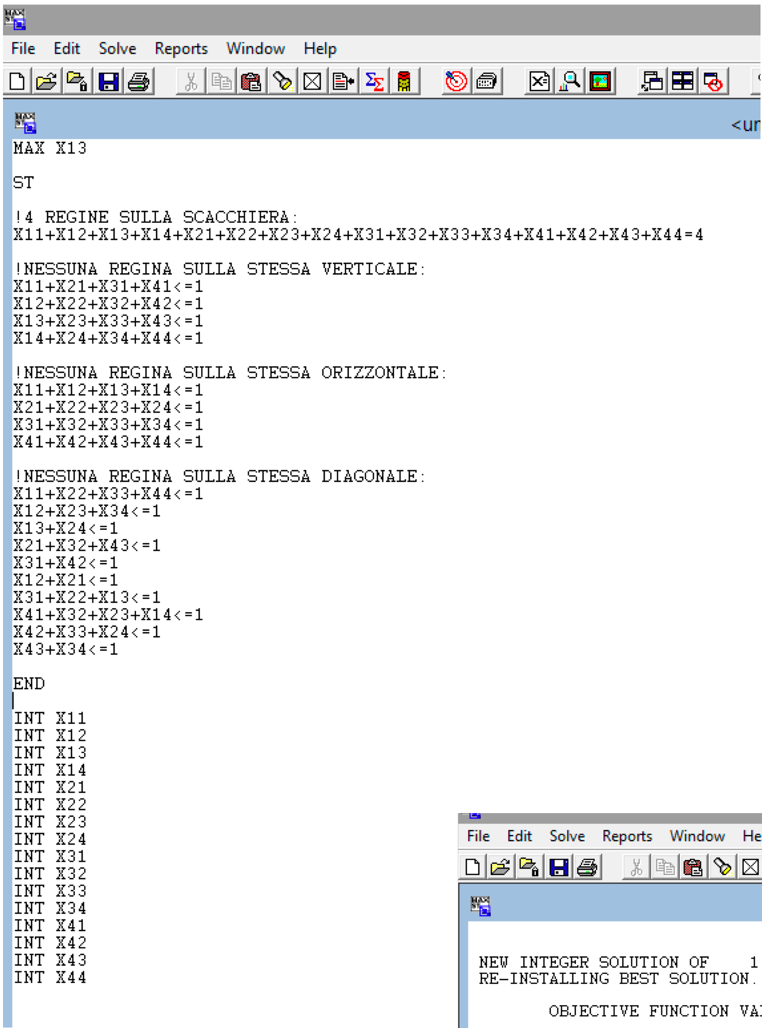
Osservazioni:

A ogni $n+1$ si creano 2 diagonali maggiori e 2 diagonali minori in più, allora a ogni $n+1$ si hanno 4 vincoli di diagonali in più rispetto a n. Si hanno anche 1 vincolo in più sia sulla condizione verticale che su quella orizzontale.
Ci saranno poi, nel passaggio da n a $n+1$, anche un numero pari a:

$$(n+1)(n+1) - n \times n \quad \rightarrow \quad 2n+1$$

in più di variabili.

