

Méthode de col et lois limites en analyse combinatoire

Danièle Gardy*

Laboratoire de Recherche en Informatique, CNRS UA 410, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay, France

Résumé

Gardy, D., Méthode de col et lois limites en analyse combinatoire, Theoretical Computer Science 94 (1992) 261–280.

Nous étudions la caractérisation de suites de nombres, ou de manière équivalente de distributions de probabilité, définies par des fonctions génératrices, et donnant lieu à une distribution limite. Nous rappelons d'abord les définitions probabilistes qui seront utilisées par la suite, puis nous indiquons comment elles permettent éventuellement d'établir la convergence d'une suite de lois de probabilités vers une loi limite. Nous nous intéressons tout particulièrement au cas où cette loi limite est gaussienne. Enfin, nous présentons les principaux résultats dans ce domaine.

Le problème général traité dans cet article concerne une classe de structures combinatoires de taille donnée n , par exemple des permutations, pour lesquelles nous souhaitons étudier un paramètre U_n , par exemple le nombre de cycles. La moyenne et la variance apportent une première information; dans un certain nombre de cas, il est possible d'avoir des renseignements supplémentaires sur la distribution de probabilité de la variable aléatoire U_n , soit de façon exacte, soit, plus fréquemment, de manière asymptotique, lorsque la taille n de la structure tend vers l'infini. En particulier, la convergence de la suite (U_n) vers une loi gaussienne montre que la distribution est "bien" centrée autour de sa moyenne, et la variance permet de quantifier l'écart par rapport à cette valeur moyenne.

La Section 1 rappelle les définitions et théorèmes de base de la théorie des probabilités qui seront utilisés par la suite. Ces outils sont combinés dans la Section 2 avec la théorie des fonctions analytiques pour obtenir une méthode générale de recherche d'une distribution limite, en particulier vers une loi normale. Dans cette section, nous

*Travail partiellement soutenu par le PRC Mathématique Informatique.

rappelons en particulier les bases de l'approximation des coefficients d'une fonction analytique par une méthode de col. Enfin, nous donnons dans la Section 3 des exemples de résultats, entre autres des théorèmes de normalité asymptotique. Le point commun à tous ces exemples est d'avoir une description naturelle en termes de fonctions génératrices.

1. Définitions et rappels probabilistes

Les définitions de cette section peuvent presque toutes être trouvées dans la plupart des livres de probabilité ; nos références principales sont les deux tomes de Feller [11]. Cependant, le vocabulaire sur la transformée de Laplace et la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire ne semble pas normalisé; nous suivons là aussi Feller.

1.1. Fonctions associées à une variable aléatoire

Soit U une variable aléatoire à valeurs réelles (ou v.a.r.). Lorsque U est à valeurs positives entières, nous notons p_k la probabilité que U prenne la valeur k , $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

- *Fonction de distribution:*

$$F(z) = \text{Prob}\{U \leq z\}.$$

L'espérance, ou moyenne, de U est $E\{U\} = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, dF(t)$, elle est aussi notée μ ; la variance de U est $\sigma^2 = E\{U^2\} - E\{U\}^2$.

- *Fonction génératrice de probabilité:* Elle est définie pour une v.a.r. à valeurs entières positives:

$$\psi(z) = \sum_{k \geq 0} p_k z^k.$$

Elle permet de calculer l'espérance et la variance:

$$E\{U\} = \psi'(1) \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \psi''(1) + \psi'(1) - \psi'^2(1).$$

- *Fonction caractéristique:* La fonction caractéristique est définie pour toute v.a.r. U :

$$\phi(z) = E\{e^{izU}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt} dF(t).$$

Pour une v.a.r. à valeurs entières positives, nous pouvons exprimer la fonction caractéristique à l'aide de la fonction génératrice de probabilité:

$$\phi(z) = \psi(e^{iz}) = \sum_{k \geq 0} p_k e^{ikz}.$$

Soit V la v.a.r. normalisée associée à U : $V = (U - \mu)/\sigma$; avec des notations évidentes, nous avons: $\phi_V(z) = e^{-i(z\mu/\sigma)} \phi_U(z/\sigma)$.

- *Transformée de Laplace*: Elle est définie pour une v.a.r. positive U :

$$L(z) = E\{e^{-zU}\} = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dF(t).$$

Si, de plus, U est à valeurs entières:

$$L(z) = \psi(e^{-z}) = \sum_{k \geq 0} p_k e^{-kz}.$$

En passant à la v.a.r. normalisée V , nous obtenons $L_V(z) = e^{z\mu/\sigma} L_U(z/\sigma)$.

- *Fonction génératrice des moments*: Le $r^{\text{ième}}$ moment d'une v.a.r. U est défini par: $\mu_r = E\{X^r\}$. La fonction génératrice des moments est

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt} dF(t) = E\{e^{zU}\}.$$

Elle est parfois appelée "transformée de Laplace bilatérale". Elle n'existe pas nécessairement pour tout z ; si elle existe, on a: $G(z) = \sum_{r \geq 0} \mu_r (z^r / r!)$. Si U est à valeurs entières positives, et telle que sa fonction génératrice de probabilité $\psi(z)$ ait un rayon de convergence strictement supérieur à 1, alors $G(z)$ existe dans un voisinage convenable de l'origine, et vaut $\psi(e^z) = L(-z)$.

Il existe une bijection entre une variable aléatoire et sa fonction caractéristique; une v.a.r. U est donc totalement déterminée par sa fonction caractéristique. Lorsque U est à valeurs positives, sa transformée de Laplace existe toujours, et vaut: $L(z) = \phi(iz)$. Dans ce cas, U est également déterminée de manière unique par sa transformée de Laplace. Attention: les moments d'une distribution de probabilité ne déterminent pas entièrement cette distribution [11, Tome 2, p. 227]. Il existe cependant des conditions qui assurent cette unicité; il suffit par exemple que $\sum_n \mu_{2n} (t^{2n} / (2n!))$ converge sur un intervalle autour de l'origine. Curtiss [8] indique aussi le théorème suivant: Si la fonction génératrice des moments est définie dans un voisinage réel de l'origine, elle détermine une distribution unique.

1.2. Convergence d'une suite de variables aléatoires

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires réelles, dépendant d'un paramètre n qui tend vers l'infini. Notons μ_n la moyenne, σ_n^2 la variance, F_n la fonction de distribution, ϕ_n la fonction caractéristique et L_n la transformée de Laplace de la v.a.r. U_n . Il existe différents types de convergence pour une suite de v.a.r.; nous nous intéressons ici uniquement à la convergence faible. Nous rappelons ci-dessous sa définition [11, Tome 2, p. 248].

Définition de la convergence en loi, ou convergence faible. On dit que la suite de v.a.r. (U_n) converge en loi vers une v.a.r. U pour $n \rightarrow +\infty$, lorsque la suite (F_n) des fonctions de distribution associées aux U_n converge vers la fonction de distribution F de U , sur tout intervalle où F est continue.

Dans la suite de cet article, le terme de convergence signifie toujours convergence *faible*. La convergence d'une suite de distributions est indépendante de l'échelle; ainsi, il revient au même de parler de la convergence d'une suite de distributions (U_n) , ou de la convergence de la suite normalisée $(V_n = (U_n - \mu_n)/\sigma_n)$ [11, Tome 2, p. 253].

