



UNIVERSITÀ  
degli STUDI  
di CATANIA

Dipartimento  
di Fisica  
e Astronomia  
*"Ettore Majorana"*



CORSO DI LAUREA IN FISICA

---

AGOZZINO M. - DI PRIMA D. - DI STEFANO E.

LEZIONI DI RELATIVITÀ RISTRETTA

---

ANNO ACCADEMICO 2022/2023



# Prefazione

I seguenti appunti sono una trascrizione degli appunti di relatività ristretta presi durante le lezioni tenute dal prof. Lombardo nell'a.a. 2022/2023. Essi sono stati integrati con altre fonti, tra cui libri e appunti di altre materie (vedesi bibliografia per ulteriori informazioni). Gli appunti sono stati completati con l'applicazione della relatività speciale all'elettromagnetismo. Eventuali argomenti di approfondimento non svolti a lezione nell'a.a. 2022/23, ma comunque interessanti da un punto di vista fisico, sono indicati dal simbolo (\*). Le immagini presenti nel documento sono state realizzate dagli autori ad eccezione di 3.1, la cui fonte è la pagina web <https://www.astronomia.com/2011/04/28/dentro-le-fauci-del-mostro/>. La versione aggiornata del file si può trovare all'indirizzo:

[https://github.com/danielediprima/appunti\\_fisica\\_2](https://github.com/danielediprima/appunti_fisica_2)

Saremo lieti di accogliere eventuali correzioni/aggiunte all'indirizzo:

[danielediprima17@gmail.com](mailto:danielediprima17@gmail.com)

Gli autori



# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>i</b>
<b>1 La meccanica classica</b>	<b>1</b>
1.1 Eventi . . . . .	1
1.2 Le trasformazioni di Galileo . . . . .	1
1.2.1 Il gruppo $SGal(10)$ . . . . .	3
1.3 Il principio di relatività galileiana . . . . .	4
1.4 Sistemi di riferimento inerziali . . . . .	4
1.4.1 Approccio Lagrangiano alla legge d'inerzia (*) . . . . .	5
1.4.2 Trasformazioni fra sistemi inerziali (*) . . . . .	6
1.5 La crisi della meccanica classica . . . . .	7
1.5.1 La velocità della luce è finita . . . . .	7
1.5.2 La legge di composizione delle velocità vale anche per la luce? .	7
1.5.3 Le leggi dell'elettromagnetismo non sono invarianti per trasfor- mazioni di Galileo . . . . .	9
<b>2 I postulati di Einstein</b>	<b>11</b>
2.1 I principi della relatività ristretta . . . . .	11
2.2 Il sistema di riferimento relativistico (*) . . . . .	11
2.3 Le trasformazioni di Lorentz . . . . .	12
2.3.1 Dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz mediante le fun- zioni iperboliche . . . . .	12
2.3.2 Dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz mediante il K calculus (*) . . . . .	14
2.3.3 Dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz tramite invarian- za di $c$ (*) . . . . .	19
2.3.4 Deduzione dalle equazioni di Maxwell (*) . . . . .	21
2.4 Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz . . . . .	24
2.5 Prova sperimentale della teoria della relatività . . . . .	25
2.6 Legge di composizione delle velocità . . . . .	26
2.6.1 Dai risultati di Fizeau è possibile risalire alle trasformazioni di Lorentz (*) . . . . .	28

<b>3</b>	<b>Lo spazio-tempo 4-dimensionale</b>	<b>29</b>
3.1	Spazi euclidei . . . . .	29
3.2	Lo spaziotempo di Minkowski . . . . .	29
3.3	Intervallo relativistico . . . . .	31
3.4	Geodetica di un punto materiale libero . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Dinamica relativistica</b>	<b>35</b>
4.1	Quadrivettori . . . . .	35
4.2	Quadrivettore velocità e quadrivettore accelerazione . . . . .	36
4.3	Dinamica relativistica . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Elettromagnetismo relativistico</b>	<b>41</b>
5.1	L'invarianza della carica elettrica . . . . .	41
5.1.1	Metodo sperimentale . . . . .	41
5.1.2	Metodo teorico (*) . . . . .	42
5.2	Quadrivettore densità di corrente . . . . .	42
5.2.1	Formulazione differente . . . . .	43
5.3	Covarianza relativistica dell'elettrodinamica . . . . .	44
5.4	L'invarianza delle equazioni di Maxwell (*) . . . . .	46

# La meccanica classica

## 1.1 Eventi

Si definisce evento un fenomeno del mondo fisico caratterizzabile mediante quattro componenti  $(x, y, z, t)$ , cioè posizione e tempo. Mentre in una visione statica dell'universo non interessano le connessioni tra eventi, in una visione dinamica di esso si cerca di determinare una serie di leggi fisiche che, a partire da un evento, permetta di studiare la sua evoluzione spazio-temporale. In linea di principio un evento è assoluto cioè non deve dipendere dal riferimento scelto per rappresentarlo; nella visione tensorialistica della meccanica classica infatti esistono una serie di leggi (dovute a Levi-Civita et al.) che permettono di passare da un sistema di riferimento a un altro. Questa visione della meccanica dovette però scontrarsi con la quella omografica in cui si opera con gli enti fisici in quanto tali e non sulle loro componenti rispetto a un dato sistema di riferimento.

## 1.2 Le trasformazioni di Galileo

In un sistema di riferimento arbitrario un evento è descritto da quattro numeri:  $x, y, z, t$ . Qual è la relazione tra questi numeri e i numeri  $x', y', z', t'$  che descrivono lo stesso evento in un altro sistema di riferimento? Restringiamo il nostro problema e consideriamo solamente riferimenti che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto al primo, cioè riferimenti che non presentano accelerazione relativa. Siano  $\{O, x, y, z\}$  e  $\{O', x', y', z'\}$  i riferimenti in questione supponendo che il secondo si muova rispetto al primo con velocità  $\vec{v}_0$ . Per semplicità diremo fisso il sistema  $\{O, x, y, z\}$ , mentre diremo relativo o mobile il sistema  $\{O', x', y', z'\}$ . Fissato un evento descritto dal raggio vettore  $\vec{r}'$  nel riferimento relativo, si può ottenere con facilità la relazione che lo lega con il raggio vettore  $\vec{r}$  nel riferimento fisso:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad (1.1)$$

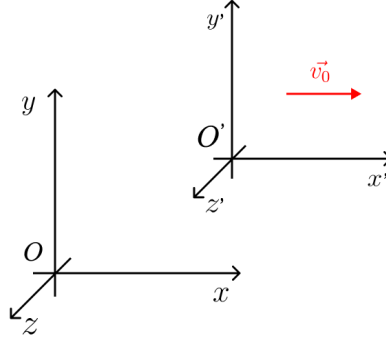
essendo  $\vec{r}_0$  il vettore posizione dell'origine del riferimento relativo rispetto a quella del riferimento fisso. Poiché il riferimento relativo si muove di moto rettilineo uniforme, si può scrivere:

$$\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{v}_0 t \quad (1.2)$$

da cui, supponendo che all'istante iniziale  $t = 0$  le origini dei due sistemi di riferimento siano coincidenti, si ottiene:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \quad (1.3)$$

Senza perdere di generalità, possiamo ruotare i due sistemi di riferimento attorno le loro origini e agire nel seguente modo: orientiamo gli assi  $x$  e  $x'$  in modo che abbiano la stessa direzione della velocità  $\vec{v}_0$ ; quindi ruotando i riferimenti attorno all'asse comune, orientiamo gli assi  $y, y'$  e  $z, z'$  in modo che siano paralleli tra loro.



**Figura 1.1:** Sistemi di riferimento inerziali

In questo caso la velocità  $\vec{v}_0$  ha componenti  $(v_0, 0, 0)$  e la (1.1) diventa:

$$\begin{cases} x' = x - v_0 t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.4)$$

Resta solamente da determinare come sono collegate le variabili temporali misurate nei due riferimenti. Poiché nella meccanica newtoniana si suppone che i segnali si propaghino a velocità infinita, i tempi degli eventi misurati dagli orologi di entrambi i riferimenti saranno uguali, dunque  $t = t'$ . Per quanto detto, nel nostro caso le equazioni della trasformazione delle coordinate di un evento da quelle misurate nel riferimento fisso a quelle misurate nel riferimento mobile risulta essere:

$$\begin{cases} x' = x - v_0 t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.5)$$

Queste trasformazioni prendono il nome di *trasformazioni proprie di Galileo* (in alcuni testi denominate anche *boost di Galileo* o *trasformazioni di moto uniforme*). Nella forma più generale le trasformazioni di Galileo sono una combinazione di una trasformazione propria (che dipende dalle tre componenti di  $\vec{v}_0$ ), di tre rotazioni degli assi (che dipendono da tre parametri, per esempio gli angoli di Eulero) e di una traslazione spazio-temporale dell'origine; dunque in generale servono 10 parametri per determinare completamente una trasformazione galileiana. Si noti inoltre che nella



trasformazione (1.5) il tempo risulta non dipendere dal sistema di riferimento; ciò implica l'esistenza di un tempo assoluto o, equivalentemente, di un orologio universale che misura gli stessi tempi ovunque.

### 1.2.1 Il gruppo SGal(10)

**Definizione 1** Si definisce *gruppo* una struttura algebrica formata dall'abbinamento di un insieme non vuoto con un'operazione binaria interna (come l'addizione o la moltiplicazione), che soddisfa gli assiomi di associatività, di esistenza dell'elemento neutro e di esistenza dell'inverso di ogni elemento. Se il gruppo soddisfa l'assioma di commutatività si dice *abeliano* (o *commutativo*). Un gruppo è detto *continuo* se i suoi elementi dipendono da parametri variabili con continuità.

Dimostriamo adesso che le trasformazioni proprie di Galileo formano un gruppo abeliano continuo. Consideriamo la trasformazione propria (1.5): essa può essere scritta in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Ponendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha che il gruppo delle trasformazioni proprie di Galileo è un sottogruppo di matrici di  $\mathbb{R}^{4,4}$ . Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -u'_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dimostriamo che la composizione di  $A$  e  $B$  è una matrice ancora appartenente al gruppo.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -u'_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_0 - u'_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

La matrice  $C$  appartiene ancora al gruppo; è banale verificare l'esistenza dell'elemento neutro (la matrice identica), l'esistenza dell'inverso (la matrice che nella posizione 1,4 ha l'elemento  $v_0$ ) e l'associatività (ereditata del prodotto tra matrici). Inoltre il parametro  $-v_0$  varia con continuità dunque il gruppo è continuo. Infine è banale dimostrare che il gruppo è abeliano.

### 1.3 Il principio di relatività galileiana

Il principio di relatività galileiana riguarda solamente i fenomeni meccanici. Galileo notò che moti rettilinei uniformi non modificano i fenomeni meccanici. Consideriamo due riferimenti che si muovono di moto rettilineo uniforme; il principio di relatività galileiana afferma che gli stessi esperimenti svolti nei due riferimenti citati portano gli stessi risultati, pertanto risulta essere impossibile determinare il moto relativo dei riferimenti partendo da tali esperimenti. Ciò ha una conseguenza molto importante: determinate le leggi che regolano i fenomeni meccanici, poiché uno stesso esperimento produce gli stessi risultati indipendentemente dal riferimento scelto<sup>1</sup>, le leggi della meccanica devono essere identiche in tali riferimenti. Per verificare la veridicità di tale affermazione consideriamo il moto di una particella descritta dal vettore posizione  $\vec{r}(t)$  nel riferimento fisso. Per la (1.1) si ha che  $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}_0 t$ . Derivando ambo i membri di tale relazione rispetto al tempo si ottiene:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 \quad (1.7)$$

che è la legge di composizione delle velocità galileiana. Notiamo che la velocità della particella nei due riferimenti è diversa, tuttavia la forza che agisce sulla particella è la stessa. Per la seconda legge della dinamica si ha:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}'}{dt} + m \frac{d\vec{v}_0}{dt} = m \frac{d\vec{v}'}{dt} = m\vec{a}' = \vec{F}'$$

dunque la seconda legge di Newton risulta essere invariante per trasformazioni di Galileo.

### 1.4 Sistemi di riferimento inerziali

Le leggi della dinamica permettono di individuare, tra tutti i riferimenti possibili, quelli in cui non solo le leggi della meccanica, ma tutte le leggi fisiche assumono una forma piuttosto semplice. Si dice sistema di riferimento inerziale un sistema di riferimento in cui tutte e tre le leggi di Newton sono valide. Dimostriamo quanto è importante la prima legge della meccanica per determinare i sistemi inerziali. Il principio di inerzia afferma che un corpo su cui la risultante delle forze è nulla se è in quiete persiste nel suo stato di quiete mentre se è in moto con velocità  $\vec{v}$  continua il suo moto con la stessa velocità, cioè si muove di moto rettilineo uniforme. Molti testi affermano che il principio di inerzia non sia un'affermazione indipendente ma che sia una conseguenza della seconda legge della dinamica. Ciò è formalmente vero; infatti dalla seconda legge della dinamica  $\vec{F} = m\vec{a}$  segue che se la risultante delle forze su un corpo è nulla allora deve essere  $\vec{a} = 0$  e cioè  $\vec{v} = \text{cost.}$ , cioè il corpo si muove di moto rettilineo uniforme. Dunque perché Newton formulò il principio di inerzia in maniera a sé stante? Probabilmente anche Newton notò quest'equivalenza formale tra principio di inerzia e seconda legge della dinamica. Tuttavia egli comprese che né

<sup>1</sup>A condizione che il riferimento scelto si muova di moto rettileo uniforme rispetto a uno considerato fisso

il principio di inerzia né la seconda legge della dinamica possono essere ugualmente valide in tutti i sistemi di riferimento. Infatti non è casuale che la definizione di riferimento inerziale coinvolga tutte e tre le leggi della dinamica. Consideriamo un corpo che sia a riposo in un riferimento inerziale, dunque per la seconda legge della dinamica la risultante delle forze agenti sul corpo è nulla. Adesso consideriamolo dal punto di vista di un osservatore che si muova rispetto al riferimento inerziale con un'accelerazione  $\vec{a}$ ; egli vedrà il corpo muoversi rispetto a lui con accelerazione  $-\vec{a}$ . Se in questo riferimento fosse valida la seconda legge di Newton, egli potrebbe affermare che sul corpo agisce una forza complessiva pari a  $-m\vec{a}$ , ma sappiamo che la risultante delle forze è nulla. Dunque la seconda legge della dinamica non è valida in questo riferimento; infatti passando nel riferimento in moto con una velocità non costante viene introdotta una "forza di inerzia" che non è una forza vera e propria. Poiché le leggi di Newton non sono valide in tutti i sistemi di riferimento, egli dovette sottolineare che vi era un particolare sistema di riferimento in cui tutte queste leggi sono valide e questo sistema di riferimento è proprio quello inerziale. In altre parole è possibile trovare un sistema di riferimento in cui un corpo isolato si muova per inerzia di moto rettilineo uniforme. Si dimostra che, fissato un riferimento inerziale, le leggi di Newton sono valide in tutti quei riferimenti che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto a esso.