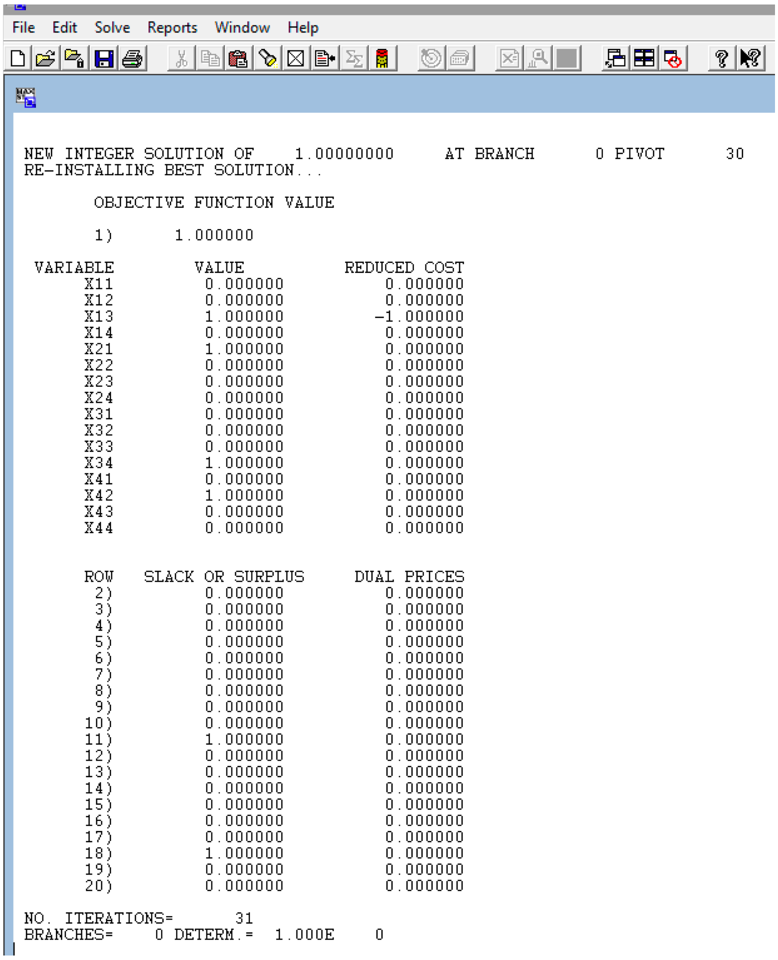
2. SOLUZIONE PROBLEMA 4×4 CON LINDO



```
MAX X13

ST

!4 REGINE SULLA SCACCHIERA:
X11+X12+X13+X14+X21+X22+X23+X24+X31+X32+X33+X34+X41+X42+X43+X44=4

!NESSUNA REGINA SULLA STESSA VERTICALE:
X11+X21+X31+X41<=1
X12+X22+X32+X42<=1
X13+X23+X33+X43<=1
X14+X24+X34+X44<=1

!NESSUNA REGINA SULLA STESSA ORIZZONTALE:
X11+X12+X13+X14<=1
X21+X22+X23+X24<=1
X31+X32+X33+X34<=1
X41+X42+X43+X44<=1

!NESSUNA REGINA SULLA STESSA DIAGONALE:
X11+X22+X33+X44<=1
X12+X23+X34<=1
X13+X24<=1
X21+X32+X43<=1
X31+X42<=1
X12+X21<=1
X31+X22+X13<=1
X41+X32+X23+X14<=1
X42+X33+X24<=1
X43+X34<=1

END

INT X11
INT X12
INT X13
INT X14
INT X21
INT X22
INT X23
INT X24
INT X31
INT X32
INT X33
INT X34
INT X41
INT X42
INT X43
INT X44
```

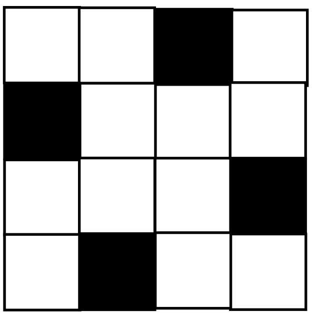
Sulla sinistra, il modello scritto su Lindo. La funzione obiettivo massimizza una casella nella quale si vuole che ci sia la regina (quindi $N = 1$, FUNZIONE OBIETTIVO, Pag.2).

Sotto, l'output di Lindo. La funzione obiettivo vale 1, a significato che la soluzione cercata con la regina posizionata su x_{13} esiste. I valori delle variabili uguali a 1 indicano le caselle sulle quali va posizionata la regina. Risolvendo il problema ciclando una ad una le caselle della funzione obiettivo, scopro che l'unica soluzione possibile (distinta) per il problema 4×4 è quella descritta dall'output.



```
NEW INTEGER SOLUTION OF    1.00000000     AT BRANCH      0 PIVOT      30
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)       1.000000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X11         0.000000          0.000000
      X12         0.000000          0.000000
      X13         1.000000         -1.000000
      X14         0.000000          0.000000
      X21         1.000000          0.000000
      X22         0.000000          0.000000
      X23         0.000000          0.000000
      X24         0.000000          0.000000
      X31         0.000000          0.000000
      X32         0.000000          0.000000
      X33         0.000000          0.000000
      X34         1.000000          0.000000
      X41         0.000000          0.000000
      X42         1.000000          0.000000
      X43         0.000000          0.000000
      X44         0.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.000000
       3)         0.000000          0.000000
       4)         0.000000          0.000000
       5)         0.000000          0.000000
       6)         0.000000          0.000000
       7)         0.000000          0.000000
       8)         0.000000          0.000000
       9)         0.000000          0.000000
      10)         0.000000          0.000000
      11)         1.000000          0.000000
      12)         0.000000          0.000000
      13)         0.000000          0.000000
      14)         0.000000          0.000000
      15)         0.000000          0.000000
      16)         0.000000          0.000000
      17)         0.000000          0.000000
      18)         1.000000          0.000000
      19)         0.000000          0.000000
      20)         0.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=      31
 BRANCHES=     0 DETERM.=   1.000E    0
```

