Tema 3

Respuesta temporal

Javier Valls

Dpto. Ingeniería Electrónica

Contenidos

Introducción y objetivos

Introducción

- Los sistemas tienen una respuesta temporal propia que depende de sus características físicas
  - En el anterior tema modelamos los sistemas a través de su función de transferencia
  - Necesitamos reconocer cómo es la respuesta temporal de un sistema a partir de su función de transferencia
- El objetivo del control es alterar la respuesta propia del sistema para que cumpla con ciertas especificaciones
  - Necesitamos conocer qué función de transferencia se requiere para conseguir una respuesta temporal dada
  - importante para el diseño del controlador en el sistema realimentado

Objetivos

Al finalizar este tema el alumno será capaz de

- reconocer las características de las respuestas temporales de los sistemas de 1^{er} y 2° orden
- reconocer la relación entre el tipo de respuesta y los polos y ceros del sistema
- entender cómo se forma la respuesta temporal de un sistema de orden mayor que 2 y lo que supone la aproximación con polos dominantes
- representar con Matlab la respuesta de los sistemas continuos y discretos
- representar con Matlab los polos y ceros de sistemas continuos y discretos

Objetivos

...

- reconocer la relación entre los polos y ceros entre el dominio continuo y discreto
- reconocer cuándo un sistema es estable o inestable
- entender lo que supone las no linealidades en los sistemas
- modelar sistemas con no linealidades utilizando Matlab/Simulink

Respuesta del sistema, polos y ceros

Respuesta del sistema, polos y ceros

Función de transferencia:

$$\boxed{H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}}$$

Ceros: raíces de $N(s) \rightarrow \boxed{N(s_i) = 0}$

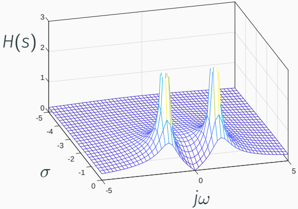
- $H(s)$ toma el valor cero (a no ser que se compensen con un polo del denominador)

Polos: raíces de $D(s) \rightarrow \boxed{D(s_j) = 0}$

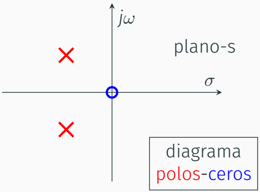
- $H(s)$ toma el valor infinito (a no ser que se compensen con un cero del numerador)

Orden del sistema: número de polos, no compensados con ceros

$$\boxed{H(s) = \frac{s}{s^2+s+2}}$$



$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$



E Respuesta al escalón de un sistema de 1^er orden

Función de transferencia del sistema G(s):

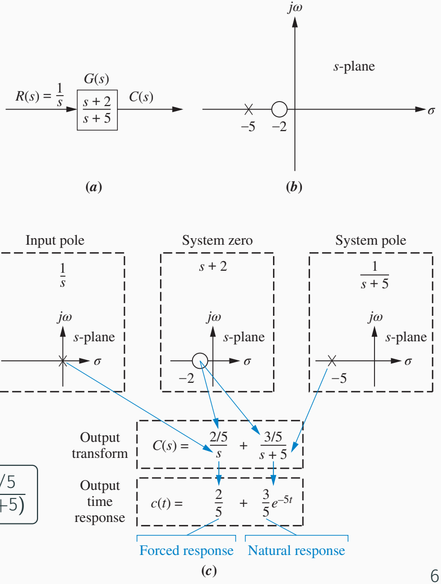
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+2}{s+5}$$

Entrada al sistema $R(s)$ (escalón unitario):

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Salida del sistema $C(s)$:

$$C(s) = G(s) \cdot R(s) = \frac{s+2}{s \cdot (s+5)} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{(s+5)}$$

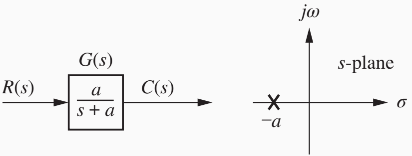


Sistemas de primer orden

Sistemas de primer orden

Sistema de 1er orden sin ceros G(s):

$$\boxed{G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a}{s+a}}$$



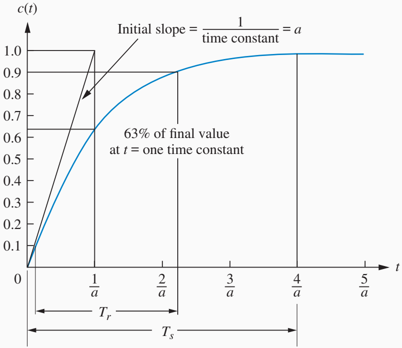
Respuesta al escalón

$C(s) = G(s) \cdot R(s)$:

$$\boxed{C(s) = \frac{a}{s\cdot(s+a)} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{(s+a)}}$$

En el dominio temporal $c(t)$:

$$\boxed{c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at}}$$



Especificaciones de los sistemas de 1^{er} orden

Constante de tiempo: $\boxed{\tau = \frac{1}{a}}$

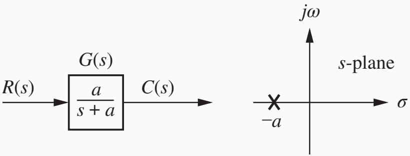
- Unidades $\rightarrow$ segundos
- Se relaciona con la velocidad de la respuesta transitoria
- Frec. de decaimiento: $a{=}1/\tau$ Hz

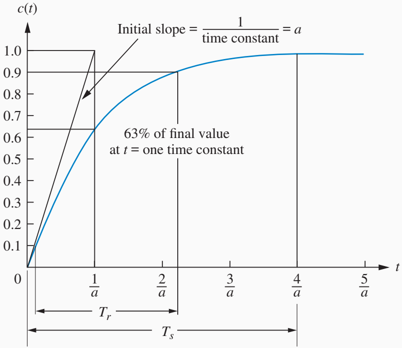
Tiempo de subida: $\boxed{T_r = 2.2\tau}$

- Tiempo que toma la respuesta en ir del 10% al 90% de su valor final

T. de establecimiento: $\boxed{T_s = 4\tau}$

- Tiempo que toma la respuesta en alcanzar y permanecer en el valor final, con un error máximo del 2%





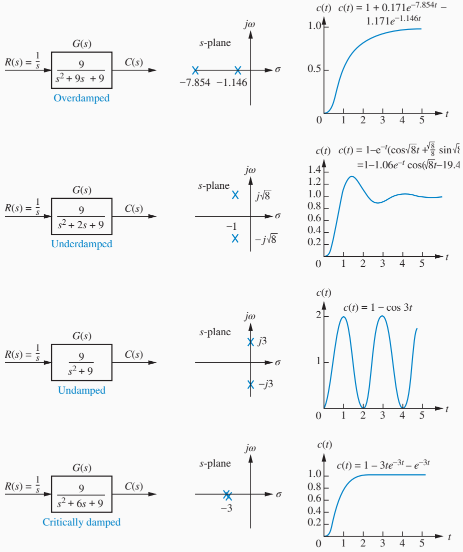
Sistemas de segundo orden

Función de transferencia general de un sistema de 2º orden:

$$\boxed{G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b}{s^2 + as + b}}$$

