

Magnetismo nella materia

29 maggio 2023

Prefazione

I seguenti appunti sono una trascrizione delle lezioni sul magnetismo della materia.

Indice

Prefazione	i
1 Magnetismo nella materia	1
1.1 Descrizione qualitativa del magnetismo nella materia	1
1.1.1 Materiali diamagnetici	2
1.1.2 Materiali paramagnetici	2
1.1.3 Materiali ferromagnetici	2
1.2 Poli magnetici	3
1.2.1 Esperimento della calamita spezzata	3
1.3 Magnetizzazione	4
1.4 Poli magnetici e correnti	5
1.5 La rottura della simmetria	6
1.6 Legge di Hopkinson	6

Magnetismo nella materia

1.1 Descrizione qualitativa del magnetismo nella materia

Consideriamo una struttura toroidale (puramente matematica, dunque non esistente fisicamente oppure esistente fisicamente ma avente effetti assolutamente trascurabili) su cui è avvolto un filo a formare un solenoide e supponiamo che esso sia collegato a un generatore di forza elettromotrice ε e dotiamo tale circuito di un tasto T . Chiudendo il circuito all'interno del toro si genera un campo magnetico avente linee di forza tangenti alle circonferenze "generatrici" del toro stesso. Supponiamo adesso di avvolgere attorno a una parte del toro una bobina secondaria; variando la corrente che circola nel circuito (basta aprire e chiudere il circuito mediante il tasto T) si genera una forza elettromotrice indotta nella bobina secondaria. Collegando tale bobina ad un galvanometro balistico è possibile misurare la quantità di carica che attraversa il circuito e da ciò, mediante la legge di Felici è possibile misurare il campo di induzione magnetica \vec{B}_0 generato dal circuito principale. Supponiamo adesso di avere una struttura toroidale di un materiale generico; ripetendo la stessa esperienza misuriamo i campi magnetici \vec{B} che otteniamo. Si possono presentare tre casi:

- B è poco più piccolo di B_0 .
- B è poco più grande di B_0 ;
- B è molto più grande di B_0 ;

Nei primi due casi si può stabilire una relazione del tipo $\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0$ dove μ_r è una costante che dipende dal materiale. Nel terzo caso invece si ha $\mu_r = \mu_r(B_0)$. Nei primi due casi avremo rispettivamente

- μ_r poco più piccolo di 1; in questo caso il materiale si dice diamagnetico. (Alluminio)
- μ_r poco più grande di 1; in questo caso il materiale si dice paramagnetico. (Ossigeno molecolare)

Nel terzo caso invece si ha μ_r molto più grande di 1; in questo caso il materiale si dice ferromagnetico. Esempi tipici di materiali ferromagnetici sono ferro e sue leghe, cobalto e sue leghe...

1.1.1 Materiali diamagnetici

Consideriamo un materiale monoatomico. Un suo atomo è formato da un nucleo centrale circondato da una nube elettronica. Gli elettroni avranno una funzione d'onda $\psi_e(r)$. Tale sistema è formalmente identico a un conduttore. Supponiamo di introdurre un campo di induzione magnetica esterno \vec{B}_0 . Così come in un conduttore l'introduzione di un campo di induzione magnetica esterno fa sì che nascano delle correnti parassite, così accade anche nel caso dell'atomo. In particolare l'atomo reagisce facendo muovere gli elettroni in modo tale da opporsi alla causa che l'ha generato. Il moto degli elettroni genera una corrente media chiusa equivalente a un'elica percorsa da corrente. Per quanto conosciuto dalla legge di Faraday-Neumann la corrente circolerà in maniera tale da creare da opporsi alla causa che l'ha generata; ciò fa sì che si generi un campo magnetico indotto \vec{B}_i che si oppone a B_0 . Il campo magnetico risultante sarà dunque $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_i$ e per quanto detto finora si ha

$$B = B - B_i$$

cioè B sarà minore di B_0 . Il diamagnetismo è presente in tutti i materiali

1.1.2 Materiali paramagnetici

Supponiamo che un atomo sia dotato di momento di dipolo magnetico. (Gli elettroni sono dotati di momenti di dipolo magnetico di spin e di orbitale. Se la somma vettoriale dei momenti di dipolo magnetici di tutti gli elettroni dell'atomo è nulla il momento di dipolo magnetico dell'atomo è nullo. In tal caso si ricade al caso del diamagnetismo. Se invece tale somma vettoriale è non nulla si dice che l'atomo è dotato di momento di dipolo magnetico proprio). Supponiamo che tale atomo sia immerso in un campo magnetico esterno \vec{B}_0 . Il momento di dipolo magnetico dell'atomo tenderà ad allinearsi con \vec{B}_0 e ciò fa sì che si generi un campo magnetico indotto \vec{B}_i che si somma a \vec{B}_0 e dunque si ha $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_i$. Per quanto detto finora si ha