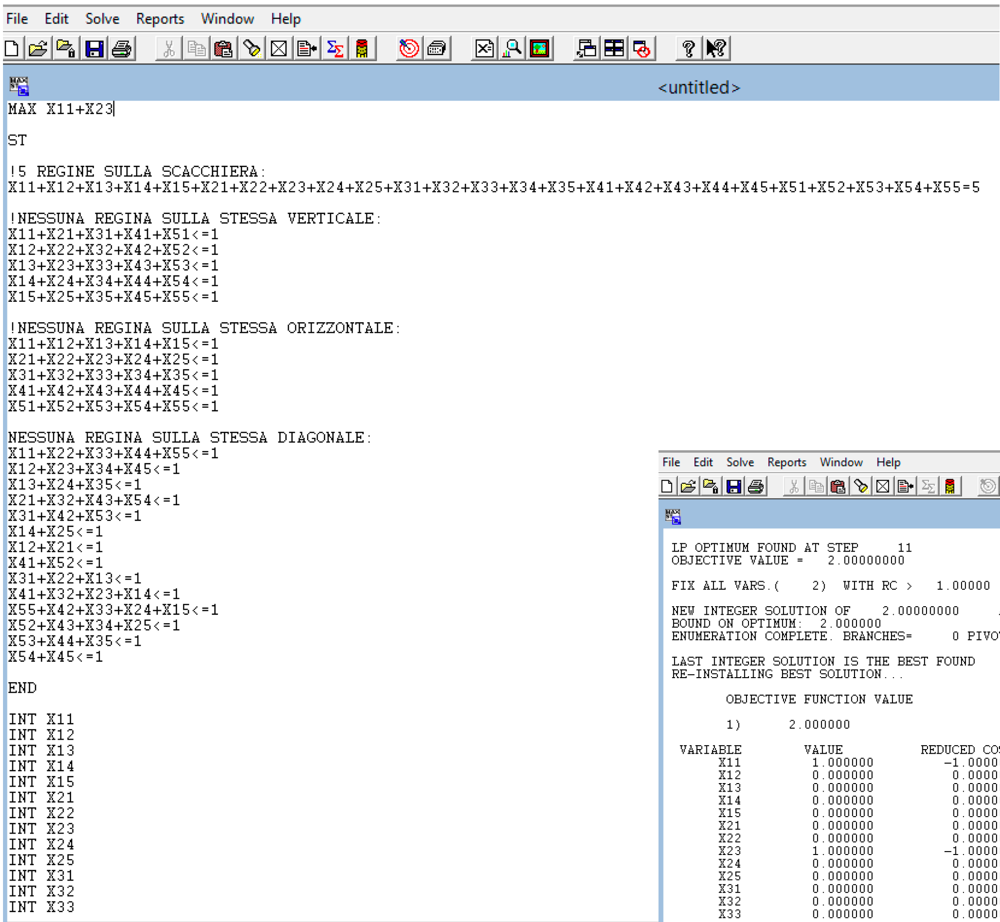
Soluzione sulla scacchiera:
(Regine evidenziate in nero)