Cambios en a y b $\rightarrow$ respuestas del sistema con formas muy distintas:

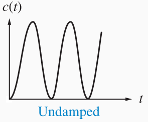
- Sobre-amortiguada
- Sub-amortiguada
- No amortiguada
- Amortiguada críticamente



$\boxed{\text{No amortiguada}}$

Polos: 2 polos imaginarios en $\pm j\omega_n$

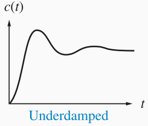
Respuesta: $c_n(t) = Acos(\omega_n t - \phi)$



$\boxed{\text{Sub-amortiguada}}$

Polos: 2 polos complejos en $-\sigma_d \pm j\omega_d$

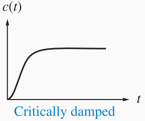
Respuesta: $c_n(t) = Ae^{-\sigma_d t}cos(\omega_d t - \phi)$



$\boxed{\text{Amortiguada críticamente}}$

Polos: 2 polos reales en $-\sigma_1$

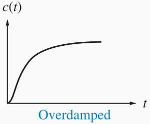
Respuesta: $c_n(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 t e^{-\sigma_1 t}$



$\boxed{\text{Sobre-amortiguada}}$

Polos: 2 polos reales en $-\sigma_1, -\sigma_2$

Respuesta: $c_n(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t}$



Sistemas de 2º orden: frecuencia natural y amortiguamiento

Función de transferencia general de 2º orden:

$$\boxed{G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}} \xrightarrow{\text{polos}} \boxed{s_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \xrightarrow{\text{polos}} \boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Frecuencia natural (ω_n): frecuencia de oscilación del sistema sin amortiguamiento ($a = 0$)

$$G(s)\Big|_{a=0} = \frac{b}{s^2+b} \longrightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{b} \longrightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{b}}$$

***Ratio* de amortiguamiento (ζ):** cociente entre la frec. de decaimiento exponencial y la frec. natural

$$\zeta = \frac{|\Re(s_{1,2})|}{\omega_n} \longrightarrow \boxed{\zeta = \frac{a/2}{\omega_n}} \longrightarrow a = 2\zeta\omega_n$$

Sistemas de 2º orden: tipos de respuesta *vs.* ζ

Función de transf. general de 2º orden: $\boxed{G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$

Polos de G(s):

$$\boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Tipo de respuesta:

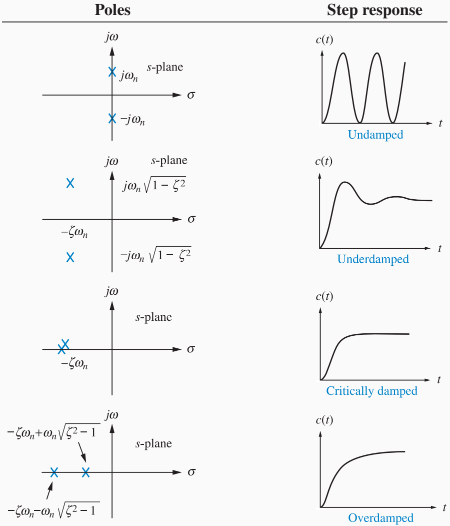
- No amortiguada $\boxed{\zeta=0}$

  $s_{1,2} = \pm j\omega_n$
- Sub-amortiguada $\boxed{0<\zeta<1}$

  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$
- Amortiguada crítica. $\boxed{\zeta=1}$

  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n$
- Sobre-amortiguada $\boxed{\zeta>1}$

  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$



Sistemas de 2º orden sub-amortiguados

Sistemas de 2º orden sub-amortiguados

Sist. de 2º orden sub-amortiguados: $\boxed{G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}$ con $0<\zeta<1$

Polos: $\boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

El tipo de respuesta $\rightarrow$ modelo de muchos sistemas físicos

Esta sección:

- se va a analizar su respuesta al escalón
- se van a definir ciertos parámetros que servirán para especificar la respuesta

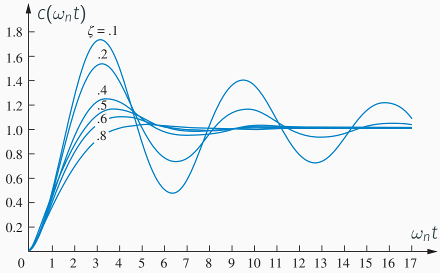
Conocer su comportamiento $\rightarrow$ útil para analizar y diseñar sistemas de control

Sistemas de 2º orden sub-amortiguados

Respuesta al escalón: $C(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} = \boxed{\frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s+K_3}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}$

$\mathscr{L}^{-1}\{\} \rightarrow \boxed{c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t - \phi)}$, $\phi = tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

Respuesta $c(t)$, normalizada a ω_n, para diferentes factores de amortiguamiento ζ:



$\downarrow\downarrow \zeta \rightarrow$ oscilaciones $\uparrow\uparrow$

$\omega_n \rightarrow$ solo escala el eje de tiempo

Especificaciones de los sistemas de 2º orden sub-amortiguados

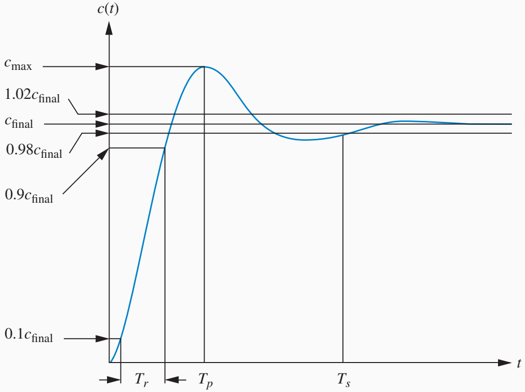
Tiempo de subida:

- Tiempo de la respuesta $\rightarrow$ del 10% al 90% de su valor final
- Difícil de expresarlo en función de ζ y ω_n $\rightarrow$ hay que medirlo

T. de pico:

$$\boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- Tiempo para alcanzar el primer (máximo) pico



Especificaciones de los sistemas de 2º orden sub-amortiguados

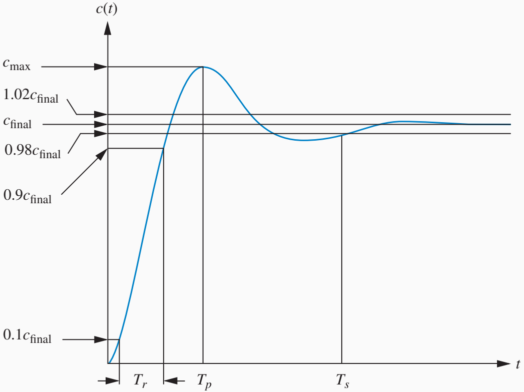
Porcentaje del sobreimpulso: $\boxed{OS\% = 100 \cdot \frac{c_{max} - c_{final}}{c_{final}} = 100 \cdot e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}$

