EFC 2 - RA 248029

Questão 1a)

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4}\left[\int_{-T/4}^{0} -t\, e^{-jk\omega_0 t} + \int_{0}^{T/4} t\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0} -t\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \int_{0}^{1} t\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{jk\omega_0}(jk\omega_0 - 1) + 1}{-k^2\omega_0^2} + \frac{e^{-jk\omega_0}(-jk\omega_0 + e^{jk\omega_0} - 1)}{-k^2\omega_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(k\omega_0) + j\,\text{sen}(k\omega_0)\,(jk\omega_0 - 1) + 1}{-k^2\omega_0^2} + \frac{\cos(k\omega_0) - j\,\text{sen}(k\omega_0))(-jk\omega_0 + \cos(k\omega_0) + j\,\text{sen}(k\omega_0) - 1)}{-k^2\omega_0^2}\right)$$

$$a_k = \frac{-1}{4k^2\omega_0^2}\Big(\cos(k\omega_0)\, jk\omega_0 - \cos(k\omega_0) + j^2\,\text{sen}(k\omega_0).k\omega_0 - j\,\text{sen}(k\omega_0)$$

$$+1 - \cos(k\omega_0)\, jk\omega_0 + \cos^2(k\omega_0) + \cos(k\omega_0)\, j\,\text{sen}(k\omega_0) - \cos(k\omega_0)$$

$$+ j^2\,\text{sen}(k\omega_0)\, k\omega_0 - j\cos(k\omega_0).\text{sen}(k\omega_0) - j^2\,\text{sen}^2(k\omega_0) + j\,\text{sen}(k\omega_0)\Big)$$

$$a_k = \frac{-1}{4k^2\omega_0}\Big(-2\cos(k\omega_0) - 2\,\text{sen}(k\omega_0).k\omega_0 + \underbrace{\cos^2(k\omega_0) + \text{sen}^2(k\omega_0)}_{1} + 1$$

$$a_k = -\frac{2}{4k^2\omega_0}\left(-\cos(k\omega_0) - \text{sen}(k\omega_0).k\omega_0 + 1\right)$$

$$a_k = \frac{1}{2k^2\omega_0^2}\left(\cos(k\omega_0) + \text{sen}(k\omega_0).k\omega_0 - 1\right)$$

Calculando $a0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\int_{-T/4}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{T/4} t\,dt\right]$

$$a0 = \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0} -\frac{t^2}{2} + \int_{0}^{1}\frac{t^2}{2}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

Daniele Souza Gonçalves RA 248029
EFC 2 - SÉRIE DE FOURIER

b) Neste item, utilizando o valor a_k obtido anteriormente iremos construir gráficos para a aproximação de x(t) pela Série de Fourier para 4 valores de harmônicas diferentes, conforme as figuras abaixo para às 1,10,20 e 50 harmônicas respectivamente.