3. SOLUZIONE PROBLEMA 5×5 CON LINDO

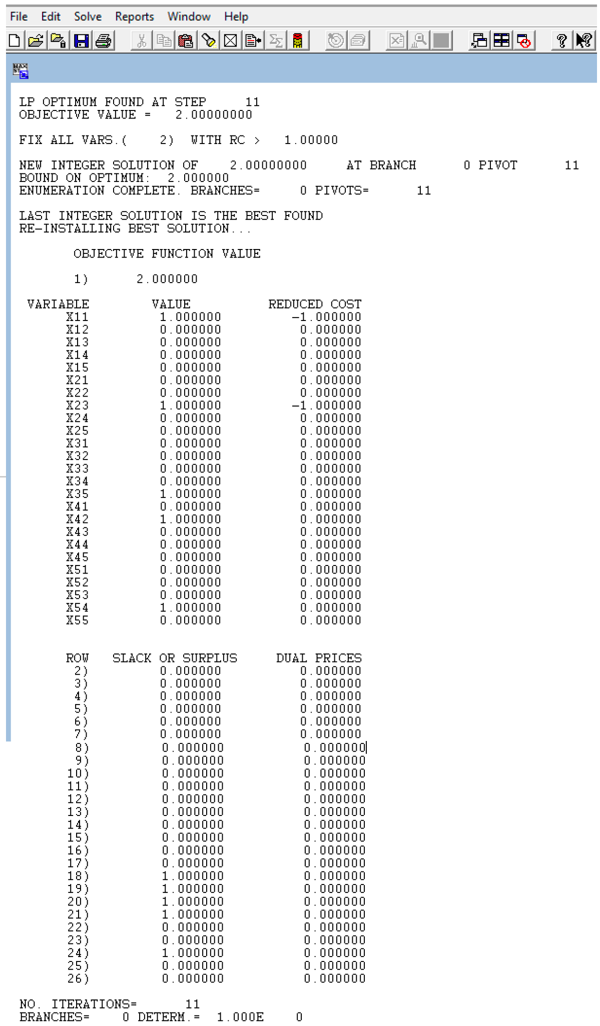
Il problema 5×5 ha solo due soluzioni distinte, le quali sono state trovate con il solito metodo di ciclare una ad una le caselle massimizzate e risolvere il relativo problema.

3.1 SOLUZIONE 1



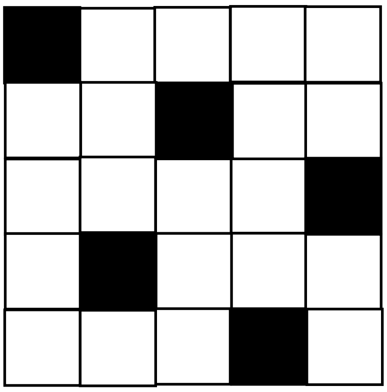
```
MAX X11+X23

ST

!5 REGINE SULLA SCACCHIERA:
X11+X12+X13+X14+X15+X21+X22+X23+X24+X25+X31+X32+X33+X34+X35+X41+X42+X43+X44+X45+X51+X52+X53+X54+X55=5

!NESSUNA REGINA SULLA STESSA VERTICALE:
X11+X21+X31+X41+X51<=1
X12+X22+X32+X42+X52<=1
X13+X23+X33+X43+X53<=1
X14+X24+X34+X44+X54<=1
X15+X25+X35+X45+X55<=1

!NESSUNA REGINA SULLA STESSA ORIZZONTALE:
X11+X12+X13+X14+X15<=1
X21+X22+X23+X24+X25<=1
X31+X32+X33+X34+X35<=1
X41+X42+X43+X44+X45<=1
X51+X52+X53+X54+X55<=1

NESSUNA REGINA SULLA STESSA DIAGONALE:
X11+X22+X33+X44+X55<=1
X12+X23+X34+X45<=1
X13+X24+X35<=1
X21+X32+X43+X54<=1
X31+X42+X53<=1
X14+X25<=1
X12+X21<=1
X41+X52<=1
X31+X22+X13<=1
X41+X32+X23+X14<=1
X55+X42+X33+X24+X15<=1
X52+X43+X34+X25<=1
X53+X44+X35<=1
X54+X45<=1

END

INT X11
INT X12
INT X13
INT X14
INT X15
INT X21
INT X22
INT X23
INT X24
INT X25
INT X31
INT X32
INT X33
```

A sinistra, il problema su Lindo. Questa volta si è cercata una soluzione nella quale la regina occupava sia la casella x_{11} che la casella x_{23} (quindi $N = 2$, FUNZIONE OBIETTIVO, pag.2).