- Relación porcentual entre el valor máximo y el valor en estado estacionario

T. de establecimiento:

$$\boxed{T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}}$$

- Tiempo que toma la respuesta en alcanzar y permanecer en el valor final, con un error máximo del 2%



Posición de los polos *vs.* especificaciones

Sistemas de 2º orden sub-amortiguados $\rightarrow$ 2 polos complejos

$$\boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma_d \pm j\omega_d}$$

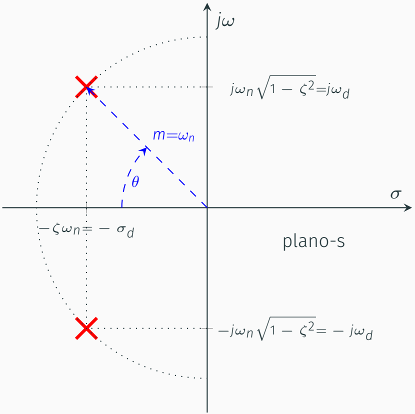
- $m = |s_{1,2}| = \omega_n$
- $\theta = atan(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$

$\boxed{\sigma_\mathbf{d} = \zeta\omega_n}$

- Frecuencia de amortiguamiento exponencial

$\boxed{\omega_\mathbf{d} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

- Frecuencia de oscilación amortiguada



Resp. al escalón: $\boxed{c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\sigma_d t}cos(\omega_d t-\phi)}$, $\phi=tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

Posición de los polos *vs.* especificaciones

Polos: $$\boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma_d \pm j\omega_d}$$

T. de pico:

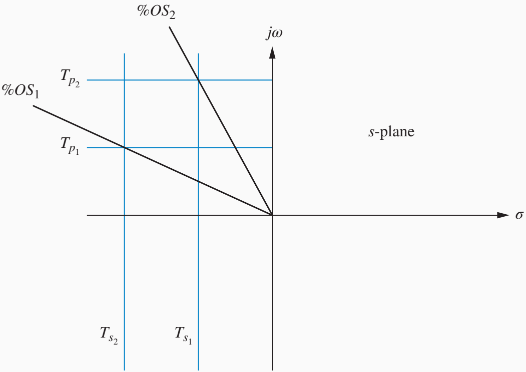
$$\boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}}$$

T. de establecimiento:

$$\boxed{T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma_d}}$$

% del sobreimpulso:

$$\boxed{OS\% = 100 \cdot e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



Posición de los polos *vs.* especificaciones

$$\boxed{\begin{aligned} s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\sigma_d \pm j\omega_d \end{aligned}}$$

a) $\boxed{\sigma_{\mathbf{d}} \text{ fija y cambia } \omega_{\mathbf{d}}}$

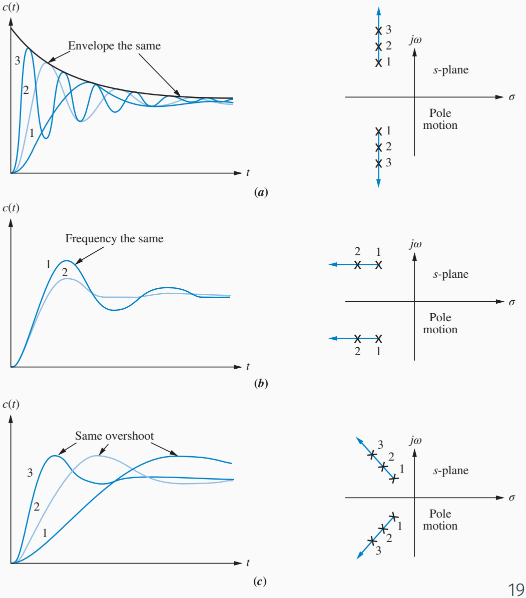
- T_s cte
- = envolvente

b) $\boxed{\omega_{\mathbf{d}} \text{ fija y cambia } \sigma_{\mathbf{d}}}$

- T_p cte
- = frec. osc. amort.

c) $\boxed{\omega_{\mathbf{d}}/\sigma_{\mathbf{d}} \text{ fijo}}$

- $\%OS$ cte
- = ζ



Respuesta de sistemas con polos adicionales

Respuesta de sistemas con polos adicionales

Sistema con orden > 2 $\rightarrow$ no se pueden utilizar las fórmulas anteriores

En ciertos casos el sistema con orden > 2 se puede aproximar por un sistema de 2º orden subamortiguado

$\rightarrow$ sistema con **polos** complejos **dominantes**

E Sistema con 3 polos

Res. al escalón del sistema: $\boxed{G_3(s) = \dfrac{\omega_n^2 \sigma_3}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \sigma_3)}}$

$$C_3(s) = G_3(s)R(s) = \frac{\omega_n^2\sigma_3}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s+\sigma_3)} = \frac{1}{s} + \frac{K_1 s + K_2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} + \frac{K_3}{s+\sigma_3}$$

$$c_3(t) = u(t) + K' e^{-\sigma_d t} cos(\omega_d t - \phi) + K_3 e^{-\sigma_3 t} = u(t) + c_{32}(t) + c_{33}(t)$$

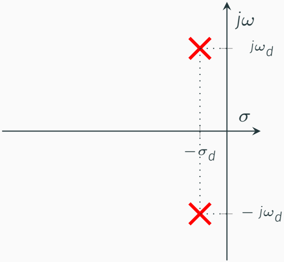
Sistema con **polos** complejos **dominantes** $\rightarrow$ $c_3(t) \approx u(t) + c_{32}(t)$

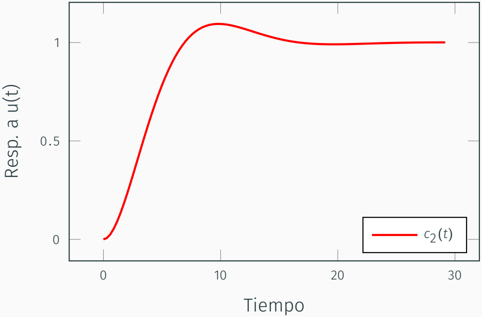
E Sistema con 3 polos

Sistema de 2º orden sub-amortiguado: $G_2(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Resp. al escalón $\rightarrow c_2(t) = K' e^{-\sigma_d t} cos(\omega_d t - \phi)$

- $s_{1,2} = -\sigma_d \pm j\omega_d = -0.24 \pm j0.32$

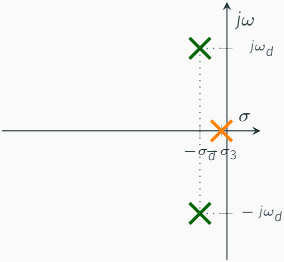


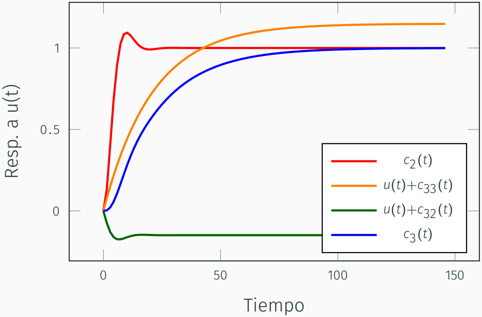


E Sistema con 3 polos

Sistema de 3^{er} orden: $G_3(s) = \dfrac{\omega_n^2\sigma_3}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \sigma_3)}$

