

Tema 2

Modelado de sistemas

Javier Valls

Dpto. Ingeniería Electrónica

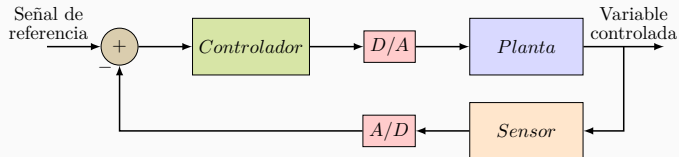
Contenidos

1. Introducción y objetivos
2. Transformada de *Laplace*
3. Transformada Z
4. Función de transferencia en s y Z
5. Modelado de sistemas físicos
6. No linealidades y linealización
7. Digitalización de la planta
8. Diagrama de bloques del sistema
9. Bibliografía

Introducción y objetivos

Introducción

Para analizar y diseñar el sistema de control necesitamos disponer de modelos matemáticos de la planta y del sistema completo



En este tema se van a proporcionar las herramientas básicas para

- la realización de modelos matemáticos de la planta
- y la obtención de las funciones de transferencia del sistema

Objetivos

Al finalizar este tema el alumno será capaz de

- calcular la transformada de Laplace y Z, y sus inversas, utilizando tablas y Matlab
- utilizar las transformadas de Laplace y Z para obtener funciones de transferencia
- obtener la función de transferencia de sistemas físicos sencillos
- obtener la función de transferencia discretizada de un sistema físico modelado en el dominio continuo
- obtener una función de transferencia linealizada de un sistema no lineal
- obtener la función de transferencia de sistemas representados a través de un diagrama de bloques
- modelar con Matlab funciones de transferencia en el dominio continuo y discreto

Transformada de *Laplace*

Transformada de *Laplace*

- Los sistemas representados con las ec. diferenciales dificultan
 - la obtención de la función de transferencia
 - el modelado con diagramas de bloques
- La **transformada de *Laplace*** soluciona ese problema
- Transforma la función de la variable tiempo (t) a una variable compleja (s)
- Nos da información del tipo de respuesta transitoria de los sistemas y de su estabilidad

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace ($t \rightarrow s$)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Función de variable compleja:

$$s = \sigma + j\omega$$

Transformada inversa de Laplace ($s \rightarrow t$)

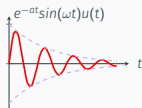
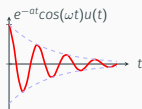
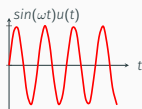
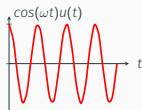
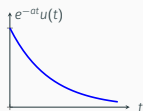
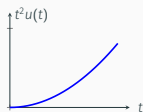
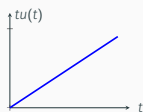
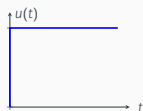
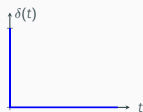
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds = f(t)u(t)$$

No se calcularán integrales: utilizaremos tablas, teoremas y Matlab

Transformada de Laplace : tabla de teoremas

Teorema	Nombre
$\mathcal{L}\{kf(t)\} = kF(s)$	linealidad: proporcionalidad
$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$	linealidad: superposición
$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s + a)$	Desplazamiento frecuencial
$\mathcal{L}\{f(t - T)\} = e^{-sT}F(s)$	Desplazamiento temporal
$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Escalado temporal
$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right\} = s^n F(s)$	Diferenciación
$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t f(t)dt = \frac{F(s)}{s}\right\}$	Integración
$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	Valor inicial
$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	Valor final

Transformada de Laplace : tabla de señales típicas



$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$

E Transformada de Laplace de $x(t) = 3 + 4e^{-2t}$ con $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{3u(t)\} + \mathcal{L}\{4e^{-2t}u(t)\} \\ &= 3\mathcal{L}\{u(t)\} + 4\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \\ &= 3\frac{1}{s} + 4\frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{3}{s} + \frac{4}{s+2}$$

Transf. inversa de *Laplace* : Expansión parcial de fracciones

La transformada inversa de *Laplace* \rightarrow cálculo complejo

Simplificación \rightarrow **expansión parcial de fracciones**

- descomposición es una suma de términos simples
- se realiza la transformada inversa de cada término

E Cálculo de la transformada inversa de *Laplace* de $C(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$

$$C(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{4}{s+3}$$

$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+3}\right\} \\ &= (1 + 3e^{-2t} - 4e^{-3t})u(t) \end{aligned}$$

Transf. inversa de Laplace : Expansión parcial de fracciones

Posibles casos de descomposición en fracciones simples:

Caso 1: raíces de denominador reales y distintas

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n}$$

Caso 2: raíces de denominador reales y repetidas

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)^r(s-p_2)} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{K_r}{(s-p_1)^r} + \frac{K_{r+1}}{s-p_2}$$

Caso 3: raíces de denominador reales y complejas conjugadas

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s^2+as+b)\cdots} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2s+K_3}{s^2+as+b} + \cdots$$

```

% Polinomio del numerador
>> num =poly(-1)*6
num =
     6     6
% Polinomio del denominador
>> den =poly([0 -2 -3])
den =
     1     5     6     0
% Decomposición en fracciones
>> [r,p,k]=residue(num,den)
r =
   -4.0000
    3.0000
    1.0000
p =
   -3.0000
   -2.0000
         0
k =
     []

```

$$\begin{aligned}
 C(s) &= \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \\
 &= \frac{-4}{s+3} + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

$$c(t) = -4e^{-3t} + 3e^{-2t} + 1$$

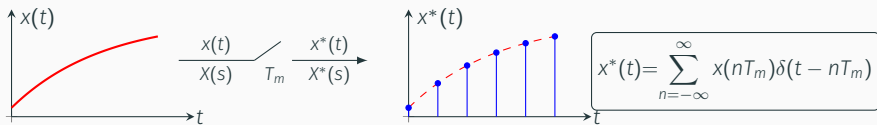
Transformada Z

Transformada Z

- Las señales discretas se representan como secuencias de muestras (ej. $x[nT_m] = (1/4)^{nT_m} \rightarrow x[n] = (1/4)^n$)
- Los sistemas representados con mediante secuencias discretas dificultan
 - la obtención de la función de transferencia
 - el modelado con diagramas de bloques
- La **transformada Z** soluciona ese problema
- Transforma la función de la variable tiempo (nT_m) a una variable compleja (z)
- Nos da información del tipo de respuesta transitoria de los sistemas y de su estabilidad