1.3. Quelques théorèmes limites de base

Fonctions caractéristiques. *La suite de distributions (F_n) converge vers une distribution de probabilité F si et seulement si la suite (ϕ_n) des fonctions caractéristiques associées converge point par point vers une fonction limite ϕ , continue en 0. Dans ce cas, ϕ est la fonction caractéristique de la distribution limite des F_n .*

Ce théorème se trouve dans [11, Tome 2, p. 508] il est aussi connu sous le nom de *théorème de continuité de Lévy*. Il permet par exemple de donner une démonstration du théorème central limite [11, Tome 2, p. 515].

Transformées de Laplace. *Soit (F_n) une suite de distributions de probabilité, de transformées de Laplace L_n . Si la suite (F_n) converge en loi vers une distribution F , où F est une distribution de probabilité de transformée de Laplace L , alors, pour tout $t > 0$: $L_n(t) \rightarrow L(t)$. Réciproquement, si, pour tout $t > 0$, la suite $L_n(t)$ converge vers une limite $L(t)$, et si $L(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$, alors L est la transformée de Laplace d'une distribution de probabilité F , et la suite F_n converge en loi vers F .*

C'est le Théorème 2 du Ch. XIII, Tome 2 de Feller [11], p. 443, légèrement modifié pour éliminer le cas particulier où la limite des distributions n'est pas une distribution de probabilité.

Convergence des moments

Soit (U_n) une suite de v.a.r., les U_n ayant des moments à tout ordre $\mu_r^{(n)}$, et soit U une v.a.r. de moments μ_r . Supposons que les moments μ_r déterminent une distribution unique, et que, pour chaque r , on ait $\mu_r^{(n)} \rightarrow \mu_r$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Alors, la suite des distributions converge vers la distribution associée à U [11, Tome 2, p. 269].

L'article de Curtiss déjà cité [8] porte sur la fonction génératrice des moments, et donne un théorème de convergence analogue aux deux théorèmes précédents:

Soit (F_n) une suite de distributions, et soit (G_n) la suite des fonctions génératrices des moments associées. Supposons qu'il existe $\alpha_2 > 0$ et $\alpha_1 > \alpha_2$ tels que, pour tout entier n à partir d'un certain rang, et pour tout z réel vérifiant $|z| < \alpha_1$, $G_n(z)$ existe, et que, de plus, pour $|z| < \alpha_2$, $G_n(z) \rightarrow G(z)$, où G est une fonction à valeurs finies définie sur l'intervalle $|z| < \alpha_2$. Alors il existe une variable aléatoire U , de fonction de distribution F , telle que la suite des distributions (F_n) converge vers F en tout point où les F_n sont continues;

cette convergence est uniforme sur tout intervalle de continuité de la fonction F . Par ailleurs, la fonction génératrice des moments de U existe pour $|z| < \alpha_2$, et vaut $G(z)$ sur cet intervalle.

Comparaison de ces différents théorèmes

Pour une suite de v.a.r. à valeurs entières positives, les trois théorèmes que nous venons de citer traduisent en fait la convergence de la suite des fonctions génératrices de probabilité (ψ_n) , sur divers sous-ensembles du plan complexe:

- *Fonction caractéristique*: Convergence de la suite des fonctions sur le cercle unité.
- *Transformée de Laplace*: Convergence de la suite des fonctions sur le segment $]0, 1[$ de l'axe réel.
- *Fonction génératrice des moments*: Convergence sur un intervalle réel $]a, 1/a[$, où $0 < a < 1$.

1.4. Suite de nombres en analyse combinatoire

Soit $(a_{n,k})$ une suite de nombres réels positifs, pour laquelle nous supposons connue, suivant les cas, la fonction génératrice ordinaire: $\Phi(x, y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^k y^n$, ou la fonction génératrice exponentielle: $\hat{\Phi}(x, y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^k (y^n/n!)$. Définissons $p_{n,k} = a_{n,k} / \sum_k a_{n,k}$, et soit $\psi_n(x) = \sum_k p_{n,k} x^k$ la fonction génératrice de probabilité des $p_{n,k}$:

$$\psi_n(x) = \frac{\sum_k a_{n,k} x^k}{\sum_k a_{n,k}} = \frac{[y^n] \Phi(x, y)}{[y^n] \Phi(1, y)} = \frac{[y^n] \hat{\Phi}(x, y)}{[y^n] \hat{\Phi}(1, y)}.$$

Pour obtenir la répartition des $a_{n,k}$, il revient au même d'étudier les probabilités $p_{n,k}$. Une référence générale sur la distribution limite de telles suites de nombres est le livre de Sachkov [30], qui rassemble par exemple des résultats analogues à ceux de Bender [1] et Canfield [5]. Nous nous intéressons ici essentiellement aux suites de nombres qui définissent une distribution convergeant vers une loi normale. Nous rappelons donc d'abord la définition d'une loi normale (dite aussi gaussienne), et quelques résultats classiques sur le théorème central limite.

1.5. Loi normale

La loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ est définie par sa fonction de distribution:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Elle a pour fonction caractéristique $e^{-t^2/2}$, et pour transformée de Laplace $e^{t^2/2}$. La fonction génératrice des moments est aussi $e^{t^2/2}$; comme elle est définie pour tout réel, elle caractérise la loi normale de manière unique.

La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, de moyenne μ et de variance σ^2 , a pour fonction de distribution $N((x - \mu)/\sigma)$.

1.6. Théorème central limite

Il concerne la somme U_n de n v.a.r. indépendantes X_i . Nous utilisons les notations suivantes: X_i a pour moyenne μ_i et pour variance σ_i^2 . Soit $U_n = X_1 + \dots + X_n$; les X_i étant supposées indépendantes, la moyenne et la variance de U_n sont données par: $m_n = \mu_1 + \dots + \mu_n$ et $s_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$. Lorsque les X_i sont équadistribuées, de moyenne et de variance communes μ et σ^2 , nous avons: $m_n = n\mu$ et $s_n^2 = n\sigma^2$.

Théorème (Loi des grands nombres). Soit (X_i) une suite de v.a.r. indépendantes équadistribuées. Si l'espérance $E\{X_i\} = \mu$ existe, alors on a la relation suivante pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $n \rightarrow +\infty$ [11, Tome I, Ch. X, p. 243]:

$$\text{Prob} \left\{ \left| \frac{U_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

Théorème central limite: Soit (X_i) une suite de v.a.r. indépendantes équadistribuées. Supposons que $\mu = E\{X_i\}$ et $\sigma^2 = \sigma^2(X_i)$ existent. Alors, pour tout β fixé [11, Tome I, Ch. X, p. 244]:

$$\text{Prob} \left\{ \frac{U_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \beta \right\} \rightarrow N(\beta).$$

Ce théorème traduit la convergence en loi de la suite des v.a.r. $U_n = X_1 + \dots + X_n$ vers une loi gaussienne $\mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

V.a.r. non équadistribuées

Il est possible de définir des analogues à la loi des grands nombres et au théorème central limite dans le cas où les variables X_i ne sont plus équadistribuées. Nous gardons les notations $U_n = X_1 + \dots + X_n$, $m_n = E\{U_n\}$ et $s_n^2 = \sigma^2\{U_n\}$.

La suite (X_i) satisfait la loi faible des grands nombres si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a:

$$\text{Prob} \left\{ \frac{|U_n - m_n|}{n} > \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

La suite (X_i) satisfait le théorème central limite si et seulement si, pour tous $\alpha < \beta$ [11, Tome I, Ch. X, p. 254]:

$$\text{Prob} \left\{ \alpha < \frac{U_n - m_n}{s_n} < \beta \right\} \rightarrow N(\beta) - N(\alpha).$$

Il existe un grand nombre de conditions sur une suite de v.a.r. indépendantes (X_i) , qui assurent qu'elle satisfait le théorème central limite, par exemple les conditions de Lindeberg [11, Tome 1, p. 254; Tome 2, Ch. VII et VIII]. Les cas que nous considérons concernent des suites de v.a.r. qui ne sont pas indépendantes; nous étudions ici ceux qui peuvent être obtenus à l'aide des fonctions génératrices.