- $s_{1,2} = -\sigma_d \pm j\omega_d = -0.24 \pm j0.32$
- $s_3 = -\sigma_3 = -0.048$
- $\sigma_3 = 0.2\sigma_d \rightarrow s_3$ polo dominante

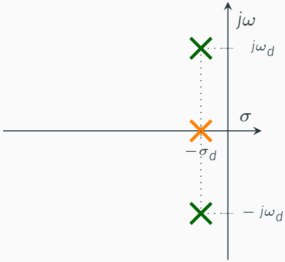


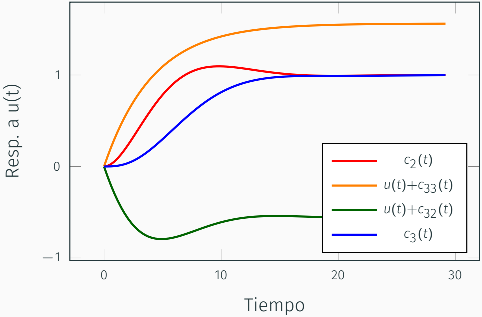


E Sistema con 3 polos

Sistema de 3^{er} orden: $G_3(s) = \dfrac{\omega_n^2 \sigma_3}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \sigma_3)}$

- $s_{1,2} = -\sigma_d \pm j\omega_d = -0.24 \pm j0.32$
- $s_3 = -\sigma_3 = -0.24$
- $\sigma_3 = \sigma_d \rightarrow$ no hay polos dominantes

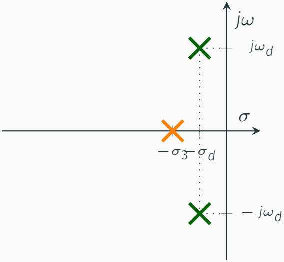


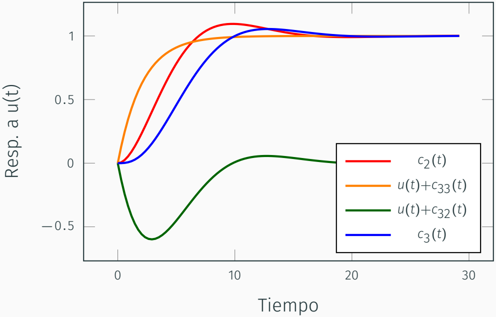


E Sistema con 3 polos

Sistema de 3^{er} orden: $G_3(s) = \dfrac{\omega_n^2\sigma_3}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \sigma_3)}$

- $s_{1,2} = -\sigma_d \pm j\omega_d = -0.24 \pm j0.32$
- $s_3 = -\sigma_3 = -0.48$
- $\sigma_3 = 2\sigma_d \rightarrow$ no hay polos dominantes

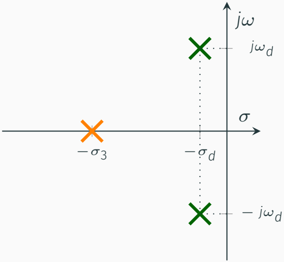


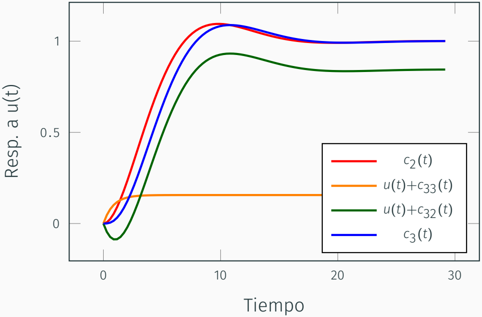


E Sistema con 3 polos

Sistema de 3er orden: $G_3(s) = \dfrac{\omega_n^2 \sigma_3}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \sigma_3)}$

- $s_{1,2} = -\sigma_d \pm j\omega_d = -0.24 \pm j0.32$
- $s_3 = -\sigma_3 = -1.2$
- $\sigma_3 = 5\sigma_d \rightarrow s_{1,2}$ polos dominantes

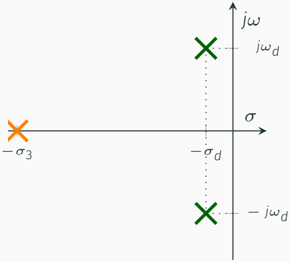


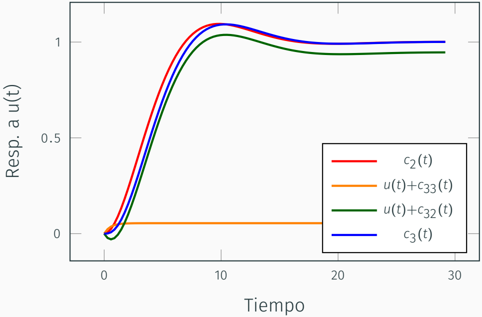


E Sistema con 3 polos

Sistema de 3er orden: $G_3(s) = \dfrac{\omega_n^2 \sigma_3}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \sigma_3)}$

- $s_{1,2} = -\sigma_d \pm j\omega_d = -0.24 \pm j0.32$
- $s_3 = -\sigma_3 = -1.92$
- $\sigma_3 = 8\sigma_d \to s_{1,2}$ polos dominantes





Respuesta de sistemas con ceros

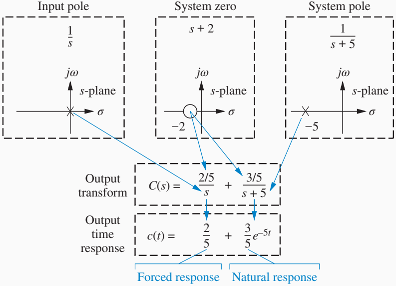
Respuesta de sistemas con ceros

Los **polos** fijan el tipo de respuesta

- exponencial, amortiguada,...

