Herramientas Computacionales 2016661

Diferencias Finitas

Ricardo Amézquita

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

¿Que problema se va a resolver?

Aproximaciones realizadas
Primeras derivadas

$$\Phi\left(i,j\right) \equiv \Phi\left(x = x_0 + \Delta x\, i, y = y_0 + \Delta y\, j\right)$$

Diferencia central
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\Phi(i+1,j) - \Phi(i-1,j)}{2\Delta x}$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{ij} = \frac{\Phi(i,j+1) - \Phi(i,j-1)}{2\Delta y}$$

Diferencia adelante
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\Phi(i+1,j) - \Phi(i,j)}{\Delta x}$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{ij} = \frac{\Phi(i,j+1) - \Phi(i,j)}{\Delta y}$$

Diferencia atrás
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\Phi(i,j) - \Phi(i-1,j)}{\Delta x}$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{ij} = \frac{\Phi(i,j) - \Phi(i,j-1)}{\Delta y}$$

Aproximaciones realizadas

Segundas derivadas

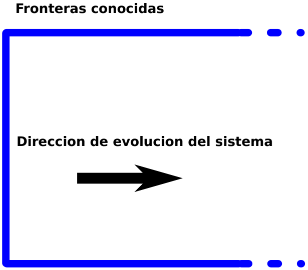
$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{ij} = \frac{\Phi\left(i+1,j\right) - 2\Phi\left(i,j\right) + \Phi\left(i-1,j\right)}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_{ij} = \frac{\Phi\left(i,j+1\right) - 2\Phi\left(i,j\right) + \Phi\left(i,j-1\right)}{\Delta x^2}$$

Ejemplo 1

Ecuación de Difusión: $\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$

- Condiciones de frontera
  - $T(0,t) = 273K$
  - $T(5,t) = 273K$
- Condición inicial
  - $T(x,0) = 473K$



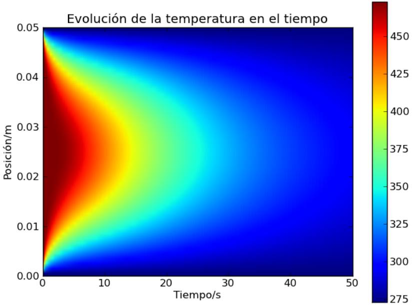
Ecuaciones de diferencias finitas a resolver

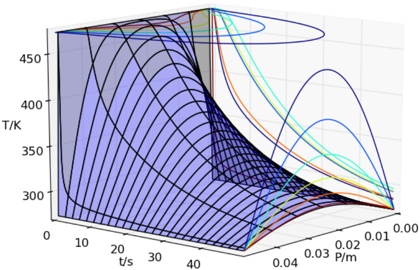
$$\alpha \frac{T(i+1,j) - 2T(i,j) + T(i-1,j)}{\Delta x^2} = \frac{T(i,j+1) - T(i,j)}{\Delta t}$$

$$T(i,j+1) = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\left(T(i+1,j) - 2T(i,j) + T(i-1,j)\right) + T(i,j)$$

Ejercicio:

- Escriba un programa que resuelva el problema de difusión planteado anteriormente usando el método de diferencias finitas, con un tiempo de evolución de 100 s (en la filmina anterior el ancho está dado en centímetros). Utilice un valor de $\alpha = 1{,}172x10^{-5} m^2/s$ el cual corresponde a la difusividad térmica del acero al carbono. Tome inicialmente $\Delta t = 0{,}005\, s$, y $\Delta x = 0{,}001\, m$.

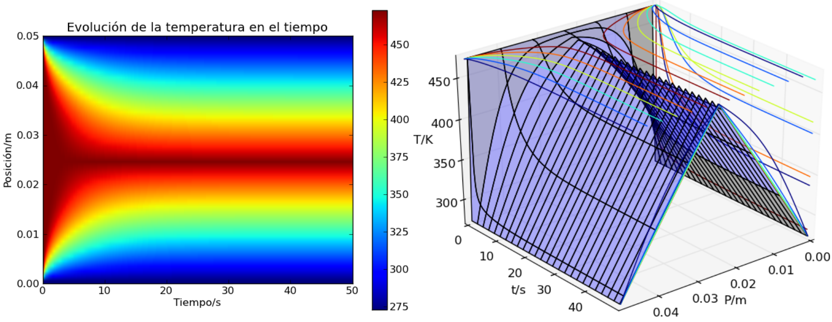




Ejercicio:

Continuación

- Modifique su programa para que el punto central de la barra se mantenga a $473\,^oK$.



- ¿Que pasa cuando ${}^{\alpha\Delta t}/_{\Delta x^2}$ se hace muy grande?. Trate de encontrar el limite cuando el algoritmo no funciona, y explique que pasa.

Ejercicio:

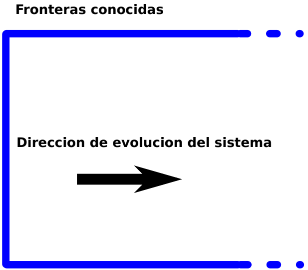
Continuación

Suponga que un extremo de la barra se mantiene a $300^o K$, y el otro a $373K$, y que inicialmente la barra está a $300^o K$. ¿Como es el perfil de temperatura a $t = 0{,}5s$, $t = 1{,}0s$, $t = 10{,}0s$, $t = 50{,}0s$ y $t = 500s$? ¿Como será el perfil de temperatura estacionario? Compare los perfiles con los que se obtendrían si la barra fuera de madera ($\alpha = 8{,}2 \times 10^{-8} m^2/s$). Si usted fuera a hacer la manija de una sartén ¿cual material sería el mas apropiado?

