Esercizi 'C' Fisica 3

Daniele Poidomani

January 2022

1 C.1.15: resistenza d'irraggiamento e sezione d'urto di un circuito RC investito da un'onda e.m.

Dato un circuito quadrato di lato L (con L « λ lunghezza d'onda della radiazione incidente) composto da una resistenza R ed un condensatore di capacità C, area D e distanza tra le piastre d, vogliamo calcolare la "resistenza di irraggiamento", la sezione d'urto di assorbimento e la sezione d'urto elastica.
Prendiamo il circuito sul piano xz.
I campi della radiazione incidente sono:

$$\mathbf{B} = B_0 cos(\omega t - kz) \tag{1}$$

$$\mathbf{E} = E_0 cos(\omega t - kz) = cB_0 cos(\omega t - kz) \tag{2}$$

Diretti rispettivamente lungo l'asse y e l'asse x.

1.1 Resistenza d'irraggiamento

Per calcolare la resistenza d'irraggiamento possiamo considerare la spira come un'antenna emettitrice, con una fem che sarà quella indotta dal flusso del campo magnetico attraverso di essa:

$$\epsilon_{ind}(t) = -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} = -\frac{L\int_{-L/2}^{L/2} B_0 cos(wt - kz)dz}{dt} = \omega L^2 B_0 sin(\omega t)\frac{sin(kL/2)}{kL/2} \tag{3}$$

E poichè abbiamo assunto L«$\lambda = 1/k$, si ha:

$$\epsilon_{ind}(t) = \omega L^2 B_0 sin(\omega t) \tag{4}$$

Da cui si avrà una corrente indotta della forma:

$$i_{ind}(t) = i_0 sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

Sappiamo che la potenza irraggiata sarà una somma della potenza di dipolo elettrico e magnetico, in particolare:

$$P_{irr} = \frac{|\ddot{\mathbf{P_e}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} + \frac{|\ddot{\mathbf{P_m}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} \tag{6}$$

dove i due termini dovuti ai dipoli sono le derivate temporali di:

$$P_e(t) = dQ(t) = d\int i(t)dt \tag{7}$$

$$P_m(t) = L^2 i(t) \tag{8}$$

Rispettivamente per il dipolo elettrico e quello magnetico, dove con Q si è indicata la carica del condensatore al tempo t. Sostituendo nella (6) si arriva a:

$$P_{irr} = \frac{(i_0 d\omega cos(\omega t + \phi))^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} + \frac{(A\omega^2 i_0 sin(\omega t + phi))^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} \tag{9}$$

Dove con A si è indicata l'area del circuito $= L^2$. Poichè si ha un andamento dipendente dal tempo, per ricavare la resistenza di irraggiamento facciamo una media temporale, ovvero:

$$< P_{irr} >= R_{irr} < i >^2 \tag{10}$$

da cui si ricava immediatamente:

$$R_{irr} = \frac{d^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} + \frac{A^2\omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} = Z_0[\frac{2\pi}{3}(\frac{d}{\lambda})^2 + \frac{8\pi^3}{3}(\frac{L}{\lambda})^4] \tag{11}$$

Che abbiamo riscritto in funzione della lunghezza d'onda della radiazione incidente ed introducendo l'impedenza del vuoto $Z_0 \simeq 377\Omega$. Il termine di dipolo magnetico può essere trasurato solo se si ha L dello stesso ordine di grandezza di d, infatti già nel caso in cui λ=10L=100d, si ha che i due termini sono dello stesso ordine di grandezza.

1.2 Sezioni d'urto

Vogliamo ora andare a calcolare le sezioni d'urto di assorbimento ed elastica del circuito, definite come (introducendo la media temporale del vettore di Poynting iniziale della radiazione incidente):

$$\sigma_{abs} = \frac{< P_{abs} >}{< |\mathbf{S_{in}}| >} = \frac{< i >^2 \ R_{load}}{\frac{B_0^2}{2c^2 Z_0}} \tag{12}$$

$$\sigma_{el} = \frac{< P_{el} >}{< |\mathbf{S_{in}}| >} = \frac{< i >^2 \ R_{irr}}{\frac{B_0^2}{2c^2 Z_0}} \tag{13}$$