Considérons par exemple le *modèle d'urnes* classique, qui sera présenté dans la Section 3.3. Soient d urnes, dans lesquelles on lance aléatoirement n boules; les n boules se répartissent dans les urnes de manière équiprobable; les lancers de boules sont supposés être indépendants. Nous souhaitons étudier le nombre d'urnes contenant au moins une boule, en fonction de d et de n . Soit Y_i le nombre de boules dans la $i^{\text{ème}}$ urne, et soit $X_i = 1_{(Y_i > 0)}$: X_i vaut 1 si l'urne contient au moins une boule, et 0 si l'urne est vide. Le nombre de boules lancées est $\sum_{i=1}^d Y_i = n$, et le nombre d'urnes contenant au moins une boule est $U_d = \sum_{i=1}^d X_i$. La probabilité d'obtenir k urnes non vides, sachant qu'on a lancé n boules, est donc la probabilité conditionnelle $\text{Prob}(U_d = k / \sum_i Y_i = n)$. Or les variables X_i dont on prend la somme ne sont pas indépendantes; en particulier, elles vérifient l'inégalité $\sum_i X_i \leq n$. Le problème de l'étude du nombre d'urnes contenant au moins une boule, lorsque d et n tendent vers l'infini, ne peut donc pas se résoudre en appliquant une des formulations classiques du théorème central limite.

2. Une méthode pour obtenir un théorème central limite

La technique esquissée ci-dessous s'applique à l'étude d'une suite de nombres $(a_{n,k})$ dont nous connaissons la fonction génératrice bivariée, ordinaire ou exponentielle. Elle permet ainsi de traiter le problème d'urnes que nous venons d'évoquer, et plus généralement d'obtenir un théorème de convergence vers une loi gaussienne, analogue au théorème central limite, dans le cas où les v.a.r. dont nous prenons la somme ne sont pas indépendantes.

A partir des $a_{n,k}$, nous définissons une suite (U_n) de v.a.r. à valeurs entières positives par: $\text{Prob}(U_n = k) = a_{n,k} / \sum_k a_{n,k}$. Soient ψ_n la fonction génératrice de probabilité de U_n , μ_n et σ_n^2 sa moyenne et sa variance. Nous travaillons en général sur la suite des v.a.r. normalisées (V_n) , de moyenne 0 et de variance 1: $V_n = (U_n - \mu_n) / \sigma_n$. Lorsque la suite des transformées de Laplace $(L_n(t) = e^{t\mu_n/\sigma_n} \psi_n(e^{-t/\sigma_n}))$ associées aux variables V_n converge, pour tout t fixé dans l'intervalle $[0, +\infty[$, vers la transformée de Laplace $e^{-t^2/2}$ de la distribution normale $\mathcal{N}(0, 1)$, il y a alors convergence (faible) de la suite normalisée (V_n) vers une variable aléatoire de distribution gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

Nous cherchons donc d'abord à évaluer la fonction génératrice de probabilité ψ_n associée à U_n , puis à en déduire une approximation de la transformée de Laplace de la v.a.r. normalisée V_n , et enfin à montrer la convergence de la suite de ces transformées. Dans beaucoup de cas, la moyenne μ_n et la variance σ_n^2 sont a priori inconnues; nous pouvons soit les calculer d'abord, soit vérifier qu'il est possible de déterminer asymptotiquement leurs valeurs pour que la convergence ait bien lieu pour tout t fixé dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

Dans un certain nombre de problèmes combinatoires, la fonction $\psi_n(x)$ n'est pas connue exactement, mais par l'intermédiaire d'une fonction génératrice bivariée $\Phi(x, y)$: $\psi_n(x) = [y^n] \Phi(x, y) / [y^n] \Phi(1, y)$. Nous avons donc à calculer, si possible exactement, sinon de manière approchée, le coefficient de y^n dans la fonction $\Phi(x, y)$.

Lorsque nous avons une approximation de ψ_n , nous remplaçons x par e^{-t/σ_n} , puis t est fixé arbitrairement dans $[0, +\infty[$; par ailleurs, la situation est généralement telle que $\sigma_n \rightarrow +\infty$, et donc que $e^{-t/\sigma_n} \rightarrow 1^-$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il suffit donc d'obtenir un développement limité de $\psi_n(x)$ pour x réel dans un voisinage de 1. Pour cela, nous considérons $\Phi(x, y)$ comme une fonction analytique de la variable y , paramétrée par la variable x . Nous avons alors à notre disposition les techniques de l'analyse complexe, qui permettent dans bien des cas d'obtenir une approximation de ψ_n .

Si nous utilisons les fonctions caractéristiques ou les fonctions génératrices des moments, l'approximation de ψ_n se fait de la même manière, et nous cherchons ensuite un développement limité de $\psi_n(x)$ dans un voisinage approprié de 1; nous appliquons enfin, suivant les cas, le théorème de continuité de Lévy ou le théorème de Curtiss.

2.1. Coefficients d'une fonction analytique

Le lecteur pourra se reporter à un des nombreux livres traitant des fonctions analytiques, par exemple [6, 33], pour une introduction à ce sujet. Les coefficients d'une fonction analytique $f(z)$ peuvent s'obtenir par la formule de Cauchy, sous forme d'une intégrale sur un contour fermé enserrant l'origine:

$$[z^n]f = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz. \quad (1)$$

Lorsqu'il n'est pas possible de calculer explicitement cette intégrale, un choix judicieux du contour d'intégration permet souvent d'obtenir son ordre de grandeur asymptotique. La méthode retenue dépend de la fonction initiale f ; de manière générale nous cherchons à trouver un contour d'intégration tel que seule une petite fraction fournisse la plus grande partie de l'intégrale. On pourra consulter, entre autres, les livres de Bleistein et Handelsman [4], De Bruijn [10], et Henrici [25] pour diverses techniques d'approximation susceptibles d'être appliquées à une intégrale de type (1).

Lorsque la fonction f a des singularités¹ de nature algébrique-logarithmique à distance finie, on prend un contour s'approchant de la (ou des) singularité(s) de plus petit module, qui est prédominante. L'article de Flajolet et Odlyzko [14] présente une synthèse de résultats obtenus par cette méthode. Si la fonction f est entière (i.e. est analytique sur tout le plan complexe), ou a des singularités essentielles, cela n'est plus possible, et on peut alors songer à la *méthode de col*. Nous en donnons ci-après une version simplifiée et assez intuitive, reprise en partie de [12], et adaptée au cas où il s'agit d'approximer un coefficient d'une fonction analytique.

2.2. Méthode de col

Il est possible de mettre une fonction entière $f(z)$ sous la forme $\exp(\log f(z))$, et la formule de Cauchy (1) s'écrit alors: $[z^n]f = (1/2i\pi) \oint \exp(\log f(z) - (n+1)\log z) dz$.

¹ Une singularité de f est un point où la fonction cesse d'être analytique.