### 1.4.1 Approccio Lagrangiano alla legge d'inerzia (\*)

I sistemi di riferimento inerziali possono essere anche visti come quei riferimenti tali che rispetto ad essi lo spazio sia omogeneo ed isotropo e il tempo omogeneo. Consideriamo la forma della lagrangiana  $L$  per un punto materiale "libero" in un sistema di riferimento inerziale. L'omogeneità dello spazio e del tempo comporta che la funzione lagrangiana non possa contenere in forma esplicita né il raggio vettore  $\vec{r}$  del punto né il tempo  $t$ , cioè  $L$  è una funzione soltanto della velocità  $\vec{v}$ . (Abbiamo infatti scelto come coordinate lagrangiane quelle cartesiane per ovvia semplicità). Per via anche dell'isotropia dello spazio, la Lagrangiana non potrà dipendere dalla direzione del vettore  $\mathbf{v}$ , ma soltanto dal suo modulo  $|\vec{v}|^2$  (oppure  $v^2$ ), quindi:

$$L = L(v^2) \quad (1.8)$$

Dato che la lagrangiana non dipende dal raggio vettore (che costituisce le nostre  $q^\alpha$ ) allora  $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$  e l'equazione di lagrange diventa:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (1.9)$$

Da cui  $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \text{costante}$  ed essendo  $L$  funzione soltanto delle velocità, allora  $\vec{v} = \text{costante}$ . Siamo giunti allora alla conclusione che "in un sistema di riferimento inerziale, ogni moto libero avviene con velocità costante in grandezza e in direzione" (*Legge d'inerzia*).

### 1.4.2 Trasformazioni fra sistemi inerziali (\*)

In questo paragrafo mostriamo brevemente come se in due sistemi vale il principio di inerzia, allora le trasformazioni delle coordinate tra di essi sono trasformazioni affini<sup>2</sup>, cioè composizioni di un'applicazione lineare e di una traslazione. Ciò significa che per i due sistemi lo spazio è omogeneo (invariante per traslazioni spaziali) e isotropo (invariante per rotazioni e riflessioni), mentre il tempo è omogeneo (invariante per traslazioni temporali). Infatti, se supponiamo che le coordinate rispetto a  $K'$  di uno stesso punto in moto per inerzia siano funzioni di quelle rispetto a  $K$  e viceversa, allora poiché il punto ha velocità costante in entrambi i riferimenti

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \underbrace{\frac{\partial x'^\beta}{\partial t'}}_{v'^\beta} \frac{dt'}{dt} = v^\alpha \quad (1.10)$$

dove si è utilizzata la convenzione di Einstein sugli indici che variano da 1 a 3; derivando l'ultima uguaglianza rispetto a  $t$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} v'^\beta \frac{d^2 t'}{dt^2} + \frac{dt'}{dt} v'^\alpha \underbrace{\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t \partial x'^\beta}}_{=0} = 0$$

per il lemma di Schwartz la derivata seconda mista è uguale a  $\frac{\partial v^\alpha}{\partial x'^\beta} = 0$ ; moltiplicando ambo i membri per  $\frac{\partial x'^\gamma}{\partial t}$  si ha

$$v^\gamma v'^\beta \frac{d^2 t'}{dt^2} = 0$$

cioè la trasformazione dei tempi è affine:

$$t' = ht + k(x^\alpha)$$

e quindi lo è anche quella dello spazio: dalla (1.10) segue che  $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = A^\alpha_\beta$  con  $A^\alpha_\beta$  matrice costante, e integrando

$$x'^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta + b^\alpha(t)$$

ed è facile verificare che le funzioni  $k$  e  $b$  debbono essere affini a loro volta. Le trasformazioni in forma esplicita sono quindi

$$\begin{cases} x'^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta + B^\alpha t + C^\alpha \\ t' = D_\beta x^\beta + Et + F \end{cases}$$

Nel § 2.3.3 vedremo in che modo a partire da queste relazioni affini, richiedendo anche che valga il principio di relatività, si possono ottenere le trasformazioni di Galilei imponendo l'invarianza degli intervalli di tempo, che diviene dunque assoluto,

---

<sup>2</sup>Per quello che interessa a noi, una funzione derivabile due volte è affine se e solo se tutte le sue derivate seconde sono nulle

ricavando  $E = 1$ . Se invece si assume che ad essere invariante sia la velocità  $c$  o, equivalentemente, il quadrintervallo  $c^2 t^2 - x^\alpha x^\alpha$ , oppure ancora che la velocità della luce non si sommi alla velocità della sorgente<sup>3</sup>, si ottengono le trasformazioni di Lorentz; tra queste diverse strade, quella del quadrintervallo mostra sin da subito come le trasformazioni che si ottengono - per essere precisi, i boost, cioè trasformazioni ad assi paralleli ed origini coincidenti - sono rotazioni iperboliche in uno spazio a quattro dimensioni. Le trasformazioni di Galilei e di Lorentz si possono anche ricavare imponendo la covarianza, rispettivamente, della seconda legge di Newton e delle equazioni di Maxwell; bisogna tuttavia tenere a mente che sono le leggi fisiche ad essere sottomesse al principio di relatività, e non viceversa; è questa infatti la maniera con cui si risolve l'inconsistenza tra meccanica prerelativistica ed elettromagnetismo, ossia postulando principii di simmetria che le leggi dell'intera fisica devono rispettare.

## 1.5 La crisi della meccanica classica

Agli inizi dell'Ottocento si riteneva che tutti i fenomeni fisici fossero di origine meccanica. Portiamo qui l'esempio della forza elettrica che in quel periodo veniva interpretata come una forza elastica; vi è però una profonda differenza tra la forza elastica e la forza elettrica: la prima è una forza di contatto mentre la seconda è una forza a distanza. I fisici dell'epoca ritenevano che questo secondo tipo di forze si propagasse a velocità infinita nello spazio, ignorando il fatto che, invece, esse erano dovute a campi le cui velocità di propagazione sono finite. Analizziamo adesso il percorso storico sperimentale che mise in crisi l'esistenza dell'azione a distanza in favore della teoria dei campi.

### 1.5.1 La velocità della luce è finita

Sul finire del Seicento Ole Rømer riuscì a determinare la velocità della luce mediante semplici osservazioni astronomiche. L'esperimento fu eseguito contemporaneamente da Rømer a Copenaghen e da Cassini a Parigi, i quali misurando i tempi delle eclissi di Io, una luna di Giove, riuscirono a stimare la differenza di longitudine tra le due città. I due scoprirono delle discrepanze nelle misure che attribuirono al fatto che la luce dovesse avere velocità finita. In seguito Rømer notò che i tempi tra le eclissi diventavano più brevi quando la Terra si avvicinava a Giove e più lunghi quando la Terra si allontanava. La misura di questa discrepanza gli permise di stimare la velocità della luce nel vuoto.

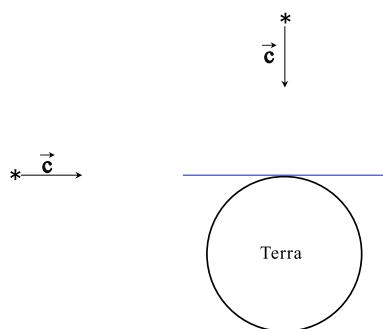
### 1.5.2 La legge di composizione delle velocità vale anche per la luce?

Nel 1818 François Arago sviluppò un primo esperimento per verificare se la legge di composizione delle velocità valesse anche per la luce. Supponendo senza perdere

---

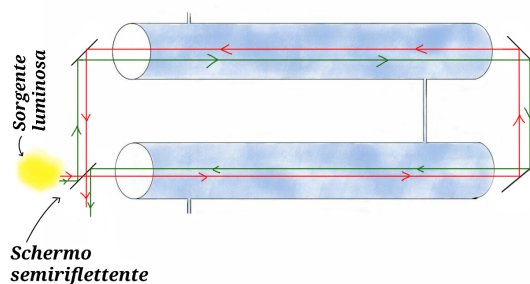
<sup>3</sup>Che la velocità della luce sia indipendente dal moto della sorgente è un fatto sia corroborato da esperienze - di cui tra le prime vi sono quelle di Arago e di Fizeau, come vedremo nel § 1.5.2 - sia suggerito dal paradosso di De Sitter.

precisione che in tempi limitati l'orbita terrestre può essere assunta rettilinea, Arago fa passare attraverso un prisma la luce emessa da una stella. Da misurazioni di ottica egli era a conoscenza del fatto che all'interno del prisma la velocità della luce fosse  $\vec{c}/n$  essendo  $n$  l'indice di rifrazione del prisma. Tuttavia, il prisma è solidale alla terra e dunque in moto. Prese due stelle, una sull'orizzontale e una sulla verticale, per la legge di composizione delle velocità, la velocità della luce all'interno del prisma dovrebbe cambiare; in particolare nel primo caso le due velocità sono (anti)parallele, mentre nel secondo sono ortogonali. Arago notò che, seppur con misure di alta precisione, la velocità della luce nel prisma non varia.



**Figura 1.2:** Schematizzazione dell'esperimento di Fizeau

Nel 1851 Fizeau riprese l'idea di Arago e usando una differente strumentazione giunse allo stesso risultato. Egli prese due tubi molto lunghi, chiusi mediante dei tappi trasparenti e collegati tra loro mediante delle giunzioni capillari. Alle estremità dei due tubi sono presenti tre specchi riflettenti e uno specchio semiargentato (cioè semiriflettente). Egli immise all'interno dei tubi dell'acqua con una velocità di circa  $7m/s$  e "sparò" un fascio luminoso contro lo specchio semiriflettente in due situazioni distinte: nella prima il fascio luminoso colpiva la parte riflettente dello specchio, mentre nella seconda colpiva la parte non riflettente; nel primo caso la velocità della luce era parallela a quella dell'acqua, mentre nel secondo caso era antiparallela. Alla fine del percorso i due raggi si ricongiungevano e se le velocità fossero state diverse avrebbero dato luogo ad interferenza. Ciò però non accadeva dunque egli concluse affermando che le velocità dei due raggi fossero uguali.



**Figura 1.3:** Schematizzazione dell'esperimento di Fizeau

In particolare Fizeau riuscì a dimostrare che la velocità della luce nell'acqua nel riferimento fisso era pari a

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_0 \quad (1.11)$$

Il coefficiente

$$1 - \frac{1}{n^2}$$

è detto coefficiente di trascinamento. Il risultato ottenuto da Fizeau contraddiceva la legge di composizione delle velocità di Galileo (1.7) per cui doveva essere:

$$v = \frac{c}{n} + v_0$$

La legge trovata da Fizeau era in accordo con la teoria formulata da Fresnel, che, però, faceva acqua da tutte le parti. Nonostante la presenza di questa teoria che giustificasse il suo risultato, Fizeau sostenne che esso dovesse nascondere un significato ben più profondo.

Questo esperimento fu altamente criticato dalla comunità scientifica dell'epoca per vari motivi; in particolare furono avanzate questioni di fluidodinamica secondo cui all'interno dei tubi si creavano vortici oppure il moto era non laminare e ciò falsava i risultati dell'esperimento. Questo stesso esperimento ispirò Michelson; in particolare, dopo aver riprodotto l'esperienza di Fizeau, egli la migliorò eliminando l'acqua (e dunque tutti gli eventuali problemi derivanti da questioni di fluidodinamica); ciò però non modificò l'esito dell'esperimento.

### 1.5.3 Le leggi dell'elettromagnetismo non sono invarianti per trasformazioni di Galileo

Nel 1870 Maxwell pubblicò il suo *Treatise on electricity and magnetism* e si riteneva di conoscere tutto lo scibile fisico. Immediatamente dopo la pubblicazione vi fu, però, un enorme problema: così come avveniva per le leggi di Newton, si pensava che anche le leggi di Maxwell fossero invarianti per trasformazioni di Galileo, tuttavia ciò non accadeva. Banalmente questo si può già intuire dal fatto che la forza di Lorentz dipende dalla velocità della carica e questa varia al variare del sistema di riferimento, dunque potrebbe essere sempre possibile trovare un riferimento inerziale in cui la carica è ferma e cioè in cui non è presente forza di Lorentz. Tuttavia passando da un sistema di riferimento inerziale a un altro le forze devono restare le stesse.

#### Dimostrazione della non covarianza galileiana delle leggi di Maxwell (\*)

È possibile sintetizzare le 4 equazioni di Maxwell in due equazioni che rappresentano il moto dei potenziali. Consideriamo l'equazione che contiene il potenziale scalare:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.12)$$

Applichiamo adesso le trasformazioni di Galileo. Se esse lasciassero invariate le equazioni di Maxwell avremmo:

$$V'(\vec{r}', t') = V'(\vec{r}'(\vec{r}, t), t'(\vec{r}, t)) = V(\vec{r}, t) \quad (1.13)$$

Otteniamo immediatamente che:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial x'} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V'}{\partial y'} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V'}{\partial z'} \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -u \frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \end{cases} \quad (1.14)$$

Notiamo immediatamente che le derivate nelle coordinate spaziali sono rimaste le stesse e dunque non ci daranno problemi nel calcolo delle derivate seconde che sono quelle che ci interessano. Discorso a parte va fatto per la derivata rispetto al tempo. In questo caso dobbiamo trovare:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -u \frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial t'} \right) \quad (1.15)$$

Possiamo evitare questo calcolo considerando la derivata come un operatore:

$$\frac{\partial}{\partial t} V = \left[ -u \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right] V' \quad (1.16)$$

In questo modo la relazione (1.15) diventa immediatamente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} = \left[ -u \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right] \left[ -u \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right] V' = \left[ u^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] V'$$

Dunque cambiando sistema di riferimento l'equazione (1.12) diventa:

$$\nabla^2 V' - \frac{1}{c^2} \left[ u^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} - 2 \frac{\partial^2 V'}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 V'}{\partial t'^2} \right] = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.17)$$

Ovviamente l'equazione appena ottenuta non ha la stessa struttura formale della (1.12) e dunque le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo. Inoltre essa dipende anche dalla velocità di trascinamento del sistema di riferimento adoperato. Proprio ciò era a sostegno della tesi dell'esistenza dell'etere, cioè di un riferimento assoluto in cui  $u = 0$ .