$$B = B_0 + B_i$$

cioè B sarà maggiore di B_0 . È lecito aspettarsi che tale fenomeno sia contrastato dall'agitazione termica del materiale. Tale fenomeno fu studiato da Pierre Curie. A lui è dovuta una legge che regola il campo magnetico nella materia:

$$B_{\text{materia}} \propto \frac{c}{T} \quad (1.1)$$

dove c è una costante che dipende dal materiale e T è la temperatura assoluta. Il fenomeno di magnetizzazione nei materiali paramagnetici è a saturazione: preso un blocco di materiale paramagnetico e raffreddato fino a una temperatura prossima allo zero assoluto, esiste un campo di induzione magnetica \vec{B}_0^* in corrispondenza del quale tutti i dipoli magnetici sono allineati con esso.

1.1.3 Materiali ferromagnetici

L'interpretazione microscopica del magnetismo nei materiali ferromagnetici fu data da Heisenberg utilizzando l'interazione di scambio tra gli elettroni. Vi sono atomi (elementi di transizione) i cui elettroni hanno livelli energetici molto vicini tra loro. Ciò fa sì che gli elettroni tendano a scambiarsi i livelli energetici. Tale fenomeno è detto interazione di

scambio. L'atomo dunque perde la sua individualità e si può ottenere la stessa funzione d'onda seppur con atomi disposti su diversi livelli energetici. Vi sono zone, dette domini di Weiss, in cui gli atomi si comportano all'unisono; ciò significa che ciascun dominio di Weiss ha un unico momento di dipolo magnetico dato dalla somma diretta dei momenti di dipolo magnetici che formano il dominio. Una volta che viene introdotto un campo magnetico esterno \vec{B}_0 , tale dominio rompe le pareti di *Block* e si allinea con il campo esterno. Tale fenomeno avviene in contemporanea per tutti i domini di Weiss del materiale e ciò genera spesso un fenomeno, detto effetto Barkhausen, per cui alla rottura delle pareti di *Block* segue un suono. Tale fenomeno è stato registrato per la prima volta alla fine dell'800. Il ferromagnetismo è regolato dalla seconda legge di Curie: esiste una temperatura critica T_c oltre la quale il ferromagnetismo cessa di esistere e il materiale diventa paramagnetico. Tale temperatura è detta temperatura di Curie. In questo modo il materiale viene smagnetizzato. Se poi venisse riportato a temperatura ambiente esso può essere nuovamente magnetizzato e dunque potrà ritornare a essere un materiale ferromagnetico.

1.2 Poli magnetici

Finora abbiamo considerato come sorgente del campo magnetico la corrente. In realtà essa è una sola delle sorgenti del campo magnetico. Possiamo infatti annoverare tra le sorgenti del campo magnetico anche dei poli magnetici fittizi. Tutta questa teoria prende il via da un'osservazione sperimentale di Coulomb. Egli considerò una barra magnetica fissata sopra un giogo e una bilancia avente come giogo una calamita alle cui estremità sono piazzati due piattini leggerissimi. Come l'esperienza insegna, avvicinando due poli omologhi si nota una repulsione. Introducendo dei pesetti sul piattello del polo opposto si può equilibrare la bilancia effettuando quindi delle misure della forza magnetica che si esercita tra due poli omologhi, supposti puntiformi, posti a una certa distanza r . Supponendo che non ci fossero repulsioni tra poli lontani, la forza magnetica che si esercita ai poli è

$$\vec{F}_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2} \hat{r} \quad (1.2)$$

Tale legge è detta legge di Coulomb per la magnetostatica. L'unità di misura dei poli magnetici nel SI è il weber definito come

$$Wb \equiv \frac{T}{m^2} \quad (1.3)$$

Ciò permette di definire un campo magnetico

$$\vec{H} = \lim_{q_m \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_m}{q_m} \quad (1.4)$$

Esso è totalmente analogo al campo elettrostatico e come esso è conservativo. Dunque è possibile estendere tutta la teoria già introdotta per l'elettrostatica alla magnetostatica, con l'unica accortezza che preso un materiale la sua carica magnetica complessiva deve essere nulla in quanto non esiste la carica magnetica isolata (monopoli magnetici).

1.2.1 Esperimento della calamita spezzata

Consideriamo una calamita. Essa è dotata di due poli aventi carica magnetica uguale e opposta; supponiamo che il polo Nord abbia carica magnetica $+q_m$ (di conseguenza il

polo Sud avrà carica magnetica $-q_m$). La calamita avrà momento di dipolo magnetico coulombiano

$$\vec{m} = q_m \vec{\delta} \quad (1.5)$$

essendo $\vec{\delta}$ un vettore avente come modulo la lunghezza della calamita, come direzione quella del suo asse e come verso quello che dal Sud punta al Nord.