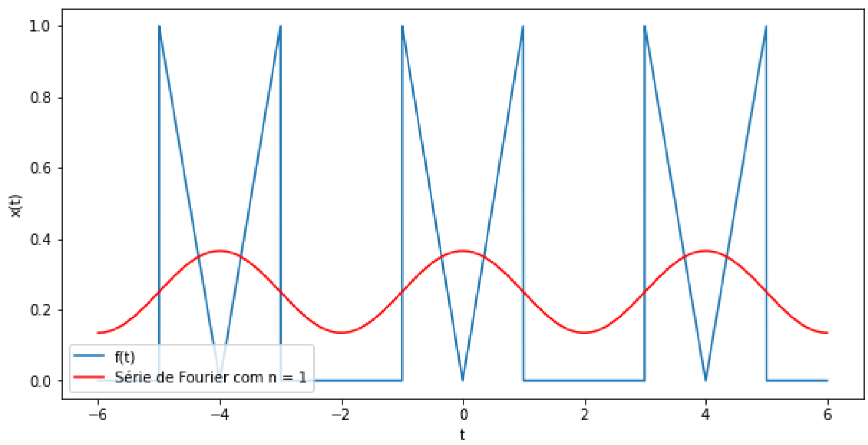

Figura 1 : Gráfico da Série de Fourier e da onda x(t), ambas em função de t

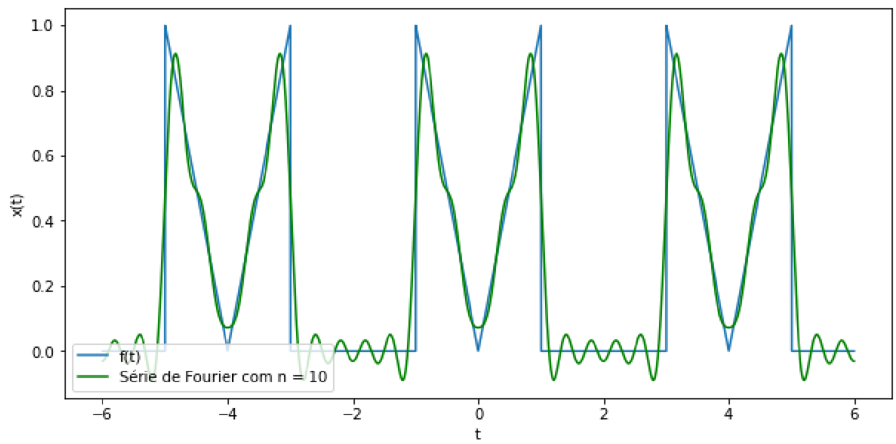

Figura 2 : Gráfico da Série de Fourier e da onda x(t), ambas em função de t

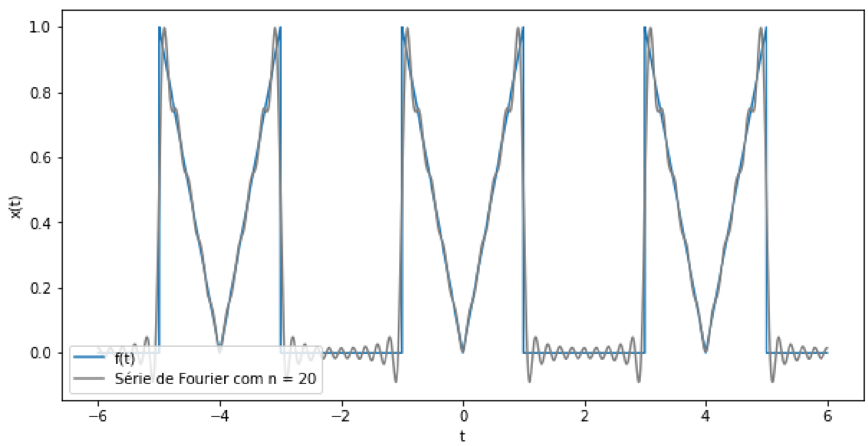

Figura 3 : Gráfico da Série de Fourier e da onda x(t), ambas em função de t

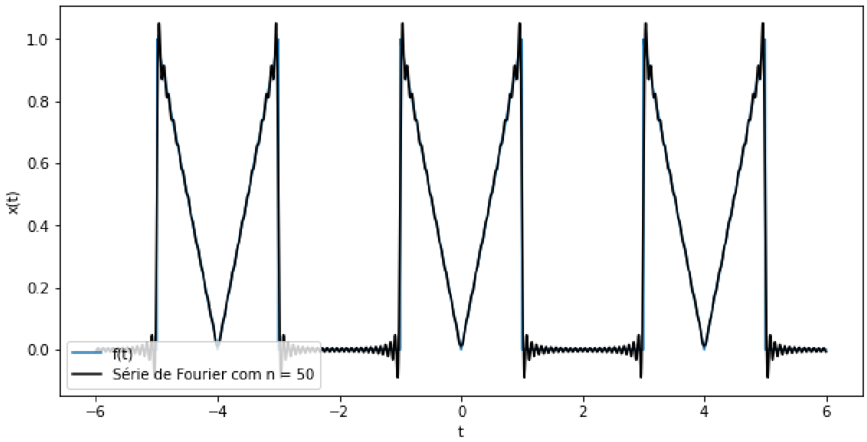

Figura 4 : Gráfico da Série de Fourier e da onda x(t), ambas em função de t

c) Neste item iremos calcular a potência de erro para cada número de harmônicas representadas graficamente no item anterior.

