

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro Tecnológico
Departamento Informática

**Relatório do exercício sobre Aplicações de Problemas de Valor no Contorno em
Equações do Calor Unidimensional Transientes**

Daniel Ribeiro Favoreto

Vitória, Maio de 2016

Implementação

Nessa primeira parte, concentramos na implementação dos esquemas explícito, implícito e Crank-Nicolson para a solução da Equação do Calor Unidimensional Transiente.

Como o exercício foi dividido em 3 testes diferentes, e foi dada a implementação dos esquemas para o teste 1, não será apresentada nessa seção a implementação a respeito do teste 1. Os códigos foram enviados como anexo do email.

O teste 2 assim como o teste 1 se trata da equação do calor com condutividade térmica constante e fonte de calor nula, mas a única diferença em relação ao teste 1 se dá pelo fornecimento de um fluxo prescrito ao invés de valor prescrito. Para tratar esse caso, no esquema explícito adicionou-se o tratamento de fluxo prescrito na linha 45:

```
34 lambda = Kappa*dt/(h*h);
35
36 for k = 1:npassos-1
37
38     u(1,k+1) = 100;
39
40
41     for i = 2:(n-1)
42         u(i,k+1) = u(i,k) + lambda * (u(i-1,k) - 2*u(i,k) + u(i+1,k));
43     end
44
45     u(n,k+1) = u(n,k) + lambda * (u(n-1,k) - 2*u(n,k) + u(n,k));
46
47 end
```

Para o esquema implícito, adicionaram-se o tratamento do fluxo prescrito nas linhas 43 e 47:

```
36 for k = 1:npassos-1
37
38     # u(1,k+1) = 100;
39     # u(n,k+1) = 50;
40
41     A(1,1) = 1;
42
43     A(n,n) = 1 + lambda;
44
45     b(1) = 100;
46
47     b(n) = u(n,k);
48
49     for i = 2:(n-1)
50         A(i,i-1) = -lambda;
51         A(i,i) = (1 + 2*lambda);
52         A(i,i+1) = -lambda;
53
54         b(i) = u(i,k);
55     end
```

Para o esquema Crank-Nicolson, o fluxo prescrito foi tratado nas linhas 41,42 e 45,46:

```

38 for k = 1:npassos-1
39
40     A(1,1) = 1 ;
41     A(n,n) = 1 + lambda;
42     A(n,n-1) = -lambda;
43
44     B(1,1) = 1;
45     B(n,n) = 1 - lambda;
46     B(n,n-1) = -lambda;
47
48 for i = 2:(n-1)
49     A(i,i-1) = -lambda;
50     A(i,i) = (1 + 2*lambda);
51     A(i,i+1) = -lambda;
52
53     B(i,i-1) = lambda;
54     B(i,i) = (1 - 2*lambda);
55     B(i,i+1) = lambda;
56 end

```

Já para o teste 3, somou-se dt às respectivas atualizações do vetor u.

Testes e análises

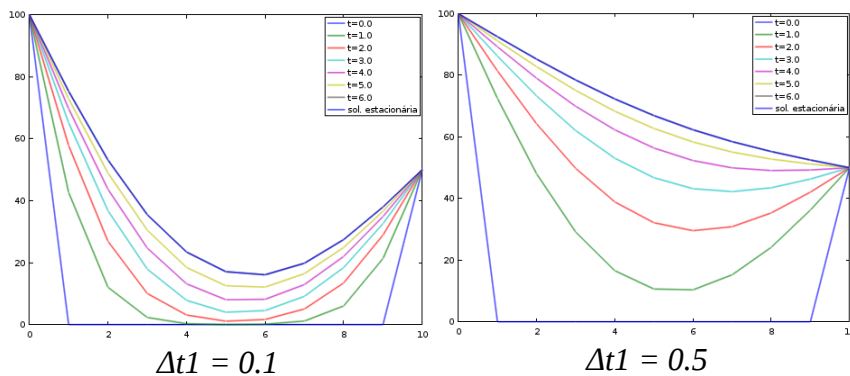
Foram realizados os testes numéricos para os testes 1,2 e 3. Como foi solicitado no exercício, foram feitos testes numéricos para $h = 1$ e $h = 0.1$ considerando métodos de aproximação levando em conta 3 intervalos de tempo diferentes, sendo eles menores do que $(h \cdot h)/2 \cdot a$, maiores do que $(h \cdot h)/2 \cdot a$ e iguais a $(h \cdot h)/2 \cdot a$.

Para o teste 1, temos os seguintes gráficos :

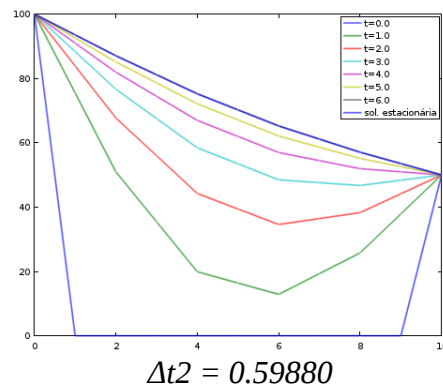
Explícito

$$h = 1$$

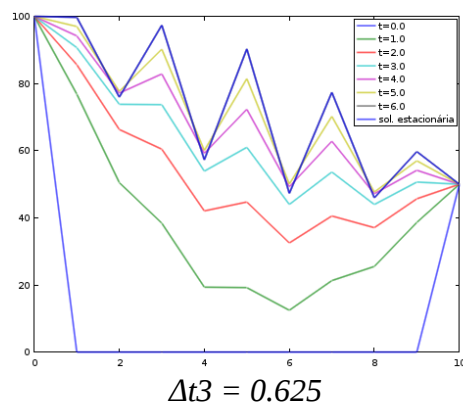
$\Delta t1 < 0.59880$:



$\Delta t2 = 0.59880$:

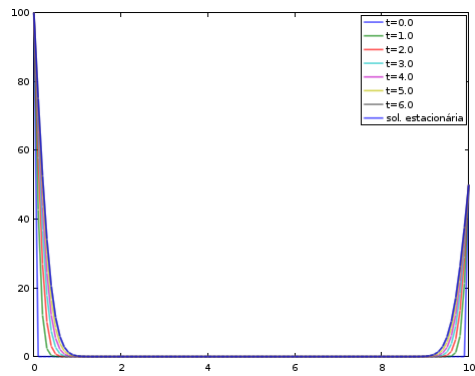


$\Delta t3 > 0.59880$:



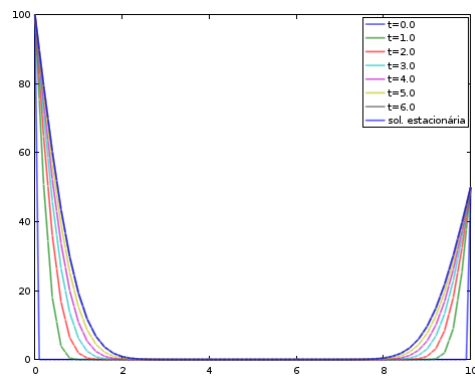
$$h = 0.1$$

$$\Delta t_1 < 0.0059880 :$$



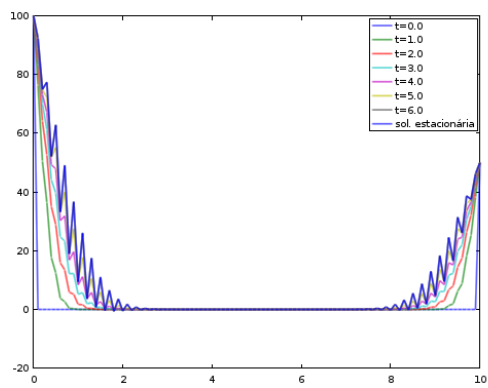
$$\Delta t_1 = 0.001$$

$$\Delta t_2 = 0.0059880 :$$



$$\Delta t_2 = 0.0059880$$

$$\Delta t_3 > 0.0059880 :$$

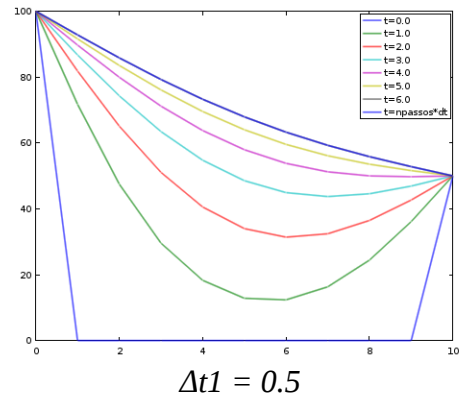
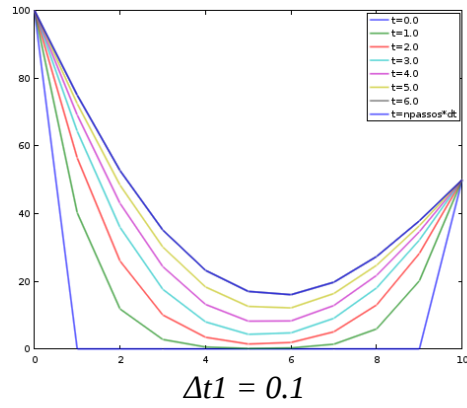


$$\Delta t_3 = 0.0062$$

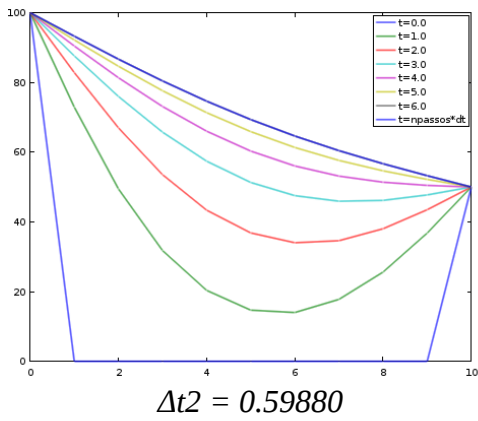
Implícito

$$h = 1$$

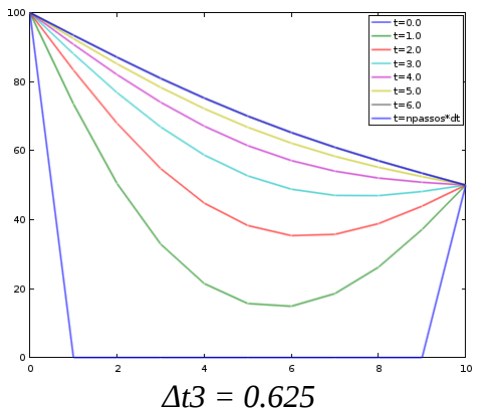
$\Delta t1 < 0.59880$:



$\Delta t2 = 0.59880$:

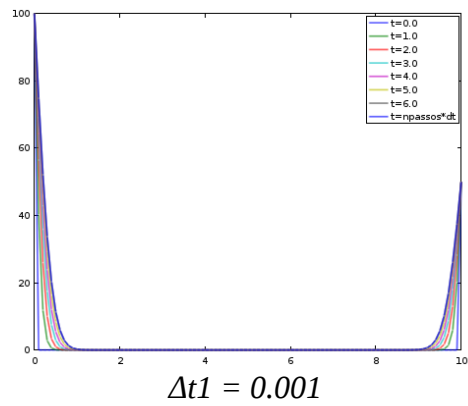


$\Delta t3 > 0.59880$:

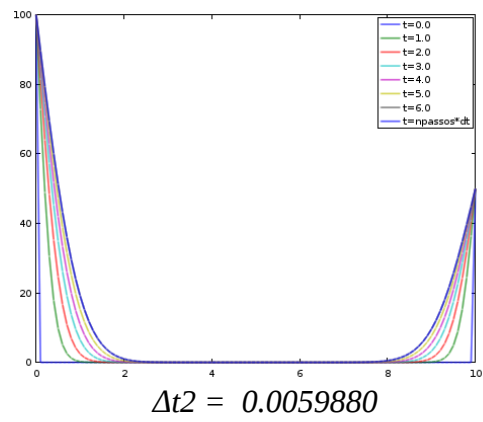


$$h = 0.1$$

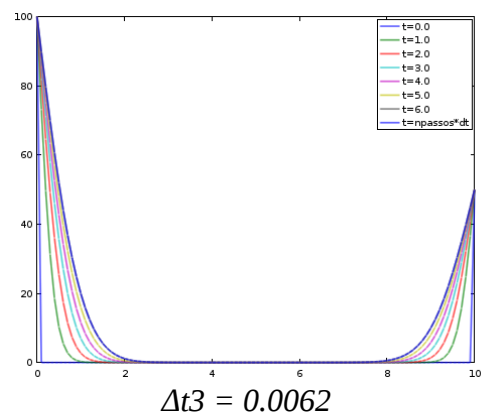
$\Delta t1 < 0.0059880$:



$\Delta t2 = 0.0059880$:



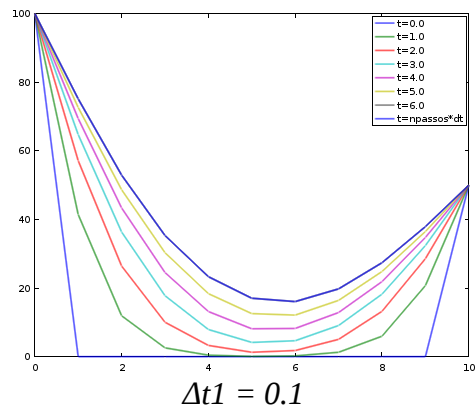
$\Delta t3 > 0.0059880$:



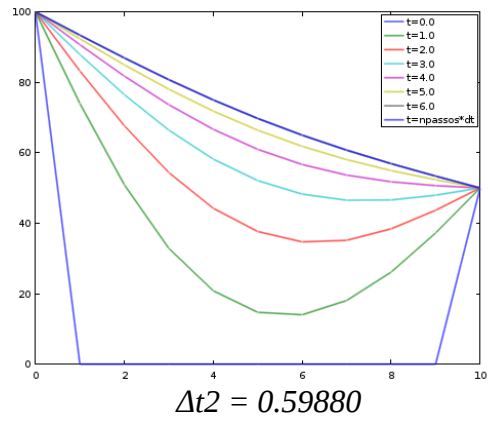
Crank-Nicolson

$$h = 1$$

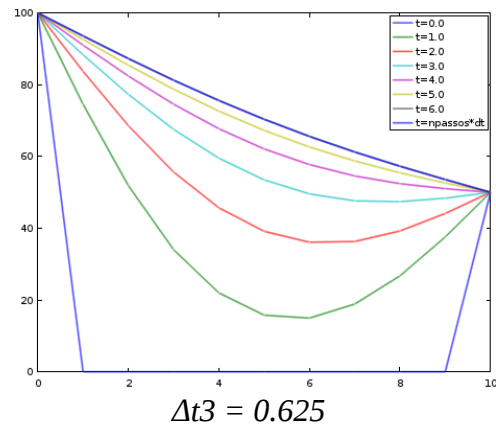
$\Delta t1 < 0.59880$:



$\Delta t2 = 0.59880$:

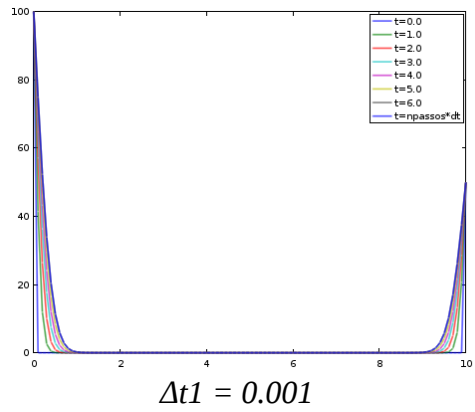


$\Delta t3 > 0.59880$:

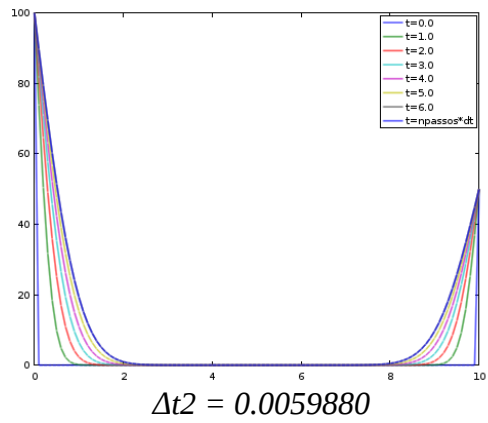


$$h = 0.1$$

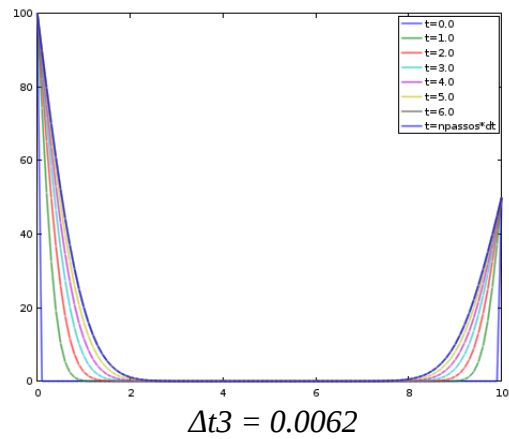
$\Delta t1 < 0.0059880$:



$\Delta t2 = 0.0059880$:



$\Delta t3 > 0.0059880$:

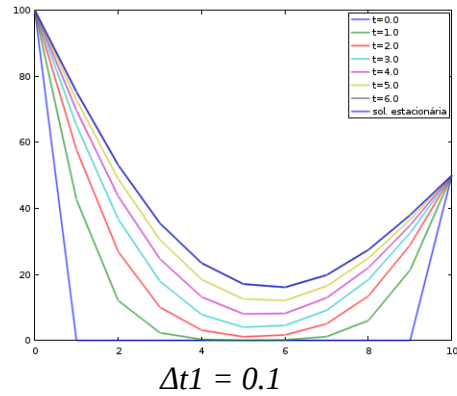


Para o teste 2, temos os seguintes gráficos de solução:

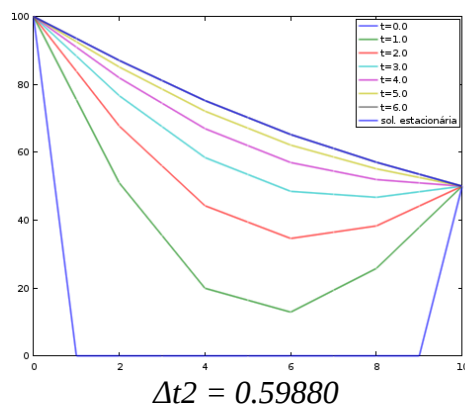
Explícito

$h = 1$

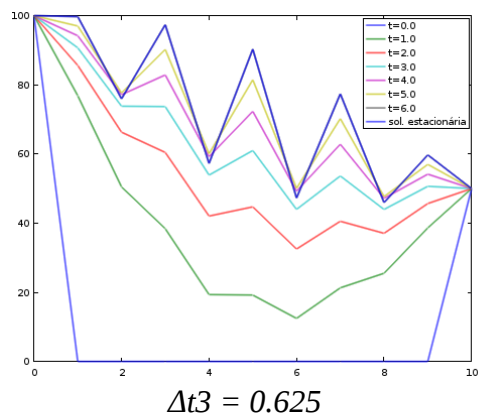
$\Delta t_1 < 0.59880$:



$\Delta t_2 = 0.59880$:

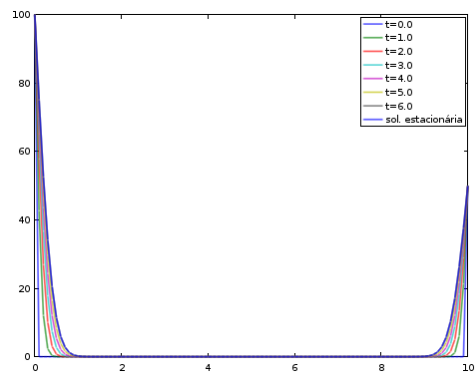


$\Delta t_3 > 0.59880$:



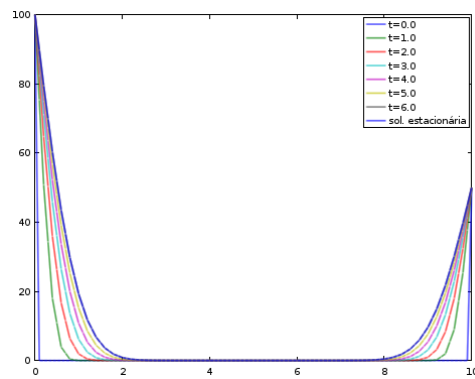
$$h = 0.1$$

$$\Delta t_1 < 0.0059880 :$$



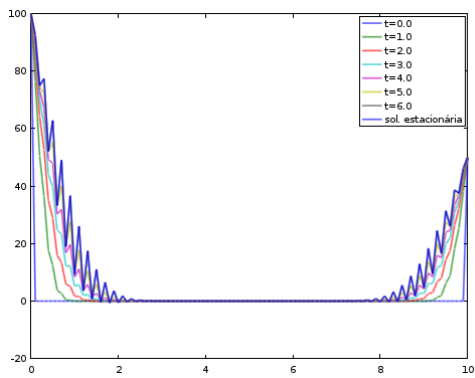
$$\Delta t_2 = 0.0059880 :$$

$$\Delta t_1 = 0.001$$



$$\Delta t_2 = 0.0059880$$

$$\Delta t_3 > 0.0059880 :$$

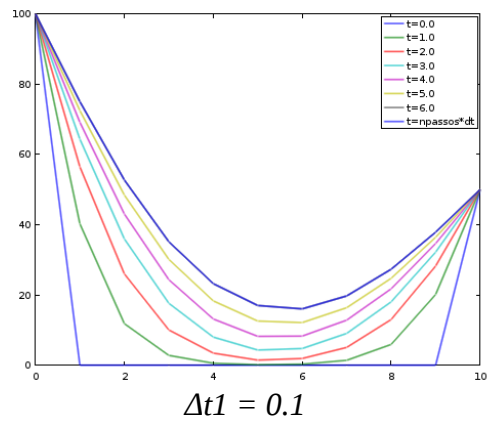


$$\Delta t_3 = 0.00625$$

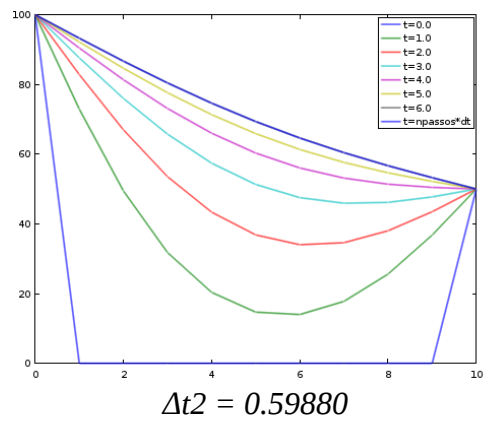
Implícito

$h = 1$

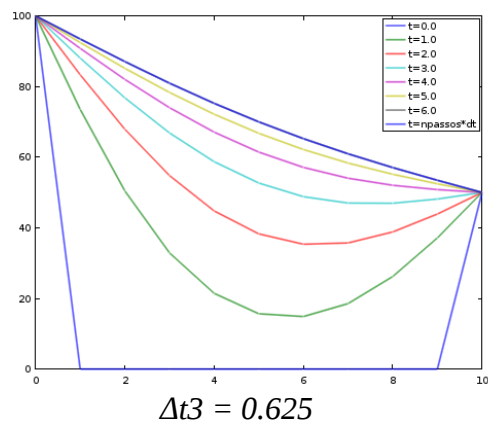
$\Delta t1 < 0.59880$:



$\Delta t2 = 0.59880$:

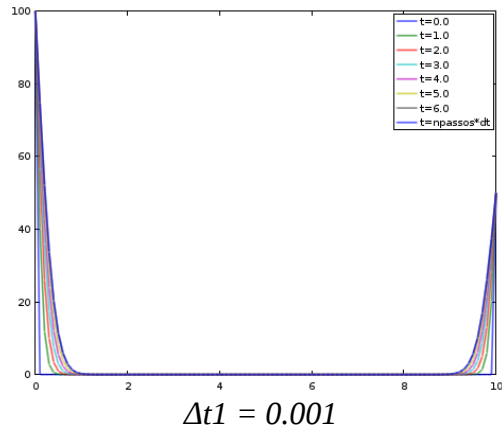


$\Delta t3 > 0.59880$:



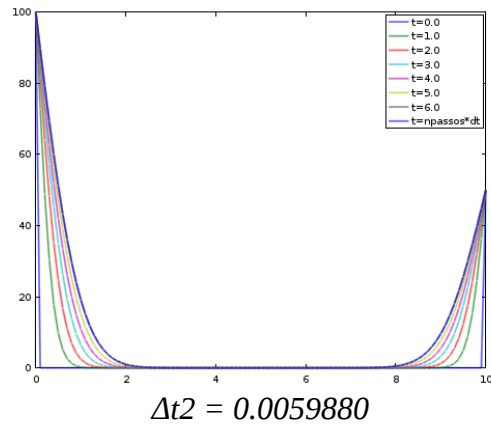
$$h = 0.1$$

$$\Delta t_1 < 0.0059880 :$$



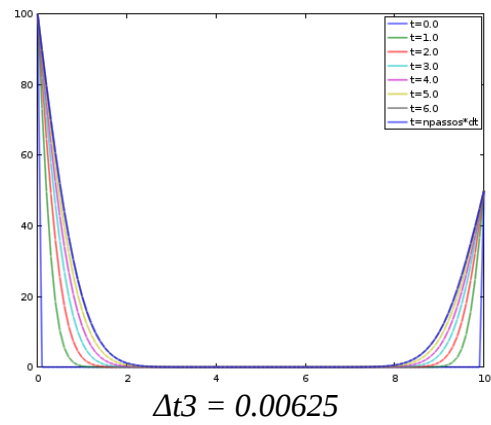
$$\Delta t_1 = 0.001$$

$$\Delta t_2 = 0.0059880 :$$



$$\Delta t_2 = 0.0059880$$

$$\Delta t_3 > 0.0059880 :$$

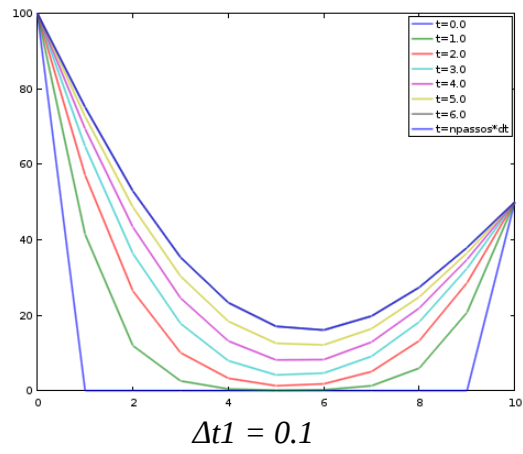


$$\Delta t_3 = 0.00625$$

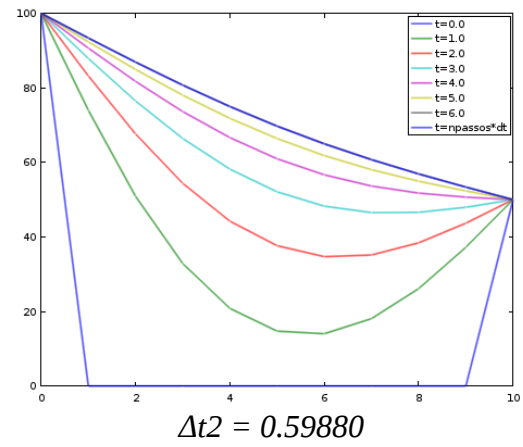
Crank-Nicolson

$$h = 1$$

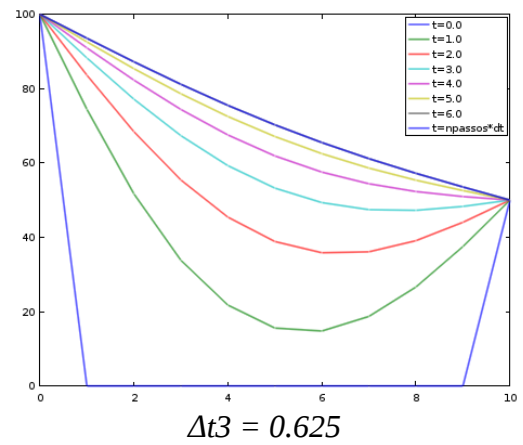
$$\Delta t_1 < 0.59880 :$$



$$\Delta t_2 = 0.59880 :$$

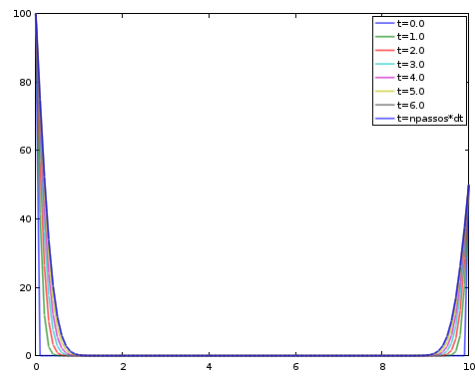


$$\Delta t_3 > 0.59880 :$$



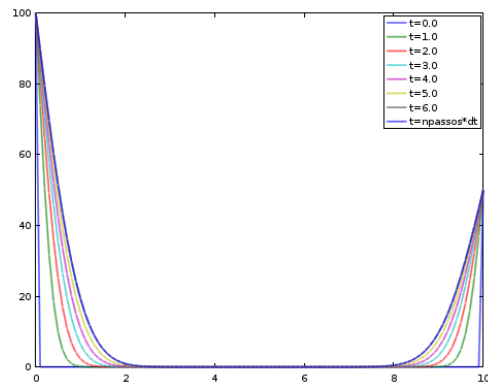
$h = 0.1$

$\Delta t1 < 0.0059880$:



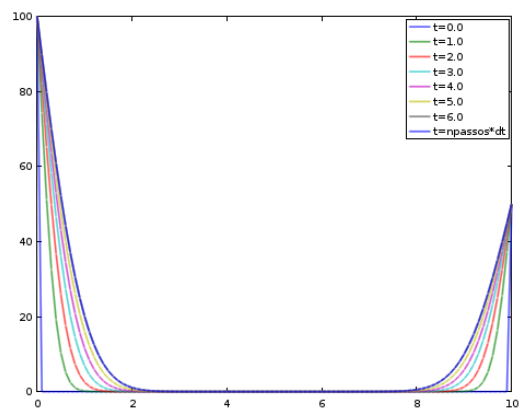
$\Delta t1 = 0.001$

$\Delta t2 = 0.0059880$:



$\Delta t2 = 0.0059880$

$\Delta t3 > 0.0059880$:



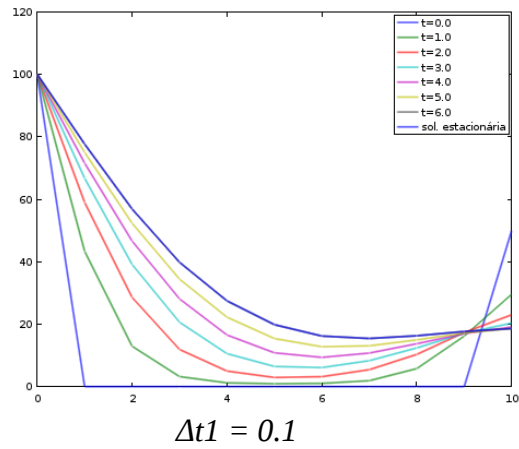
$\Delta t3 = 0.00625$

Para o teste 3, temos os seguintes gráficos de solução:

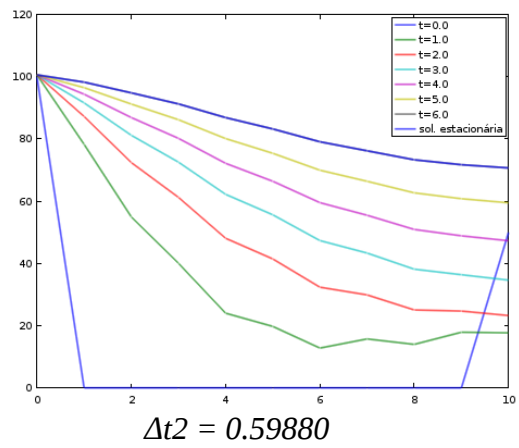
Explícito

$$h = 1$$

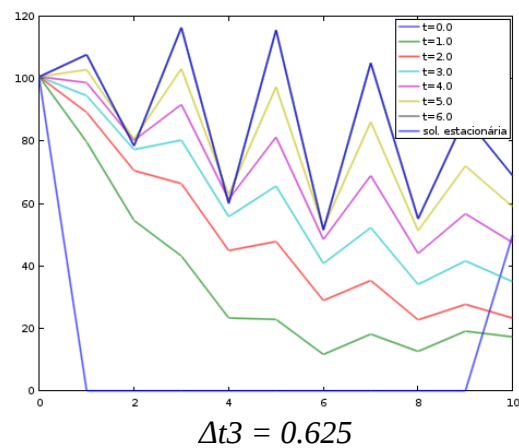
$\Delta t1 < 0.59880$:



$\Delta t2 = 0.59880$:

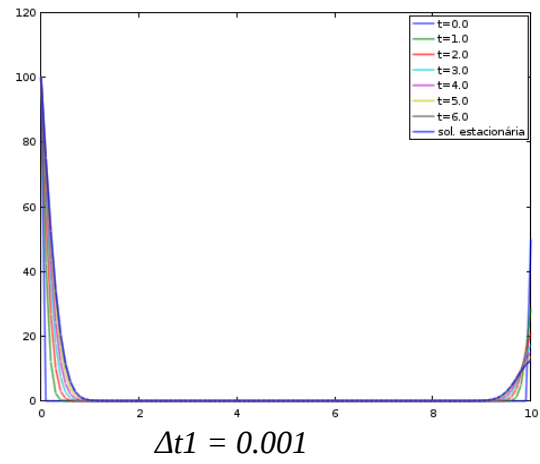


$\Delta t3 > 0.59880$:

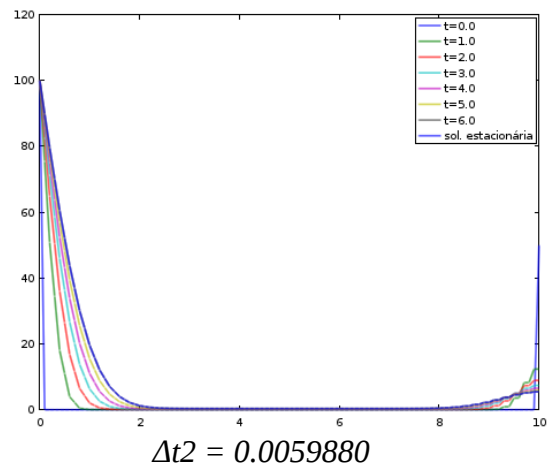


$$h = 0.1$$

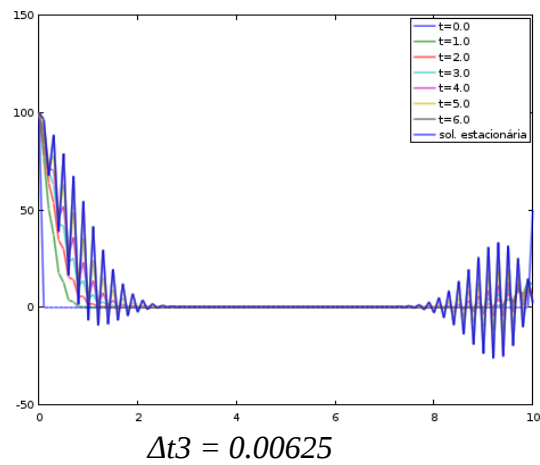
$$\Delta t1 < 0.0059880 :$$



$$\Delta t2 = 0.0059880 :$$



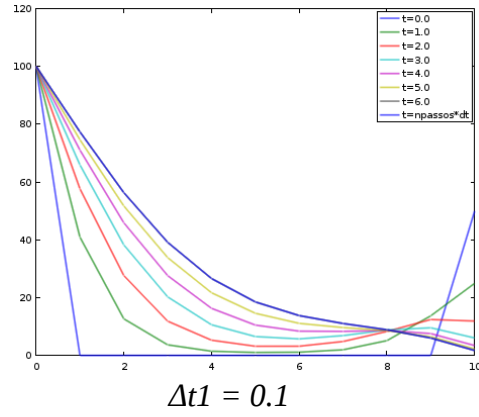
$$\Delta t3 > 0.0059880 :$$



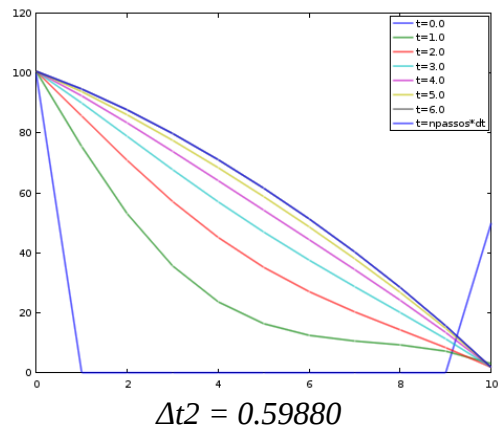
Implícito

$$h = 1$$

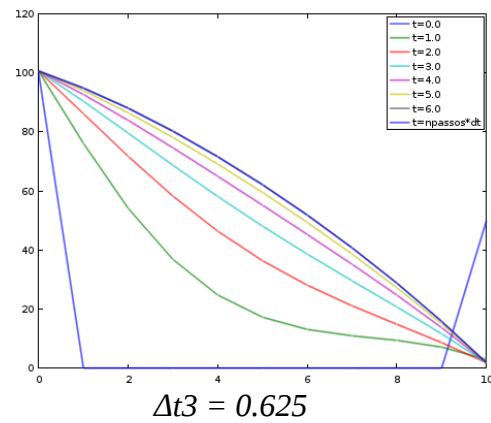
$\Delta t1 < 0.59880$:



$\Delta t2 = 0.59880$:

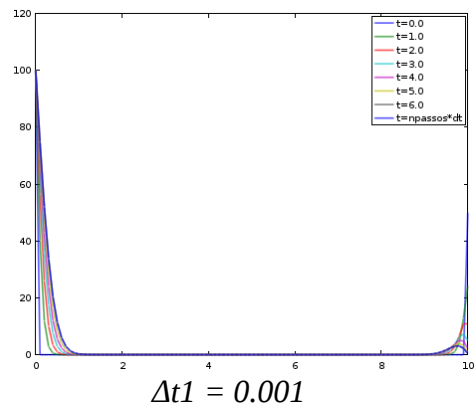


$\Delta t3 > 0.59880$:

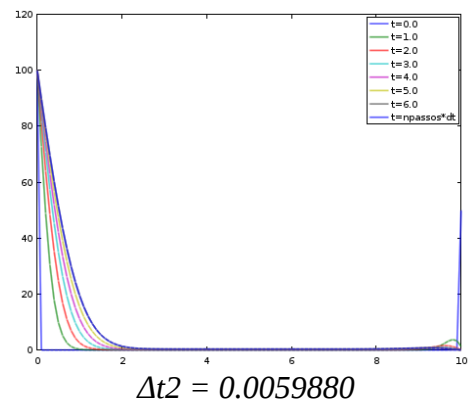


$$h = 0.1$$

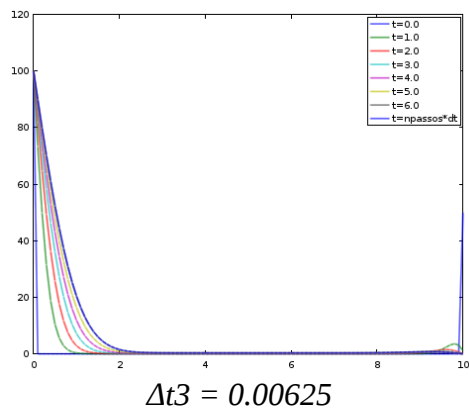
$$\Delta t1 < 0.0059880 :$$



$$\Delta t2 = 0.0059880 :$$



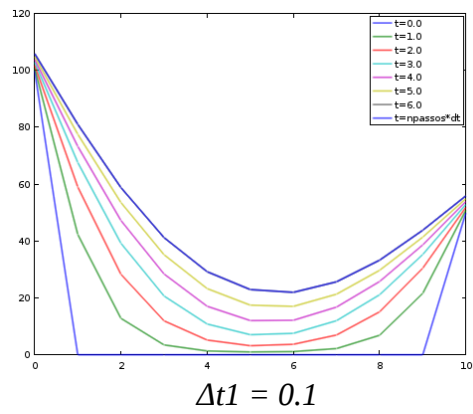
$$\Delta t3 > 0.0059880 :$$



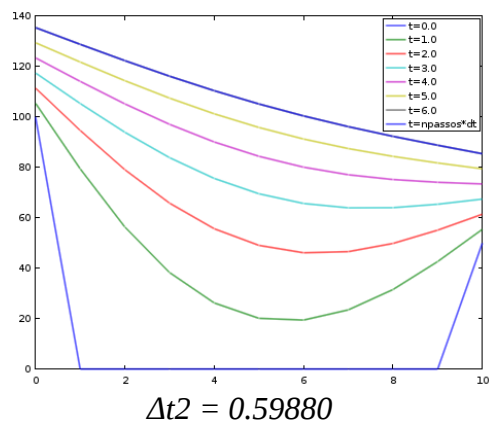
Crank-Nicolson

$$h = 1$$

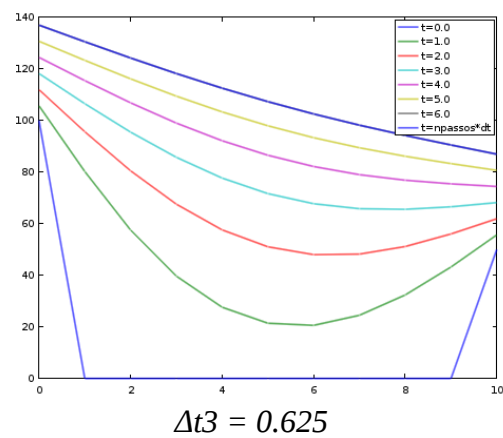
$\Delta t_1 < 0.59880$:



$\Delta t_2 = 0.59880$:

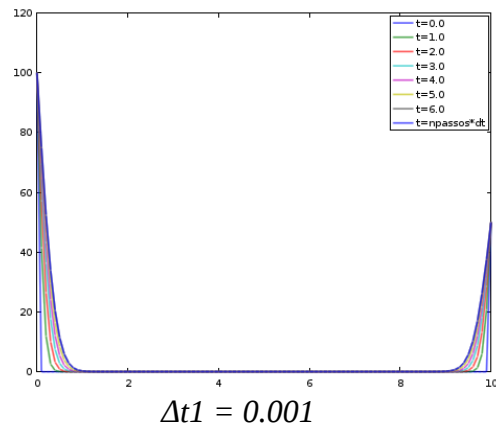


$\Delta t_3 > 0.59880$:

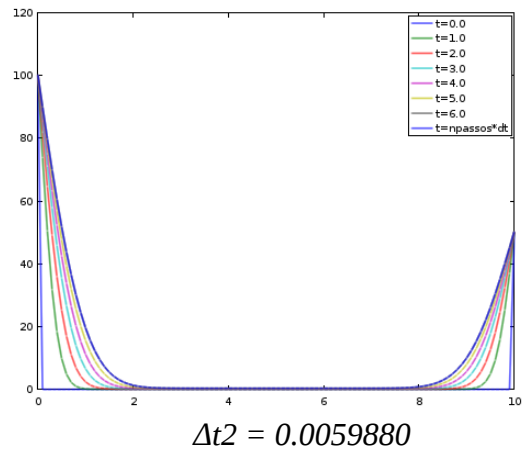


$$h = 0.1$$

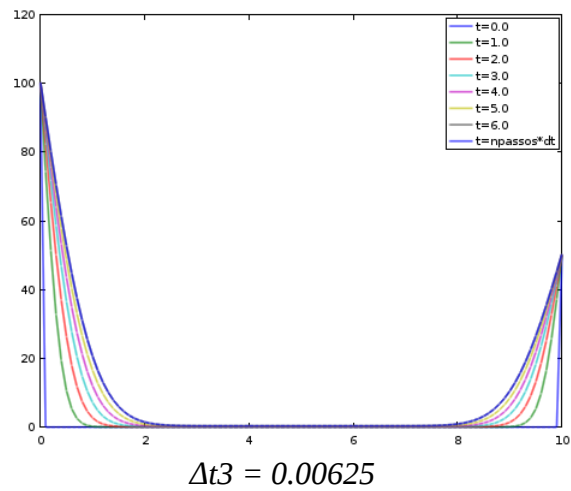
$$\Delta t1 < 0.0059880 :$$



$$\Delta t2 = 0.0059880 :$$



$$\Delta t3 > 0.0059880 :$$



Com base nos testes numéricos realizados, temos que se tratando do teste 1 foi constatado que a acuidade das soluções sofreram pouquíssimas diferenças entre os 3 esquemas tanto para $h = 1$ quanto para $h = 0.1$. Porém o esquema de crank-nicolson se mostrou mais lento durante as execuções de teste, enquanto que o esquema explícito apresentou maior rapidez. Foi constatado que a variação do tempo quando era igual a 0.59880 obteve-se resultados mais precisos na solução. E enquanto mais se afastava desse valor tanto para mais quanto para menos, pior a qualidade da solução ficava. A escolha de $h = 0.1$, ou seja, um menor espaçamento entre os pontos impactou no tempo de execução dos esquemas, tornando-os mais lentos.

Durante o teste 2, onde se tinha fluxo prescrito, o esquema explícito apresentou uma qualidade de solução inferior em relação ao implícito e crank-nicolson, porém, o explícito conseguiu tempos de execução inferiores aos demais. Crank-nicolson levou mais tempo para terminar sua execução em todos os testes. A escolha de $h = 1$ fez com que os tempos de execução fossem muito baixos em relação a $h = 0.1$.

No teste 3, o esquema Crank-Nicolson surpreendentemente apresentou uma qualidade de solução consideravelmente superior em relação ao implícito e explícito. Desconsiderando erros de implementação, houve uma observação no tempo de execução dos esquemas e constatou-se que o implícito foi mais eficiente embora não apresentasse qualidade de solução maior que o Crank-Nicolson.

Por conseguinte, o esquema do método Explícito apresentou melhor custo benefício em relação a eficiência e qualidade de solução, logo, levando alguma vantagem em relação aos demais.