È anche possibile definire un momento di dipolo magnetico amperiano definito come

$$\vec{\mu} = I \vec{S} \hat{n} \quad (1.6)$$

Qual è la relazione che lega i due momenti magnetici finora introdotti? Le due definizioni sono del tutto analoghe e la relazione che le lega è:

$$\vec{m} = \mu_0 \vec{\mu} \quad (1.7)$$

Tale relazione è giustificata dal teorema di equivalenza di Ampère, secondo cui una spira circolare percorsa da una corrente I è equivalente a un ago magnetico. Ciò significa che la spira percorsa da corrente e l'ago magnetico devono generare, a grande distanza da essi, lo stesso campo; dunque tenuto conto che sono entrambi dipoli magnetici, la relazione (1.7) è giustificata.

1.3 Magnetizzazione

Così come già fatto in elettrostatica possiamo definire un'intensità di magnetizzazione

$$\vec{J} = \frac{\vec{m}}{\tau} \quad (1.8)$$

Tale quantità è l'analogo magnetico della polarizzazione elettrica. I testi comuni definiscono spesso la magnetizzazione

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}}{\tau} \quad (1.9)$$

Tra i due vettori introdotti sussiste la relazione

$$\vec{M} = \frac{\vec{J}}{\mu_0} \quad (1.10)$$

Così come

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.11)$$

si ha

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} \quad (1.12)$$

L'utilizzo del vettore (1.9) fa sì che si perda la perfetta simmetria tra le due relazioni introdotte. In tal modo la relazione tra \vec{B} e \vec{H} diviene:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) \quad (1.13)$$

Per un oggetto con densità di magnetizzazione uniforme si ha

$$\sigma_m = J \quad (1.14)$$

Nota l'intensità di magnetizzazione, si conosce immediatamente la distribuzione delle cariche magnetiche sulla superficie della calamita. Per una calamita molto lunga, il campo magnetico in prossimità di una faccia della calamita è

$$H = \frac{\sigma_m}{2\mu_0} \quad (1.15)$$

1.4 Poli magnetici e correnti

Il materiale magnetico si può trovare immerso in un circuito percorso da corrente. Nel vuoto si ha

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Nel vuoto deve valere la legge di Biot-Savart per il campo magnetico \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{dq_m}{r^2} \hat{r} \quad (1.16)$$

Il primo addendo è dovuto alle correnti, mentre il secondo è dovuto ai poli magnetici.

Esempio Consideriamo una sbarra molto lunga uniformemente magnetizzata (\vec{J} è uniforme al suo interno). Calcoliamo quali sono i valori di \vec{B} e \vec{H} nei punti della sbarra indicati in figura.

Risolviamo il problema in A. In tale punto

$$H = \frac{\sigma_m}{2\mu_0}$$

Le linee di forza sono uscenti. In tale punto $\vec{J} = 0$ e dunque

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\sigma_m}{2}$$

Risolviamo il problema in B. In tale punto

$$H = -\frac{\sigma_m}{2\mu_0}$$

Le linee di forza sono entranti. In tale punto $\vec{J} = \sigma_m$ e dunque

$$B = \mu_0 H + J = \frac{\sigma_m}{2}$$

Tale risultato conferma il fatto che \vec{B} sia solenoidale.

Risolviamo il problema in C. In tale punto

$$H \simeq 0$$

in quanto i poli sono molto lontani dal punto. Essendo la magnetizzazione uniforme si ha $J = \sigma_m$ e dunque

$$B = \mu_0 H + J = \sigma_m$$

Risolviamo il problema in D. In tale punto

$$H \simeq 0$$

in quanto i poli sono molto lontani dal punto. Poiché siamo nel vuoto $J = 0$ e dunque

$$B = \mu_0 H + J \simeq 0$$

Esempio Supponiamo di inserire la bacchetta studiata nel precedente esempio in un solenoide. Il campo magnetico totale sarà la somma del campo magnetico generato dalla bacchetta e quello generato dal solenoide

$$\vec{H}_{tot} = \vec{H}_i + \vec{H}_m \quad (1.17)$$

Ricordando le relazioni dell'elettrostatica si ha per un materiale omogeneo e isotropo

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (1.18)$$

$$\vec{J} = \mu_0 \chi_m \vec{H} \quad (1.19)$$

1.5 La rottura della simmetria

Nel vuoto il teorema di circuitazione di Ampère diventa

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (1.20)$$

A essere conservativo è solo il campo magnetico generato dai poli, mentre il campo magnetico generato dalle correnti non è conservativo. Ciò sembrerebbe rompere la simmetria tra elettrostatica e magnetostatica in quanto

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.21)$$

Il risultato della circuitazione del campo magnetico è una corrente, cioè una sorgente monopolare puntiforme di campo elettrico in moto. Per simmetria il risultato della circuitazione del campo elettrico è una sorgente monopolare puntiforme di campo magnetico in moto, ma essa non esiste in quanto non esiste un monopolo magnetico. Se infatti esistesse un monopolo magnetico la circuitazione del campo elettrico sarebbe pari a una corrente magnetica e quindi il campo elettrico non sarebbe più conservativo.