Para n = 1:

Potência do erro= (0.07732774455939156-5.3571099823072285e-17j)

Para n = 10:

Potência do erro= (0.010242085691601305+7.712568345313946e-20j)

Para n = 20:

Potência do erro= (0.005047359541568666-1.115455432940955e-20j)

Para n = 50:

Potência do erro= (0.0020256960374152055+2.1459952212133244e-20j)

Podemos observar então que, assim como observado no item anterior, quanto maior o número de harmônicas menor o erro,e consequentemente, mais a série se aproxima da onda original.

d) Neste item iremos plotar o módulo dos coeficientes da série $|a_k|$ em função de ω. Obtemos então o seguinte gráfico:

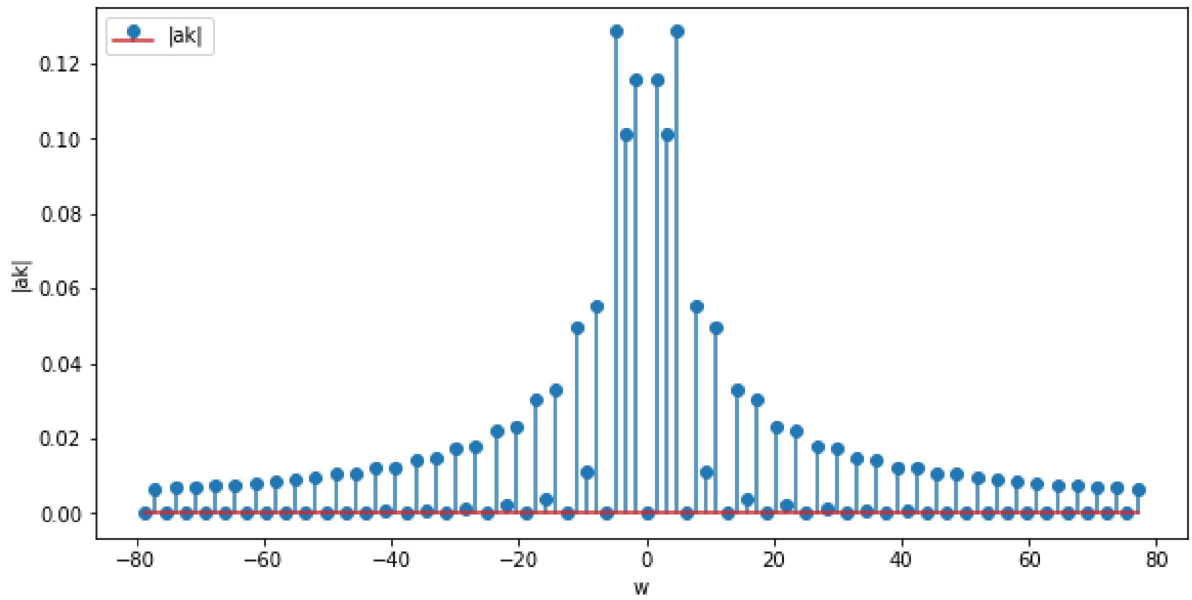

Figura 5: Gráfico dos coeficientes $\left|a_k\right|$ em função de ω

Podemos observar que para valores mais próximos de 0 ak possui valores maiores, além de ser notável a simetria em torno do eixo y, o que é característico de uma função par. Nessa situação a simetria se deve a presença da função par cosseno no cálculo de ak.

e) Neste item iremos plotar o módulo e a fase de resposta em frequência, obtemos então as figuras 6 e 7 abaixo:

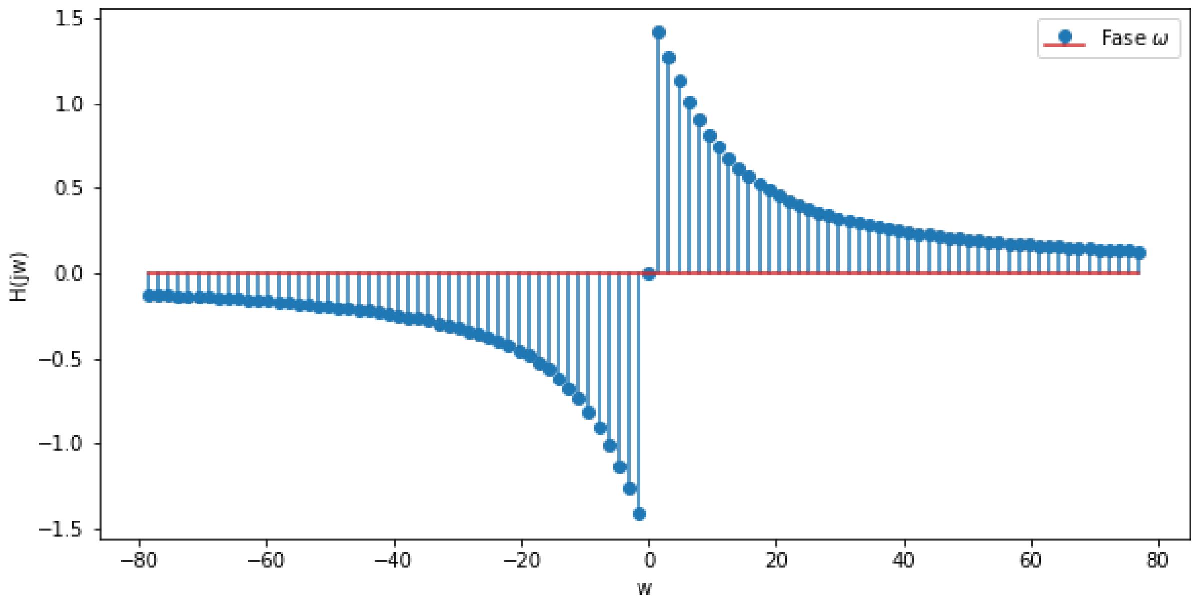

Figura 6: Gráfico da Fase de resposta em frequência em função de ω

Podemos observar que os maiores valores de fase são obtidos para os menores valores de frequência.