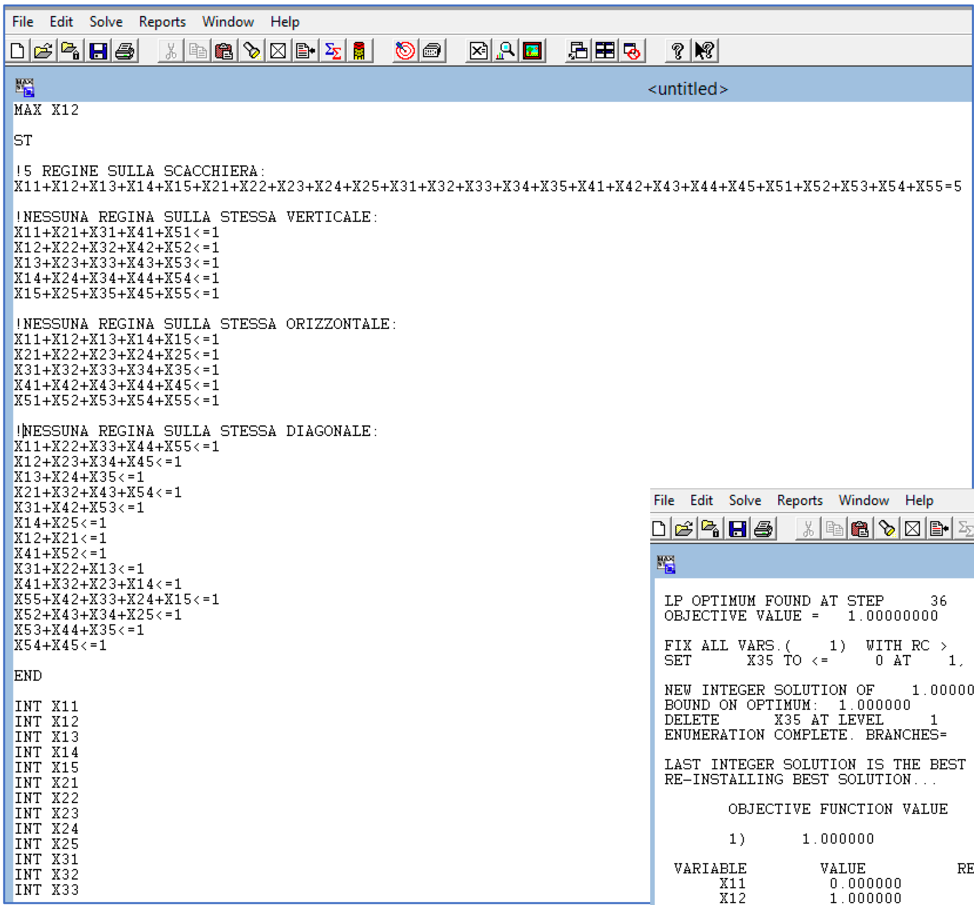


```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP     11
OBJECTIVE VALUE =    2.00000000

FIX ALL VARS.(     2)  WITH RC >    1.00000

NEW INTEGER SOLUTION OF     2.00000000     AT BRANCH      0 PIVOT      11
BOUND ON OPTIMUM:  2.000000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=      11

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      2.000000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X11         1.000000         -1.000000
      X12         0.000000          0.000000
      X13         0.000000          0.000000
      X14         0.000000          0.000000
      X15         0.000000          0.000000
      X21         0.000000          0.000000
      X22         0.000000          0.000000
      X23         1.000000         -1.000000
      X24         0.000000          0.000000
      X25         0.000000          0.000000
      X31         0.000000          0.000000
      X32         0.000000          0.000000
      X33         0.000000          0.000000
      X34         0.000000          0.000000
      X35         1.000000          0.000000
      X41         0.000000          0.000000
      X42         1.000000          0.000000
      X43         0.000000          0.000000
      X44         0.000000          0.000000
      X45         0.000000          0.000000
      X51         0.000000          0.000000
      X52         0.000000          0.000000
      X53         0.000000          0.000000
      X54         1.000000          0.000000
      X55         0.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.000000
       3)         0.000000          0.000000
       4)         0.000000          0.000000
       5)         0.000000          0.000000
       6)         0.000000          0.000000
       7)         0.000000          0.000000
       8)         0.000000          0.000000
       9)         0.000000          0.000000
      10)         0.000000          0.000000
      11)         0.000000          0.000000
      12)         0.000000          0.000000
      13)         0.000000          0.000000
      14)         0.000000          0.000000
      15)         0.000000          0.000000
      16)         0.000000          0.000000
      17)         0.000000          0.000000
      18)         1.000000          0.000000
      19)         1.000000          0.000000
      20)         1.000000          0.000000
      21)         1.000000          0.000000
      22)         0.000000          0.000000
      23)         0.000000          0.000000
      24)         1.000000          0.000000
      25)         0.000000          0.000000
      26)         0.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=      11
 BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
```