Pour simplifier la présentation, nous notons $g(z) = \log f(z) - (n+1) \log z$. Nous choisissons comme contour d'intégration un cercle centré à l'origine, ayant pour rayon la solution ρ de l'équation $g'(\rho) = 0$:

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\theta \in [-\pi, +\pi]} \exp(g(\rho e^{i\theta})) d(\rho e^{i\theta}).$$

La valeur ρ est le "point col" ("saddle point" en anglais). Soit $\alpha \in]0, \pi[$, "suffisamment petit". Nous divisons l'intégrale en deux parties, l'une pour $|\theta| \leq \alpha$ et l'autre pour $\alpha < |\theta| \leq \pi$. En tenant compte de la définition de ρ par $g'(\rho) = 0$, nous pouvons calculer un développement de Taylor de g à l'ordre 3 au voisinage de ρ :

$$g(z) = g(\rho) + \frac{1}{2}(z - \rho)^2 g''(\rho) + O((z - \rho)^3).$$

Cela permet d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale de $\exp(g(\rho e^{i\theta}))$ lorsque θ varie dans l'intervalle $[-\alpha, +\alpha]$. Soit γ l'arc de cercle $\{z = \rho e^{i\theta}, |\theta| \leq \alpha\}$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{g(z)} dz \approx \frac{e^{g(\rho)}}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp\left(\frac{1}{2}(z - \rho)^2 g''(\rho)\right) dz.$$

L'intégrale sur γ se calcule ensuite de manière approchée, lorsqu'il est possible de se ramener à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}\theta^2 g''(\rho)) d\theta$, dont la valeur est connue: $\sqrt{2\pi/g''(\rho)}$. Pour cela, notre technique (il y en a bien d'autres!) consiste à remplacer l'arc de cercle γ par un contour formé de segments de droite $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma'_1$ (Fig. 1).

Il est souvent possible, en choisissant convenablement α , de montrer que les intégrales sur γ_1 et γ'_1 sont négligeables, et que l'intégrale sur γ_2 peut s'étendre à tout l'axe réel.

Il reste à montrer que l'intégrale pour $\alpha < |\theta| < \pi$ donne une contribution négligeable, ce qui fait en général intervenir des propriétés particulières de la fonction f . En particulier, lorsque f est à coefficients réels positifs, des variantes de l'inégalité triangulaire peuvent être utiles. En regroupant le tout, nous obtenons

$$[z^n]f(z) \approx \frac{e^{g(\rho)}}{\sqrt{2\pi g''(\rho)}}.$$

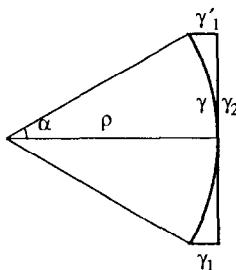


Fig. 1.

Il est possible de définir des classes de fonctions pour lesquelles la méthode de col s'applique, telles les fonctions *admissibles*, étudiées entre autres par Hayman, ou par Harris et Schoenfeld. On trouvera dans [31, Ch. 1], une présentation de ces différents types de fonctions.

2.3. Application à l'étude de fonctions bivariées

La formule de Cauchy permet d'extraire le coefficient de y^n dans la fonction génératrice $\Phi(x, y)$:

$$f_n(x) = [y^n] \Phi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \oint e^{h(x, y)} dy, \quad (2)$$

où l'intégrale est prise sur un contour encerclant l'origine et où:

$$h(x, y) = \log \Phi(x, y) - (n+1) \log y.$$

Dans de nombreux cas, il n'est pas possible de calculer explicitement l'intégrale (2), et nous essayons alors d'obtenir une approximation d'une qualité suffisante pour étudier malgré tout la suite des transformées de Laplace des distributions dont nous cherchons la limite. La fonction $\Phi(x, y)$ est considérée en tant que fonction analytique de la variable y . Lorsqu'elle a une singularité à distance finie, on utilise l'analyse de singularités. Lorsque la fonction Φ est entière, la méthode de col permet d'approximer l'intégrale (2). Le contour d'intégration est alors un cercle, centré à l'origine, et notre première tâche est de choisir son rayon. Pour déterminer une valeur approchée de ce rayon, nous sommes amenés à résoudre l'équation en y , paramétrée par x : $(\partial h / \partial y)(x, y) = 0$. Nous obtenons une solution $\rho_n(x)$, généralement sous forme approchée, pour x dans un voisinage de 1.² La méthode de col précédemment exposée fournit ensuite une approximation du coefficient $f_n(x) = [y^n] \Phi(x, y)$ sous la forme

$$f_n(x) = \frac{e^{h(x, \rho_n(x))}}{\sqrt{2\pi(\partial^2 h / \partial y^2)(x, \rho_n(x))}} (1 + o(1)).$$

Nous avons alors une approximation de la fonction génératrice de probabilité $\psi_n(x) = f_n(x)/f_n(1)$. Nous terminons en montrant qu'il est possible de trouver des valeurs $\mu_{0,n}$ et $\sigma_{0,n}$ telles que la transformée de Laplace $e^{t\mu_{0,n}/\sigma_{0,n}} \psi_n(e^{-t/\sigma_{0,n}})$ associée à la variable normalisée converge vers $e^{t^2/2}$, ce qui prouve à la fois que la suite des distributions étudiées converge faiblement vers une loi normale, et que $\mu_{0,n}$ et $\sigma_{0,n}^2$ sont des valeurs approchées de la moyenne et de la variance.

² On peut parfois admettre une certaine imprécision sur le contour d'intégration; on prend alors simplement pour rayon $\rho_n(1) = \rho_n$. C'est en particulier le cas pour les résultats présentés dans le livre de Kolchin et al. [28].

2.4. Quel type de fonction choisir?

Il n'est pas toujours facile de savoir quel type de fonction choisir (fonction caractéristique, fonction génératrice des moments, transformée de Laplace), et quel théorème de convergence appliquer. Nous donnons ci-dessous quelques indications, sans pouvoir cependant fournir de règles précises. La fonction caractéristique ϕ_n est définie pour toute v.a.r.; par contre la transformée de Laplace, et a fortiori la fonction génératrice des moments, ne le sont que pour certains types de v.a.r. En première approche, il semblerait donc que les fonctions caractéristiques permettent de traiter plus de cas. Cependant, des considérations techniques peuvent interdire leur emploi.

Par exemple, lorsque nous utilisons la méthode de col pour obtenir la fonction génératrice de probabilité $\psi_n(x)$ à partir de la fonction génératrice double $\Phi(x, y)$, le rayon du cercle choisi comme contour d'intégration est $\rho_n(x)$; pour x variant dans un voisinage de 1, et lorsque x est réel, le rayon l'est aussi; par contre, lorsque x est imaginaire, $\rho_n(x)$ l'est aussi. Dans ce cas, il est sans doute plus naturel d'utiliser les théorèmes de convergence des transformées de Laplace, ou des fonctions génératrices des moments, que le théorème de Lévy. Mentionnons aussi un cas particulier qui se rencontre dans certaines extensions des modèles d'urnes (cf. Section 3.3 et [18]): lorsque la fonction génératrice bivariable $\Phi(x, y)$ est entière, de la forme $\phi^d(x, y)$, où $d \rightarrow +\infty$, l'approximation de la fonction génératrice de probabilité $\psi_n(x)$ se fait par la méthode de col, et il est nécessaire de supposer $x < 1$ et réel pour montrer que seule une petite partie du contour d'intégration fournit une contribution significative. Toutes ces hypothèses imposent alors l'emploi des transformées de Laplace et du théorème de convergence associé.

3. Résultats

Nous donnons d'abord des exemples de résultats portant sur des fonctions à une variable, puis sur des fonctions à deux variables: nombre de composants d'une structure combinatoire, modèles d'urnes, cas où la fonction n'est pas connue sous forme close, et enfin les extensions à plusieurs variables des modèles d'urnes et du nombre de composants d'une structure.