Dimostreremo nel paragrafo 5.4 che le equazioni di Maxwell sono invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz



## I postulati di Einstein

### 2.1 I principi della relatività ristretta

Nel 1905 Einstein introdusse i principi della relatività speciale per spiegare perché le trasformazioni di Galileo non funzionano per le leggi dell'elettromagnetismo. Egli affermò che:

1. tutte le leggi della fisica sono invarianti nei sistemi di riferimento inerziali;
2. la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Dal primo principio deriva che non esiste un riferimento inerziale privilegiato e che è impossibile determinare un moto rettilineo uniforme assoluto; contrariamente a quanto previsto da Newton, secondo cui esisteva un riferimento inerziale assoluto fisso e tutti gli altri sistemi inerziali erano in moto rispetto a esso, per il primo principio della relatività è impossibile determinare tale sistema ma si possono soltanto individuare dei moti relativi tra sistemi inerziali. Lo scopo della teoria della relatività ristretta è di fornire una descrizione dei fenomeni fisici che sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento, cioè se un dato fenomeno è descritto da una data legge in un sistema di riferimento inerziale, lo stesso fenomeno deve essere descritto da una legge formalmente identica in tutti gli altri riferimenti inerziali. Per fare ciò è necessario introdurre un gruppo di trasformazioni, le trasformazioni di Lorentz, che lasciano invariate tutte le leggi fisiche passando da un riferimento inerziale a un altro. Nonostante il nome possa trarre in inganno, la teoria della relatività ristretta è quanto di più assoluto possa esistere: essa, infatti, mostra che le leggi della fisica nei riferimenti inerziali non dipendono dalla scelta del riferimento o dalla posizione e dal moto di un osservatore, ma i risultati di una misura in differenti riferimenti inerziali sono correlati.

### 2.2 Il sistema di riferimento relativistico (\*)

Per costruire i sistemi di riferimento relativistici assumiamo che i postulati di Einstein siano validi e che la velocità della luce nel vuoto sia la massima velocità a cui possano essere trasmessi i segnali. L'esistenza di una velocità di propagazione finita implica che l'esistenza di un solo orologio non è più sufficiente quando le velocità dei corpi sono prossime a quelle della luce. Da un punto di vista prettamente teorico la teoria

della relatività speciale implica che in ciascun punto dello spazio sia presente un orologio, in modo che se avviene un evento in un dato punto dello spazio, l'orologio ivi presenta registra l'attimo in cui è avvenuto. Tutti gli orologi di un sistema di riferimento devono essere fermi rispetto a esso. Se consideriamo sistemi inerziali in moto relativo allora gli orologi di ciascun riferimento sono fermi solamente rispetto al riferimento cui appartengono. Se due eventi avvengono in diversi luoghi dello spazio ma gli orologi ivi presenti registrano lo stesso tempo, allora possiamo riferirci a questi eventi come simultanei. Ovviamente, per fare ciò è necessario che tutti gli orologi siano sincronizzati, cioè che istante per istante indichino lo stesso tempo.

## 2.3 Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz possono essere ricavate in differenti modi:

- mediante semplici osservazioni sulla dilatazione dei tempi e sulla contrazione delle lunghezze;
- mediante le funzioni iperboliche;
- mediante considerazioni di algebra lineare;
- mediante il K calculus

### 2.3.1 Dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz mediante le funzioni iperboliche

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali  $\{O, x, y, z\}$  e  $\{O', x', y', z'\}$ , aventi gli assi paralleli, in moto con velocità  $v_0$ , diretta lungo l'asse  $x$ , l'uno rispetto all'altro. Consideriamo due punti  $P = (x_S, y_S, z_S)$  e  $P' = (x'_S, y'_S, z'_S)$ , dove le variabili apostrofate sono coordinate nel sistema di riferimento  $\{O', x', y', z'\}$ , e supponiamo di emettere un fascio di luce da entrambi i punti. Essendo le sorgenti puntuali, le onde si propagheranno con fronti d'onda sferici aventi equazioni:

$$\begin{cases} (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2 - c^2 (t - t_S)^2 = 0 \\ (x' - x'_S)^2 + (y' - y'_S)^2 + (z' - z'_S)^2 - c^2 (t' - t'_S)^2 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

essendo  $t_S$  e  $t'_S$  gli istanti in cui vengono emessi i fasci di luce nei due riferimenti luminosi. Per semplificare il problema supponiamo che i due fasci di luce vengano emessi all'istante  $t_S = t'_S = 0$  e che a tale istante  $P = P' = O = O'$ . Inoltre poiché la velocità della luce nel vuoto è uguale in entrambi i sistemi di riferimento, le equazioni dei fronti d'onda devono essere uguali ed essendo il moto relativo solamente rispetto all'asse  $x$  si ha  $y' = y$  e  $z' = z$ . Con queste considerazioni dal sistema (2.1) si ricava:

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \quad (2.2)$$

Per risolvere questa relazione introduciamo un nuovo sistema di coordinate in cui:

$$\begin{cases} \lambda = x \\ i\tau = ct \\ \lambda' = x' \\ i\tau' = ct' \end{cases} \quad (2.3)$$

In questo modo l'equazione (2.2) si riduce a

$$\lambda^2 + \tau^2 = \lambda'^2 + \tau'^2 \quad (2.4)$$

che è l'equazione di una rotazione che permette di passare dal sistema  $\{O, \lambda, \tau\}$  al sistema  $\{O, \lambda', \tau'\}$ . Detto  $\varphi$  l'angolo compreso tra  $\lambda$  e  $\lambda'$ , si ha che:



$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \cos(\varphi) - \tau \sin(\varphi) \\ \tau' = \lambda \sin(\varphi) + \tau \cos(\varphi) \end{cases} \quad (2.5)$$

Introducendo le (2.3) nelle (2.5) si ottiene:

$$\begin{cases} x' = x \cos(\varphi) - \frac{ct}{i} \sin(\varphi) \\ ct' = ix \sin(\varphi) + ct \cos(\varphi) \end{cases} \quad (2.6)$$

Essendo  $\varphi$  un parametro non necessariamente reale, poiché cerchiamo soluzioni reali possiamo porre

$$\varphi = i\theta$$

in modo tale che:

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \cosh(\theta) \\ \sin(\varphi) = i \sinh(\theta) \end{cases} \quad (2.7)$$

Inserendo le (2.7) nelle (2.6) si ottiene:

$$\begin{cases} x' = x \cosh \theta - ct \sinh \theta \\ ct' = -x \sinh \theta + ct \cosh \theta \end{cases} \quad (2.8)$$

Risulta però necessario eliminare il parametro  $\theta$  legandolo al moto relativo dei due riferimenti. L'ascissa dell'origine del riferimento mobile  $x' = 0$  nel riferimento fisso risulta essere  $x = v_0 t$ ; dunque sostituendo nella prime delle (2.8), si ottiene

$$0 = v_0 t \cosh \theta - ct \sinh \theta \quad \Rightarrow \quad \tanh \theta = \frac{v_0}{c} = \beta \quad (2.9)$$

La quantità  $\beta$  viene detta *velocità di trascinamento ridotta* e risulta essere la velocità di trascinamento in unità di velocità della luce. Ricordando che

$$1 - \tanh^2 \theta = \frac{1}{\cosh^2 \theta}$$

si ha

$$\begin{cases} \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \\ \sinh \theta = \tanh \theta \cosh \theta = \beta \gamma \end{cases} \quad (2.10)$$

Sostituendo questi risultati nel sistema (2.8) si ottiene

$$\begin{cases} x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v_0 x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \gamma (x - v_0 t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left( t - \frac{v_0 x}{c^2} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

Le (2.11) rappresentano una trasformazione di Lorentz propria, o boost di Lorentz. Nel caso più generale esse possono essere associate a una rotazione e a una traslazione e dipenderanno, dunque, da 10 parametri.

### 2.3.2 Dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz mediante il K calculus (\*)

Presentiamo ora un metodo molto elegante che permette di ottenere le trasformazioni di Lorentz. Nonostante le illustrazioni qui presenti implicano l'utilizzo di coordinate, esse hanno un carattere ausiliario: esse non sono indispensabili per la presentazione del metodo ma facilitano la dimostrazione. Supponiamo che tutti gli eventi di cui parleremo avvengano sull'asse  $x$  di un riferimento  $\{O, x, y, z\}$ , che chiameremo  $K$  (e conseguentemente sul coincidente asse  $x'$  di un riferimento  $\{O', x', y', z'\}$ , che chiameremo  $K'$ ). Il presupposto principale di questo metodo è l'effetto Doppler. Supponiamo che una sorgente luminosa nel riferimento  $K$  emetta impulsi luminosi con periodo  $T$ ; un ricevitore nel riferimento  $K'$  che si allontana da essa a velocità costante vede che gli intervalli tra gli impulsi luminosi è diverso, nonostante la frequenza sia uguale in entrambi i riferimenti. Per semplicità possiamo non parlare di una sorgente e di un ricevitore, ma di due osservatori  $A$  e  $A'$  rispettivamente a riposo nei riferimenti  $K$  e  $K'$ . Se  $A$  invia segnali luminosi separati da un intervallo di tempo  $T$  misurato dal suo orologio, l'osservatore  $A'$  riceverà questi segnali separati da un diverso intervallo temporale misurato nel suo orologio. Indichiamo questa quantità con  $KT$ . Sottolineiamo che  $T$  e  $KT$  sono rispettivamente gli intervalli di tempo tra l'invio di due segnali consecutivi dall'osservatore  $A$  e tra la ricezione di tali segnali dall'osservatore  $A'$  misurati in ciascun caso da orologi a riposo rispettivamente nei riferimenti  $K$  e  $K'$ . Per l'isotropia e l'uniformità dello spazio e del tempo si può assumere che il coefficiente  $K$  non dipenda né dalla posizione del ricevitore e della sorgente, né dal tempo in cui i segnali vengono inviati e ricevuti, né dalla direzione in cui è inviato il segnale (proprio per questo motivo è possibile proseguire la dimostrazione senza introdurre un sistema di coordinate). Inoltre, in maniera piuttosto ovvia, tale coefficiente non dovrà dipendere dall'intervallo temporale tra due segnali consecutivi. Esso, dunque, dipenderà solamente dalla velocità relativa degli osservatori  $A$  e  $A'$ , cioè dalla velocità relativa dei due riferimenti. Supponiamo che l'osservatore  $A$  si trovi nell'origine del riferimento  $K$  e invii segnali luminosi all'osservatore  $A'$  che si trova nell'origine del riferimento  $K'$ . Supponiamo che il riferimento  $K'$  si allontani verso destra rispetto al riferimento  $K$ . Sia  $t$  l'istante in cui viene inviato il primo

segnale; è possibile determinare l'istante  $\tau_1$  segnato dall'orologio dell'osservatore  $A$  quando l'osservatore  $A'$  riceve il segnale. Infatti, se il segnale si propaga alla velocità  $c$ , esso deve percorrere nel tempo  $\tau_1$  la distanza  $v_0 t$  che separava  $A$  e  $A'$  all'istante  $t$  e la distanza  $v_0 \tau_1$  che è percorsa dall'osservatore  $A'$  nel tempo  $\tau_1$ :  $c\tau_1 = v_0 t + v_0 \tau_1$ , da cui segue immediatamente

$$\tau_1 = \frac{v_0}{c - v_0} t$$

Il secondo segnale viene emesso all'istante  $t + T$  e ricevuto da  $A'$  all'istante  $\tau_2$  determinato da  $c\tau_2 = v_0(t + T) + v_0 \tau_2$ , da cui segue immediatamente

$$\tau_2 = \frac{v_0}{c - v_0} (t + T)$$

L'intervallo di tempo tra i segnali ricevuti dall'osservatore  $A'$  misurato dall'osservatore  $A$  è quindi

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{v_0}{c - v_0} T$$

Tuttavia non abbiamo ancora determinato l'espressione per la costante  $K$ . Sarà possibile determinarla non appena si ricava l'intervallo di tempo tra due segnali consecutivi registrato dall'orologio dell'osservatore  $A'$ .

Per fare ciò sfruttiamo il primo postulato di Einstein per cui la velocità della luce nel vuoto è costante in qualunque sistema di riferimento inerziale. Sappiamo già che se l'osservatore  $A$  invia segnali luminosi ad intervalli di tempo  $T$  essi saranno ricevuti da  $A'$  ad intervalli di tempo  $KT$ , misurati nel suo orologio. Per l'equivalenza degli osservatori, dobbiamo supporre che i segnali inviati dall'osservatore  $A'$  ad intervalli  $T$  vengono ricevuti dall'osservatore  $A$  ad intervalli  $KT$ . Siamo quindi in grado di determinare l'esplicita espressione del coefficiente  $K$  in funzione della velocità relativa dei riferimenti. Per fare ciò bastano solamente alcuni esperimenti ideali sull'invio, la riflessione e la ricezione dei segnali luminosi. Se necessario, è possibile trattare la riflessione come l'invio dei segnali dall'osservatore  $A'$  nella direzione opposta nel momento in cui egli riceve il segnale.

Supponiamo che il primo segnale dall'osservatore  $A$  sia inviato all'osservatore  $A'$  nell'istante in cui i due riferimenti  $K$  e  $K'$  coincidono. In questo istante, gli osservatori  $A$  e  $A'$ , posti nell'origine dei rispettivi sistemi di riferimento, si trovano nello stesso punto dello spazio, dunque la trasmissione del segnale da  $A$  ad  $A'$  e del segnale inverso da  $A'$  ad  $A$  è istantanea. Dopo l'intervallo di tempo  $T$  misurato dall'osservatore  $A$ , quest'ultimo invia un segnale luminoso all'osservatore  $A'$ ; egli lo riceverà dopo un intervallo di tempo  $KT$  dalla ricezione del primo segnale. Supponiamo che l'osservatore  $A'$  invii un segnale immediatamente dopo aver ricevuto il primo segnale. Secondo l'orologio di  $A'$  i due segnali sono separati da un tempo  $KT$ , dunque il segnale inverso sarà inviato da  $A'$  ad  $A$  dopo tale intervallo di tempo. L'osservatore  $A$  non riceverà questo segnale dopo un tempo  $KT$ , ma questa volta l'intervallo dovrà essere incrementato  $K$  volte e quindi sarà pari a  $K^2 T$ . Il segnale riflesso sarà, quindi, ricevuto all'istante  $K^2 T$  dall'orologio dell'osservatore  $A$ . L'intervallo di tempo tra l'invio del secondo segnale e la ricezione del segnale riflesso misurato da  $A$  sarà quindi

$$K^2 T - T = (K^2 - 1)T$$

Poiché la velocità della luce non dipende dalla direzione di propagazione, il tempo che il segnale per percorrere lo spazio compreso tra  $A$  e  $A'$  è

$$\frac{1}{2}(K^2 - 1)T$$

Da ciò segue che la distanza tra  $A$  e  $A'$  nell'istante in cui il raggio è riflesso è

$$\frac{1}{2}(K^2 - 1)Tc$$

Resta da determinare a quale istante dell'orologio di  $A$  il segnale viene riflesso. Sappiamo che il secondo segnale luminoso viene inviato da  $A$  all'istante  $T$  e il suo riflesso viene ricevuto all'istante  $K^2T$ ; dunque l'istante di riflessione nell'orologio di  $A$  è

$$\frac{1}{2}(K^2 + 1)T$$

Durante tale intervallo di tempo l'osservatore  $A'$  si allontana da  $A$  di una distanza

$$\frac{1}{2}(K^2 - 1)Tc$$

Dunque la velocità relativa dell'osservatore  $A$  è

$$v_0 = \frac{\frac{1}{2}(K^2 - 1)Tc}{\frac{1}{2}(K^2 + 1)T} = \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1}c$$

da cui segue che

$$\beta := \frac{v_0}{c} = \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \quad (2.12)$$

e quindi

$$K = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2.13)$$

Introduciamo quindi le immediate relazioni:

$$\begin{cases} \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{K^2 + 1}{2K} \\ \gamma\beta = \frac{K^2 - 1}{2K} \end{cases} \quad (2.14)$$

Introduciamo adesso un importante teorema del  $K$  calculus. Si nota dall'equazione (2.13) che il cambio di segno della velocità relativa, cioè di  $\beta$ , trasforma la quantità  $K$  in  $1/K$ . Ciò significa che l'allontanamento e l'avvicinamento a velocità uguali in modulo corrispondono a valori di  $K$  reciproci.