A destra, l'output di Lindo. La funzione obiettivo vale 2, a significare che esiste una soluzione in cui entrambe le caselle massimizzate contengono una regina:



3.2 SOLUZIONE 2



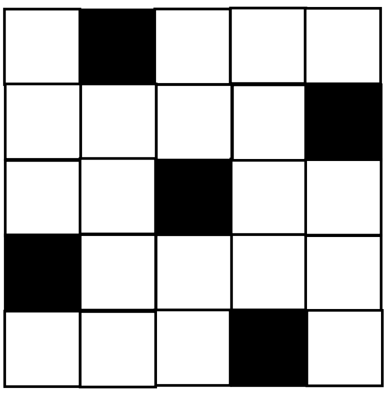
File Edit Solve Reports Window Help

<untitled>

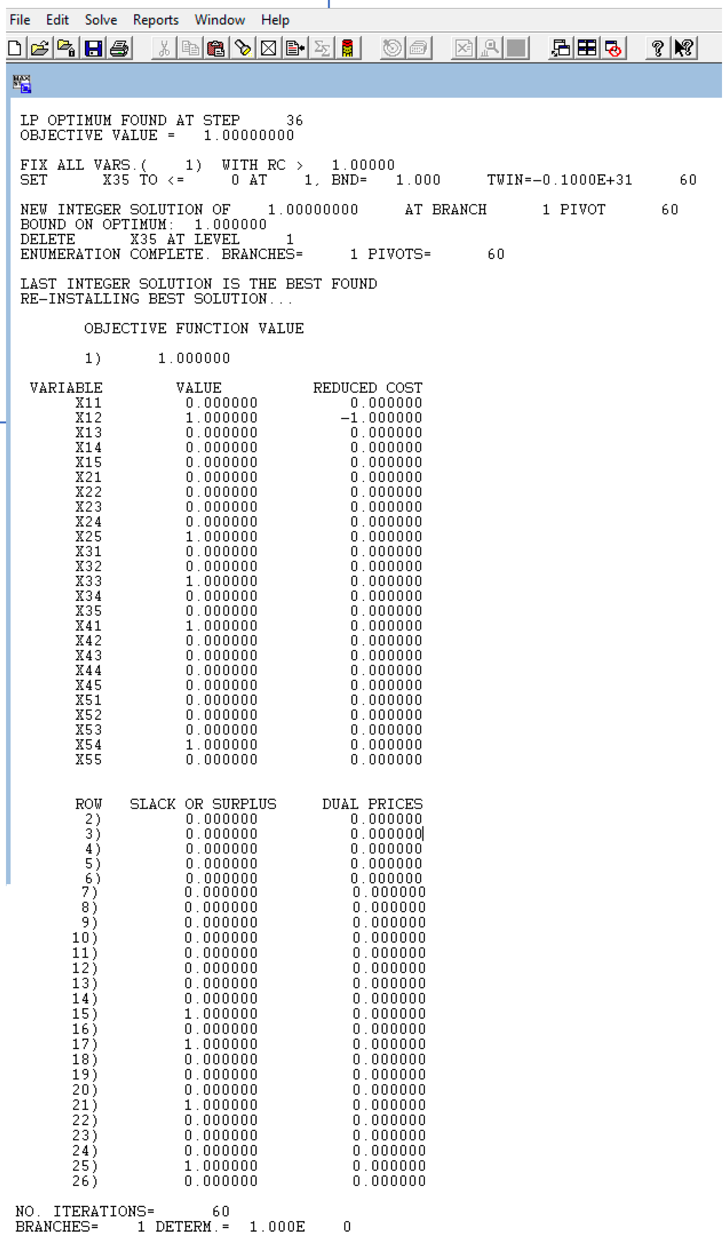
```
MAX X12

ST

!5 REGINE SULLA SCACCHIERA:
X11+X12+X13+X14+X15+X21+X22+X23+X24+X25+X31+X32+X33+X34+X35+X41+X42+X43+X44+X45+X51+X52+X53+X54+X55=5

!NESSUNA REGINA SULLA STESSA VERTICALE:
X11+X21+X31+X41+X51<=1
X12+X22+X32+X42+X52<=1
X13+X23+X33+X43+X53<=1
X14+X24+X34+X44+X54<=1
X15+X25+X35+X45+X55<=1

!NESSUNA REGINA SULLA STESSA ORIZZONTALE:
X11+X12+X13+X14+X15<=1
X21+X22+X23+X24+X25<=1
X31+X32+X33+X34+X35<=1
X41+X42+X43+X44+X45<=1
X51+X52+X53+X54+X55<=1

!NESSUNA REGINA SULLA STESSA DIAGONALE:
X11+X22+X33+X44+X55<=1
X12+X23+X34+X45<=1
X13+X24+X35<=1
X21+X32+X43+X54<=1
X31+X42+X53<=1
X14+X25<=1
X12+X21<=1
X41+X52<=1
X31+X22+X13<=1
X41+X32+X23+X14<=1
X55+X42+X33+X24+X15<=1
X52+X43+X34+X25<=1
X53+X44+X35<=1
X54+X45<=1

END

INT X11
INT X12
INT X13
INT X14
INT X15
INT X21
INT X22
INT X23
INT X24
INT X25
INT X31
INT X32
INT X33
```

