Serie storiche finanziarie

- Caratteristiche:
  - Marcata non stazionarietà:
    - Preprocessing:
      - Prezzi:
        - Non stazionari
      - Ritorni:
        - stazionari
      - Ritorni log:
        - stazionari
        - ritorni multi-periodo come somma di ritorni di singolo periodo

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$$

  - Volatility clustering:
    - Mandelbrot (1963): “most financial series contain volatility clusters.”

MODELLO ARMA

$$Y_t = \mathbb{E}[Y_t|\Omega_{t-1}] + \epsilon_t$$
$$\mathbb{E}[Y_t|\Omega_{t-1}] = f(\Omega_{t-1};\theta)$$
$$Var[Y_t|\Omega_{t-1}] = \mathbb{E}\left[\epsilon_t^2|\Omega_{t-1}\right] = \sigma^2$$

con:
Ωt−1 informazione al tempo t-1
Θ parametri del modello

- Media condizionata: varia con Ω t−1
- Varianza condizionata: costante
- Media incondizionata: costante
- Varianza incondizionata: costante

MODELLO ARCH (Engle, 1982)

$$Y_t = \mathbb{E}[Y_t|\Omega_{t-1}] + \epsilon_t$$
$$\mathbb{E}[Y_t|\Omega_{t-1}] = f(\Omega_{t-1};\theta)$$
$$Var[Y_t|\Omega_{t-1}] = \mathbb{E}\left[\epsilon_t^2|\Omega_{t-1}\right] = \sigma(\Omega_{t-1};\theta) \equiv \sigma_t^2$$

con:
Ωt−1 informazione al tempo t-1
Θ parametri del modello

- Media condizionata: varia con Ω t−1
- Varianza condizionata: varia con Ω t−1
- Media incondizionata: costante
- Varianza incondizionata: costante

Che parametri dare a:

$$\mathbb{E}\left[\epsilon_t^2|\Omega_{t-1}\right] = \sigma(\Omega_{t-1};\theta) \equiv \sigma_t^2 \text{ ?}$$

ARCH(p)

- Il modello ARCH(p) propone:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2,$$

con $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0$ per $i > 0$.

- Ponendo: $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \nu_t$$

Modello GARCH(q,p) (Bollerslev, 1986)

- Se la varianza ha lunga memoria p assume valori elevati => GARCH:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

- Ponendo $v_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \nu_{t-j} + \nu_t$$

Ossia:
un ARMA(max(p, q), q) per ε2

- Il più utilizzato è GARCH(1, 1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$

Metodologie calcolo value-at-risk

- Parametrici
  - Pro/Contro: più precisi se assunzioni corrette, ma stimare è difficile
- Montecarlo
  - Pro/Contro: Flessibile, ma necessita di assunzione parametrica ed oneroso cptazion.
- Historical Simulation
  - Basic Historical Simulation
    - Pro: Considera implicitamente correlazioni fra asset
    - Contro: ma non la volatilità
  - Volatility Weighted Historical Simulation
    - Pro: incorpora modellazione volatilità
  - Filtered Historical Simulation
    - Pro: maggiore accuratezza di VWHS grazie a:
      - Standardizzazione ritorni attraverso framework ARIMA-GARCH
      - Meccanismo ad-hoc per il VaR multi-periodo

$$h_{tj}^{*} = \sigma_{N\,j} \frac{h_{tj}}{\sigma_{tj}}$$