Transformada Z

Discretización de una señal continua



Transformada de Laplace ($\mathcal{L}\{\}$)

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$X^*(s) = \int_0^{\infty} x^*(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_m)e^{-nT_ms}$$

Transformada Z: $X(z) = \mathcal{Z}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x^*(t)\}|_{z=e^{T_ms}}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$z = e^{T_ms}$$

Transformada Z

Transformada Z ($n \rightarrow z$)

$$\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z) = \sum_0^{\infty} f(n)z^{-n}$$

Función de variable compleja:

$$z = e^{T_m s} = e^{T_m(\sigma + j\omega)} = e^{\sigma T_m} e^{j\omega T_m} = e^{\sigma T_m} [\cos(\omega T_m) + j\sin(\omega T_m)] = e^{\sigma T_m} \angle \omega T_m$$

Transformada Z inversa ($z \rightarrow nT_m$)

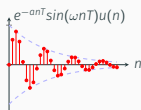
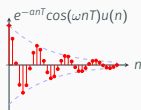
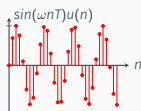
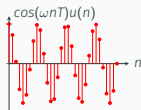
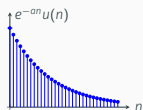
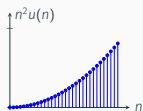
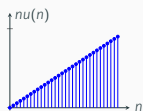
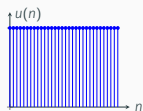
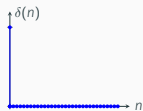
$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} = f(n)$$

No se calcularán integrales: utilizaremos tablas, teoremas y Matlab

Transformada Z: tabla de teoremas

Nombre	Teorema
$\mathcal{Z}\{kf(n)\} = kF(z)$	linealidad: proporcionalidad
$\mathcal{Z}\{f_1(n) + f_2(n)\} = F_1(z) + F_2(z)$	linealidad: superposición
$\mathcal{Z}\{a^{-n}f(n)\} = F(az)$	Multiplicación por exponencial
$\mathcal{Z}\{f(n - k)\} = z^{-k}F(z)$	Desplazamiento temporal
$f(0) = \lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$	Valor inicial
$f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z)$	Valor final

Transformada Z: tabla de señales típicas



$f(nT)$

$\mathcal{Z}\{f(nT)\} = F(z)$

$\delta(nT)$

1

$u(nT)$

$\frac{1}{1-z^{-1}}$
 Tz^{-1}

$nTu(nT)$

$\frac{(1-z^{-1})^2}{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}$

$(nT)^2 u(nT)$

$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
 $Te^{-aT}z^{-1}$

$e^{-anT} u(nT)$

$\frac{1}{1-2z^{-1}\cos(\omega T)+z^{-2}}$

$nTe^{-anT} u(nT)$

$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega T)}{1-2z^{-1}\cos(\omega T)+z^{-2}}$

$\cos(\omega nT) u(nT)$

$\frac{z^{-1}\sin(\omega T)}{1-2z^{-1}\cos(\omega T)+z^{-2}}$

$\sin(\omega nT) u(nT)$

$\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos(\omega T)}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos(\omega T)+e^{-2aT}z^{-2}}$

$e^{-anT} \cos(\omega nT) u(nT)$

$\frac{e^{-aT}z^{-1}\sin(\omega T)}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos(\omega T)+e^{-2aT}z^{-2}}$

$e^{-anT} \sin(\omega nT) u(nT)$

Transformada Z inversa: Expansión parcial de fracciones

Posibles casos de descomposición en fracciones simples:

Caso 1: raíces de denominador reales y distintas

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\dots(1-p_nz^{-1})} = \frac{K_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{K_2}{1-p_2z^{-1}} + \dots + \frac{K_n}{1-p_nz^{-1}}$$

Caso 2: raíces de denominador reales y repetidas

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(1-p_1z^{-1})^r(1-p_2z^{-1})} = \frac{K_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{K_2}{(1-p_1z^{-1})^2} + \dots + \frac{K_r}{(1-p_1z^{-1})^r} + \frac{K_{r+1}}{1-p_2z^{-1}}$$

Caso 3: raíces de denominador reales y complejas conjugadas

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(1-p_1z^{-1})(1+az^{-1}+bz^{-2})\dots} = \frac{K_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{K_2+K_3z^{-1}}{1+az^{-1}+bz^{-2}} + \dots$$

```
% Polinomio numerador
>> num=[2 -1];
% Polinomio denominador
>> den=[1 -1 0.21];
% Residuos
>> [r,p,k]=residuez(num,den)
```

r =

1
1

p =

0.7000
0.3000

k =

[]

$$C(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{1 - 0.7z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}}$$



$$c(n) = (0.7)^n + (0.3)^n$$

Función de transferencia en s y Z

Función de transferencia en sistemas continuos

Sistema LTI con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ modelado con su ec. diferencial:

$$a_n \frac{\partial^n y(t)}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y(t)}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{\partial^m x(t)}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} x(t)}{\partial t^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$

Transformada de Laplace :

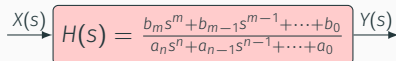
$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_0 X(s)$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) X(s)$$

Función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Representación como bloque:



Función de transferencia en sistemas continuos

E Función de transferencia $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ de un circuito R-C

Ec. diferencial del circuito R-C

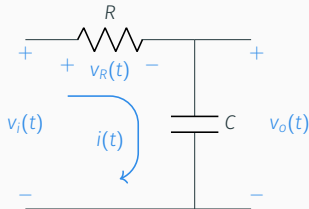
$$v_i(t) = RC \frac{\partial v_o(t)}{\partial t} + v_o(t)$$

$\mathcal{L}\{\}$ ↓

$$V_i(s) = RCV_o(s)s + V_o(s)$$

$$V_i(s) = (RCs + 1)V_o(s) \quad \rightarrow \quad H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

Función de transferencia



E Respuesta temporal del circuito R-C a $v_i(t) = u(t)$

$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s + 1/RC}$$

$$v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_o(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s + 1/RC}\right\} = (1 - e^{-t/RC})u(t)$$

```
% Función de transferencia a partir de los
% polimios numerador y denominador

>> n1=[1 9]; % Vector con coefs. del numerador
>> d1=[1 1.5 9]; % Vector con coefs del denominador
>> G1s=tf(n1,d1) % Función de transferencia
```

G1s =

$$\frac{s + 9}{s^2 + 1.5 s + 9}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class	Attributes
G1s	1x1	1217	tf	
d1	1x3	24	double	
n1	1x2	16	double	

M Funciones de transferencia en s: zpk

% Función de transferencia a partir de las raíces
% del numerador (ceros) y del denominador (polos)

```
>> z1=[-1]; % Vector con ceros  
>> p1=[0 0 -3]; % Vector con polos  
>> k1=6; % Cte.multiplicativa de la TF  
>> G2s=zpk(z1,p1,k1)
```

G2s =

$$\frac{6 (s+1)}{s^2 (s+3)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

```
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class	Attributes
G2s	1x1	1209	zpk	
k1	1x1	8	double	
p1	1x3	24	double	
z1	1x1	8	double	

M Funciones de transferencia en s: tf directo

% Construcción directa con la variable s

```
>> s=tf('s') % Define s como objeto tf
```

s =

s

Continuous-time transfer function.