Los **ceros** no modifican el tipo de respuesta

→ modifican la magnitud (residuo) de cada componente de la respuesta



Si a la respuesta al escalón de un sistema, $C(s)$, se le añade un cero real en $-a$ queda: $\boxed{C_z(s) = (\frac{s}{a} + 1)C(s) = \frac{s}{a}C(s) + C(s)}$

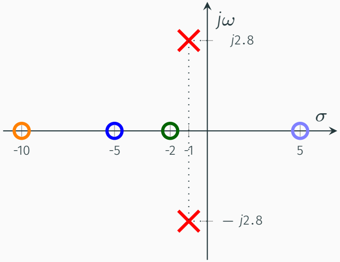
- $a \uparrow\uparrow \rightarrow C_z(s) \approx C(s)$
- $a \downarrow\downarrow \rightarrow C_z(s) \approx \frac{s}{a}C(s) \leftarrow$ predomina la derivada escalada de c(t)

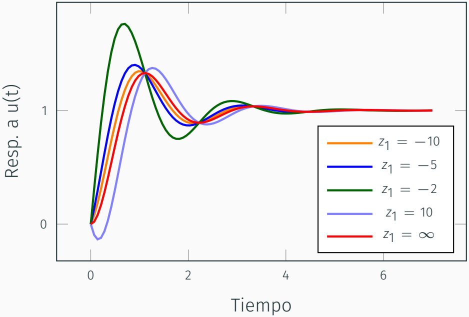
E Sistema de 2º orden subamortiguado con un cero real

Sistema: $G(s) = \dfrac{9(s/z_1 + 1)}{s^2 + 2s + 9}$

- **Polos**: $-1 \pm j2.8$
- **Zeros**: z_1

Respuesta al escalón para los distintos ceros (z_1):





Cancelación polo-cero

Un sistema de 3^{er} orden se comporta como uno de 2º si se produce una cancelación entre un polo y un cero

$$T(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s^2+as+b)} \xrightarrow{\boxed{z_1 = p_1}} T(s) = \frac{K}{s^2+as+b}$$

Conforme más se acerquen el polo p_1 y el cero z_1 $\rightarrow$ menor será la amplitud del residuo del polo

E Quasi-cancelación polo-cero

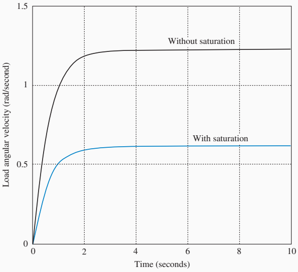
$$C_1(s) = \frac{26.25(s+4)}{s(s+3.5)(s+5)(s+6)} = \frac{1}{s} - \frac{3.5}{s+5} + \frac{3.5}{s+6} - \frac{1}{s+3.5} \rightarrow c_1(t) = 1 - 3.5e^{-5t} + 3.5e^{-6t} - e^{-3.5t}$$

$$C_2(s) = \frac{26.25(s+4)}{s(s+4.01)(s+5)(s+6)} = \frac{0.87}{s} - \frac{5.3}{s+5} + \frac{4.4}{s+6} + \frac{0{,}033}{s+4.01} \rightarrow c_2(t) \approx 0.87 - 5.3e^{-5t} + 4.4e^{-6t}$$

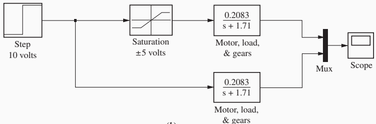
Efectos de las no linealidades en la respuesta temporal

Efectos de las no linealidades en la respuesta temporal

E Saturación en un motor DC

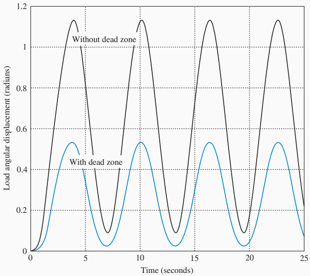


(a)

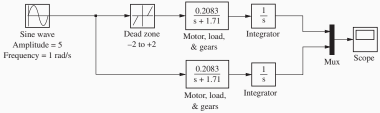


(b)

E Zona muerta en un motor DC



(a)



(b)

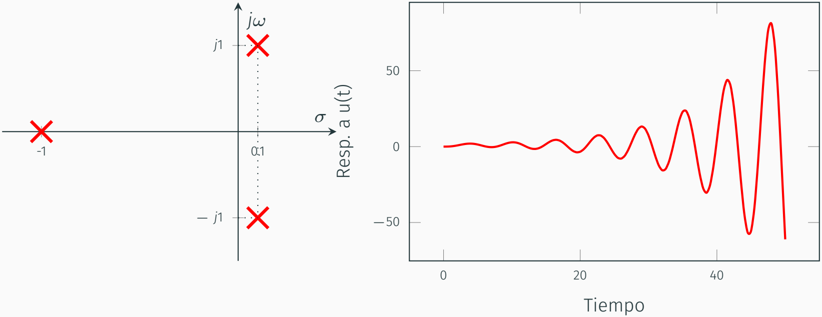
Estabilidad

Respuesta del sistema: $c(t) = c_{forzada}(t) + c_{natural}(t)$

Sistema estable: $c_{natural}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

- Todos los polos del sistema deben estar en el semiplano izquierdo
    - Envolvente de la respuesta con exponencial negativa

E sistema con 2 polos complejos en el semiplano derecho

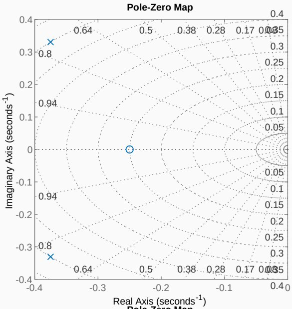


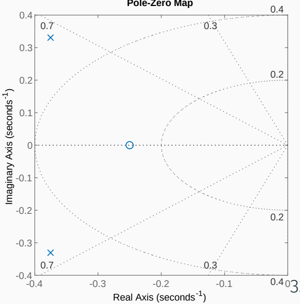
Diagramas p/z y respuestas en sistemas continuos con Matlab

```
% Función de transf. G(s)
>> s=tf('s');
>> G=(s+0.25)/(s^2+0.75*s+.25)
G =
        s + 0.25
  -------------------
  s^2 + 0.75 s + 0.25
Continuous-time transfer function.
>> p=pole(G)
p =
  -0.3750 + 0.3307i
  -0.3750 - 0.3307i
>> c=zero(G)
c =
   -0.2500
>> g=dcgain(G)
g =
     1
```

Diagrama polos-ceros

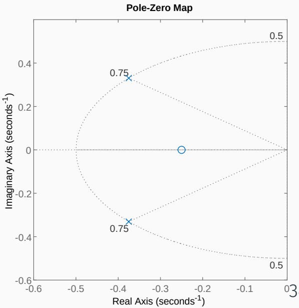
```
% Función de transf. G(s)
>> s=tf('s');
>> G=(s+0.25)/(s^2+0.75*s+0.25)

G =

       s + 0.25
  ------------------
  s^2 + 0.75 s + 0.25

Continuous-time transfer function.

% Diagrama polos-ceros
>> pzmap(G)
>> sgrid % grid plano s

% Control del grid
>> zeta=[0 .3 .7];
>> wn=[.2 .4 .8];
>> sgrid(zeta,wn)
```





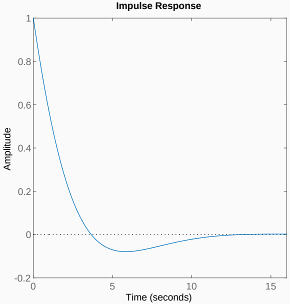
```
% Función de transf. G(s)
>> G=tf([1 0.25],[1 0.75 0.25]);

% Obtención de parámetros
>> damp(G)

          Pole               Damping      Frequency      Time Constant
                                        (rad/seconds)      (seconds)

  -3.75e-01 + 3.31e-01i     7.50e-01       5.00e-01         2.67e+00
  -3.75e-01 - 3.31e-01i     7.50e-01       5.00e-01         2.67e+00
```