Consideriamo adesso il caso in cui siano presenti tre sistemi di riferimento  $K$ ,  $K'$  e  $K''$  e tre osservatori posti nelle corrispondenti origini  $O$ ,  $O'$  e  $O''$ . Sia  $v_0$  la velocità relativa dei riferimenti  $K$  e  $K'$  e sia  $K(A, A')$  la costante associata a questo moto, che dipenderà solamente da  $v_0$ . Sia  $u'_0$  la velocità relativa dei riferimenti  $K'$  e  $K''$  e sia  $K(A', A'')$

la costante associata a questo moto, che dipenderà solamente da  $u'_0$ . Determiniamo ora la costante  $K(A, A'')$ . Supponiamo che l'osservatore  $A$  invii due segnali luminosi separati da un intervallo di tempo  $T$ ; l'osservatore  $A'$  troverà che essi sono separati da un intervallo di tempo  $K(A, A')T$ , come segue dalla definizione del coefficiente  $K$ . Supponiamo che l'osservatore  $A''$  sia più lontano di  $A'$  da  $A$ ; il segnale luminoso, dopo aver raggiunto  $A'$  proseguirà per raggiungere  $A''$ ; nell'istante in cui  $A'$  riceve il segnale luminoso da  $A$  esso invia senza ritardo alcuno un segnale luminoso ad  $A''$ . Sono quindi due i segnali che si propagano verso  $A''$ : quello proveniente da  $A$  e quello proveniente da  $A'$ ; poiché sono entrambi segnali luminosi, essi si propagano alla stessa velocità, avendo, inoltre, lasciato  $A'$  allo stesso istante. Essi si propagheranno, quindi, come un unico segnale. La stessa procedura è ripetuta da  $A'$  quando riceve il secondo segnale da  $A$  e nuovamente un solo segnale si propaga da  $A'$  ad  $A''$  formato dai due impulsi luminosi inviati da  $A$  e da  $A'$ . L'osservatore  $A''$  riceverà questi due segnali. Secondo l'orologio di  $A''$  i segnali inviati da  $A$  sono separati da un intervallo di tempo  $K(A', A'')T$ , come segue dalla definizione del coefficiente  $K$ . Per l'osservatore  $A'$  l'intervallo di tempo tra due segnali luminosi è  $K(A, A')T$ . Secondo la definizione della costante  $K$ , l'osservatore  $A''$  vedrà i segnali inviati da  $A'$  separati da un intervallo di tempo  $K(A', A'') \cdot K(A, A')T$ . Poiché i segnali luminosi inviati da  $A$  e da  $A'$  arrivano in  $A''$  simultaneamente, deve essere

$$K(A, A'') = K(A, A') \cdot K(A', A'') \quad (2.15)$$

Il risultato ottenuto è molto semplice: conosciuti i coefficienti  $K$  relativi a due coppie di riferimenti che ne abbiano uno in comune, il coefficiente  $K$  relativo alla terza coppia di riferimenti è dato dal prodotto dei coefficienti  $K$  noti.

Dal risultato ottenuto, e ricordando quanto detto per la situazione di soli due sistemi di riferimento, si ricava facilmente l'equazione della trasformazione delle velocità. Detti  $\beta_1 := v_0/c$  e  $\beta_2 := u'_0/c$ , la velocità relativa  $u_0$  del riferimento  $K''$  rispetto al riferimento  $K$  è pari a

$$\frac{u_0}{c} = \frac{K^2(A, A'') - 1}{K^2(A, A'') + 1} = \frac{K^2(A, A') \cdot K^2(A', A'') - 1}{K^2(A, A') \cdot K^2(A', A'') + 1} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (2.16)$$

Da tale relazione è possibile ottenere l'equazione per la trasformazione delle velocità

$$u_0 = \frac{v_0 + u'_0}{1 + \frac{v_0 u'_0}{c^2}} \quad (2.17)$$

Vediamo adesso come il  $K$  calculus può essere sfruttato per calcolare le trasformazioni di Lorentz. Risulta, a questo punto, necessaria l'introduzione esplicita di un sistema di riferimento. Consideriamo due sistemi di riferimento  $K$  e  $K'$  e supponiamo che gli osservatori  $A$  e  $A'$  registrino lo stesso evento. In entrambi i sistemi di riferimento l'istante di tempo iniziale è scelto in maniera tale che sia  $t = t' = 0$  quando le origini dei riferimenti coincidono. All'istante  $t_1$ , l'osservatore  $A$  invia un segnale luminoso ad  $A'$  che viene da quest'ultimo ricevuto all'istante  $t'_1$  del suo orologio. Il segnale inviato da  $A$  procede insieme al segnale inviato da  $A'$  nel momento in cui egli riceve il segnale di  $A$ . Dunque il segnale complessivo consiste di due segnali

che si propagano lungo l'asse  $x$ . Supponiamo che l'evento  $P$  rappresenti l'arrivo del segnale complessivo in un dato punto dello spazio. In quel punto il segnale è riflesso e torna verso  $A$  e  $A'$ . Esso giungerà prima in  $A'$  all'istante  $t'_2$ ; in tale istante  $A'$  invierà un segnale a  $A$ . Adesso il segnale complessivo consiste di due segnali che si propagano da  $A'$  ad  $A$ . Esso è ricevuto dall'osservatore  $A$  all'istante  $t_2$ . Determiniamo le coordinate dell'evento  $P$  viste dall'osservatore  $A$ . Poiché la velocità della luce è uguale sia per il segnale di "andata" sia per il segnale di "ritorno", il tempo in cui avviene l'evento è la media tra l'istante in cui  $A$  invia il segnale e l'istante in cui lo riceve:

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \quad (2.18)$$

La distanza tra il punto in cui è avvenuto l'evento e l'osservatore  $A$  può essere determinata moltiplicando la velocità della luce per il tempo che il segnale impiega per giungere nel punto in cui avviene l'evento. Tale tempo è pari alla metà del tempo di viaggio totale del segnale. Poiché esso è pari a  $t_2 - t_1$ , la coordinata  $x$  dell'evento vista dall'osservatore  $A$  è data da

$$x = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)c \quad (2.19)$$

Dalle equazioni (2.18) e (2.19) otteniamo

$$\begin{cases} t_1 = t - \frac{x}{c} \\ t_2 = t + \frac{x}{c} \end{cases} \quad (2.20)$$

Analogamente per l'osservatore  $A'$ , si ottiene

$$\begin{cases} t'_1 = t' - \frac{x'}{c} \\ t'_2 = t' + \frac{x'}{c} \end{cases} \quad (2.21)$$

Per la definizione del coefficiente  $K$ , comparando gli intervalli tra gli scambi dei segnali si ha

$$\begin{cases} t'_1 - 0 = K(t_1 - 0) \\ t_2 - 0 = K(t'_2 - 0) \end{cases} \quad (2.22)$$

Sostituendo le (2.20) e le (2.21) nelle due relazioni precedenti si ottiene

$$\begin{cases} t' - \frac{x'}{c} = K\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ t + \frac{x}{c} = K\left(t' + \frac{x'}{c}\right) \end{cases} \quad (2.23)$$

Tali relazioni possono essere riscritte nella forma più semplice

$$\begin{cases} t' - \frac{x'}{c} = K\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ t' + \frac{x'}{c} = \frac{1}{K}\left(t + \frac{x}{c}\right) \end{cases} \quad (2.24)$$



È quindi possibile trovare da esse che:

$$\begin{cases} t' = \frac{K^2 + 1}{2K}t - \frac{K^2 - 1}{2Kc}x \\ x' = \frac{K^2 + 1}{2K}x - \frac{K^2 - 1}{2K}ct \end{cases} \quad (2.25)$$

da cui introducendo le (2.14) si ottengono le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - v_0 t) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v_0}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (2.26)$$

### 2.3.3 Dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz tramite invarianza di $c$ (\*)

<sup>4</sup>Cominciamo con il considerare due riferimenti inerziali  $K$  e  $K'$ ; abbiamo già visto nel § 1.4.2 che allora le trasformazioni delle coordinate tra di essi devono essere affini, cioè nella forma

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + c_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + c_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + c_3 \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t + c_4 \end{cases}$$

Per semplificarci i conti, poniamo a zero alcune costanti: assumendo che le origini spaziali e temporali dei due riferimenti coincidano, cioè al tempo  $t = t' = 0$  si ha  $x = y = z = 0 = x' = y' = z'$ , cioè le  $c_i$  devono essere nulle. Supponiamo inoltre che gli assi siano paralleli, e quindi  $x'$  non dipende da  $y, z$ , e  $y'$  non dipende da  $x, z$  e  $z'$  non dipende da  $x, y$ . Supponiamo infine che  $K'$  sia in moto rettilineo uniforme lungo  $x$  rispetto a  $K$ ; ciò significa che ogni piano trasversale a  $x$  è isotropo. Come prima conseguenza di ciò si ha che  $y', z'$  non dipendono da  $t$ , in quanto se altrimenti, per esempio,  $y'$  aumentasse con  $t$ , invertendo l'asse  $y'$  allora diminuirebbe, e quindi ci sarebbe un verso privilegiato diverso da quello del moto. Le trasformazioni quindi si riducono a

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{14}t \\ y' = a_{22}y \\ z' = a_{33}z \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases}$$

Poiché gli assi  $y, z$  possono essere ruotati arbitrariamente attorno  $x$ , dev'essere  $a_{22} = a_{33}$  e  $a_{42} = a_{43}$ , e in particolare  $a_{42} = a_{43} = 0$  sempre per ragioni di isotropia nel piano trasversale al moto. Rinominando i coefficienti rimasti otteniamo così

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt \\ y' = Cy \\ z' = Cz \\ t' = Dx + Et \end{cases}$$

---

<sup>4</sup>La prima parte di questo paragrafo prende spunto da § 1.4 del testo [5]

Questi coefficienti devono essere funzioni al più solo di  $v$ , e non di altre grandezze fisiche variabili. Poiché  $K'$  trasla lungo  $x$  con velocità  $v$ , allora per  $x' = 0$  si ha  $x = vt$ , da cui  $B = -Av$ ;

$$\begin{cases} x' = A(x - vt) \\ y' = Cy \\ z' = Cz \\ t' = Dx + Et \end{cases}$$

viceversa,  $K$  si muove rispetto a  $K'$  con velocità  $-v$ , quindi per  $x = 0$  dev'essere  $\frac{dx'}{dt'} = -v$

$$-v = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt'}[A(0 - vt)] = -Av \frac{dt}{dt'} = -\frac{A}{E}v$$

cioè  $A = E$

$$\begin{cases} x' = A(x - vt) \\ y' = Cy \\ z' = Cz \\ t' = At + Dx \end{cases} \quad (2.27)$$

Con le ipotesi semplificatrici fatte, queste sono le più semplici possibili trasformazioni tra due riferimenti inerziali  $K$  e  $K'$ ; tuttavia non soddisfano ancora il principio di relatività. Per ricavarci i parametri liberi rimasti, dobbiamo imporre i due postulati della relatività ristretta; il primo ci dice che  $K$  e  $K'$ , in quanto inerziali, devono essere equivalenti, dunque le trasformazioni cercate devono essere covarianti in forma al sola trasformazione  $v \longleftrightarrow -v$ , cioè dev'essere

$$\begin{cases} x = A(x' + vt') \\ y = Cy' \\ z = Cz' \\ t = At' + Dx' \end{cases}$$

inserendo queste relazioni nel sistema (2.27) si trova che  $C = 1$  e

$$x' = A(x - vt) = A(Ax' + Avt' - vAt' - vDx')$$

$$x' = x'(A^2 - vAD)$$

$$D = \frac{A^2 - 1}{vA} = -\frac{A^2 - 1}{(-v)A}$$

quindi resta il solo coefficiente  $A$  da determinare

$$\begin{cases} x' = A(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = At - \frac{A^2 - 1}{vA}x \end{cases} \quad (2.28)$$

Osserviamo come imponendo che lo scorrere del tempo sia assoluto, ossia  $t' = t$ , si ha  $A = 1$  e quindi otteniamo le trasformazioni di Galilei. Il secondo postulato di

relatività ristretta ci dice invece che ogni osservatore inerziale deve esservare la stessa velocità  $c$ , cioè dev'essere

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} = c \implies \begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases}$$

allora la prima e l'ultima equazione delle trasformazioni (2.28) divengono

$$\begin{cases} ct' = Act - Avt \\ t' = At - \frac{A^2 - 1}{vA}ct \end{cases}$$

moltiplicando la seconda equazione per  $c$  e riscrivendo  $\frac{A^2 - 1}{vA} = \frac{A^2 - 1}{v^2 A}v$ , possiamo trovare  $A$  tramite principio di identità tra polinomi: dev'essere uguale il coefficiente che moltiplica  $vt$ , quindi

$$A = \frac{A^2 - 1}{v^2 A}c^2$$

da cui

$$A^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

il ché porta al noto risultato che dev'essere  $v \leq c$ , altrimenti risulterebbe  $A^2 < 0$ . Possiamo quindi affermare che, sotto il principio di relatività, l'esistenza di una velocità assoluta è equivalente all'esistenza di una velocità limite. Il segno di  $A$  dev'essere positivo se vogliamo che lo scorrere del tempo abbia lo stesso verso in tutti i riferimenti. Ponendo  $\beta = v/c$ ,  $A = \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  e osservando che  $\gamma^2 - 1 = \beta^2\gamma^2$ , le (2.28) diventano le trasformazioni di Lorentz nella usuale forma.

### 2.3.4 Deduzione dalle equazioni di Maxwell (\*)

Risulta istruttivo vedere come le trasformazioni di Lorentz possono essere ricavate imponendo che le equazioni di Maxwell siano covarianti in forma tra sistemi inerziali. Tale procedura è tuttavia da ritenere meno significativa rispetto ad una deduzione fatta dai principi di relatività ristretta, in quanto per questi ultimi la fisica moderna postula validità universale e superiore alle stesse leggi fisiche.