A sinistra il problema su Lindo. Questa volta è stato scelto di massimizzare la casella x_{12}, in modo da ottenere l'altra soluzione distinta per il caso 5×5.

A destra, l'output con la soluzione. Come le altre, la variabile con valore pari a 1 significa che la regina andrà messa sulla casella corrispondente. Graficamente, la soluzione ottenuta è la seguente:



Che ovviamente è diversa rispetto a quella ottenuta al punto "3.1".



File Edit Solve Reports Window Help

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP     36
OBJECTIVE VALUE =    1.00000000

FIX ALL VARS.(     1)  WITH RC >    1.00000
SET       X35 TO <=      0 AT     1, BND=    1.000     TWIN=-0.1000E+31      60

NEW INTEGER SOLUTION OF     1.00000000     AT BRANCH      1 PIVOT      60
BOUND ON OPTIMUM:  1.000000
DELETE      X35 AT LEVEL     1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     1 PIVOTS=      60

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      1.000000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X11         0.000000          0.000000
      X12         1.000000         -1.000000
      X13         0.000000          0.000000
      X14         0.000000          0.000000
      X15         0.000000          0.000000
      X21         0.000000          0.000000
      X22         0.000000          0.000000
      X23         0.000000          0.000000
      X24         0.000000          0.000000
      X25         1.000000          0.000000
      X31         0.000000          0.000000
      X32         0.000000          0.000000
      X33         1.000000          0.000000
      X34         0.000000          0.000000
      X35         0.000000          0.000000
      X41         1.000000          0.000000
      X42         0.000000          0.000000
      X43         0.000000          0.000000
      X44         0.000000          0.000000
      X45         0.000000          0.000000
      X51         0.000000          0.000000
      X52         0.000000          0.000000
      X53         0.000000          0.000000
      X54         1.000000          0.000000
      X55         0.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.000000
       3)         0.000000          0.000000
       4)         0.000000          0.000000
       5)         0.000000          0.000000
       6)         0.000000          0.000000
       7)         0.000000          0.000000
       8)         0.000000          0.000000
       9)         0.000000          0.000000
      10)         0.000000          0.000000
      11)         0.000000          0.000000
      12)         0.000000          0.000000
      13)         0.000000          0.000000
      14)         0.000000          0.000000
      15)         1.000000          0.000000
      16)         0.000000          0.000000
      17)         1.000000          0.000000
      18)         0.000000          0.000000
      19)         0.000000          0.000000
      20)         0.000000          0.000000
      21)         1.000000          0.000000
      22)         0.000000          0.000000
      23)         0.000000          0.000000
      24)         0.000000          0.000000
      25)         1.000000          0.000000
      26)         0.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=      60
BRANCHES=     1 DETERM.=    1.000E    0
```