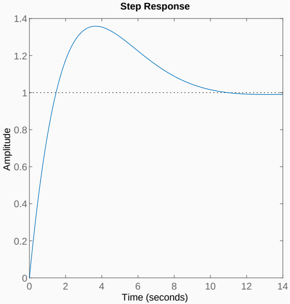
```
% Diagrama polos-ceros
>> pzmap(G)
>> zeta=[0.75];
>> wn=[0.5];
>> sgrid(zeta,wn)
>> ax = gca;
>> ax.XLim=[-.6 0]
>> ax.YLim=[-.6 .6]
```

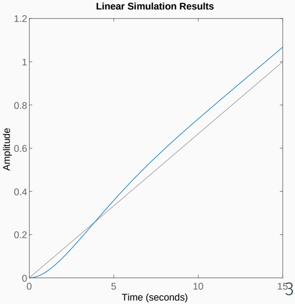


Respuestas temporales

```
% Función de transf. G(s)
>> G=tf([1 0.25],[1 0.75 0.25]);
% Resp. al escalón unitario
>> step(G)
% Resp. impulso
>> impulse(G)
% Otras respuestas (ej. rampa)
>> t=0:0.1:15;
>> x_in=t/15;
>> lsim(G,x_in,t)
```

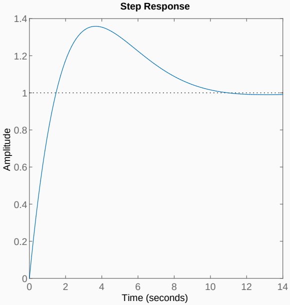


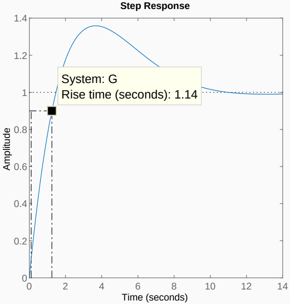


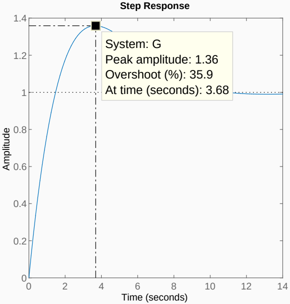


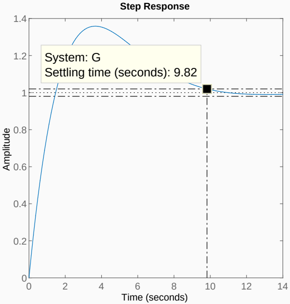
Características de la respuesta al escalón

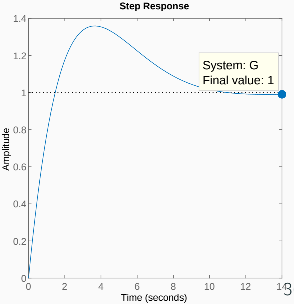
```
% Resp. al escalón
>> step(G)
```





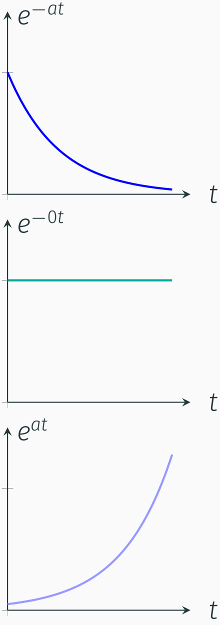




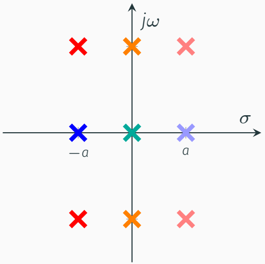


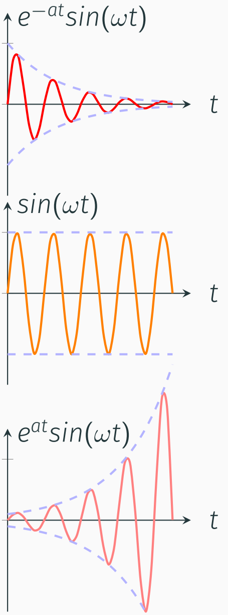
Relación entre el dominio s y Z

Dominio s: polos y sus respuestas

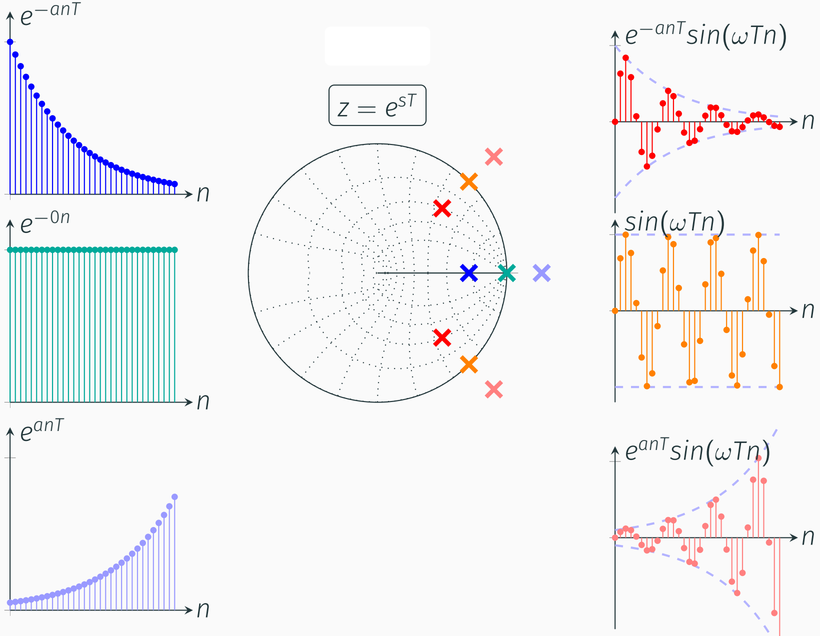


$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$





Dominio z: polos y sus respuestas



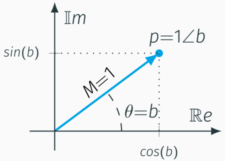
Repaso: función exponencial $f(x) = e^x$

$\boxed{x \in \mathbb{R}}$

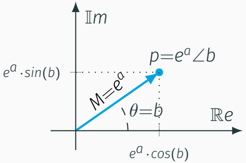
$$e^a = \begin{cases} [0,1) \text{ si } a \in [-\infty, 0) \\ 1 \text{ si } a = 0 \\ (1, \infty] \text{ si } a \in (0, \infty] \end{cases}$$

$\boxed{x \in \mathbb{C}}$

$$p = e^{jb} = cos(b) + jsin(b) = 1\angle b$$

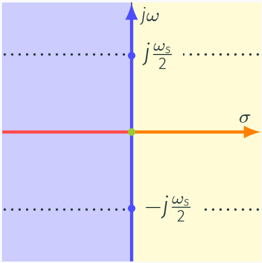


$$\begin{aligned} p = e^{a+jb} &= e^a e^{jb} \\ &= e^a(cos(b) + jsin(b)) \\ &= e^a \angle b \end{aligned}$$