3.1. Fonction à une variable

Présentons d'abord quelques exemples où la méthode de col est utilisée pour approximer le coefficient d'une série génératrice. Daniels [9] et Good [21, 22] donnent une formule pour approximer $[y^n]\{f(y)^k\}$, lorsque la fonction f est à coefficients réels positifs, de rayon de convergence strictement positif, et lorsque l'on sait a priori que le coefficient cherché n'est pas nul: $f(y)$ ne doit pas être de la forme $f_1(y^r)$, pour un

entier $r > 1$. On a alors:

$$[y^n]\{f(y)^k\} \approx \frac{f(\rho)^k}{\sigma \rho^n \sqrt{2\pi k}} \left(1 + \frac{\alpha_1}{k} + \frac{\alpha_2}{k^2} + \dots\right)$$

où ρ est l'unique solution réelle positive de $y(f'/f)(y) = n/k$, pour n/k variant dans un intervalle donné $[A, B]$ ($A > 0$), et où $\sigma^2 = (\partial/\partial u)^2 \log f(\rho e^u)|_{u=0}$. Il existe aussi une version multi-dimensionnelle de ce théorème. Cela ne permet pas d'obtenir des lois limites; on peut cependant évaluer le coefficient de $x^k y^n$ dans une fonction $\Phi(x, y)$ de la forme $g(xf(y))$, lorsque k et n sont à peu près proportionnels. Quelques applications intéressantes sont:

- $g(t) = 1/(1-t)$; on a alors $\Phi(x, y) = 1/(1 - xf(y))$. Cela sert pour le nombre de structures combinatoires de taille n et avec k composants.
- $g(t) = e^t$: $\Phi(x, y) = e^{xf(y)}$; c'est utilisé pour le composé partitionnel abélien.
- $g(t) = (1+t)^d$: $\Phi(x, y) = (1 + xf(y))^d$; d tend vers l'infini (on a $k \leq d$). Cela généralise les modèles d'urnes.

Greene et Knuth [23] donnent une démonstration du théorème central limite classique qui est assez dans l'esprit des résultats de Daniels et Good: on se ramène à évaluer $[y^n]\{g(y)^k\}$ par une méthode de col, lorsque k est à peu près proportionnel à n , et pour une fonction génératrice de probabilité $g(y)$. Soient μ et σ^2 la moyenne et la variance des v.a.r. dont on étudie la somme; pour $n = \mu k + r$, on a le résultat suivant:

$$[y^{\mu k + r}]\{g(y)^k\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi k}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2 k} \left(1 - \frac{\alpha r}{k} + \frac{\beta r^3}{k^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right).$$

Cette méthode permet d'avoir une information détaillée sur les probabilités; elle fournit plus de renseignements que la méthode classique exposée par exemple par Feller [11]. Si nécessaire, on peut poursuivre le développement asymptotique aussi loin que souhaité.

De manière générale, lorsque la fonction caractéristique d'une v.a.r. est connue, on peut obtenir directement des résultats de convergence asymptotique. Ainsi, le nombre d'inversions d'une permutation suit asymptotiquement une loi gaussienne: Sachkov [30] le démontre par exemple à partir de la fonction génératrice $I_n(x) = \sum_k I_{n,k} x^k = (1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{n-1})$. Un simple développement limité montre que la suite des fonctions caractéristiques converge vers $e^{-t^2/2}$, et le théorème de Lévy permet de conclure.

3.2. Nombre de composants d'une structure combinatoire

Bender [1] étudie des fonctions méromorphes à deux variables, du type $\Phi(x, y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^k y^n = g(x, y)/P(x, y)^{m+1}$. Le théorème principal est le suivant:

Soit $\Phi(x, y)$ une fonction à coefficients positifs, telle qu'il existe une fonction continue $A(s)$, qui ne s'annule pas dans un voisinage de l'origine, une fonction $r(s)$ telle que r''' soit borné et non nul dans un voisinage de l'origine, et un entier

$m \geq 0$, et que la fonction $(1 - x/r(s))^m \Phi(x, e^s) - A(s)/(1 - x/r(s))$ soit analytique et bornée dans un voisinage du point $(x = r(0), s = 0)$. Posons $\mu = -(r'/r)(0)$ et $\sigma^2 = \mu^2 - (r''/r)(0)$. Alors, si $\sigma \neq 0$, la suite des probabilités définies par les $a_{n,k}$ est asymptotiquement normale, de moyenne $n\mu$ et de variance $n\sigma^2$.

Cela couvre en particulier le cas $\Phi(x, y) = 1/(1 - xf(y))$, qui correspond au nombre de composants (marqué par x) d'une structure combinatoire, de taille totale donnée (par y): structure *suite de*... La démonstration utilise le théorème de convergence des fonctions caractéristiques; la forme de la fonction génératrice $\Phi(x, y)$ suggère d'obtenir l'approximation de $\psi_n(x)$ par une analyse autour du pôle de plus petit module de Φ , considéré comme fonction en y . On obtient une moyenne et une variance linéaires en n , la taille totale de la structure. Il y a également un résultat du type "théorème local limite", qui donne une approximation de chaque $p_{n,k}$, toujours pour des fonctions de la même forme, ou lorsque la suite des $a_{n,k}$ vérifie une condition de *concavité logarithmique*: $a_{n,k}^2 \geq a_{n,k-1} \cdot a_{n,k+1}$. Des exemples d'utilisation de ces théorèmes sont:

- Le théorème central limite classique:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{1 - y \sum_k a_{1,k} x^k}.$$

- Les nombres eulériens: nombre de permutations de \mathcal{S}_n à k montées:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^k \frac{y^n}{n!} = \frac{x(1-x)}{e^{(x-1)y} - x}.$$

- Le nombre de partitions de $[1 \dots n]$ en exactement k blocs étiquetés: c'est $k!S_{n,k}$, où $S_{n,k}$ est un nombre de Stirling de deuxième espèce:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n,k} k!S_{n,k} x^k \frac{y^n}{n!} = \frac{1}{1 - x(e^y - 1)}.$$

On montre aussi que les $S_{n,k}$ eux-mêmes suivent une loi limite normale.

- Les nombres de Stirling de première espèce $s_{n,k}$, qui dénombrent le nombre de permutations de \mathcal{S}_n ayant k cycles.
- Le nombre $I_{n,k}$ de permutations de \mathcal{S}_n ayant k inversions;
- Des problèmes de placement de dominos;
- Plus généralement, des suites de nombres vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

Canfield [5] étudie les fonctions génératrices exponentielles de la forme $\hat{\Phi}(x, y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^k (y^n/n!) = e^{xg(y)}$, lorsque g est un polynôme à coefficients réels positifs, tel que $g(0) = 0$.

Soit $g(y)$ un polynôme à coefficients réels positifs, et qui ne soit pas de la forme $g_1(y^j)$, pour un polynôme g_1 et un entier $j > 1$. Alors, les coefficients $a_{n,k}$ définis par $\sum_{n,k} a_{n,k} x^k (y^n/n!) = e^{xg(y)}$ engendrent une loi de probabilité asymptotiquement normale.

L'approximation de $\psi_n(x)$ utilise la méthode de col, où le col dépend de x ; on se sert ensuite du théorème sur la convergence des fonctions génératrices des moments. La moyenne et la variance sont linéaires en n . Cela permet d'étudier la construction *ensemble de ...*. Comme pour Bender, il y a aussi un théorème local limite, lorsque les $a_{n,k}$ vérifient une condition de concavité logarithmique. Des exemples d'application sont:

- Le nombre de graphes étiquetés sur n sommets, tels que la taille d'une composante connexe soit bornée:

$$\hat{\Phi}(x, y) = \exp\left(x \sum_{p=1}^M C_p \frac{y^p}{p!}\right).$$

Dans la formule ci-dessus, C_p est le nombre de graphes étiquetés connexes sur p sommets; il vérifie par exemple la relation de récurrence suivante [24]: $C_p = 2^{p(p-1)/2} - (1/p) \sum_{k=1}^{p-1} k \binom{p}{k} 2^{(p-k)(p-k-1)/2} C_k$.