L'idea è quella di seguire una strada simile a quella del § 1.5.3 in cui abbiamo provato che le trasformazioni di Galilei non lasciano invariate in forma le equazioni di Maxwell; cerchiamo allora quali trasformazioni soddisfino questa proprietà. Cominciamo dalle trasformazioni (2.27) tra sistemi inerziali, ossia

$$\begin{cases} x' = A(x - vt) \\ y' = Cy \\ z' = Cz \\ t' = At + Dx \end{cases} \quad (2.29)$$

che sono valide quando un riferimento  $K'$  trasla lungo  $x$  con velocità  $v$  rispetto a  $K$ , e con le origini spazio temporali coincidenti e gli assi paralleli.

Determiniamo i tre coefficienti. Vogliamo che passando da  $K$  a  $K'$ , le equazioni di Maxwell abbiano la stessa forma. Tale condizione risulta particolarmente facile da verificare se riusciamo a scriverle in forma differenziale per mezzo di un unico operatore. Questo operatore risulta essere proprio il dalembertiano, che compare ad esempio se applichiamo l'operatore di rotore ad ambo i membri delle leggi del rotore di  $\vec{E}$  e del rotore di  $\vec{B}$ . Per convincersi meglio del modo in cui il dalembertiano sia presente nelle equazioni di Maxwell, possiamo scrivere le equazioni in funzione dei potenziali elettrodinamici: dalla legge  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  segue che si può estrarre  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , e quindi da  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$  si ha anche  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{d\vec{A}}{dt}$ . Scegliamo la gauge in cui

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{d\phi}{dt} = 0$$

nota come gauge di Lorentz. Allora la legge di Gauss per  $\vec{E}$  e la legge di Faraday-Maxwell espresse in funzione dei potenziali  $\phi, \vec{A}$  diventano equazioni di D'Alembert

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

entrambe le relazioni sono nella forma  $\square f(x, y, z, t) = g(x, y, z, t)$  dove

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

è l'operatore dalembertiano. Constatiamo quindi che le equazioni di Maxwell sono covarianti se e solo se lo è l'operatore  $\square$ . Cerchiamo quindi quelle trasformazioni tali che

$$\square f(x, y, z, t) = g(x, y, z, t) \iff \square' f'(x', y', z', t') = g'(x', y', z', t')$$

dove le funzioni  $f$  ed  $f'$  (e  $g$  e  $g'$ ) devono coincidere numericamente per mezzo delle trasformazioni tra  $K$  e  $K'$ .

Per vedere come si trasforma il dalembertiano, vediamo dapprima come si trasformano le derivate prime. In riferimento alle (2.29)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x'} A + \frac{\partial f'}{\partial t'} D \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f'}{\partial y'} C \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f'}{\partial z'} C \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f'}{\partial x'} (-vA) + \frac{\partial f'}{\partial t'} A \end{cases}$$

Per calcolare le derivate seconde facilmente, grazie alla linearità della derivazione e al lemma di Schwartz possiamo comporre più derivazioni tramite le stesse regole del prodotto tra monomi. Semplifichiamo la notazione ponendo

$$\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial_{xy} := \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$$

allora le trasformazioni (2.29) trasformano gli operatori di derivazione come

$$\begin{cases} \partial_x f = (A\partial_{x'} + D\partial_{t'})f' \\ \partial_y f = (C\partial_{y'})f' \\ \partial_z f = (C\partial_{z'})f' \\ \partial_t f = (-vA\partial_{x'} + A\partial_{t'})f' \end{cases}$$

Le trasformazioni delle derivate seconde pure si hanno applicando due volte gli operatori

$$\begin{cases} \partial_{xx} f = (A\partial_{x'} + D\partial_{t'})(A\partial_{x'} + D\partial_{t'})f' = (A^2\partial_{x'x'} + D^2\partial_{t't'} + 2AD\partial_{x't'})f' \\ \partial_{yy} f = (C\partial_{y'})(C\partial_{y'})f' = C^2\partial_{y'y'}f' \\ \partial_{zz} f = (C\partial_{z'})(C\partial_{z'})f' = C^2\partial_{z'z'}f' \\ \partial_{tt} f = (-vA\partial_{x'} + A\partial_{t'})(-vA\partial_{x'} + A\partial_{t'})f' = (v^2A^2\partial_{x'x'} + A^2\partial_{t't'} - 2vA^2\partial_{x't'})f' \end{cases}$$

dev'essere  $\square f = \square' f'$ ; se confrontiamo

$$\square' f' = (\partial_{x'x'} + \partial_{y'y'} + \partial_{z'z'} - \frac{1}{c^2}\partial_{t't'})f'$$

con

$$\begin{aligned} \square f &= (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt})f' \\ &= \left[ A^2\partial_{x'x'} + D^2\partial_{t't'} + 2AD\partial_{x't'} + C^2\partial_{y'y'} + C^2\partial_{z'z'} - \frac{1}{c^2} \left( v^2A^2\partial_{x'x'} + A^2\partial_{t't'} - 2vA^2\partial_{x't'} \right) \right] f' \\ &= \left[ \left( A^2 - \frac{v^2}{c^2}A^2 \right) \partial_{x'x'} + C^2\partial_{y'y'} + C^2\partial_{z'z'} + \left( D^2 - \frac{A^2}{c^2} \right) \partial_{t't'} + \left( 2AD + 2\frac{vA^2}{c^2} \right) \partial_{x't'} \right] f' \end{aligned}$$

allora devono valere le condizioni

$$\begin{cases} A^2 - \frac{v^2}{c^2}A^2 = 1 \\ C^2 = 1 \\ D^2 - \frac{A^2}{c^2} \\ 2AD + 2\frac{vA^2}{c^2} = 0 \end{cases}$$

da cui si trova che  $A = \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  se imponiamo anche che  $\partial t'/\partial t > 0$  (il tempo scorre nello stesso verso),  $D = -v\gamma/c^2$  e  $C = +1$  (il segno di quest'ultimo è positivo dato che per  $v = 0$  i riferimenti coincidono e quindi  $y' = y$ ,  $z' = z$ ). Questi coefficienti restituiscono proprio le trasformazioni di Lorentz.

## 2.4 Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

### La relatività della simultaneità

Se due eventi non spazialmente coincidenti tra di loro in un sistema di riferimento inerziale sono simultanei, non lo saranno più in un altro sistema di riferimento inerziale in moto relativo rispetto al primo.

*Dimostrazione* Supponiamo che nel riferimento  $\{O, x, y, z\}$  gli eventi  $A = (x_A, y_A, z_A, t_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B, t_B)$  siano simultanei e non coincidenti in luogo, dunque si ha  $x_A \neq x_B$  e  $t_A = t_B$ . Specializzando le trasformazioni di Lorentz (2.11) in  $t_A$  e  $t_B$ , si ottiene:

$$\begin{cases} t'_A = \gamma \left( t_A - \frac{v_0 x_A}{c^2} \right) \\ t'_B = \gamma \left( t_B - \frac{v_0 x_B}{c^2} \right) \end{cases}$$

Le due quantità trovate sono uguali se e solo se  $x_A = x_B$  oppure  $v_0 = 0$  ma ciò nega le ipotesi.

### Contrazione delle lunghezze (o di Lorentz-Fitzgerald)

Dati due punti  $A$  e  $B$ , ha senso definire la distanza tra di essi solo se sono associati a eventi simultanei, ossia se  $t_A = t_B$ ; altrimenti, se i due punti fossero in moto, la distanza tra  $A$  al tempo  $t_A$  e  $B$  al tempo  $t_B$  dipenderebbe arbitrariamente dall'intervallo  $t_B - t_A$ . In relatività galileiana l'invarianza della simultaneità assicura l'invarianza delle lunghezze, mentre in relatività ristretta ciò non è garantito: ci aspettiamo quindi che le misure delle lunghezze non siano più assolute.

In particolare, supponiamo che  $A$  e  $B$  siano fissi rispetto al riferimento inerziale  $K$ , e sia  $L = |x_A - x_B|$  la loro distanza lungo la direzione  $\vec{x}$  misurata da  $K$ , che chiamiamo *lunghezza a riposo* o *lunghezza propria* del segmento  $\overline{AB}$ ; sia invece  $L' = |x'_A - x'_B|$  la distanza tra gli stessi punti misurata da un altro riferimento inerziale  $K'$ , che osserva i due punti in moto lungo  $\vec{x}$ . Allora si ha che

$$L' = \frac{L}{\gamma}$$

*Dimostrazione* Specializzando la prima delle (2.11) per  $x'_A$  e  $x'_B$ , si ha

$$L' = |x'_A - x'_B| = \gamma |x_A - v_0 t_A - x_B + v_0 t_B| = \gamma |x_A - x_B - v_0(t_A - t_B)|$$

ma dev'essere  $t'_A - t'_B = 0$  affinché  $L'$  sia la distanza effettiva tra i punti. Ponendo  $t'_A = t'_B = t'$ , dalla quarta delle (2.11) si ricava che

$$t' = \gamma \left( t_A - \frac{v_0}{c^2} x_A \right) = \gamma \left( t_B - \frac{v_0}{c^2} x_B \right)$$

da cui

$$t_A - t_B = \frac{v_0}{c^2}(x_A - x_B)$$

e quindi

$$L' = \gamma \left| x_A - x_B - \frac{v_0^2}{c^2}(x_A - x_B) \right| = \gamma \underbrace{\left( 1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)}_{1/\gamma^2} |x_A - x_B| = \frac{L}{\gamma}$$

Segue quindi che la lunghezza a riposo è la massima misurabile; in ogni altro riferimento rispetto a cui  $A$  e  $B$  risultano in moto, ne verrà misurata una distanza minore. Osserviamo che le dimensioni perpendicolari alla direzione del moto (che noi abbiamo supposto avvenire lungo  $\vec{x}$ ) non sono affette da variazioni. Si tenga inoltre a mente che il fenomeno della contrazione delle lunghezze non implica che un oggetto in moto appaia visivamente più corto rispetto a quando è fermo; bensì, se si dovesse fare una fotografia ad un corpo in regime relativistico, questo apparirebbe ruotato. Una discussione più completa al riguardo si può consultare nel testo [5] al § 3.8.4.

### Dilatazione dei tempi

Fissata una particella, un intervallo di tempo, detto proprio, misurato in un sistema di riferimento che vede la particella ferma è diverso rispetto allo stesso intervallo di tempo, detto improprio, misurato nel sistema di riferimento che la vede in moto. In particolare i due intervalli sono connessi dalla relazione:

$$\Delta t' = \gamma \Delta T$$

Dunque l'intervallo di tempo proprio è il minimo che si possa misurare.

## 2.5 Prova sperimentale della teoria della relatività

L'esperimento di Bruno Rossi e David Hall costituisce un'evidenza sperimentale circa la correttezza delle previsioni relative alla dilatazione dei tempi e alla contrazione delle lunghezze contenute nella teoria della relatività ristretta. L'esperimento fu condotto nel 1940 alternativamente a Echo Lake e a Denver e i risultati vennero pubblicati l'anno successivo. Scopo dell'esperimento è selezionare i muoni che abbiano la stessa quantità di moto e misurarne la vita media e il numero. Il loro apparato sperimentale consiste di un contatore Geiger sopra il quale è posto uno strato di materiale assorbente; la presenza di questo strato assorbente fa sì che solamente i muoni la cui energia sia compresa in un certo intervallo di valori rallentino e si arrestino nel rivelatore. I muoni vengono prodotti nell'alta atmosfera dove l'azoto reagisce con i protoni dei raggi cosmici producendo pioni i quali decadono velocemente in muoni. I muoni hanno una vita media a riposo abbastanza elevata prima di decadere in elettroni. Ovviamente il processo di decadimento da muone ad elettrone è spontaneo perché si andrebbe a minimizzare la massa e dunque l'energia relativistica. Avendo precedentemente determinato la vita media del muone a riposo  $\tau = 2.2 \mu s$  e la sua

velocità  $v = 0.995c$ , mediante il circuito di coincidenze veloci alla Rossi, e conoscendo la legge di decadimento del muone

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

i due furono in grado di determinare quanti muoni giugnessero al rivelatore rispetto a quelli prodotti nell'alta atmosfera. Seguendo le leggi di meccanica classica, per cui gli intervalli di tempo sono invarianti in qualunque sistema di riferimento, doveva essere

$$N_{EL} = N_{ATM} e^{-\frac{t}{\tau}} = N_{ATM} e^{-\frac{d}{v\tau}} \simeq N_{ATM} e^{-\frac{d}{c\tau}} = N_{ATM} e^{-15.15} \Rightarrow \frac{N_{EL}}{N_{ATM}} \simeq 2 \cdot 10^{-7}$$

essendo  $N_{EL}$  il numero di muoni rilevati ad Echo Lake e  $N_{ATM}$  il numero di muoni prodotti nell'alta atmosfera, a circa 10 km di altitudine rispetto a Echo Lake. Abbiamo supposto con ragionevolezza che il moto fosse rettilineo uniforme e quindi

$$t = \frac{d}{v}$$

Dunque se nell'alta atmosfera fossero stati prodotti 10 milioni di muoni, ad Echo Lake ne dovrebbe arrivare solamente 1 in contrasto contro i dati derivanti dall'apparato sperimentale. Adoperando correzioni relativistiche alla precedente relazione si ottiene

$$\frac{N_{EL}}{N_{ATM}} = e^{\frac{t}{\gamma\tau}} \simeq e^{-1.51} \simeq 0.22$$

essendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.995^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-0.005)^2}} \simeq 10$$

Il risultato ottenuto con queste correzioni era già più ragionevole, tuttavia era ancora di tipo semiquantitativo in quanto non si era in grado di conoscere quanti muoni fossero prodotti nell'alta atmosfera. Per capire se questa correzione fosse corretta bastava misurare il numero di muoni ad Echo Lake e a Denver, la cui differenza di altitudine era di 1650 m. Seguendo questo ragionamento doveva essere

$$N_D = N_{EL} e^{\frac{d}{\gamma c\tau}} \simeq N_{EL} e^{-0.25} \Rightarrow \frac{N_D}{N_{EL}} = 0.78$$

Tale risultato era in accordo con i dati sperimentali e ciò provò la dilatazione dei tempi

## 2.6 Legge di composizione delle velocità

A partire dalle Trasformazioni di Lorentz(2.11), determiniamo la legge di composizione delle velocità. In un sistema cartesiano ortogonale avremo per la componente



$x$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{\partial x'}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial t}}{\frac{\partial t'}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial t'}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial t'}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial t'}{\partial t}} = \frac{\gamma v_x - \gamma v_0}{-\gamma \frac{v_0}{c^2} v_x - \gamma} = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} \quad (2.30)$$

Facendo procedimenti analoghi per le componenti  $y$  e  $z$  della velocità si ottiene:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)} \end{cases} \quad (2.31)$$

**Esempio** Mostriamo che la velocità della luce è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Supponiamo che sia

$$v_x = c$$

Per le (2.31) deve essere

$$\begin{cases} v'_x = \frac{c - v_0}{1 - \frac{v_0 c}{c^2}} = \frac{c - v_0}{\frac{c - v_0}{c}} = c \\ v'_y = 0 \\ v'_z = 0 \end{cases}$$

Le ultime due relazioni sono banali in quanto se  $v_x = c$  allora, dovendo essere  $\vec{v} = (c, 0, 0)$ , le altre componenti devono essere nulle.