Dominio s y z: coordenadas, ejes y estabilidad

$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$



Coordenadas: cartesianas

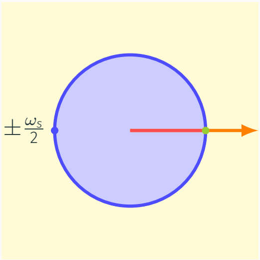
Coordenada (0,0): $p_s = 0 + j0$

Eje real: $p_s = \sigma$

Eje imag: $p_s = j\omega$

Estabilidad: $\Re\{p_s\} = \sigma < 0$

$$\boxed{z = e^{sT} = e^{\sigma T}\angle\omega T}$$



polares

$p_z = e^{p_s T} = e^{0+j0} = 1\angle 0$

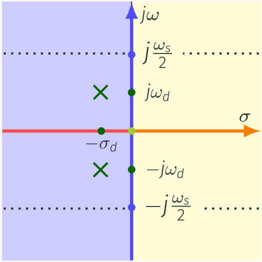
$p_z = e^{p_s T} = e^{\sigma T}\angle 0$

$p_z = e^{p_s T} = e^{j\omega T} = 1\angle j\omega T$

$|p_z| = e^{\sigma T} < 1$

Relación entre el dominio s y z: frecuencia de muestreo

$\boxed{s = \sigma + j\omega}$

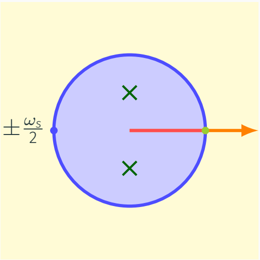


Coordenadas: cartesianas

Coordenada $(0, \pm\frac{\omega_s}{2})$: $p_s = \pm j\frac{\omega_s}{2}$

Polos: $p_s = -\sigma_d \pm j\omega_d$

$\boxed{z = e^{sT} = e^{\sigma T}\angle \omega T}$



polares

$p_z = e^{p_s T} = e^{\pm j\frac{\omega_s}{2}} = 1\angle\pm\pi$

$p_z = e^{p_s T} = e^{-\sigma_d T \pm j\omega_d T} = e^{-\sigma_d T}\angle \pm\omega_d T$

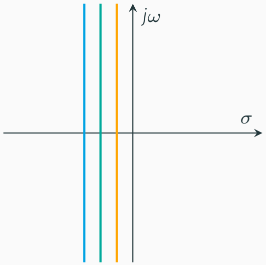
Periodo de muestreo: T
Frecuencia de muestreo: $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

Selección ω_s

$\frac{\omega_s}{2} > \omega_d$

Relación entre el dominio s y z: polos con σ constante

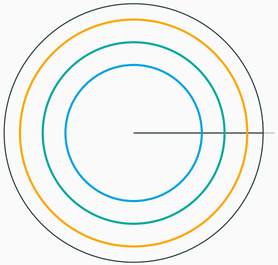
$\boxed{s = \sigma + j\omega}$



Polos con $\sigma = \sigma_d$ constante

$p_s = -\sigma_d + j\omega$

$\boxed{z = e^{sT} = e^{\sigma T}\angle\omega T}$



$|p_z| = |e^{\sigma_d T}| = constante$

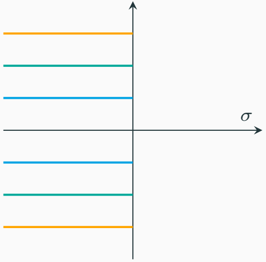
$p_z = e^{-\sigma_d T}\angle\omega T$

Tiempo de establecimiento: $\boxed{T_s = \frac{4}{\sigma_d}}$ →

Respuestas con T_s constante:
→ polos en líneas verticales en s
→ polos en círculos en z

Relación entre el dominio s y z: polos con ω constante

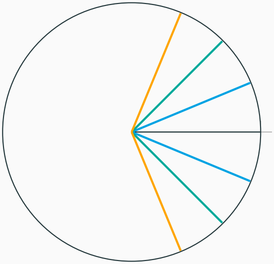
$\boxed{s = \sigma + j\omega}$



Polos con $\omega = \omega_d$ constante

$p_s = -\sigma + j\omega_d$

$\boxed{z = e^{sT} = e^{\sigma T}\angle\omega T}$



$\angle(p_z) = \omega_d T = constante$

$p_z = e^{-\sigma T}\angle\omega_d T$

Tiempo de pico: $\boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$

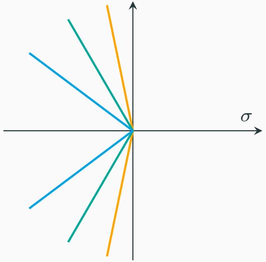
Respuestas con T_p constante:

$\rightarrow$ polos en líneas horizontales en s

$\rightarrow$ polos en líneas radiales en z

Relación entre el dominio s y z: polos con ζ constante

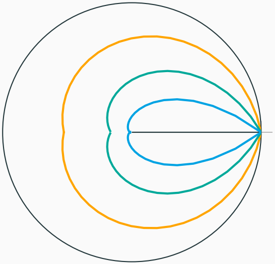
$\boxed{s = \sigma + j\omega}$



Polos con $\zeta = \zeta_0$ cte.

$p_s = -\zeta_0\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta_0^2}$

$\boxed{z = e^{sT} = e^{\sigma T}\angle\omega T}$



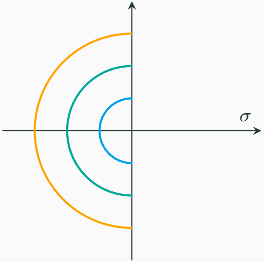
$p_z = e^{-\zeta_0\omega_n T}\angle(\omega_n T\sqrt{1-\zeta_0^2})$

% del sobre-impulso: $\boxed{OS\% = 100 \cdot e^{\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}$ $\rightarrow$

Respuestas con *OS*% cte.: polos en
$\rightarrow$ líneas radiales en s
$\rightarrow$ espirales logarítmicas en z

Relación entre el dominio s y z: polos con ω_n constante

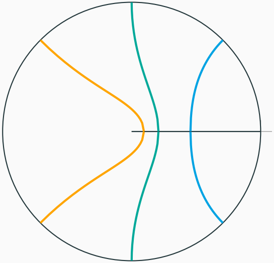
$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$



Polos con $\omega_n = \omega_{n0}$ cte.