- Le nombre de permutations ayant k cycles de longueur au plus M :

$$\hat{\Phi}(x, y) = \exp\left(x \sum_{i=1}^M \frac{y^i}{i}\right).$$

- Le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs, chaque bloc étant de taille au plus M :

$$\hat{\Phi}(x, y) = \exp\left(x \sum_{i=1}^M \frac{y^i}{i!}\right).$$

- Les nombres de Stirling de deuxième espèce: nombre de partitions de n objets en k blocs.

$$\hat{\Phi}(x, y) = \sum_{n,k} S_{n,k} x^k \frac{y^n}{n!} = e^{x(e^y - 1)}.$$

Flajolet et Soria [15, 16, 32] étudient la construction *ensemble de cycles de ...*. Cela fait intervenir, pour le nombre de composants dans un composé partitionnel abélien (structures étiquetées), une fonction génératrice exponentielle de la forme $\hat{\Phi}(x, y) = e^{x f(y)}$, et, pour le nombre de composants dans un multi-ensemble (structures non étiquetées), une fonction génératrice ordinaire $\Phi(x, y) = \exp(\sum_{p \geq 1} (x^p/p) f(y^p))$. L'hypothèse "*ensemble de cycles de ...*" conduit à une fonction $f(y)$ avec une singularité logarithmique isolée sur son cercle de convergence: $f(y) = a \log(1/(1-y/\rho)) + R(y)$, où a est un nombre réel positif, et où la fonction R est (à peu près) analytique [15].

Soit $\hat{\Phi}(x, y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^k (y^n/n!) = e^{x f(y)}$, où f est à singularité logarithmique. Alors la suite $(a_{n,k})$ définit une suite de probabilités qui convergent faiblement vers une loi normale. Lorsque f a un rayon de convergence $\rho < 1$, la fonction $\Phi(x, y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^k y^n = \exp(\sum_{p \geq 1} (x^p/p) f(y^p))$ définit de même une suite de distributions qui converge vers une loi normale. Dans les deux cas, la moyenne et la variance asymptotiques ont pour valeurs $\mu \approx a \log n$ et $\sigma^2 \approx a \log n$.

La démonstration utilise les fonctions caractéristiques et l'analyse de singularités pour une singularité de type logarithmique, en utilisant un contour adapté (contour de Hankel). La moyenne et la variance sont asymptotiquement en $\log n$. Des exemples d'application sont:

- Les nombres de Stirling de première espèce:

$$\hat{\Phi}(x, y) = \sum_{n,k} s_{n,k} x^k \frac{y^n}{n!} = \exp\left(x \log \frac{1}{1-y}\right).$$

- Les dérangements “généralisés”: $a_{n,k}$ est le nombre de permutations de \mathcal{S}_n avec k cycles, lorsqu'un nombre fini de longueurs de cycles est interdit:

$$\hat{\Phi}(x, y) = \exp\left(x \left(\log \frac{1}{1-y} - \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{y^i}{i} \right)\right).$$

- D'autres variations sur les cycles, par exemple les rondes d'enfants (cycles orientés, avec un enfant au centre):

$$\hat{\Phi}(x, y) = \exp\left(xy \log \frac{1}{1-y}\right).$$

- Les graphes non orientés 2-réguliers (chaque sommet est de degré exactement 2); un tel graphe est un ensemble de composantes connexes qui sont des cycles:

$$\hat{\Phi}(x, y) = \exp\left(x \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{1-y} - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} \right)\right).$$

- Les fonctions aléatoires (“random mappings”) de l'ensemble des entiers $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même. Une telle fonction peut être représentée comme un composé partitionnel d'objets formés en prenant des cycles d'arbres enracinés:

$$\hat{\Phi}(x, y) = \exp\left(x \log \frac{1}{1-a(y)}\right).$$

Ici, $a(y)$ est la fonction génératrice des arbres enracinés, et vérifie: $a(y) = ye^{a(y)}$. Si on prend des classes d'équivalence de fonctions par rapport à une permutation, on passe à des structures non étiquetées; cela revient à prendre la construction “nombre de composants dans un multi-ensemble”, et à remplacer $a(y)$ par la fonction génératrice dénombrant les arbres enracinés non étiquetés.

- Le nombre de facteurs irréductibles distincts dans un polynôme aléatoire de degré n sur un corps fini:

$$\hat{\Phi}(x, y) = \exp\left(xI(y) + \sum_{k \geq 2} \frac{1 + (-1)^{k-1}(y-1)^k}{k} I(y^k)\right).$$

Ici, $I(y)$ dénombre les polynômes irréductibles.

Dans le deuxième article [16], on accepte aussi que la fonction génératrice ait des singularités algébriques en y . On montre également des résultats sur la queue de la distribution, qui est exponentielle. Intuitivement, un tel résultat est complémentaire d'un théorème central limite, qui donne des informations sur le comportement autour de la moyenne; cela signifie que les valeurs éloignées de la moyenne sont très peu probables. Le but ultime est de définir des conditions sous lesquelles on a une normalité asymptotique, pour un objet combinatoire obtenu par suite de constructions classiques: suite-de, cycle-de, ensemble-de..., dans le cas étiqueté comme dans le cas non étiqueté.

Enfin, les résultats de Compton [7] concernent également la distribution du nombre de composantes d'une structure, étiquetée ou non, construite comme ensemble de composantes élémentaires. Les résultats portent sur la probabilité $p_{n,k}$ d'avoir k composantes, et sur le nombre moyen de composantes, lorsque la série génératrice à une variable $a(x)$, énumérant toutes les structures suivant leurs tailles, satisfait diverses conditions: soit R le rayon de convergence de a ; a peut converger, ou diverger, en R ; une dérivée de a peut diverger en R . Les techniques de preuve consistent à obtenir une formule explicite pour la quantité à calculer, sous forme de somme de termes, puis à isoler et approximer les termes qui fournissent une contribution significative. Il ne s'agit pas d'un résultat de distribution limite au sens strict: il n'y a pas identification de la loi limite à un type connu. Les exemples portent sur le nombre d'arbres dans une forêt, lorsque les arbres sont enracinés ou non, étiquetés ou non...

3.3. Modèles d'urnes

Soient d urnes, dans lesquelles on lance successivement n boules. Les urnes ne sont pas équivalentes; leur ordre a donc de l'importance, à la différence du nombre de composants d'une structure combinatoire. Dans le modèle le plus courant, chaque boule a une probabilité $1/d$ d'atterrir dans une urne donnée, et les lancers successifs sont indépendants [27]. Soit $a_{n,k}$ le nombre de façons de répartir les n boules parmi k des d urnes; $d-k$ urnes sont donc vides.³ Définissons la fonction génératrice $\hat{\Phi}(x, y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^k (y^n/n!)$; nous avons $\hat{\Phi}(x, y) = (1 - x + xe^y)^d$.

Lorsque le nombre d'urnes d et le nombre de boules n tendent vers l'infini, le nombre d'urnes contenant au moins une boule admet une distribution limite. Suivant les cas, on obtient une loi normale, lorsque n et d sont "comparables", ou une loi de Poisson si ce n'est pas le cas [27, 28]. Pour des ordres de grandeur relatifs de n et d donnés, il existe souvent plusieurs démonstrations, faisant appel à des techniques différentes. Dans ce genre de problèmes, la distribution dépend en fait de deux paramètres qui tendent vers l'infini, le nombre de boules n et le nombre d'urnes d .