```
>> G3s=6*(s+1)/(s^2*(s+3))
```

G3s =

$$\frac{6s + 6}{s^3 + 3s^2}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class	Attributes
G3s	1x1	1233	tf	
s	1x1	1201	tf	

```
% Coeficientes del numerador y denominador de
% una función de transferencia definida con "zpk"
>> [n2,d2]=tfdata(G2s,'v')
n2 =
    0    0    6    6

d2 =
    1    3    0    0

% Polos y ceros de una función de transferencia
% definida mediante "tf"
>> [z3,p3,k3]=zpkdata(G3s,'v')
z3 =
   -1

p3 =
    0
    0
   -3

k3 =
    6
```

M Funciones de transferencia en s: tf2zp y zp2tf

```
% Polos, ceros y k a partir de los coeficientes  
% del numerador y denominador de "tf"
```

```
>> [z2,p2,k2]=tf2zp(n2,d2)
```

```
z2 =  
    -1
```

```
p2 =  
     0  
     0  
    -3
```

```
k2 =  
     6
```

```
% Coeficientes del numerador y denominador a  
% de z1, p1 y k1 de "zpk"
```

```
>> [n3,d3]=zp2tf(z1,p1,k1)
```

```
n3 =  
     0     0     6     6
```

```
d3 =  
     1     3     0     0
```

% Conversión de "zpk" a "tf"

```
>> G4s=tf(G2s)
```

G4s =

$$\frac{6s + 6}{s^3 + 3s^2}$$

Continuous-time transfer function.

% Conversión de "tf" a "zpk"

```
>> G5s=zpk(G3s)
```

G5s =

$$\frac{6(s+1)}{s^2(s+3)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

La función de transferencia en el dominio discreto

- A partir de las ecuaciones en diferencias
 - implementación de controladores
 - modelado de sistemas físicos directamente en tiempo discreto
- A partir de la función de transferencia en el dominio continuo s
 - modelado de la planta a partir de su $G_p(s)$
 - necesitamos conocer el modelo del ADC y DAC

Función de transferencia a partir de ecuaciones en diferencias

Sistema con entrada $x(n)$ y salida $y(n)$ modelado con su ec. en diferencias:

$$a_N y(n-N) + a_{N-1} y(n-N+1) + \dots + a_0 y(n) = b_M x(n-M) + b_{M-1} x(n-M+1) + \dots + b_0 x(n)$$

Transformada Z:

$$a_N z^{-N} Y(z) + a_{N-1} z^{-N+1} Y(z) + \dots + a_0 Y(z) = b_M z^{-M} X(z) + b_{M-1} z^{-M+1} X(z) + \dots + b_0 X(z)$$

$$(a_N z^{-N} + a_{N-1} z^{-N+1} + \dots + a_0) Y(z) = (b_M z^{-M} + b_{M-1} z^{-M+1} + \dots + b_0) X(z)$$

Función de transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_M z^{-M} + b_{M-1} z^{-M+1} + \dots + b_0}{a_N z^{-N} + a_{N-1} z^{-N+1} + \dots + a_0}$$

```
>> Tm = 0.1; % Periodo de muestreo  
% Función de transferencia con tf  
>> G1z=tf(4,[1 1.5 0.2],Tm)
```

G1z =

$$\frac{4}{z^2 + 1.5z + 0.2}$$

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.

```
% Función de transferencia con zpk  
>> G2z=zpk(.5,[1 1 -3],10,Tm)
```

G2z =

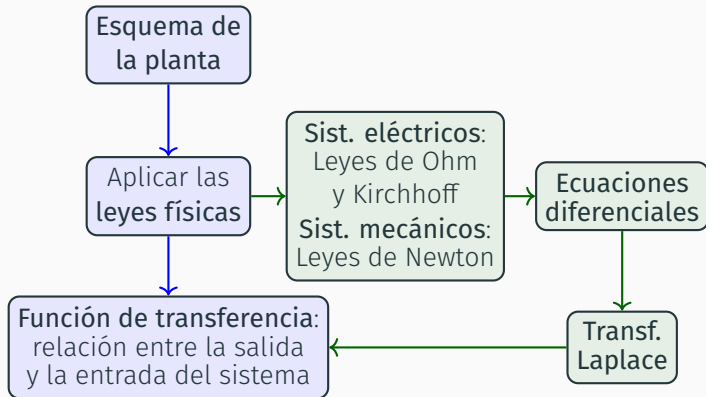
$$\frac{10(z-0.5)}{(z-1)^2(z+3)}$$

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time zero/pole/gain model.

```
% Construcción directa con la variable z
>> z=tf('z',Tm) % Define z como objeto tf
z =
    z
Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.
>> G3z=6*z/(z-0.3)
G3z =
      6 z
  -----
    z - 0.3
Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Modelado de sistemas físicos

Modelado matemático de sistemas físicos






Función de transferencia en redes eléctricas

- Aplicación de las **leyes de Kirchhoff**

- Suma de voltajes en lazos: $\sum v_i = 0$

- Suma de corrientes en nodos: $\sum i_i = 0$

Relación (v-i), (i-v) y (v-q)

Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^1 i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C} q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	$v(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Inductor	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^1 v(\tau) d\tau$	$v(t) = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Función de transferencia en redes eléctricas