1.6 Legge di Hopkinson

Nel nostro studio abbiamo già incontrato un campo solenoidale nell'ipotesi di corrente stazionaria: \vec{J} . In tale caso siamo satti in grado di costruire le leggi di Ohm e le leggi di Kirchhoff. È possibile realizzare un'analogia con il campo \vec{B} ?

Riprendiamo l'esperimento descritto nel paragrafo 1.1, detto esperimento di Rowland. In tale esperimento tutte le linee di forza di \vec{B} si trovano all'interno del toro. Tale struttura è l'analogo magnetico del condensatore a facce piane parallele e infinite. L'anello di Rowland non presenta poli magnetici. Nel momento in cui si apre un traferro nell'anello di Rowland si ha la comparsa di poli magnetici sulle superfici terminali del toro. Dentro l'anello di Rowland si ha

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

con \vec{H} dovuto solo alle correnti e quindi pari a:

$$H = i \frac{N}{L}$$

essendo N il numero di spire e L la lunghezza dell'anello.

Il flusso di \vec{B} attraverso il cerchio generatore del toro è pari a

$$\Phi(\vec{B}) = BA \rightarrow B = \frac{\Phi(\vec{B})}{A}$$

essendo A l'area del cerchio generatore.

Nell'anello di Rowland avremo:

$$\frac{\Phi}{A} = \mu \frac{Ni}{L} \rightarrow iN = \frac{1}{\mu} \frac{N}{A} \Phi$$

Il termine iN altro non è che la circuitazione del campo magnetico e viene detto forza magnetomotrice, in analogia con la forza elettromotrice:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mathcal{F} \quad (1.22)$$

Si definisce riluttanza la quantità

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \frac{N}{A} \quad (1.23)$$

Abbiamo dunque ottenuto la legge di Hopkinson:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi \quad (1.24)$$

La legge di Hopkinson è l'analogo magnetico della legge di Ohm. Un'altra analogia possibile è quella tra μ , permeabilità magnetica, e σ , conducibilità elettrica.

Si può dimostrare che

- se abbiamo più elementi magnetici connessi in serie la loro riluttanza totale è la somma delle riluttanze:

$$\mathcal{R}_{tot} = \sum_i \mathcal{R}_i \quad (1.25)$$

- se abbiamo più elementi magnetici connessi in parallelo il reciproco della riluttanza totale è pari alla somma dei reciproci delle riluttanze

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{tot}} = \sum_i \frac{1}{\mathcal{R}_i} \quad (1.26)$$

Studiamo adesso cosa succede all'anello di Rowland nel momento in cui si apre un traferro. All'apertura del traferro le linee di campo di \vec{B} fuoriescono dal toro e tale fuoriuscita è tanto minore quanto più piccolo è il gap (cioè la distanza tra le due superfici su cui si sono generati i poli magnetici).

Sia L la lunghezza dell'anello e $d \ll L$ la lunghezza del gap. L'anello aperto avrà lunghezza $L - d \simeq L$. Qual è la riluttanza di tale sistema? Il sistema risulta costituito da due riluttanze in serie: l'anello di ferro e il gap (che è nel vuoto, o al più in aria), dunque

$$\mathcal{R}_{tot} = \mathcal{R}_{anello} + \mathcal{R}_{gap} = \frac{L}{\mu A} + \frac{d}{\mu_0 A} = \frac{L + \mu_r d}{\mu A} \quad (1.27)$$

Poichè il ferro è un materiale ferromagnetico $\mu_r \gg 1$ e quindi si possono notare notevoli variazioni del flusso di \vec{B} anche per gap di dimensioni molto piccole. Cosa succede alle espansioni polari del traferro? Su tali superfici si generano dei poli e dunque un campo magnetico \vec{H}_m . Se la bobina avvolge completamente l'anello, il campo magnetico da essa generato è confinato strettamente all'interno dell'anello e i campi generati dalle cariche magnetiche sulle superfici dell'anello può essere approssimato a quello generato da un piano infinito. Mediante tecniche di fisica matematica si può mappare il campo magnetico \vec{H}_m generato dalle espansioni polari nello spazio tra esse compreso ed è quindi possibile trovare il campo di induzione magnetica \vec{B} nel vuoto.