$p_s = -\zeta\omega_{n0} \pm j\omega_{n0}\sqrt{1-\zeta_0^2}$

$$\boxed{z = e^{sT} = e^{\sigma T}\angle\omega T}$$



$p_z = e^{-\zeta\omega_{n0}T}\angle(\omega_{n0}T\sqrt{1-\zeta^2})$

Relación entre el dominio s y z: conclusiones

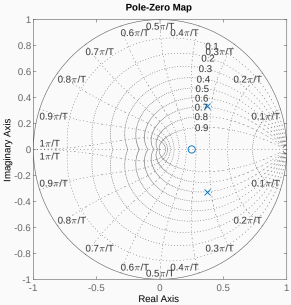
- Relación entre el plano s en el dominio continuo y el plano z en el dominio discreto:
  - $z = e^{sT}$ con $s = \sigma + j\omega$
- Conocer esta relación nos posibilitará trasladar las características o especificaciones de los sistemas de un dominio al otro.
  - Encontrar polos en el dominio discreto que generan especificaciones dadas en el dominio continuo (Ts, Tp o $\%OS$)
  - Conocer las características de las respuestas temporales de sistemas definidos directamente en el dominio discreto

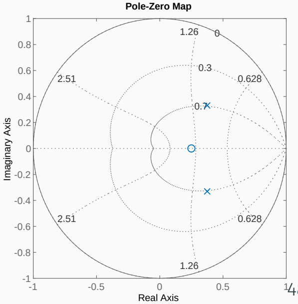
Diagramas polos-ceros y respuestas en sistemas discretos con Matlab

```
% Función de transf. G(s)
>> T=1;
>> G=tf([1 -0.25],[1 -0.75 0.25],T)
G =
       z - 0.25
  ------------------
  z^2 - 0.75 z + 0.25
Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
>> p=pole(G)
p =
   0.3750 + 0.3307i
   0.3750 - 0.3307i
>> c=zero(G)
c =
    0.2500
>> g=dcgain(G)
g =
    1.5000
```

M Diagrama polos-ceros

```
% Función de transf. G(z)
>> z=tf('z',1);
>> G=(z-0.25)/(z^2-0.75*z+0.25)

G =

      z - 0.25
  ------------------
  z^2 - 0.75 z + 0.25

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer funct.

% Diagrama polos-ceros
>> pzmap(G)
>> zgrid % grid plano z

% Control del grid
>> zeta=[0 .3 .7];
>> wn=[.2 .4 .8];
>> zgrid(zeta,wn)
```

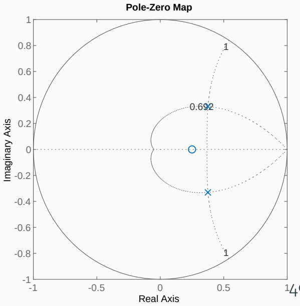




Obtención de ζ, ω_n y la constante de tiempo

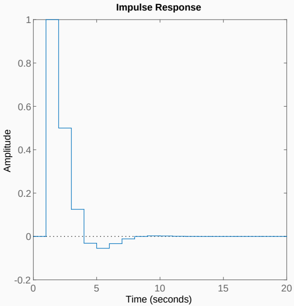
```
% Función de transf. G(z)
>> T=1; G=tf([1 -0.25],[1 -0.75 0.25],.01);
% Obtención de parámetros
>> damp(G)

          Pole               Magnitude     Damping     Frequency      Time Constant
                                                      (rad/seconds)     (seconds)

  3.75e-01 + 3.31e-01i       5.00e-01     6.92e-01      1.00e+00         1.44e+00
  3.75e-01 - 3.31e-01i       5.00e-01     6.92e-01      1.00e+00         1.44e+00
```

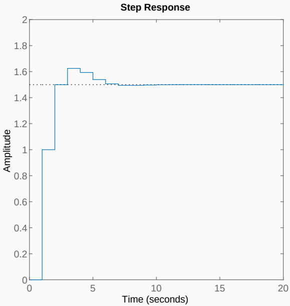
```
% Diagrama polos-ceros
>> pzmap(G)
>> zeta=[0.275];
>> wn=[2.52];
>> zgrid(zeta,wn)
```

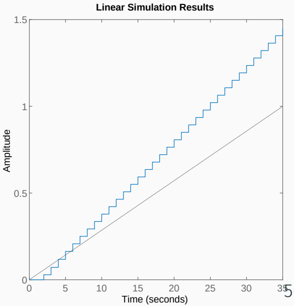


Respuestas temporales

```
% Función de transf. G(z)
>> T=1;
>> G=tf([1 -0.25],[1 -0.75 0.25],T);
% Resp. al escalón unitario
>> step(G)
% Resp. impulso
>> impulse(G)
% Otras respuestas (ej. rampa)
>> t=0:T:35;
>> x_in=t/35;
>> lsim(G,x_in,t)
```

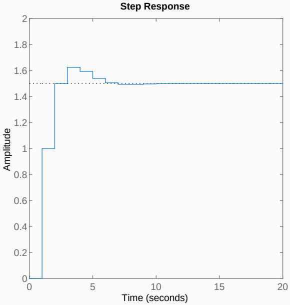


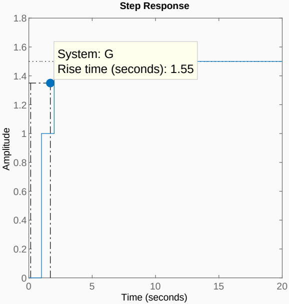


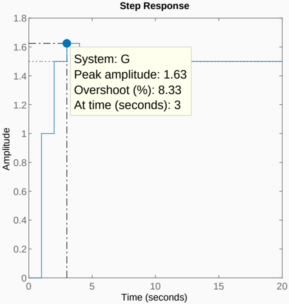


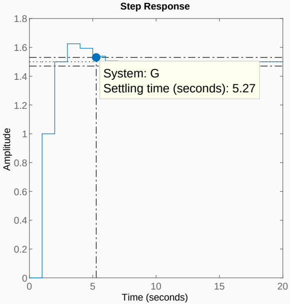
Características de la respuesta al escalón

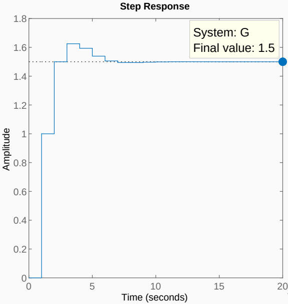
```
% Resp. al escalón
>> step(G)
```











Conclusiones

Conclusiones

En este tema

- se han estudiado los tipos de respuestas temporales que generan los sistemas
- se ha caracterizado la respuesta de los sistemas de 1^{er} y 2^{o} orden, definiendo unos parámetros que nos permiten especificar esos sistemas
- se ha mostrado cuándo es posible aproximar un sistema de orden mayor que 2 por uno de orden 2 u orden 1
- se ha presentado cómo se relacionan los polos de los dominios continuos y discretos
- se han presentado diversas funciones de Matlab para obtener y representar respuestas temporales y diagrama de polos y ceros

Bibliografía

Referencias

- Norman S. Nise, Control systems engineering, Wiley 2017
  - Capítulo 4: secciones de la 4.1 a la 4.9
  - Capítulo 13: sección 13.8
- M.S. Fadali A. Visioli, Digital Control Engineering Analysis and Design, Elsevier 2019
  - Capítulo 6: secciones 6.2 y 6.2.1
- E. Pinto Bermúdez, *et. al.*, Fundamentos de control con MATLAB, Prentice Hall 2010
  - Secciones 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4