E Función de transferencia de un circuito R-C

Obj. Obtener $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

Aplicación de la ley de Kirchhoff $\sum v_i = 0$

$$v_i(t) - v_R(t) - v_o(t) = 0$$

$$v_R(t) = i(t) \cdot R$$

$$v_i(t) = i(t) \cdot R + v_o(t)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{\partial v_o(t)}{\partial t}$$

$$v_i(t) = R \cdot C \cdot \frac{\partial v_o(t)}{\partial t} + v_o(t)$$

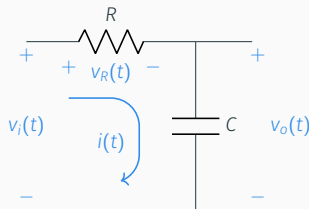
$$V_i(s) = R \cdot C \cdot V_o(s) \cdot s + V_o(s)$$

$$V_i(s) = (R \cdot C \cdot s + 1) \cdot V_o(s)$$

$\mathcal{L}\{\}$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1}$$

Función de transferencia



Función de transferencia en sistemas mecánicos de traslación

El modelo se obtiene aplicando la **2ª ley de Newton**: $\sum \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

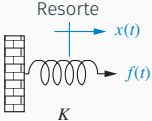
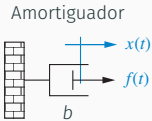
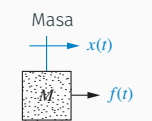
- $\sum \mathbf{F}$: vector suma de todas las fuerzas aplicadas (**N**, Newtons)
- \mathbf{a} : vector aceleración (**m/s²**)
- m : masa del cuerpo (**kg**)

Los sistemas mecánicos se modelan con 3 componentes lineales pasivos

- Amortiguador $\rightarrow b$, cte de amortiguación viscosa (**N·s/m**)
- Resorte $\rightarrow K$, cte del resorte (**N/m**)
- Masa \rightarrow (**kg**)

Función de transferencia en sistemas mecánicos de traslación

Relación fuerza \longleftrightarrow velocidad y desplazamiento
de los componentes pasivos lineales

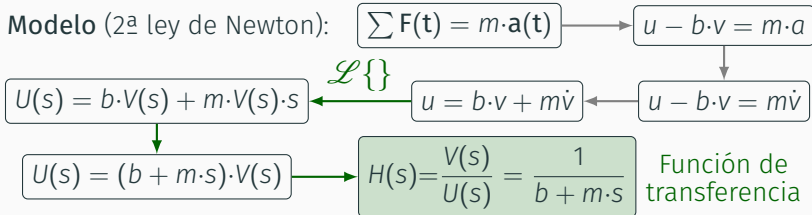
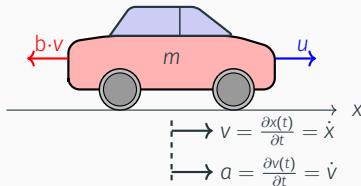
Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedence $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
<p>Resorte</p>  <p>K</p>	$f(t) = K \int_0^t v(\tau) d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
<p>Amortiguador</p>  <p>b</p>	$f(t) = b v(t)$	$f(t) = b \frac{dx(t)}{dt}$	$b s$
<p>Masa</p>  <p>M</p>	$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Función de transferencia en sistemas mecánicos de traslación

E Velocidad de cruceo

Objetivo: Mantener la velocidad aunque haya perturbaciones

- Variable a controlar $\rightarrow v$
- Fuerza aplicada para mantener la velocidad $\rightarrow u$
- Fricción por rozamiento $\rightarrow b \cdot v$

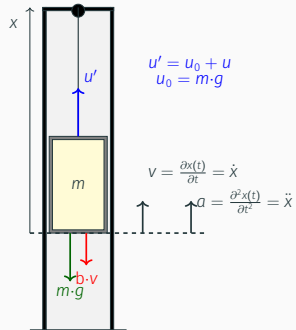


Función de transferencia en sistemas mecánicos de traslación

E Posición de un ascensor

Objetivo: Recorrer la misma distancia aunque haya perturbaciones

- Variable a controlar $\rightarrow x$
- Fuerza aplicada $\rightarrow u'$
- Fricción $\rightarrow b \cdot v$



Modelo (2ª ley de Newton):

$$\sum F(t) = m \cdot a(t) \rightarrow u' - b \cdot v - m \cdot g = m \cdot a$$

$$U(s) = b \cdot X(s) \cdot s + m \cdot X(s) \cdot s^2 \xleftarrow{\mathcal{L}\{\}} u = b \cdot \dot{x} + m \cdot \ddot{x} \xleftarrow{} u - b \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$$

$$U(s) = (b \cdot s + m \cdot s^2) \cdot X(s)$$

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s \cdot (b + m \cdot s)}$$

Función de transferencia

Función de transferencia en sistemas mecánicos de rotación

El modelo se obtiene aplicando la 2ª ley de Newton: $T = J \cdot \alpha$

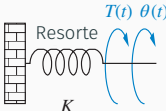
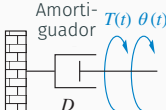
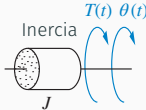
- T : suma de todas las fuerzas par (torques) aplicadas ($\text{N} \cdot \text{m}$)
- α : aceleración angular (rad/s^2)
- J : momento de inercia del cuerpo ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

Los sistemas mecánicos se modelan con 3 componentes lineales pasivos

- Amortiguador $\rightarrow D$, cte de amortiguación viscosa ($\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$)
- Resorte $\rightarrow K$, cte del resorte ($\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$)
- Inercia

Función de transferencia en sistemas mecánicos de rotación

Relación par (torque) \longleftrightarrow velocidad y desplazamiento angular de los componentes pasivos lineales

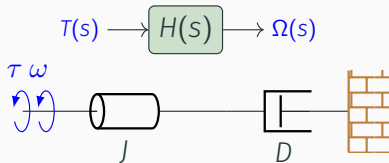
Component	Torque-angular velocity	Torque-angular displacement	Impedence $Z_M(s) = T(s)/\theta(s)$
 <p>Resorte K</p>	$T(t) = K \int_0^t \omega(\tau) d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	K
 <p>Amorti- guador D</p>	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D \frac{d\theta(t)}{dt}$	Ds
 <p>Inercia J</p>	$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$J s^2$

Función de transferencia en sistemas mecánicos de rotación

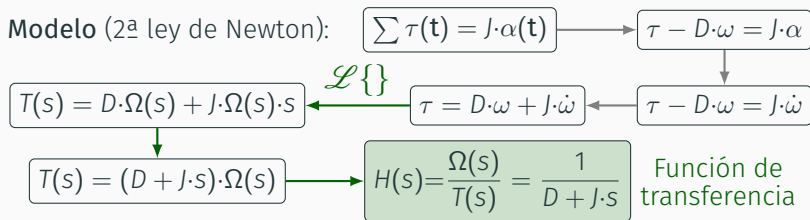
E Función de transferencia torque-velocidad angular