**Esempio** Ragioniamo su un altro caso particolare, che può essere inquadrato come "caso limite". Supponiamo che sia  $v_0 = c$ ,  $v'_x = c$  e  $v'_y = 0$ . Allora, per le (2.31) deve essere  $v_x = \frac{2c}{1+1} = c$  e  $v_y = 0$ . Questo risultato ci mostra che non si può eccedere la velocità della luce, come invece avrebbe previsto la Relatività Galileiana, e ciò è stato dimostrato almeno per moti lungo l'asse delle  $x$ . Se supponessimo  $v_0 = c$ ,  $v'_y$  e  $v'_z = 0$ , otterremmo che  $v_x = c$ , mentre per l'altra componente il discorso è leggermente più articolato. Infatti

$$\lim_{v_0 \rightarrow c} \gamma = \lim_{v_0 \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \lim_{v_0 \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = +\infty \quad (2.32)$$

per cui

$$\lim_{v_0 \rightarrow c} \frac{1}{\gamma} = 0 \quad (2.33)$$

Quindi, per le (2.31), si ha che  $v_y = \frac{c}{\gamma} = 0$ . Il discorso è analogo per la componente  $z$ .

### Confronto con i risultati dell'esperimento di Fizeau

Proviamo che questa legge di composizione delle velocità soddisfa i risultati dell'esperimento di Fizeau (1.11), cioè:

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_0$$

essendo  $v$  la velocità della luce nell'acqua in moto rispetto a terra,  $c/n$  la velocità della luce nel sistema in cui l'acqua è ferma e  $v_0$  la velocità dell'acqua rispetto a terra. Invertendo la prima delle (2.31) si ottiene

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v_0}{1 + \frac{v_0 c}{nc^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v_0}{1 + \frac{v_0}{cn}} \quad (2.34)$$

Poiché

$$\frac{v_0}{cn} \ll 1$$

possiamo sviluppare il denominatore in serie di Taylor arrestando lo sviluppo al primo ordine ottenendo

$$v_x = \left(\frac{c}{n} + v_0\right) \left(1 - \frac{v_0}{cn}\right) = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_0 - \frac{v_0^2}{cn} \simeq \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_0 \quad (2.35)$$

che è la relazione (1.11). Dunque i risultati dell'esperimento di Fizeau trovano significato con la teoria della relatività ristretta e la composizione delle velocità da essa derivante. Inoltre se il mezzo rifrangente è così tenue da avere un indice di rifrazione  $n$  che tende a 1, allora otteniamo che la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento.

### 2.6.1 Dai risultati di Fizeau è possibile risalire alle trasformazioni di Lorentz (\*)

# Lo spazio-tempo 4-dimensionale

## 3.1 Spazi euclidei

Non appena si introduce un sistema di coordinate ciascun punto è individuato da tre numeri che sono proprio le sue coordinate. Una varietà tridimensionale è costituita da un insieme di punti. Se si vuole passare dalla varietà a uno spazio con delle proprietà geometriche precise, è necessario introdurre una metrica, cioè un'espressione per la distanza tra due punti infinitamente vicini. In accordo con la geometria euclidea, la distanza tra due punti infinitamente vicina può essere scritta come:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.1)$$

Tale quantità è detta metrica euclidea. Essa è invariante per trasformazioni di coordinate e tale è anche la distanza tra due punti qualunque dello spazio. Dunque, nella geometria euclidea, l'invariante che caratterizza lo spazio è la distanza tra due punti

$$r_{12}^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Se aggiungiamo una quarta dimensione al nostro spazio, la metrica diventa

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \quad (3.2)$$

e la distanza tra due punti diventa

$$r_{12}^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (w_1 - w_2)^2}$$

## 3.2 Lo spaziotempo di Minkowski

Le trasformazioni di Lorentz nella forma (2.11) non sembrano simmetriche. Per simmetrizzarle poniamo

$$\tau' = ct' \quad \text{e} \quad \tau = ct$$

Con questa posizione le (2.11) diventano

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta\tau) \\ y' = y \\ z' = z \\ \tau' = \gamma(\tau - \beta x) \end{cases} \quad (3.3)$$

Le trasformazioni di Lorentz in questa forma appaiono completamente simmetriche. Notiamo quindi che mentre nella meccanica newtoniana la variabile temporanea era assoluta, nella relatività speciale la variabile temporale non è distinta da quelle spaziali ma dipende da esse. In particolare la variabile temporanea e quelle spaziali mutano nella stessa identica maniera. Ciò portò H. Minkowski a introdurre una nuova visione dello spazio fisico.



**Figura 3.1:** Spaziotempo di Minkowski

Mentre nella meccanica newtoniana lo spazio fisico era uno spazio a tre dimensioni e il tempo era solo un parametro, Minkowski introdusse uno spazio fisico quadridimensionale detto spaziotempo di Minkowski, in cui ciascun evento ha quattro coordinate  $(x, y, z, ct)$ . Le quattro dimensioni dipendono linearmente l'una dalle altre. Nella relatività speciale gli eventi vanno raffigurati in un diagramma detto spaziotempo di Minkowski. Nello spaziotempo di Minkowski (anche detto spazio degli eventi) un punto (**punto d'universo**) indica un evento, mentre il moto di una particella viene rappresentato da una linea di universo. Essendo difficile, se non impossibile, raffigurare uno spazio quadridimensionale

possiamo adottare questo espediente: consideriamo una sola variabile spaziale, ad esempio la  $x$ , e la variabile temporale  $ct$ . In questo modo possiamo raffigurare lo spaziotempo di Minkowsky come illustrato in figura 3.1. In questo piano risulta possibile raffigurare gli eventi, che saranno bidimensionali (sto infatti trascurando volutamente la  $y$  e la  $z$ ); dunque la quaterna  $(x, y, z, ct)$  che raffigura l'evento diventa un punto in questo piano. Nell'origine di questo piano troviamo il nostro presente. L'evento evolve e la sua evoluzione non può trovarsi in qualunque punto del piano nello spazio di Minkowski; infatti poiché deve valere il secondo postulato della relatività ristretta, l'evoluzione dell'evento potrà trovarsi solamente nella regione azzurra della figura 3.1, dunque nella zona compresa tra le due bisettrici. La velocità per raggiungere un punto al di fuori di tale zona è maggiore della velocità della luce e dunque non è possibile correlare con un nesso di causalità un evento iniziale con un evento nella zona al di fuori delle bisettrici. Un evento nella zona compresa tra le due bisettrici può essere, invece, correlato causalmente con l'evento iniziale. Il cono inferiore invece prende il nome di passato e contiene tutti gli eventi che possono avere influenzato il presente. L'unione dei due coni prende il nome di cono luce. Qual è il significato della zona al di fuori delle bisettrici? Tale zona rappresenta gli altri. In particolare l'asse su cui  $x = 0$  rappresenta il presente degli altri che più di tutti gli altri punti non

può essere influenzato da noi; infatti se noi potessimo influenzare il presente degli altri i segnali dovrebbero propagarsi a velocità infinita. Nello spaziotempo newtoniano invece il passato era rappresentato dal semipiano negativo dei tempi, mentre il futuro dal semipiano positivo dei tempi. Era quindi possibile introdurre linee di passato e linee di futuro in quanto i segnali potevano viaggiare a velocità infinita (istantaneamente).

Consideriamo due osservatori  $O$  e  $O'$ , ciascuno dei quali si muova rispetto all'altro con velocità  $\vec{v}$ . La linea d'universo di  $O'$  rispetto a  $O$  sarà una retta passante per l'origine in quanto per  $t = 0$  si ha  $O = O'$ . Quella che per  $O$  è la linea di universo di  $O'$ , per quest'ultimo rappresenta il suo asse dei tempi  $ct'$  perché per  $O'$  gli eventi su questo asse avvengono tutti nello stesso posto  $x' = 0$ . Tracciamo adesso l'equazione di moto di un segnale luminoso  $x = \pm ct$ . Poiché per il secondo postulato la velocità della luce deve essere costante in qualunque sistema di riferimento inerziale, allora le rette  $x = ct$  e  $x' = ct'$  devono essere bisettrici per entrambi i sistemi di coordinate, dunque l'asse  $x'$  dovrà essere simmetrico all'asse  $ct'$  rispetto alla linea d'universo  $x' = ct'$ . Nella meccanica galileiana invece l'asse  $x'$  sarebbe dovuto coincidere con l'asse  $x$  e dunque la velocità della luce non sarebbe stata la stessa nei due sistemi di riferimento, in accordo con la relatività galileiana.

### 3.3 Intervallo relativistico

Consideriamo una varietà a 4 dimensioni il cui punto generico abbia coordinate  $x, y, z, \tau = ct$ . Ogni evento fisico può essere associato a un punto di tale varietà e viceversa. A partire da tale varietà si introduce lo spazio di Minkowski o spazio degli eventi. Per fare ciò è necessario determinare una quantità che in tale varietà sia invariante. Se consideriamo soltanto sistemi di riferimento inerziali, la quantità (2.1) risulta essere invariante per ogni coppia di eventi e quindi per ogni coppia di punti dello spazio di Minkowski. Possiamo quindi introdurre una metrica nello spazio di Minkowski data da:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.4)$$

Tale matrice viene detta metrica di Minkowski. Introducendo quindi la matrice della metrica dello spazio di Minkowski

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

si può scrivere la metrica di Minkowski come

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.6)$$

È evidente che le (3.2) e (3.4) differiscono solamente per i segni dei coefficienti. La totalità di tali segni è detta segnatura della forma quadratica; mentre la segnatura della (3.2) è  $(++++)$ , quella della (3.4) è  $(+---)$ . Uno spazio avente segnatura come

quella della (3.4) è detto pseudo-euclideo e le sue proprietà sono profondamente differenti dallo spazio euclideo. In particolare, la distanza tra due punti dello spazio di Minkowski è data da

$$r_{12}^2 = c^2 (\tau_1 - \tau_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \quad (3.7)$$

Tale intervallo è un invariante ed è detto intervallo relativistico. A differenza dell'invariante euclideo che è sempre positivo, l'intervallo relativistico può essere positivo, negativo o nullo. Dati due eventi  $E_1 \equiv O$  ed  $E_2 \equiv E$ , gli intervalli relativistici vengono classificati come segue:

- Se  $E$  appartiene a una delle due rette  $x = \pm ct$

$$\Delta s(O, E) = 0$$

l'intervallo si dice di tipo luce, in quanto in tale caso i due eventi sono connessi da un segnale che si propaga alla velocità della luce.

- Se  $E$  è interno al cono luce

$$\Delta s(O, E) > 0$$

l'intervallo si dice di tipo tempo, in quanto in tale caso tra i due eventi può esistere una connessione causale.

- Se  $E$  appartiene alla regione esterna al cono luce

$$\Delta s(O, E) < 0$$

l'intervallo si dice di tipo spazio, in quanto tra i due eventi non si può stabilire una connessione causale, ma solamente una connessione spaziale.

### 3.4 Geodetica di un punto materiale libero

Consideriamo una particella libera nello spazio di Minkowski, ci chiediamo allora la forma della sua linea di universo. Dalla meccanica analitica sappiamo che la traiettoria di un corpo libero dev'essere una geodetica (generalizzazione del principio d'inerzia), ossia una curva la cui lunghezza

$$L = \int_{E_1}^{E_2} ds \quad (3.8)$$

risulti stazionaria; tale condizione è soddisfatta ponendo  $\delta L = 0$ .<sup>5</sup> Il tipo di geodetica è determinato dalla metrica dello spazio considerato, e nel caso dello spazio di Minkowski

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \sqrt{c^2 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dt = \sqrt{c^2 - v^2} dt \quad (3.9)$$

<sup>5</sup>La notazione  $\delta F$  indica il "differenziale funzionale" o "variazione" del funzionale  $F$ , del tutto analogo al differenziale totale di una funzione  $f$  indicato con  $df$ . Qui la lunghezza  $L$  è un funzionale nel senso che il suo dominio è l'insieme delle funzioni curve (di tipo tempo in ogni punto) nello spazio di Minkowski di estremi fissati  $E_1, E_2$ .

dev'essere allora

$$\delta L = \delta \int_{E_1}^{E_2} \sqrt{c^2 - v^2} dt = \int_{E_1}^{E_2} \delta \left( \sqrt{c^2 - v^2} \right) dt \quad (3.10)$$

e poiché

$$\delta \left( \sqrt{c^2 - v^2} \right) = - \frac{v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + v_z \delta v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (3.11)$$

la variazione  $\delta L$  vale

$$\delta L = \int_{E_1}^{E_2} - \frac{v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + v_z \delta v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} dt \quad (3.12)$$

a questo punto, poiché  $\delta v_x = \delta \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(\delta x)$ , scomponiamo l'ultimo integrale nella somma dei tre contributi e integriamoli per parti

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{E_1}^{E_2} \frac{-v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} \frac{d}{dt}(\delta x) dt + \int_{E_1}^{E_2} \frac{-v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} \frac{d}{dt}(\delta y) dt + \int_{E_1}^{E_2} \frac{-v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} \frac{d}{dt}(\delta z) dt \\ &= \left[ \frac{-1}{\sqrt{c^2 - v^2}} (v_x \delta x + v_y \delta y + v_z \delta z) \right]_{E_1}^{E_2} - \\ &\quad - \int_{E_1}^{E_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{-v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \delta x + \frac{d}{dt} \left( \frac{-v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \delta y + \frac{d}{dt} \left( \frac{-v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \delta z \right\} dt \end{aligned}$$

e poiché  $\delta x = \delta y = \delta z = 0$  in  $E_1$  e  $E_2$  (estremi fissi) il primo termine si annulla e rimane solo l'integrale. Allora, per avere  $\delta L = 0$  per ogni  $\delta x, \delta y, \delta z$  è necessario che valgano le equazioni<sup>6</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{-v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{-v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{-v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) = 0 \quad (3.13)$$

e quindi

$$\frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} = k_1 \quad \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = k_2 \quad \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} = k_3 \quad (3.14)$$

Sommando in quadratura le tre equazioni trovate si ottiene

$$\frac{v^2}{c^2 - v^2} = k^2 \quad (3.15)$$

da ciò si ricava immediatamente che il modulo della velocità deve essere costante e pari a

$$v^2 = \frac{k^2}{k^2 + 1} c^2 \quad (3.16)$$

---

<sup>6</sup>Queste costituiscono una forma particolare delle più generali equazioni di Eulero-Lagrange. I calcoli mostrati si possono quindi riassumere affermando che  $\delta L = 0$  se e solo se la funzione integranda  $f(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, t) = \sqrt{c^2 - v^2}$  soddisfa le equazioni

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Inoltre, poiché devono valere le (3.14), devono essere costanti anche le sue componenti  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$ , dunque la velocità è costante anche in direzione. Concludiamo che il moto per inerzia nello spazio di Minkowski è quello rettilineo uniforme, e quindi la sua linea di universo è una retta.