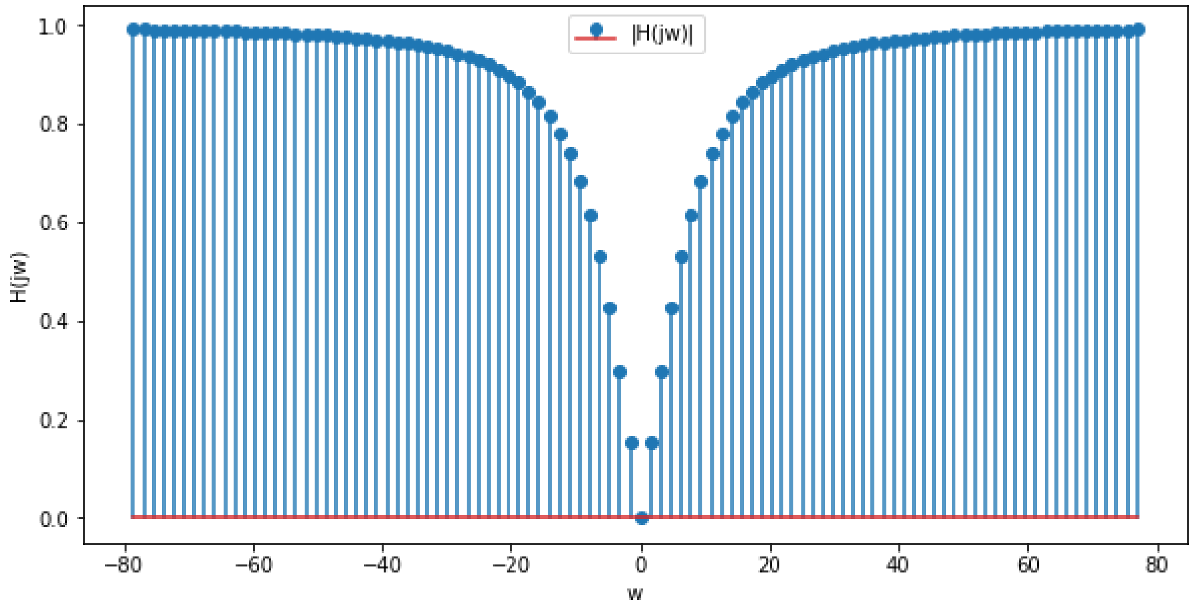

Figura 7: Gráfico do módulo da resposta em frequência em função de ω

Pela figura 7 observamos que para altas frequências o módulo da resposta em frequência se aproxima de 1, e para baixas frequências se aproxima de 0. Esse comportamento caracteriza um filtro passa-alta.

f) Neste item queremos obter a saída y(t) do sistema quando a entrada é x(t) aproximada com 50 harmônicas.

A saída y(t) é dada por:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jw_o k).ck.e^{jkw_o t}$$

Obtemos então o gráfico dado pela figura 8:

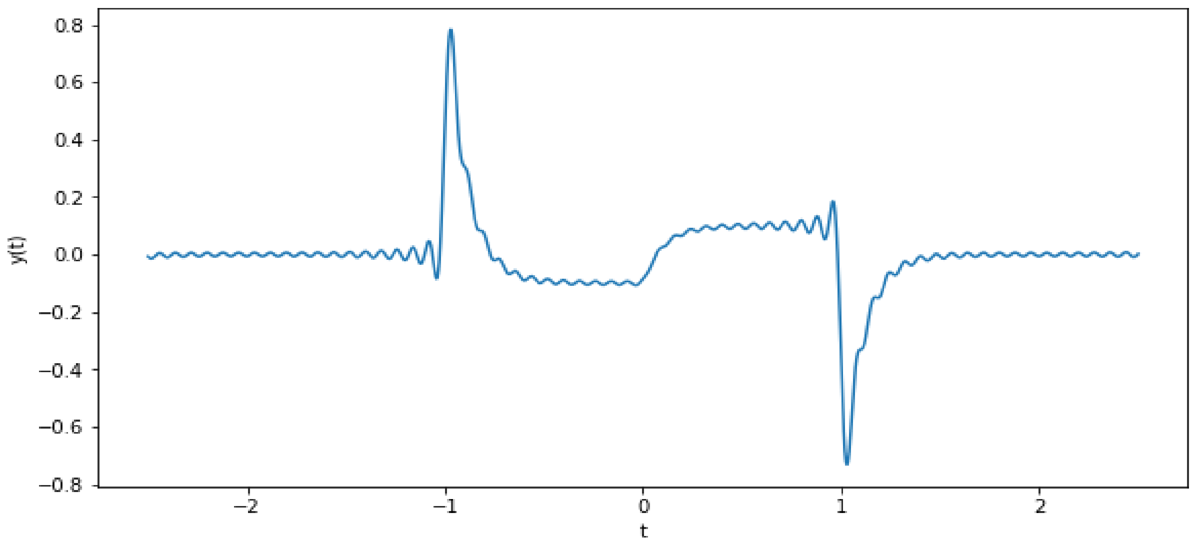

Figura 8: Gráfico da saída y(t) em função de t

Na forma de onda obtida acima podemos observar a presença do fenômeno de Gibbs devido a presença de pequenas oscilações ao longo da onda. Nos pontos -1 e 1 temos um valor maior de saída, isso se deve as descontinuidades existentes nesses dois pontos.

g) Neste item queremos as diferenças entre o gráfico da figura 3 (roteiro) e a resposta do sistema no item f (figura 8) .

Podemos observar que ambos os gráficos são bem similares, a principal diferença se deve a pequenas oscilações causadas pelo fenômeno de Gibbs, devido ao fato da aproximação usar um número finito de harmônicos e devido às descontinuidades presentes na entrada x(t).