Obj. Control de velocidad angular

- Variable a controlar $\rightarrow \omega$
- Torque aplicado $\rightarrow \tau$
- Fricción $\rightarrow D \cdot \omega$



Modelo (2ª ley de Newton):

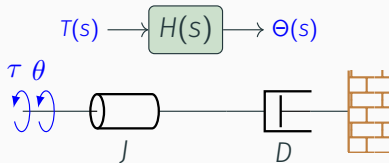


Función de transferencia en sistemas mecánicos de rotación

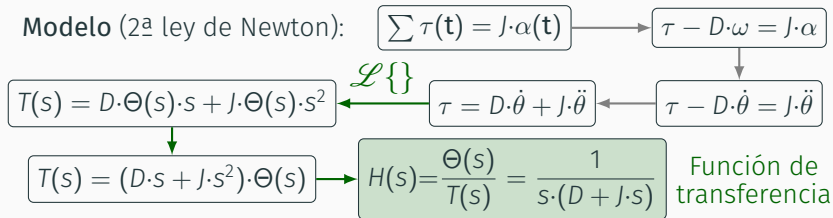
E Función de transferencia torque-angulo

Obj. Control de posición angular

- Variable a controlar $\rightarrow \theta$
- Torque aplicado $\rightarrow \tau$
- Fricción $\rightarrow D \cdot \omega$

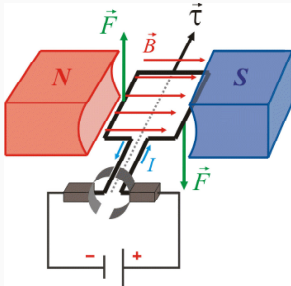


Modelo (2ª ley de Newton):



Motor de DC

Funcionamiento básico



$$\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$$

F: fuerza inducida

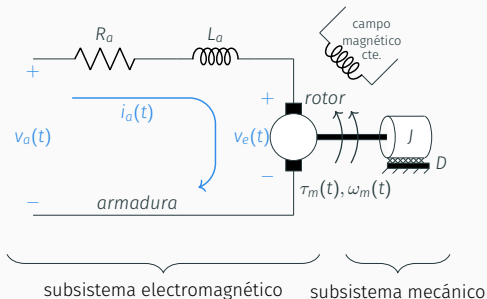
I: corriente

L: longitud de la bobina

τ : par fuerza (torque)



Modelo del motor de DC



R_a : resistencia armadura

L_a : inductancia armadura

v_a : voltaje aplicado a la armadura

i_a : corriente que circula en la armadura

v_e : voltaje inducido por la rotación de la bobina

τ_m : par fuerza del motor (torque)

ω_m : velocidad angular de rotación

D : coeficiente de fricción

J : momento de inercia de la carga

Modelo del motor de DC

E Función de transferencia velocidad angular-voltaje (Ω_m/V_a)

Ecuación eléctrica:

$$v_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L \frac{\partial i_a(t)}{\partial t} + v_e(t)$$

Ecuación mecánica:

$$\tau_m(t) = J \frac{\partial \omega_m(t)}{\partial t} + D \cdot \omega_m(t)$$

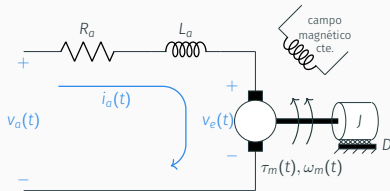
Acoplo electro-mecánico ($k_e = k_t$)

Fuerza contraelectromotriz:

$$v_e(t) = k_e \cdot \omega_m(t)$$

Fuerza par:

$$\tau_m(t) = k_t \cdot i_a(t)$$



Modelo del motor de DC

E Función de transferencia velocidad angular-voltaje (Ω_m/V_a)

Ecuación eléctrica:

$$v_a(t) = R \cdot i_a(t) + L \frac{\partial i_a(t)}{\partial t} + v_e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_a(s) = R \cdot I_a(s) + L \cdot I_a(s) \cdot s + V_e(s)$$

Ecuación mecánica:

$$\tau_m(t) = J \frac{\partial \omega_m(t)}{\partial t} + D \cdot \omega_m(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} T_m(s) = J \cdot \Omega_m(s) \cdot s + D \cdot \Omega_m(s)$$

Acoplo electro-mecánico ($k_e = k_t$)

→ Fuerza contraelectromotriz:

$$v_e(t) = k_e \cdot \omega_m(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_e(s) = k_e \cdot \Omega_m(s)$$

→ Fuerza par:

$$\tau_m(t) = k_t \cdot i_a(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} T_m(s) = k_t \cdot I_a(s)$$

Modelo del motor de DC

E Función de transferencia velocidad angular-voltaje (Ω_m/V_a)

$$V_a(s) = (R + L \cdot s) \cdot I_a(s) + V_e(s) \longrightarrow V_a(s) = (R + L \cdot s) \cdot I_a(s) + k_e \cdot \Omega_m(s)$$

$$V_e(s) = k_e \cdot \Omega_m(s)$$

$$T_m(s) = J \cdot \Omega_m(s) \cdot s + D \cdot \Omega_m(s)$$

$$T_m(s) = k_t \cdot I_a(s) \longrightarrow I_a(s) = \frac{T_m(s)}{k_t} = \frac{J \cdot \Omega_m(s) \cdot s + D \cdot \Omega_m(s)}{k_t}$$

$$V_a(s) = \frac{(R + L \cdot s) \cdot (D + J \cdot s)}{k_t} \cdot \Omega_m(s) + k_e \cdot \Omega_m(s)$$

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{k_t}{(R + L \cdot s) \cdot (D + J \cdot s) + k_e \cdot k_t}$$

si $L \ll R$

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{k_t / (R \cdot J)}{s + \frac{1}{J} \left(D + \frac{k_e \cdot k_t}{R} \right)}$$

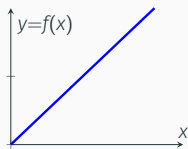
No linealidades y linealización

Linealidad

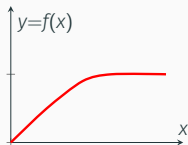
- Los modelos presentados anteriormente corresponden a sistemas **LTI**
- Sistema **lineal**, $y=f(x)$, se caracteriza por las propiedades de superposición y proporcionalidad

$$x=a \cdot x_1+b \cdot x_2 \rightarrow y=a \cdot f(x_1)+b \cdot f(x_2)$$

- La mayoría de sistemas no son lineales, pero se comportan como lineales en cierto rango (ej. saturación en los amplificadores)
- linealizar un sistema no lineal puede ayudar a conocer su comportamiento en ciertas zonas