Vale la pena sottolineare come il tipo di geodetica dipenda dalla metrica  $ds$  dello spazio considerato. In relatività generale, la metrica è funzione della distribuzione di massa-energia e dunque le linee di universo dei corpi liberi non sono più delle rette.



## Dinamica relativistica

### 4.1 Quadrivettori

Così come in uno spazio tridimensionale, le coordinate di un punto in uno spazio a quattro dimensioni possono essere trattate come le componenti di un raggio vettore quadridimensionale avente la coda nell'origine del sistema di riferimento e la punta nel punto considerato. Indicheremo il quadrivettore con una lettera maiuscola in grassetto: il quadrivettore posizione sarà indicato col simbolo  $R^\mu$  se le sue componenti sono controvarianti, mentre useremo il simbolo  $R_\mu$  se le sue componenti sono covarianti. Le componenti del quadrivettore posizione potranno essere espresse sia con la notazione immaginaria (a cui è associata una matrice della metrica euclidea) sia con la notazione a cui è associata metrica pseudoeuclidea. Tuttavia mentre la notazione immaginaria risulta priva di utilizzo fisico, l'utilizzo di variabili reali ci permetterà in seguito di introdurre il formalismo della teoria della relatività generale.

Il quadrivettore posizione dunque sarà espresso come:

$$R^\mu = (R^0, R^1, R^2, R^3) = (ct, x, y, z) \quad (4.1)$$

Esso potrà essere riscritto in maniera covariante come:

$$R_\mu = g_{\mu\nu} R^\nu = (R^0, -R^1, -R^2, -R^3) = (ct, -x, -y, -z) \quad (4.2)$$

essendo  $g_{\mu\nu}$  la matrice della metrica pseudoeuclidea introdotta nel paragrafo 3.3.

Il quadrivettore posizione può anche essere scritto nella forma

$$R^\mu = (ct, \vec{r})$$

essendo  $\vec{r}$  il vettore posizione nello spazio tridimensionale.

Il quadrivettore posizione è solo un tipo di quadrivettore. In generale un quadrivettore può essere scritto nella forma

$$X^\mu = (X^0, X^1, X^2, X^3)$$

Le sue componenti dovranno soddisfare le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} X^{0'} = \gamma (X^0 - \beta X^1) \\ X^{1'} = \gamma (X^1 - \beta X^0) \\ X^{2'} = X^2 \\ X^{3'} = X^3 \end{cases}$$

Introducendo la matrice

$$\Lambda_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

esse possono essere riscritte nella forma

$$X'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} X^{\nu} \quad (4.4)$$

Introduciamo il prodotto scalare tra quadrivettori come:

$$X^{\mu} X_{\mu} = g_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu} = X^0 X^0 - X^1 X^1 - X^2 X^2 - X^3 X^3 \quad (4.5)$$

Si prova che il prodotto scalare tra due quadrivettori è invariante nello spazio di Minkowski, infatti:

$$\begin{aligned} X'^{\mu} X'_{\mu} &= \\ &= (ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = \\ &= \gamma^2 (ct - \beta x)^2 - \gamma^2 (x - \beta ct)^2 - y^2 - z^2 = \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) (ct)^2 - \gamma^2 (1 - \beta^2) (x)^2 - y^2 - z^2 = \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \\ &= X^{\mu} X_{\mu} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ciò fa sì che la distanza in uno spazio di Minkowski sia un invariante.

Nello spazio di Minkowski tutti i quadrivettori devono essere definiti in modo tale che:

- soddisfino le trasformazioni di Lorentz
- nel limite di basse velocità  $v \ll c$  la parte spaziale del quadrivettore coincida con il trivettore corrispondente
- la norma del quadrivettore sia invariante

Tutte le quantità che hanno un significato fisico reale devono essere definite come tensori: scalari (tensori di rango 0), quadrivettori (tensori di rango 1) o tensori di rango maggiore di 1.

## 4.2 Quadrivettore velocità e quadrivettore accelerazione

Per estendere le leggi della dinamica allo spaziotempo di Minkowski bisogna introdurre i quadrivettori necessari. Dobbiamo costruire, dunque, il quadrivettore velocità

e il quadrivettore accelerazione nello stesso modo in cui abbiamo fatto in uno spazio tridimensionale. Tuttavia, mentre in uno spazio tridimensionale la velocità è definita come la derivata del raggio vettore  $\vec{r}$  rispetto al tempo, nello spazio di Minkowski il quadrivettore velocità non potrà essere definito come la derivata del quadrivettore posizione rispetto al tempo, in quanto esso non è un invariante. È necessario dunque determinare un invariante che permetta di definire il quadrivettore velocità. Esso risulta essere il tempo proprio di una particella, in quanto è una quantità temporale invariante. Consideriamo una particella in un riferimento  $K$  e supponiamo che le sue coordinate varino di una quantità  $dx, dy, dz$  nell'intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ . Consideriamo adesso il riferimento  $K'$  solidale alla particella; in tale riferimento le coordinate della particella nel tempo  $dt'$  non variano. L'intervallo relativistico risulta quindi essere:

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt'^2$$

Nel riferimento  $K'$  l'intervallo di tempo  $dt'$  è il tempo proprio. Detto  $d\tau$  il tempo proprio, dalla precedente equazione si ha che

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dl}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma}$$

dove la costante  $\gamma$  è definita come:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.7)$$

Proprio per questo motivo d'ora in avanti indicheremo tale costante con il simbolo  $\gamma_v$ , in modo da evidenziare la sua dipendenza dalla velocità  $v$ . Possiamo quindi definire il quadrivettore velocità come:

$$U^\mu = \frac{dR^\mu}{d\tau} \quad (4.8)$$

Poiché  $d\tau$  è un invariante e  $dR^\mu$  è un quadrivettore,  $U^\mu$  risulta essere un quadrivettore. Le ultime tre componenti di tale quadrivettore risultano essere le componenti della convenzionale trivelocità moltiplicate per il fattore  $\gamma_v$ <sup>7</sup>:

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma_v \frac{dx^\alpha}{dt} = \gamma_v v^\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

La prima componente va trovata separatamente:

$$U^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma_v \frac{d(ct)}{dt} = \gamma c \quad (4.10)$$

Il quadrivettore velocità può essere scritto come:

$$U^\mu = (\gamma_v c, \gamma_v v_x, \gamma_v v_y, \gamma_v v_z) \quad (4.11)$$

Quando  $\beta \rightarrow 0$ , cioè  $v \ll c$ , si ha che  $\gamma_v \rightarrow 1$  e quindi le ultime tre componenti coincidono con la trivelocità. Risulta essere di particolare interesse la prima componente:

<sup>7</sup>Soltanto i quadrivettori richiedono una distinzione tra apici e pedici; nei trivettori invece non vi è differenza tra componenti covarianti e controvarianti in quanto la matrice della metrica è euclidea

essa è non nulla anche quando la particella è a riposo. Ciò significa che il tempo non può essere fermato e scorre senza interruzioni. Conseguentemente nello spazio di Minkowski non è possibile definire uno stato di quiete. La quadrivelocità può anche essere scritta come:

$$U^\mu = (\gamma_v c, \gamma_v \vec{v}) \quad (4.12)$$

essendo  $\vec{v}$  la trivelocità. La norma della quadrivelocità è invariante, infatti:

$$U^\mu U_\mu = c^2 \gamma_v^2 - \gamma_v^2 v^2 = \gamma_v^2 (c^2 - v^2) = c^2 \gamma_v^2 \frac{1}{\gamma_v^2} = c^2$$

La quadrivelocità soddisfa le trasformazioni di Lorentz:

$$U^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} U^{\beta}$$

Applicando le trasformazioni di Lorentz alla quadrivelocità si ottengono proprio le leggi di composizione delle velocità che derivano dalle trasformazioni di Lorentz. Possiamo adesso definire la quadriaccelerazione come:

$$A^\mu = \frac{d^2 R^\mu}{d\tau^2} = \frac{dU^\mu}{d\tau} \quad (4.13)$$

o esprimendolo per componenti

$$A^\alpha = \frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2}$$

Si dimostra che

$$\mathbf{A} = \left( \gamma_v \frac{d}{d\tau} (c \gamma_v), \gamma_v \frac{d}{d\tau} (\gamma_v \vec{v}) \right) = \left( \frac{\gamma_v}{mc} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau}, \gamma_v \frac{d}{d\tau} (\gamma_v \vec{v}) \right) \quad (4.14)$$

dove  $\mathcal{E}$  è l'energia della particella che verrà definita nel prossimo paragrafo.

### 4.3 Dinamica relativistica

Nella meccanica non relativistica la seconda legge di Newton può essere scritta nella forma

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \quad (4.15)$$

o equivalentemente

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (4.16)$$

dove  $\vec{p} = m\vec{v}$  è la quantità di moto classica della particella e  $\vec{F}$  è la forza totale applicata sul corpo. Vogliamo adesso estendere il concetto di forza allo spazio di Minkowski. Per fare ciò è necessario definire il quadrivettore energia-impulso

$$P^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (4.17)$$

essendo  $\vec{p} = \gamma_v m \vec{v}$  ed  $E = \gamma_v m c^2$ . La prima componente di  $P^\mu$  è l'energia della particella. Nel limite di basse velocità, la componente spaziale del quadrivettore energia-impulso si riduce alla quantità di moto classica di un corpo di massa  $m$ . La norma del quadrivettore energia-impulso è invariante:

$$P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{\gamma_v^2 m^2 c^4}{c^2} - \gamma_v^2 m^2 v^2 = \gamma_v^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma_v^2 m^2 c^2 \frac{1}{\gamma_v^2} = m^2 c^2$$

Se consideriamo il sistema in cui il corpo è fermo avremo

$$E_{fermo} = m c^2 \quad (4.18)$$

Se invece il corpo è isolato (dunque i potenziali, essendo energie di interazioni, sono assenti perché non vi sono altri corpi con cui possa interagire) e si muove con velocità  $v$  si ottiene:

$$E = K + m c^2 \quad (4.19)$$

dove  $K$  è l'energia cinetica. Considerando che  $P^\mu P_\mu$  è invariante e che se il corpo è fermo tale quantità vale  $P_{fermo}^\mu P_{fermo \mu} = m c^2$  si ottiene:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (4.20)$$

detta relazione di mass-shell.

Abbiamo adesso tutti gli elementi necessari per costruire il quadrivettore forza, anche detto forza di Minkowski. Esso è definito come la derivata del quadrivettore energia-impulso rispetto al tempo proprio:

$$K^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \left( \frac{dE}{d\tau}, \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right) \quad (4.21)$$

Notiamo che per indicare la forza di Minkowski è stata usata la lettera  $K$  in quanto in questa trattazione la lettera  $F$  sarà riservata al tensore elettromagnetico. Ricordando che

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_v}$$

possiamo riscrivere la (4.21) come

$$K^\mu = \gamma_v \left( \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma_v \left( \frac{dE}{dt}, \vec{f} \right) \quad (4.22)$$

Notiamo che la parte spaziale  $\vec{f}$  della forza di Minkowski nel limite di basse velocità torna a essere la forza classica definita da Newton. La componente temporale del quadrivettore forza invece risulta essere una sorta di potenza relativistica.



# Elettromagnetismo relativistico

La teoria della relatività ristretta mostra come considerare i fenomeni fisici in un qualunque sistema di riferimento inerziale e si basa sulla completa equivalenza della leggi fisiche in ogni riferimento inerziale. Dunque le equazioni che descrivono i fenomeni fisici in sistemi di riferimento inerziali devono essere covarianti. Come abbiamo già accennato, le trasformazioni di Lorentz nascono per rendere covarianti le equazioni di Maxwell. Inoltre proprio tali equazioni sono state il motivo dello sviluppo della teoria della relatività ristretta. Risulta naturale, dunque, cercare di riscrivere le equazioni di Maxwell in una forma quadridimensionale. Nel corso di questo capitolo dimostreremo l'invarianza della carica elettrica e studieremo come si trasforma il campo elettromagnetico nel passaggio da un sistema di riferimento a un altro.

## 5.1 L'invarianza della carica elettrica

### 5.1.1 Metodo sperimentale

La misura di una carica  $q$  viene effettuata utilizzando una carica nota  $Q$  e misurando la forza che si esercita tra le due cariche. Questa procedura, tuttavia, ha risultati soddisfacenti solo se le cariche sono a riposo. Se le cariche sono in moto, la forza può dipendere da altri fattori come il modulo della velocità e la sua direzione. Dimostriamo che, però, la carica risulta essere un invariante relativistico. Sperimentalmente si ricava che la legge di Gauss vale anche per le cariche in moto; ciò significa che, sebbene il valore del campo elettrico  $\vec{E}$  potrebbe cambiare rispetto al caso in cui  $\vec{v} = 0$ , il suo flusso attraverso una superficie  $S_t$  resta invariato, dove  $S_t$  è una superficie su cui il campo elettrico prodotto da  $q$  viene misurato allo stesso istante  $t$ . Da questo risultato sperimentale si ricava immediatamente che la carica non potrà dipendere dalla velocità con cui essa si muove.

Cosa succederebbe se, per assurdo, la carica dipendesse dalla velocità? Consideriamo un conduttore elettricamente neutro e riscaldiamolo, fornendogli, dunque, energia. Per il teorema di equipartizione dell'energia, essa si suddividerà equamente tra elettroni e nuclei aumentando la loro energia cinetica media. Poiché gli elettroni hanno una massa molto inferiore rispetto a quella dei nuclei, la loro velocità sarà molto più

grande rispetto a quella dei nuclei. Dunque se fosse  $q' = \gamma q$  avremo che la carica aumenta con la velocità e quindi il conduttore non sarebbe più neutro: avremmo, cioè, violato il principio di conservazione della carica.

### 5.1.2 Metodo teorico (\*)

Questo metodo prevede la dimostrazione dell'invarianza della carica elettrica mediante la gauge-invarianza del funzionale del funzionale legato all'interazione tra particelle cariche.

*Questo paragrafo verrà completato in futuro.*

## 5.2 Quadrivettore densità di corrente

Definiamo il quadrivettore densità di corrente come:

$$J^\mu = (\gamma_v \rho c, \gamma_v \vec{j}) \quad (5.1)$$

dove  $\rho$  è la densità di carica e  $\vec{j}$  è la densità di corrente.