Dobbiamo quindi andare a calcolare la corrente totale che scorre nel circuito:

$$i(t) = \frac{\epsilon(t)}{R_{load} - \frac{j}{\omega C} + R_{irr}} = \frac{\epsilon(R_{load} + \frac{j}{\omega C} + R_{irr})}{(R_{load} + R_{irr})^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \tag{14}$$

Mediando nel tempo si ottiene e sostituendo si ottiene:

$$< i >^2 = \frac{\epsilon_0^2}{2((R_{load} + R_{irr})^2 + (\frac{1}{\omega C})^2)} = \frac{(\omega L^2 B_0)^2}{2(R + Z_0[\frac{2\pi}{3}(\frac{d}{\lambda})^2 + \frac{8\pi^3}{3}(\frac{L}{\lambda})^4])^2 + (\frac{1}{\omega C})^2)} \tag{15}$$

Da cui si ricava:

$$\sigma_{abs} = \frac{c^2 Z_0 (\omega L^2)^2 R_{load}}{(R_{load} + R_{irr})^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \tag{16}$$

$$\sigma_{abs} = \frac{c^2 Z_0 (\omega L^2)^2 R_{irr}}{(R_{load} + R_{irr})^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \tag{17}$$

2 C.2.13 equilibrio secolare

2.1 teoria

Consideriamo un isotopo radioattivo a vita "breve", prodotto nel decadimento di un isotopo a vita "molto lunga" di cui sia nota la concentrazione al tempo t=0, per determinare la concentrazione del primo in funzione del tempo.
Indicheremo con N_1(t) la concentrazione dell'isotopo "padre", che per semplicità assumiamo decadere sempre nell'isotopo "figlio", che avrà concentrazione N_2(t).

Dette quindi Γ_1 e Γ_2 le larghezze di decadimento, che saranno l'inverso delle vite medie degli isotopi, sappiamo che la concentrazione del "padre" segue la legge:

$$N_1(t) = N_0 e^{-\Gamma_1 t} \tag{18}$$

(questo nel caso in cui Γ_1 non dipenda dal tempo).
Per l'isotopo "figlio" si avrà dunque:

$$\frac{dN_2}{dt} = \Gamma_1 N_1(t) - \Gamma_2 N_2(t) \tag{19}$$

Usando il fatto che N_2(t)=0 per tempi <=0 e risolvendo l'equazione differenziale si ottiene:

$$N_2(t) = \frac{N_0\Gamma_1}{\Gamma_2 - \Gamma_1}(e^{-\Gamma_1 t} - e^{-\Gamma_2 t}) \tag{20}$$

Che, per $\frac{1}{\Gamma_2} << t < \frac{1}{\Gamma_1}$, si riduce a:

$$N_2(t) = \frac{N_0\Gamma_1}{\Gamma_2} e^{-\Gamma_1 t} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} N_1(t) \tag{21}$$

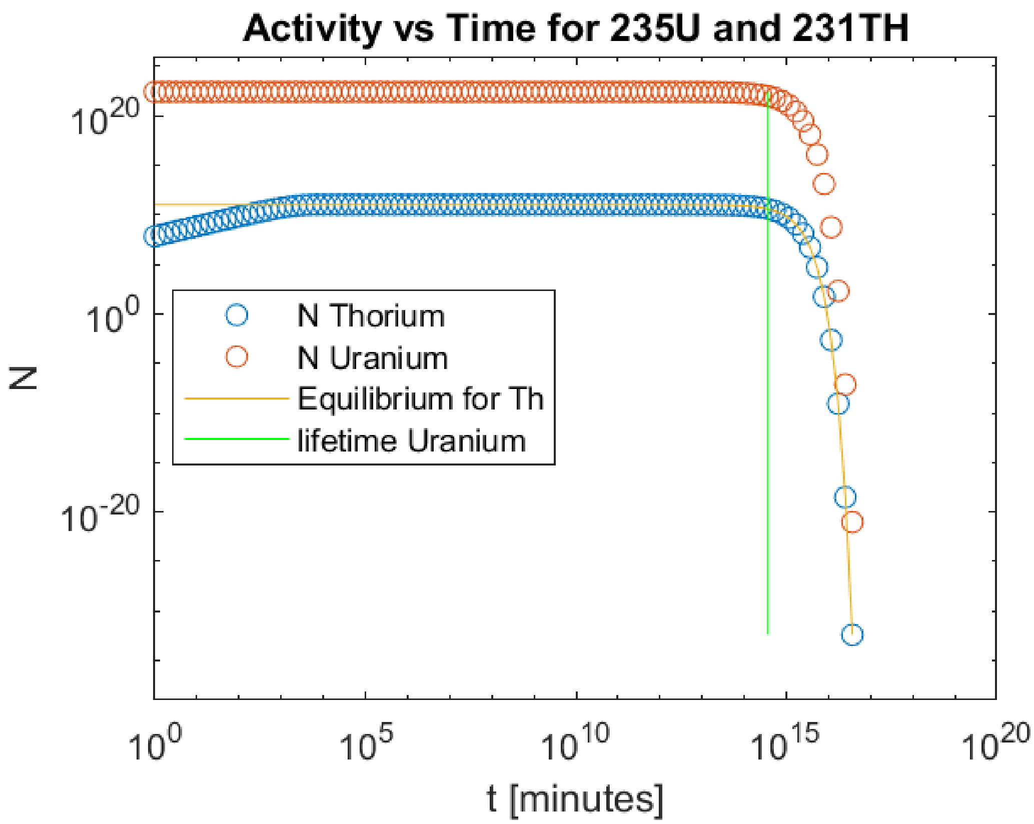
Notiamo che questa è anche la soluzione alla richiesta di equilibrio per la concentrazione dell'isotopo "figlio", ovvero:

$$\frac{dN_2}{dt} = 0 = \Gamma_1 N_1(t) - \Gamma_2 N_2(t) \tag{22}$$

Si parla in questo caso di "equilibrio secolare", in cui l'isotopo radioattivo prodotto non varia la propria concentrazione, almeno fino a quando quella dell'isotopo iniziale non comincia a variare molto velocemente.

2.2 esempio con Uranio 235

Per vedere visivamente l'equilibrio secolare prendiamo il decadimento dell'Uranio 235 nel Torio 231. Si ha:
$\tau_U = 7.04 \cdot 10^8 y = 7.04 \cdot 525600 \cdot 10^8$ min, la vita media dell'Uranio 235;
$\tau_{Th} = 1531$ min, la vita media del Torio 231.
Consideriamo quindi un campione di 10g di Uranio, che equivale a $N_0 = 2.56 \cdot 10^{22}$ atomi.
Usando MATLAB per graficare i modelli in un intervallo di tempo t = [0, 100$\cdot\tau_U$].



Si osserva come l'andamento rispetti l'ipotesi di equilibrio per t»τ_{Th} e come continui a soddisfarlo anche quando si supera il la vita media dell'uranio, nonostante la concentrazione cali sensibilmente.

3 C.3.15 sezione d'urto Compton

Ipotizziamo un semplice modello in cui lo scattering Compton su un elettrone atomico avviene solo se il fotone trasferisce all'elettrone una energia superiore all'energia di ionizzazione I. Dalla conservazione dell'energia e dell'impulso si ottiene:

$$\omega_0 + m_e = \omega_1 + m_e + I \tag{23}$$

$$\omega_0 = \omega_1 cos\theta + (\sqrt{(m_e + I)^2 - m_e^2}) cos\psi \tag{24}$$

$$0 = \omega_1 sin\theta - (\sqrt{(m_e + I)^2 - m_e^2}) sin\psi \tag{25}$$

Dalle ultime due si ricava quindi:

$$\omega_0^2 + \omega_1^2 - 2\omega_0\omega_1 cos\theta = I^2 + 2m_e I \tag{26}$$

E sostituendo ω_1 ricavato dalla prima:

$$\omega_0^2 - \omega_0 I - \frac{m_e I}{1 - cos\theta} = 0 \tag{27}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado e calcolandola al caso limite, ovvero quando $cos\theta = -1$, si ha che la frequenza e quindi l'energia di soglia del fotone incidente è:

$$\omega_0 > \sqrt{\frac{m_e I}{2} + \frac{I^2}{4}} + I/2 \tag{28}$$

Prendiamo ora la formula di Klein-Nishina (29) e la sua approssimazione per basse frequenze (30) per la sezione d'urto Compton differenziale:

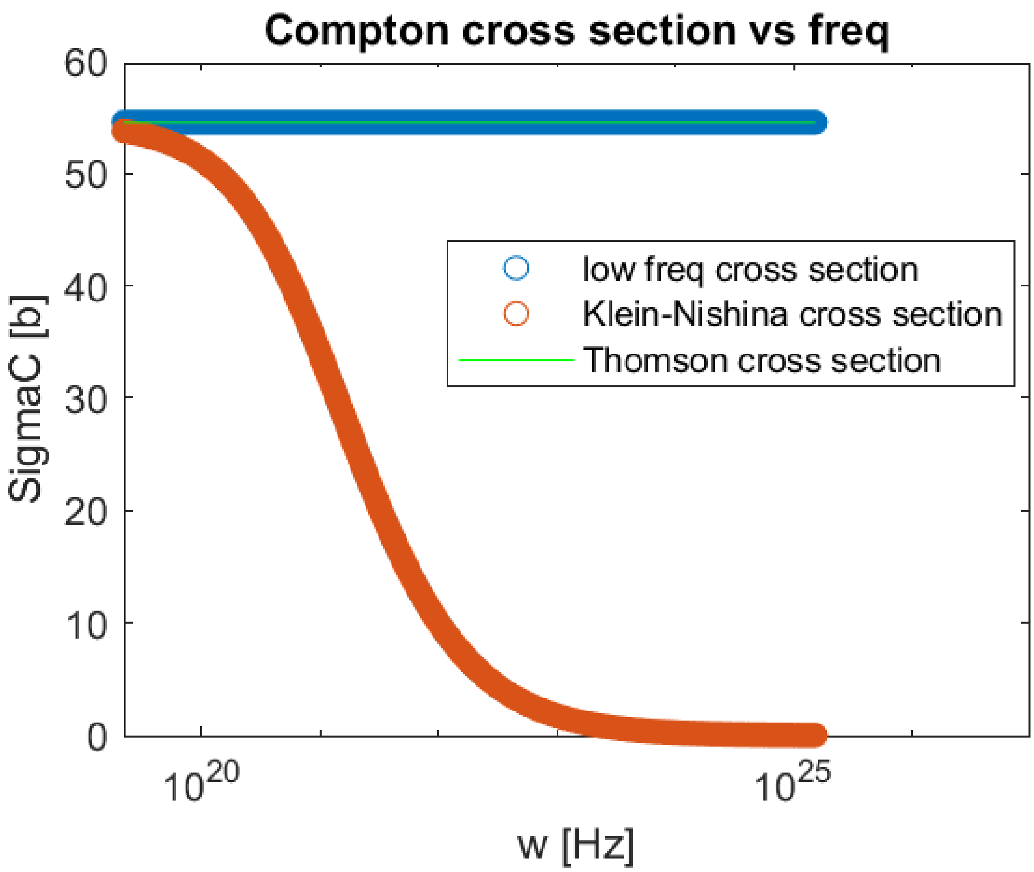
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}(\frac{w_1}{w_0})^2(\frac{w_1}{w_0} + \frac{w_0}{w_1} - sin^2\theta) \tag{29}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{r_e^2}{2}(1 + cos^2\theta) \tag{30}$$

Possiamo integrare la seconda per ottenere la sezione d'urto Compton a basse frequenze, stando attenti però agli estremi di integrazione, infatti avremo $-1 < cos\theta < 1 - p$, dove abbiamo usato $p = \frac{m_e I}{\omega_0(\omega_0 - I)}$ (nel caso di p=2 otteniamo di nuovo l'energia di soglia).

$$\sigma_C = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1-p} \frac{r_e^2}{2}(1 + cos^2\theta) d\phi dcos\theta = \pi r_e^2(\frac{8}{3} - 2p + p^2 - \frac{p^3}{3}) \tag{31}$$

Si nota che per $p -> 0$, ovvero per $\omega >> \sqrt{m_e I}$ si ha che la sezione d'urto Compton tende a quella Thomson.
Per confrontare la formula di Klein-Nishina con l'approssimazione a basse frequenze, con MATLAB abbiamo integrato numericamente la prima e poi graficato entrambi gli andamenti in funzione della frequenza nel caso del Piombo:



La frequenza varia dall'energia di soglia fino a 10 GeV, dove sappiamo che la sezione d'urto Compton tende a zero, ovvero da circa 10^{18} a 10^{26} Hz.
Si vede che, almeno nel caso del piombo, la formula approssimata valga solo per frequenze prossime a quella di soglia e che assume praticamente sempre il valore della sezione d'urto Thomson.