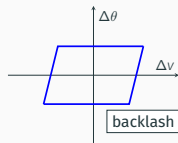
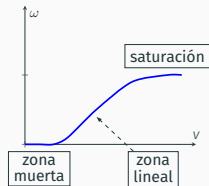
LINEAL



NO LINEAL

E No linealidades en motores de DC

- **Zona muerta:** el motor no responde a pequeños voltajes debido a la fricción
- **Saturación;** la velocidad no aumenta a partir de un cierto voltaje
- **Histéresis (backlash)** en los engranajes: si los engranajes tienen holgura, pequeños cambios del voltaje no producen cambios en la posición

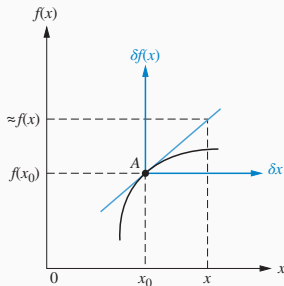


linealización de un sistema no lineal

Objetivo: modelar comportamiento lineal en un "punto de equilibrio" (A)

- $f(x) \rightarrow$ función no lineal
- Pequeñas variaciones de la entrada: $\delta x \rightarrow$ variaciones lineales a la salida: $\delta f(x) = m \cdot \delta x$

Punto de equilibrio: $A \rightarrow [x_0, f(x_0)]$



Aproximación con serie de Taylor de 1^{er} orden:

$$f(x) \approx f(x_0) + m \cdot (x - x_0) = f(x_0) + m \cdot \delta x$$

Pendiente de $f(x)$ en x_0 : $m = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0}$

linealización de un sistema no lineal

E linealización de $f(\theta) = \cos(\theta)$ alrededor de $\theta_0 = -45^\circ$

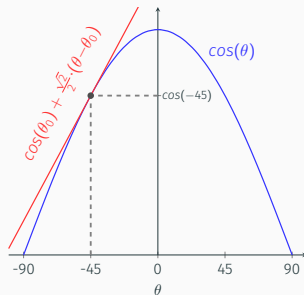
Punto de equilibrio: $[\theta_0, \cos(\theta_0)]$

Aproximación de 1^{er} orden:

$$\cos(\theta_0 + \delta\theta) \approx \cos(\theta_0) + m \cdot \delta\theta$$

Pendiente de $f(x)$ en x_0 :

$$m = \left. \frac{\partial \cos(\theta_0 + \delta\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = -\sin(\theta_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



linealización de $f(\theta) = \cos(\theta)$ alrededor de $\theta_0 = -45^\circ$:

$$\cos(\theta_0 + \delta\theta) \approx \cos(\theta_0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\theta - \theta_0)$$

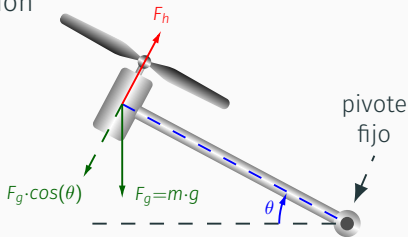
No linealidades y linealización

E Control de posición de un brazo con hélice propulsora

Obj. El brazo debe mantenerse estable en el ángulo dado.

Se asume que el brazo tiene una masa despreciable frente a la del motor y que no hay fuerzas de fricción

- Variable a controlar $\rightarrow \theta$
- Longitud del brazo $\rightarrow r$
- Par aplicado $\rightarrow r \cdot F_h$
- Masa del motor $\rightarrow m$
- Momento de inercia del sistema $\rightarrow J = m \cdot r^2$



Modelo (2ª ley de Newton):

$$\sum \tau(t) = J \cdot \alpha(t) \rightarrow r \cdot F_h - r \cdot F_g \cdot \cos(\theta) = J \cdot \alpha$$

Ec. diferencial
no lineal

$$F_h = m \cdot r \cdot \ddot{\theta} + F_g \cdot \cos(\theta) \leftarrow r \cdot F_h - r \cdot F_g \cdot \cos(\theta) = J \cdot \ddot{\theta}$$

No linealidades y linealización

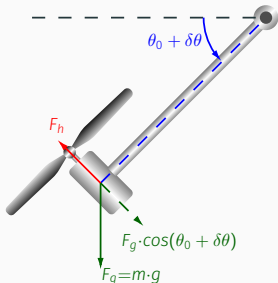
E Brazo con hélice propulsora: modelo lineal en un punto de equilibrio

En el punto de equilibrio $\theta_0 = -45^\circ$ el brazo está estable (quieto)

El motor aplica la fuerza para mantenerlo en $\theta_0 \rightarrow F_h|_{\theta_0} = F_g \cdot \cos(\theta_0)$

Solo habrá pequeños cambios alrededor de $\theta_0 \rightarrow \theta = \theta_0 + \delta\theta$

$$\begin{aligned} F_h &= m \cdot r \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + F_g \cdot \cos(\theta) && \theta = \theta_0 + \delta\theta \\ F_h &= m \cdot r \cdot \frac{\partial^2 (\theta_0 + \delta\theta)}{\partial t^2} + F_g \cdot \cos(\theta_0 + \delta\theta) \\ F_h &= m \cdot r \cdot \frac{\partial^2 (\delta\theta)}{\partial t^2} + F_g \cdot \cos(\theta_0 + \delta\theta) && \frac{\partial^2 (\theta_0)}{\partial t^2} = 0 \\ F_h &= m \cdot r \cdot \frac{\partial^2 (\delta\theta)}{\partial t^2} + F_g \cdot (\cos(\theta_0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta\theta) && \text{aprox. } \cos(\theta_0 + \delta\theta) \\ \delta F_h &= m \cdot r \cdot \frac{\partial^2 (\delta\theta)}{\partial t^2} + F_g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta\theta && \delta F_h = F_h - F_h|_{\theta_0} \end{aligned}$$



No linealidades y linealización

E Brazo con hélice propulsora: modelo lineal en un punto de equilibrio

En el punto de equilibrio $\theta_0 = -45^\circ$ el brazo está estable (quieto)

El motor aplica la fuerza para mantenerlo en $\theta_0 \rightarrow F_h|_{\theta_0} = F_g \cdot \cos(\theta_0)$