Dimostriamo che questo quadrivettore soddisfa le trasformazioni di Lorentz. Nonostante la quantità di carica sia relativisticamente invariante, come abbiamo già dimostrato nel precedente paragrafo, non sono tali né la densità di carica  $\rho$  né la densità di corrente  $\vec{j}$ . Consideriamo una certa distribuzione di carica. Per misurare la densità di carica, un osservatore fermo rispetto alla distribuzione stessa prenderà un volume  $d\tau = dx dy dz$  e misurerà la quantità di carica  $dQ$  in esso contenuta. In tale riferimento la densità di carica è data da

$$\rho = \frac{dQ}{d\tau} \quad (5.2)$$

Consideriamo un nuovo sistema di riferimento inerziale in moto con velocità  $\vec{v}_0$  rispetto al primo. (Come fatto finora supponiamo che si muova parallelamente all'asse  $x$ ). La carica contenuta all'interno del volume considerato, in virtù della conservazione della carica elettrica, risulta essere sempre  $dQ$ , tuttavia per il fenomeno della contrazione delle lunghezze il lato  $dx'$  che tale osservatore misura è pari a

$$dx' = \frac{dx}{\gamma}$$

Dunque la densità di carica misurata da tale osservatore è

$$\rho' = \frac{dQ}{d\tau'} = \frac{dQ}{dx' dy' dz'} = \gamma \frac{dQ}{dx dy dz} = \gamma \rho \quad (5.3)$$

Consideriamo adesso la densità di corrente  $\vec{j}$  e supponiamo, per semplicità, che essa sia dovuta a portatori di un sol segno. Per definizione essa può essere scritta come

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (5.4)$$

Si nota immediatamente che cambiando sistema di riferimento la densità di corrente cambia sia perché cambia la velocità di deriva  $\vec{v}_d$  sia perché cambia la densità di



carica  $\rho$ . Da queste osservazioni deriva che la densità di corrente costituisce la parte spaziale di un quadrivettore la cui componente temporale è  $\gamma_v \rho c$ .

Il fatto che la (5.1) sia un quadrettore è dimostrato dalla sua analogia formale con il quadrivettore energia-impulso  $P^\mu$ . Il 4-invariante a esso associato è

$$J^\mu J_\mu = \gamma_v^2 \rho^2 c^2 - \gamma_v^2 \rho^2 v^2 = \gamma_v^2 \rho^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \rho^2 c^2 \quad (5.5)$$

essendo  $\rho$  la densità di carica misurata nel riferimento inerziale.

Qualora nello spazio siano presenti più tipi di portatori il quadrivettore densità di corrente può essere scritto come la somma dei 4-vettori densità di corrente relativi ai diversi tipi di portatori.

$$J^\mu = J_+^\mu + J_-^\mu \quad (5.6)$$

Il quadrivettore densità di corrente si trasforma seguendo le trasformazioni di Lorentz:

$$J^\mu = \Lambda_\nu^\mu J^\nu \quad (5.7)$$

essendo  $\Lambda_\nu^\mu$  la matrice di Lorentz.

### 5.2.1 Formulazione differente

Sia  $\rho_0$  la densità di carica che un osservatore misura in un riferimento solidale alla distribuzione. In analogia a quanto fatto per la 4-velocità, definiamo il quadrivettore densità di corrente come

$$J^\mu = \rho_0 U^\mu \quad (5.8)$$

La prima componente del quadrivettore risulta essere

$$J^0 = \rho_0 U^0 = \rho_0 \gamma_v c \quad (5.9)$$

che è la densità di carica che misura un osservatore in moto con velocità  $\vec{v}$  rispetto alla distribuzione. Le componenti spaziali della quadricorrente sono

$$J^i = \rho_0 U^i = \gamma_v \rho_0 v_i \quad (5.10)$$

Esso risulta essere la densità di corrente relativistica. Il 4-invariante a esso associato è

$$J^\mu J_\mu = \gamma_v^2 \rho^2 c^2 - \gamma_v^2 \rho^2 v^2 = \gamma_v^2 \rho^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \rho^2 c^2 \quad (5.11)$$

essendo  $\rho$  la densità di carica misurata nel riferimento inerziale.

Qualora nello spazio siano presenti più tipi di portatori il quadrivettore densità di corrente può essere scritto come la somma dei 4-vettori densità di corrente relativi ai diversi tipi di portatori.

$$J^\mu = J_+^\mu + J_-^\mu \quad (5.12)$$

Il quadrivettore densità di corrente si trasforma seguendo le trasformazioni di Lorentz:

$$J^\mu = \Lambda_\nu^\mu J^\nu \quad (5.13)$$

essendo  $\Lambda_\nu^\mu$  la matrice di Lorentz.

### 5.3 Covarianza relativistica dell'elettrodinamica

<sup>8</sup> Introduciamo per facilità di comprensione l'operatore d'alambertiano definito come:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (5.14)$$

Ricordiamo che, dalla teoria delle onde elettromagnetiche, si ha

$$\varepsilon\mu = \frac{1}{v^2}$$

essendo  $v$  la velocità di propagazione dell'onda. L'operatore (5.14) può quindi essere riscritto nella forma:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (5.15)$$

Tale operatore è l'estensione del laplaciano nello spazio di Minkowski. Usando una notazione più compatta esso può essere riscritto come:

$$\square = -\partial^\mu \partial_\mu = -g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \quad (5.16)$$

Risulta immediato verificare che l'operatore d'alambertiano è invariante per trasformazioni di Lorentz.

Consideriamo adesso le equazioni elettrodinamiche disaccoppiate nel vuoto:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (5.17)$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c} = \mu_0 c$$

dividendo la seconda delle (5.17) per  $c$  si ottiene:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \left( \frac{\varphi}{c} \right) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\varphi}{c} \right) = -\mu_0 c \rho \end{cases} \quad (5.18)$$

Con il formalismo dei 4-vettori tali relazioni possono essere scritte come:

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu \quad (5.19)$$

essendo  $J^\mu$  il quadrivettore densità di corrente e  $A^\mu$  il quadrivettore potenziale elettromagnetico definito come

$$A^\mu = \left( \frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right) \quad (5.20)$$

---

<sup>8</sup>In questo paragrafo si fanno uso dei potenziali elettrodinamici

Il fatto che la quaterna di numeri (5.20) costituisca un quadrivettore è dimostrato dalla stessa (5.19), considerato che  $J^\mu$  è un quadrivettore e  $\square$  è un invariante. Espresse nella forma (5.19) le equazioni dell'elettrodinamica risultano *covarianti a vista*: una volta trovata la soluzione  $A^\mu$  in un riferimento inerziale, la soluzione  $A'^\mu$  in un altro riferimento inerziale si ottiene per semplice applicazione delle trasformazioni di Lorentz:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu \quad (5.21)$$

Noti i potenziali, i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  si ottengono applicando le relazioni:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases} \quad (5.22)$$

Introduciamo adesso le quantità:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (5.23)$$

Tenuto conto che  $A^\mu$  e  $x^\mu$  sono due quadrivettori, si dimostra facilmente che gli  $F_{\mu\nu}$  si trasformano secondo la legge:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (5.24)$$

$F^{\mu\nu}$  è detto  *tensore elettromagnetico*. Dalla definizione segue immediatamente che

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

dunque il tensore elettromagnetico è un tensore antisimmetrico. Confrontando la definizione del tensore elettromagnetico (5.23) con le relazioni (5.22) si ha che il tensore elettromagnetico è costruito come mostrato nella seguente matrice

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Dalla (5.24) si trovano le leggi di trasformazione del campo elettrico  $\vec{E}$  e del campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  che risultano essere:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta c B_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z\right) \\ B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y\right) \end{cases} \quad (5.26)$$

**Esempio** Consideriamo una particella di carica  $q$  in moto rettilineo uniforme con velocità  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$ , in un sistema di riferimento inerziale  $S$ . Consideriamo un secondo riferimento  $S'$  solidale alla carica (dunque  $\vec{v}'=0$ ). Il sistema  $S'$  è in moto con velocità

$\vec{v}_0$  rispetto al sistema  $S$ . Nel sistema  $S'$  si ha che il campo elettrico  $\vec{E}'$  generato dalla carica  $q$  è quello statico coulombiano, mentre il campo di induzione magnetica  $\vec{B}'$  è nullo (carica ferma).

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2} \hat{r}' \quad \vec{B}' = 0 \quad (5.27)$$

Calcoliamo il campo elettromagnetico nel sistema  $S$  all'istante in cui la carica passa per l'origine  $O$ . In questo caso le (5.26) assumono la forma

$$\begin{cases} B'_x = B_x = 0 \\ B'_y = \gamma \left[ B_y + \beta \frac{E_z}{c} \right] = 0 \rightarrow B_y = -\beta \frac{E_z}{c} \\ B'_z = \gamma \left[ B_z - \beta \frac{E_y}{c} \right] = 0 \rightarrow B_z = \beta \frac{E_y}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma \left[ E_y - c\beta \frac{E_z}{c} \right] \rightarrow E_y = E'_y \left[ \frac{1}{\gamma(1-\beta^2)} \right] = \gamma E'_y \\ E'_z = \gamma \left[ E_z - c\beta \frac{E_y}{c} \right] \rightarrow E_z = E'_z \left[ \frac{1}{\gamma(1-\beta^2)} \right] = \gamma E'_z \end{cases}$$

## 5.4 L'invarianza delle equazioni di Maxwell (\*)

Abbiamo già dimostrato che le equazioni di Maxwell riscritte nella forma (5.17) sono invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz. Dimostriamo adesso che le equazioni di Maxwell in forma differenziale sono invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz. Per fare ciò imponiamo l'invarianza in forma di tali equazioni in due sistemi di riferimento inerziali in moto con velocità  $v$  diretta lungo il loro asse comune  $x - x'$  e mostriamo che le relazioni che legano il campo elettromagnetico nel primo riferimento con lo stesso nel secondo riferimento sono le (5.26).

Consideriamo le equazioni di Maxwell in forma differenziale:

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (5.28)$$

Dimostreremo l'invarianza delle equazioni di Maxwell partendo dalla seconda e dalla quarta equazione. Esplicitando tali relazioni per componenti si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

Queste equazioni costituiscono un sistema di equazioni accoppiate alle derivate parziali che interessano le componenti del campo  $\vec{E}$  e del campo  $\vec{B}$  nel punto  $x, y, z$  al tempo  $t$  nel riferimento inerziale  $S$ . Dimostreremo che, imponendo l'invarianza in forma delle equazioni di Maxwell, si ottengono le trasformazioni del campo elettromagnetico di cui si è trattato al paragrafo precedente. Ciò equivale a dimostrare che le equazioni di Maxwell sono invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz. Se così non fosse, infatti, non si sarebbero valide le trasformazioni del campo elettromagnetico trovate precedentemente. Consideriamo un sistema inerziale  $S'$  che si muova alla velocità  $v$  rispetto a  $S$  lungo l'asse comune  $x - x'$ . Imponiamo dunque che nel punto  $x', y', z', t'$ , legato al punto  $x, y, z, t$  dalle trasformazioni di Lorentz, valgano le equazioni

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E}' = \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \\ \text{div} \vec{B}' = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

ossia per componenti

$$\begin{cases} \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \\ \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = \frac{\partial B'_y}{\partial t'} \\ \frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = \frac{\partial B'_z}{\partial t'} \\ \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

La relazione tra la derivazione parziali rispetto alle variabili spazio-temporali  $(x, y, z, t)$  e le variabile spazio-temporali  $(x', y', z', t')$  è data dalle relazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \end{cases} \quad (5.32)$$

Ricordando le trasformazioni di Lorentz (2.11) si ricava

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \end{cases} \quad (5.33)$$

Sostituendo queste relazioni nelle equazioni di Maxwell si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y'} E_z - \frac{\partial}{\partial z'} E_y = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} B_x - v \frac{\partial}{\partial x'} B_x \right) \\ \frac{\partial}{\partial z'} E_x - \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} E_z - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} E_z \right) = -\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} B_y - v \frac{\partial}{\partial x'} B_y \right) \\ \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} E_y - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial y'} E_x = -\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} B_z - v \frac{\partial}{\partial x'} B_z \right) \\ \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} B_x - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} B_x \right) + \frac{\partial}{\partial y'} B_y + \frac{\partial}{\partial z'} B_z = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

Dalla seconda delle (5.34) ricaviamo:

$$\frac{\partial}{\partial z'} E_x - \frac{\partial}{\partial x'} [\gamma (E_z + v B_y)] = -\frac{\partial}{\partial t'} [\gamma (B_y + \frac{v}{c^2} E_z)]$$

Affinché le equazioni di Maxwell siano invarianti in forma devono sussistere le relazioni:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_z = \gamma (E_z + v B_y) \\ B'_y = \gamma (B_y + \frac{v}{c^2} E_z) \end{cases}$$

Che sono proprio tre delle relazioni che descrivono le trasformazioni relativistiche del campo elettromagnetico.

Dalla terza delle (5.34) ricaviamo:

$$\frac{\partial}{\partial x'} [\gamma (E_y - vB_z)] - \frac{\partial}{\partial y} E_x = -\frac{\partial}{\partial t'} [\gamma (B_z - \frac{v}{c^2} E_y)]$$

Affinché le equazioni di Maxwell siano invarianti in forma devono sussistere le relazioni:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma (E_y - vB_z) \\ B'_z = \gamma (B_z + \frac{v}{c^2} E_y) \end{cases}$$

Che sono proprio altre tre delle relazioni che descrivono le trasformazioni relativistiche del campo elettromagnetico.

Resta soltanto da determinare come varia la componente  $B_x$  del campo magnetico. Per fare ciò consideriamo la prima e la quarta equazione delle (5.34). Dalla quarta ricaviamo che:

$$\gamma \frac{\partial}{\partial x'} B_x = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} B_x - \frac{\partial}{\partial y'} B_y - \frac{\partial}{\partial z'} B_z$$

Essa sostituita nella prima resituisce:

$$\frac{\partial}{\partial y'} E_z - \frac{\partial}{\partial z'} E_y = -\gamma \frac{\partial}{\partial t'} B_x + v \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x'} B_x = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} B_x - \frac{\partial}{\partial y'} B_y - \frac{\partial}{\partial z'} B_z \right)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y'} [\gamma (E_z + vB_y)] - \frac{\partial}{\partial z'} [\gamma (E_y - vB_z)] = -\frac{\partial}{\partial t'} B_x$$

Affinché le equazioni di Maxwell siano invarianti in forma deve dunque sussistere l'ulteriore relazione:

$$B'_x = B_x$$





# Bibliografia

- [1] A. Einstein, *Il significato della relatività*, Newton Compton Editori, 2015.
- [2] V.A. Ugarov, *Special theory of relativity*, Mir Publishers, 1979.
- [3] J. Freund, *Special Relativity for Beginners*, World Scientific Publishing Company, 2008.
- [4] C. Mencuccini, V. Silvestrini, *Fisica. Elettromagnetismo e ottica*, Casa Editrice Ambrosiana, 2017
- [5] V. Barone, *Relatività. Principi e applicazioni*, Bollati Boringhieri, 2004.
- [6] R. Resnick, *Introduzione alla relatività ristretta*, Casa Editrice Ambrosiana, 1969