³ On s'intéresse le plus souvent au nombre d'urnes ne contenant aucune boule, ce qui revient exactement au même lorsque le nombre total d'urnes est connu.

Nous considérons ici un cas particulier, pour lequel la méthode de col s'applique particulièrement bien. La fonction génératrice $\psi_n(x)$ de la distribution est définie implicitement, comme coefficient de la fonction bivariable $\Phi(x, y) = \varphi^d(x, y)$, avec $\varphi(x, y) = 1 + x(e^y - 1)$. Nous avons donc $\psi_n(x) = [y^n]\varphi^d(x, y)$; lorsque d et n sont à peu près proportionnels, nous pouvons nous ramener à un problème à un paramètre, en posant $n = Ad + o(d)$.

Parmi les premiers travaux sur la distribution du nombre d'urnes vides, citons Geiringer [20] et Weiss [34], qui démontrent la normalité asymptotique de ce nombre par une méthode de convergence des moments (et non de la fonction génératrice des moments). Rényi [29] reprend et étend ceci; il utilise l'approximation de la fonction caractéristique par une méthode de col, et le théorème de Lévy sur la convergence d'une suite de fonctions caractéristiques. Dans le livre de Kolchin et al. [28], la méthode de col et le théorème de convergence des fonctions caractéristiques sont utilisés pour montrer un grand nombre de résultats, entre autres:

- la normalité asymptotique du nombre d'urnes vides, pour une répartition uniforme et lorsque $0 < A < n/d < B$; (Ch. 1, p. 18);
- sous les mêmes conditions, la normalité asymptotique du nombre d'urnes contenant i boules (Ch. 2, p. 49 et suivantes, et th. 1 p. 55);
- les urnes ne sont plus équiprobables, mais suivent une loi de probabilité $\{p_i\}$, et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout i , on ait l'inégalité $p_i \leq C/d$. Toujours sous la condition $0 < A < n/d < B$, le nombre d'urnes vides tend encore vers une loi normale (Ch. 3, th. 1 p. 137).

Une extension des modèles d'urnes est proposée dans Gardy [17, 18], pour une fonction génératrice de la forme $\Phi(x, y) = (1 - x + x\lambda(y))^d$, où la fonction $\lambda(y)$ est à coefficients positifs. Ceci permet de modéliser certains paramètres des bases de données relationnelles [18, 19], par exemple la variation de la taille d'une relation par l'opération de projection. Un exemple de résultat est le suivant [18]:

Soit $\lambda(y)$ une fonction entière à coefficients positifs, telle que $\lambda(0) = 1$, et non de la forme $\lambda_1(y^m)$, pour une fonction entière λ_1 et un entier $m \geq 2$. Soit $g(y) = y(\lambda'/\lambda)(y)$, et soit $A > 0$, tel que $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) > A$. La loi de probabilité définie par $f(x) = [y^n]\Phi(x, y)/[y^n]\Phi(1, y)$ est asymptotiquement normale lorsque $d \rightarrow +\infty$, et $n = Ad + o(d)$. La moyenne et la variance asymptotiques ont pour valeurs:

$$\mu = d \left(1 - \frac{1}{\lambda(\rho)} \right); \quad \sigma^2 = d \left(\frac{1}{\lambda(\rho)} - \frac{1}{\lambda^2(\rho)} - \frac{\rho \lambda'^2(\rho)}{g'(\rho) \lambda^4(\rho)} \right).$$

Dans cette formule, ρ est l'unique solution réelle positive de l'équation $g(y) = A$.

La démonstration de ce théorème utilise les transformées de Laplace. Il peut être reformulé en termes de graphes bipartis comme suit: la fonction génératrice

$\Phi(x, y) = (1 + x(\lambda_\delta(y) - 1))^d$ dénombre les graphes bipartis orientés, à d sommets d'un type et δ sommets de l'autre type, tels que le nombre d'arcs d'un sommet du premier type vers un sommet du second type soit énuméré par la fonction λ_δ . En jouant sur cette fonction, on peut aussi donner une probabilité aux sommets du deuxième type, ou bien faire tendre le paramètre δ vers l'infini [17].

Le résultat ci-dessus s'étend lorsque $0 < A < n/d < B$. Il est intéressant de chercher la forme la plus générale d'une fonction $\Phi(x, y) = \varphi(x, y)^d$, définissant une suite de distributions de probabilités par $p_{n,k} = [x^k y^n] \Phi(x, y) / [y^n] \Phi(1, y)$, telle que cette suite soit asymptotiquement normale. Le théorème suivant donne une première indication:

Soit $\varphi(x, y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^k y^n$ une fonction à coefficients $a_{n,k}$ positifs, qui soit entière par rapport à la variable y . Supposons que les variables n et d tendent vers l'infini de telle manière que $n/d \rightarrow A > 0$, et que cette constante A vérifie: $\lim_{y \rightarrow +\infty} y(\varphi'_y/\varphi)(1, y) > A$. Soit ρ l'unique solution réelle positive de l'équation $y(\varphi'_y/\varphi)(1, y) = A$. Définissons les fonctions $k(x, y) = x(\varphi'_x/\varphi)(x, y)$ et $l(x, y) = y(\varphi'_y/\varphi)(x, y)$, et supposons que $k'_x l'_y - k'_y l'_x \neq 0$ au point $(1, \rho)$. Alors, la fonction $f(x) = [y^n] \varphi(x, y)^d$ définit une loi de probabilité asymptotiquement normale. La moyenne et la variance asymptotique valent:

$$\mu = dk(1, \rho); \quad \sigma^2 = d \frac{k'_x l'_y - k'_y l'_x}{l'_y}(1, \rho).$$

3.4. Fonctions non sous forme close

Il est parfois possible d'étudier une suite de nombres à l'aide de leurs fonctions génératrices, sans avoir une formule explicite pour la fonction génératrice bivariable $\Phi(x, y)$; nous en donnons ci-dessous deux exemples.

Flajolet et Odlyzko [13] étudient les coefficients de polynômes définis par des récurrences non linéaires: $g_k(y) = \sum_n a_{n,k} y^n$, tels que le polynôme $g_0(y)$ soit à coefficients positifs, et que les g_k satisfassent la relation: $g_{k+1}(y) = P(y, g_k(y))$, pour un polynôme à deux variables P non réduit à un monôme. Il faut de plus qu'au moins une des fonctions g_0, g_1 ou g_2 atteigne son maximum sur le cercle unité au point 1, et quelques conditions techniques supplémentaires. On a alors un résultat de normalité asymptotique des $a_{n,k}$ près de leur maximum. La démonstration ne fait pas appel à un théorème de convergence du type "théorème de Lévy", mais approxime, par une méthode de col, $a_{n,k}/\max\{a_{n,k}\}$. Les applications concernent l'énumération d'arbres de divers types, selon la hauteur et le nombre de nœuds.