Solo habrá pequeños cambios alrededor de $\theta_0 \rightarrow \theta = \theta_0 + \delta(\theta)$

$$\delta F_h = m \cdot r \cdot \frac{\partial^2(\delta\theta)}{\partial t^2} + F_g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta\theta$$

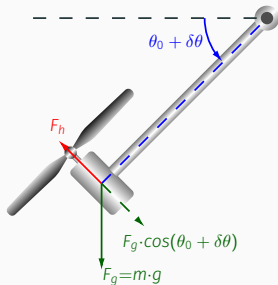
\mathcal{L}

$$\Delta F_h(s) = m \cdot r \cdot \Delta\theta(s) \cdot s^2 + F_g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Delta\theta(s)$$

$$\Delta F_h(s) = (m \cdot r \cdot s^2 + F_g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \Delta\theta(s)$$

Función de
transferencia

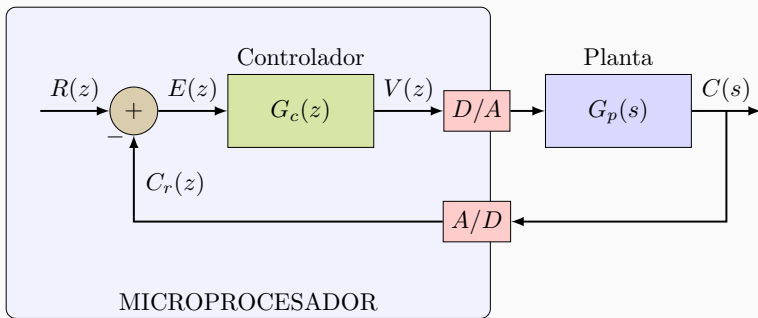
$$H(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta F_h(s)} = \frac{1}{m \cdot r \cdot s^2 + F_g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$



Digitalización de la planta

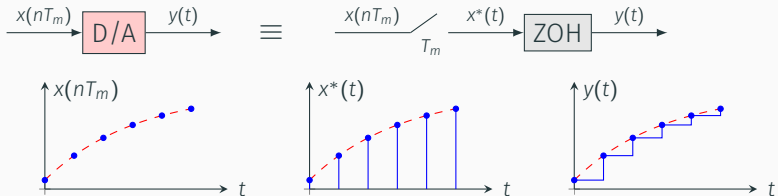
Sistema realimentado con control digital

Se requiere discretizar la conversión D/A, la planta y la conversión A/D para disponer de un modelo en tiempo discreto del sistema

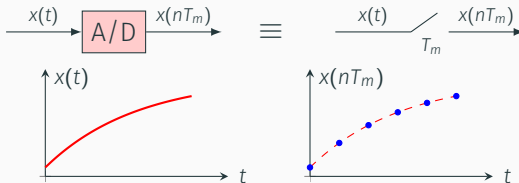


Modelos del convertor D/A y del A/D

Modelo del convertor D/A \rightarrow muestreo y ZOH

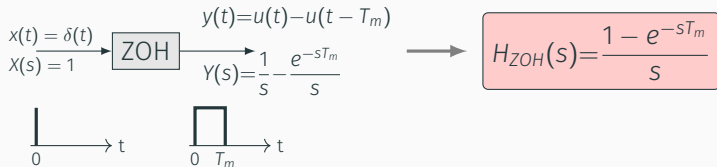


Modelo del convertor A/D \rightarrow discretización

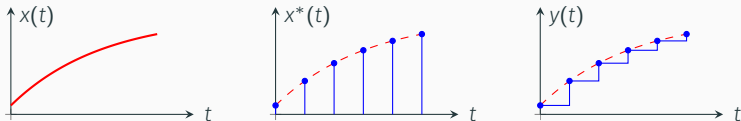


Retención de orden cero

Retención de orden cero (zero-order hold, ZOH)

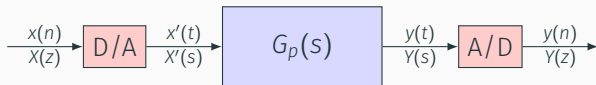


Muestreo y retención de orden cero

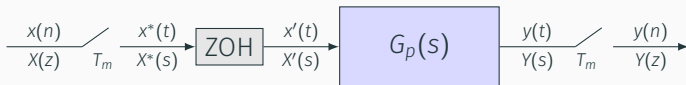


Discretización de la función de transferencia de la planta

Conexión de la planta en el sistema de control digital



Sustituimos los modelos del D/A y D/A



Función de transferencia $G_p(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$G_p^*(s) = \frac{Y(s)}{X^*(s)} = H_{ZOH}(s) G_p(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} g^*(t) \longrightarrow g^*(nT_m) \xrightarrow{\mathcal{Z}\{\}} G_p^*(z)$$

En Matlab este proceso se realiza con la función: `Gpz = c2d(Gps, 'zoh')`

```
% Función de transferencia continua
```

```
>> s=tf('s');
```

```
>> Gps=10/(s*(s+10))
```

```
Gps =
```

$$\frac{10}{s^2 + 10s}$$

```
Continuous-time transfer function.
```

```
>> Tm=.01;
```

```
% Discretización de Gps
```

```
>> Gpz=c2d(Gps,Tm,'zoh')
```

```
Gpz =
```

$$\frac{0.0004837 z + 0.0004679}{z^2 - 1.905 z + 0.9048}$$

```
Sample time: 0.01 seconds
```

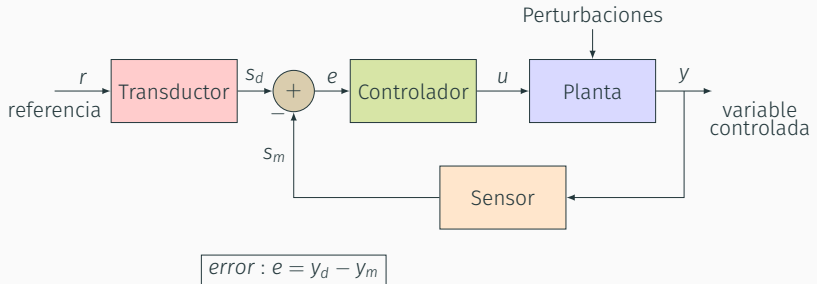
```
Discrete-time transfer function.
```

Diagrama de bloques del sistema

Diagrama de bloques

Los sistemas se representan mediante la interconexión de sub-sistemas formando un diagrama de bloques

Nos interesa obtener la función de transferencia del sistema para analizar su comportamiento



Componentes de los diagramas de bloques

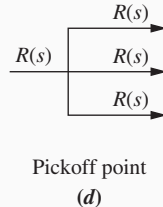
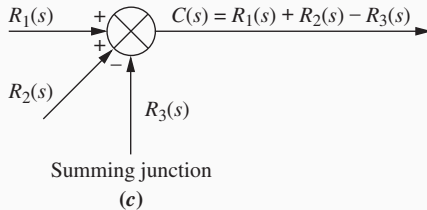
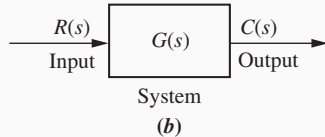
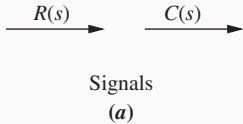
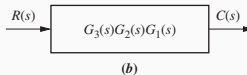
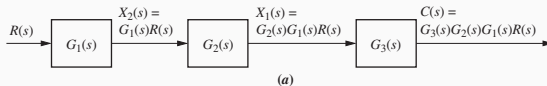
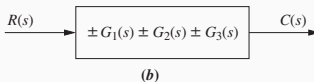
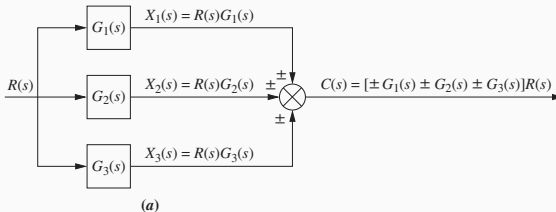


Diagrama de bloques

Conexión en cascada



Conexión en paralelo



```
% Definición de TFs
```

```
>> G1=tf(3,[1 3])
```

```
G1 =  
    --3--  
    s + 3
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
>> G2=tf(4,[1 1.5,4])
```

```
G2 =  
    -----4-----  
    s^2 + 1.5 s + 4
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
>> Gs1=series(G1,G2) % TF equivalente serie
```

```
Gs1 =  
    -----12-----  
    s^3 + 4.5 s^2 + 8.5 s + 12
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
>> Gs2=G1*G2 % TF equiv. serie con operación directa
```

```
Gs2 =  
    -----12-----  
    s^3 + 4.5 s^2 + 8.5 s + 12
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
% TF equiv. paralelo  
>> Gp_1=parallel(G1,G2)  
Gp_1 =
```

$$\frac{3 s^2 + 8.5 s + 24}{s^3 + 4.5 s^2 + 8.5 s + 12}$$

Continuous-time transfer function.

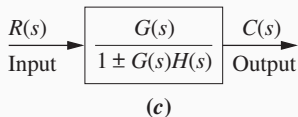
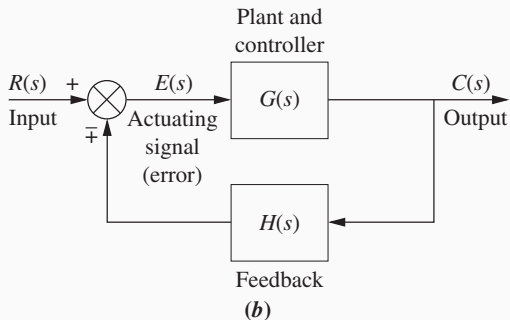
```
% TF equiv. paralelo con operación directa  
>> Gp_2=G1+G2  
Gp_2 =
```

$$\frac{3 s^2 + 8.5 s + 24}{s^3 + 4.5 s^2 + 8.5 s + 12}$$

Continuous-time transfer function.

Diagrama de bloques

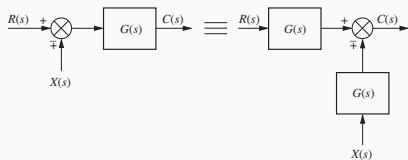
Conexión con realimentación



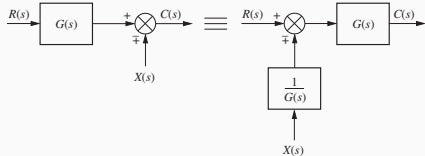
$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) \mp H(s)C(s) \\ C(s) &= E(s)G(s) \\ E(s) &= \frac{C(s)}{G(s)} \\ \frac{C(s)}{G(s)} &= R(s) \mp H(s)C(s) \\ \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)} \end{aligned}$$

```
>> G=G1; % TF directa (planta y controlador)
>> H=G2; % TF feedback
>> Gf1=feedback(G,H) % TF equiv. realimentada
Gf1 =
    ____3_s^2_+_4.5_s_+_12____
    s^3 + 4.5 s^2 + 8.5 s + 24
Continuous-time transfer function.
>> Gf2=G/(1+G*H) % TF equiv. con operación directa
Gf2 =
    ____3_s^3_+_13.5_s^2_+_25.5_s_+_36____
    s^4 + 7.5 s^3 + 22 s^2 + 49.5 s + 72
Continuous-time transfer function.
>> Gf2s=minreal(Gf2) % Simplificación de Gf2
Gf2s =
    ____3_s^2_+_4.5_s_+_12____
    s^3 + 4.5 s^2 + 8.5 s + 24
Continuous-time transfer function.
```

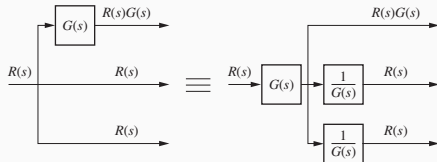
Movimiento de bloques



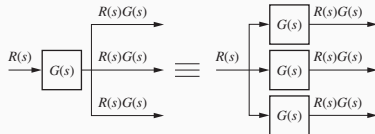
(a)



(b)



(a)



(b)

Bibliografía

Referencias

- Norman S. Nise, **Control systems engineering**, Wiley 2017
 - Capítulo 2
 - Capítulo 5: secciones 1, 2 y 3
 - Capítulo 13: secciones 1, 2, 3 y 4
- M.S. Fadali A. Visioli, **Digital Control Engineering Analysis and Design**, Elsevier 2019
 - Capítulo 2: secciones 2, 3 y 5
 - Capítulo 3: secciones 1, 2 y 3
- E. Pinto Bermúdez, *et. al.*, **Fundamentos de control con MATLAB**, Prentice Hall 2010
 - Sección 4.4 y capítulo 5
- Control Tutorials for Matlab & Simulink, <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>
- LPSA (Linear Physical Systems Analysis) website, https://lpsa.swarthmore.edu/LPSAHelp/LPSA_Help_Index.html