Jacquet et Regnier [26] travaillent sur une fonction génératrice $\Phi(x, y)$ connue seulement par une équation implicite. Le modèle consiste à générer des clés aléatoires, qui sont des suites infinies de 0 et de 1. Les probabilités de générer respectivement le bit 0 et le bit 1 valent p et $q = 1 - p$. Soit $a_{n,k}$ la probabilité qu'un trie (arbre lexicographique sur $\{0, 1\}$) construit sur n clés aléatoires soit de taille k (nombre de

nœuds internes), et définissons $\hat{\Phi}(x, y) = e^{-y} \sum_{n,k} a_{n,k} x^k (y^n/n!)$. La fonction génératrice $\hat{\Phi}(x, y)$ satisfait l'équation implicite:

$$\hat{\Phi}(x, y) = x\hat{\Phi}(x, py)\hat{\Phi}(x, qy) + (1-x)(1+y)e^{-y}.$$

La démonstration utilise le théorème de convergence des fonctions caractéristiques; l'approximation de $[y^n]\hat{\Phi}(x, y)$ se fait en intégrant sur un contour circulaire, mais ce n'est pas une technique de col.

3.5. Problèmes multivariés

Les résultats de Bender et Canfield sur le nombre de composants d'une structure combinatoire ont été étendus par Bender et Richmond à une fonction génératrice à plusieurs variables [2, 3]. Le premier article [2] généralise les résultats de Bender sur les fonctions méromorphes [1], lorsqu'on dispose d'un équivalent pour la fonction $\varphi_n(x) = \sum_k a_n(k) x^k$ (ici, k dénote un vecteur d'entiers, et x est le vecteur de variables associé). Des exemples d'application sont:

- Le polynôme de Tutte d'un graphe, et des familles récursives de graphes;
- Des permutations énumérées par leurs nombres de montées et de descentes;
- Des partitions ordonnées de $\{1, \dots, n\}$.

Le deuxième article [3] concerne une fonction génératrice $\Phi(x) = e^{P(x)}$, où x est un vecteur, et P un polynôme. Il faut d'abord définir une notion d'admissibilité pour une fonction multivariée; on a ensuite un théorème central limite, démontré en utilisant une méthode de col à plusieurs variables. Les applications concernent:

- Le résultat de Canfield [5], pour une fonction à deux variables: $\Phi(x, y) = e^{xg(y)}$.
- Les permutations sur n éléments, avec des contraintes sur la longueur des cycles: k des cycles ont des longueurs dans un ensemble fixé fini \mathcal{J} d'entiers, et les autres cycles ont leurs longueurs dans un ensemble également fini \mathcal{J} .
- Un certain type de partitions d'un ensemble.

Les modèles d'urnes aussi peuvent être généralisés. Ainsi, la fonction génératrice intervenant dans l'étude de la taille d'une jointure dans une base de données relationnelles [18, 19] est une fonction à trois variables: $\Phi(x, y, z) = \phi^d(x, y, z)$, et la fonction caractéristique est donnée par: $\psi_{n,m}(x) = [y^n z^m] \phi^d(x, y, z)$. Là aussi, on peut obtenir des résultats de normalité asymptotique, lorsque la fonction ϕ satisfait à certaines conditions, et lorsque n et m tendent vers l'infini, en général de manière proportionnelle à d .

Remerciements

L'auteur remercie P. Flajolet, R. Schott et M. Soria pour de nombreuses discussions sur le sujet de cet article.

References

- [1] E. Bender, Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration, *J. Combin. Theory, Ser. A* **15** (1973) 91–111.

- [2] E.A. Bender et L.B. Richmond, Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration II: multivariate generating functions, *J. Combin. Theory, Ser. A* **34** (1983) 255–265.
- [3] E.A. Bender et L.B. Richmond, A generalisation of Canfield's formula, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **41** (1986) 50–60.
- [4] N. Bleistein et R.A. Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals* (Dover, New York, 1986).
- [5] E.R. Canfield, Central and local limit theorems for the coefficients of polynomials of binomial type, *J. Combin. Theory, Ser. A* **23** (1977) 275–290.
- [6] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes* (Hermann, Paris, 1961).
- [7] K.J. Compton, Some methods for computing component distribution probabilities in relational structures, *Discrete Math.* **66** (1987) 59–77.
- [8] J.H. Curtiss, A note on the theory of moment generating functions, *Ann. Math. Stat.* **13** (3) (1942) 430–433.
- [9] H.E. Daniels, Saddlepoint approximations in statistics. *Ann. Math. Stat.* **25** (1954) 631–650.
- [10] N.G. deBruijn, *Asymptotic Methods in Analysis* (Dover, New York, 1981).
- [11] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1 et 2* (Wiley, New York, 1968 et 1971).
- [12] P. Flajolet, Mathematical methods in the analysis of algorithms and data structures, E. Börger, éd., *Trends in Theoretical Computer Science* (Computer Science Press, Rockville, 1988), pp. 225–304.
- [13] P. Flajolet et A. Odlyzko, Limit distributions for coefficients of iterates of polynomials with applications to combinatorial enumerations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **96** (1984) 237–253.
- [14] P. Flajolet et A. Odlyzko, Singularity analysis of generating functions, *SIAM J. Discrete Math.* **3**(2) (1990) 216–240.
- [15] P. Flajolet et M. Soria, Gaussian limiting distributions for the number of components in combinatorial structures, *J. Combin. Theory, Ser. A* **53** (2) (1990) 165–182.
- [16] P. Flajolet et M. Soria, General combinatorial schemas with Gaussian limit distributions and exponential tails, Rapport de Recherche LRI No 467, Février 1989.
- [17] D. Gardy, Normal limiting distributions for projection and semijoin sizes, *SIAM J. Discrete Math.*, à paraître.
- [18] D. Gardy, Bases de données, Allocations aléatoires: Quelques analyses de performances, Thèse d'Etat, Université de Paris-Sud, Juin 1989.
- [19] D. Gardy et C. Puech, On the effect of join operations on relation sizes, *ACM Trans. Database Systems* **14** (4) (1989) 574–603.
- [20] H. Geiringer, On the probability theory of arbitrary linked events, *Ann. Math. Stat.* **9** (1938) 260–271.
- [21] I.J. Good, Saddle-point methods for the multinomial distribution, *Ann. Math. Stat.* **28** (1957) 861–881.
- [22] I.J. Good, The multivariate saddlepoint method and chi-squared for the multinomial distribution, *Ann. Math. Stat.* **31** (1960) 535–548.
- [23] D.H. Greene et D.E. Knuth, *Mathematics for the Analysis of Algorithms* (Birkhäuser, 1982).
- [24] F. Harary, E. Palmer, *Graphical Enumeration* (Academic Press, 1973).
- [25] P. Henrici, *Applied and Computational Analysis, Vol. 2* (Wiley, New York, 1977).
- [26] P. Jacquet et M. Regnier, Normal limiting distribution of the size of tries, in: *Performance 87, Bruxelles* (North-Holland, Amsterdam, 1987) 209–223.
- [27] N.L. Johnson, S. Kotz, *Urn Models and their Application* (Wiley, 1977).
- [28] V. Kolchin, B. Sevast'yanov et V. Chistyakov, *Random Allocations* (Wiley, 1978).
- [29] A. Rényi, Three new proofs and a generalization of a theorem of Irving Weiss, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **7** (1962) 203–214.
- [30] V.N. Sachkov, *Probabilistic Methods in Combinatorial Analysis* (Nauka, Moscou, 1978) (en russe).
- [31] B. Salvy, Fonctions génératrices et asymptotique automatique, Rapport de Recherche INRIA No 967, Janvier 1989.
- [32] M. Soria, Méthodes d'analyse pour les constructions combinatoires et les algorithmes, Thèse d'Etat, Université de Paris-Sud, Juillet 1990.
- [33] E.C. Titchmarsh, *The Theory of Functions, Deuxième édition* (Oxford University Press, 1939).
- [34] I. Weiss, Limiting distributions in some occupancy models, *Ann. Math. Stat.* **29** (3), (1958) 878–884.