Ejemplo 2:

Ecuación de Onda: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$

- Condiciones de frontera
  - $\Phi(0, t) = 0$
  - $\Phi(1, t) = 0$
- Condición inicial , (para $0 \leq x \leq 1$)
  - $\Phi(x, 0) = \sin(\pi x)$
  - $\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_0 = 0$



Ecuaciones de diferencias finitas a resolver

$$\frac{\Phi(i+1,j) - 2\Phi(i,j) + \Phi(i-1,j)}{\Delta x^2} = \frac{\Phi(i,j+1) - 2\Phi(i,j) + \Phi(i,j-1)}{\Delta t^2}$$

$$\Phi(i,j+1) = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\Phi(i+1,j) - 2\Phi(i,j) + \Phi(i-1,j)\right) + 2\Phi(i,j) - \Phi(i,j-1)$$

Ejemplo 2:

Ecuación de Onda: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$

Para j=0 tenemos:

$$\Phi(i,1) = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\Phi(i+1,0) - 2\Phi(i,0) + \Phi(i-1,0)\right) + 2\Phi(i,0) - \Phi(i,-1)$$

de donde no conocemos $\Phi(i,-1)$, pero de la condicion $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_0 = 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Phi(i,1) - \Phi(i,-1)}{2\Delta t} \\ \Phi(i,-1) &= \Phi(i,1) \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Ecuación de Onda: $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$

Al aplicar esto a la ecuación anterior tenemos que:

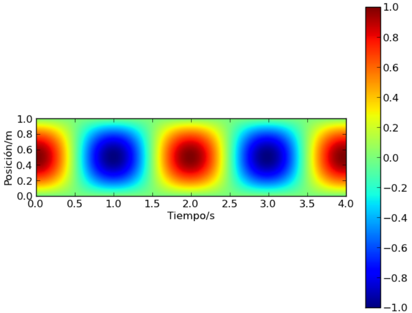
$$\Phi(i,1) = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\Phi(i+1,0) - 2\Phi(i,0) + \Phi(i-1,0)\right) + 2\Phi(i,0) - \Phi(i,1)$$

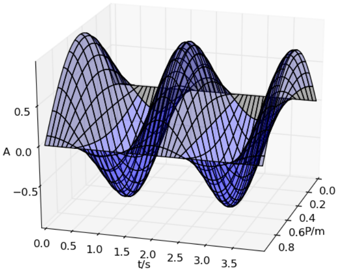
de donde:

$$\Phi(i,1) = \frac{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\Phi(i+1,0) - 2\Phi(i,0) + \Phi(i-1,0)\right) + 2\Phi(i,0)}{2}$$

Ejercicio 2:

- Escriba un programa que resuelva la ecuación de onda con las condiciones de frontera dadas utilizando diferencias finitas





- ¿Que pasa si $\Delta t/\Delta x$ es muy grande?
- ¿Como será la solución si la velocidad de propagación de la onda es diferente a 1?
- ¿Como está esto relacionado con el valor de $\Delta t/\Delta x$?

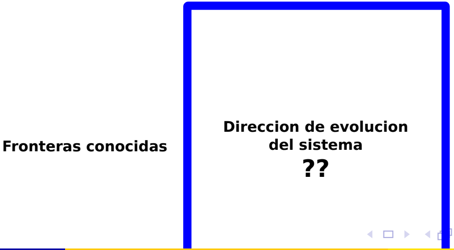
Ejemplo 3:

Ecuación de Poisson y Laplace: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = g\left(x, y\right)$

$$\frac{\Phi\left(i+1,j\right) - 2\Phi\left(i,j\right) + \Phi\left(i-1,j\right)}{\Delta x^2} + \frac{\Phi\left(i,j+1\right) - 2\Phi\left(i,j\right) + \Phi\left(i,j-1\right)}{\Delta y^2} = g\left(i,j\right)$$

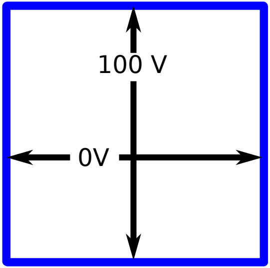
Si se hace $h = \Delta x = \Delta y$ la ecuación anterior se puede reescribir como:

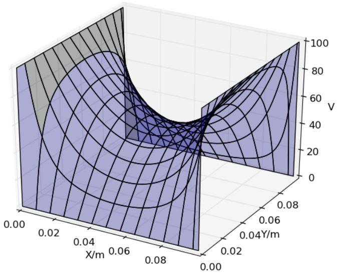
$$\Phi\left(i,j\right) = \frac{\Phi\left(i+1,j\right) + \Phi\left(i-1,j\right) + \Phi\left(i,j+1\right) + \Phi\left(i,j-1\right) - g\left(i,j\right) \times h^2}{4}$$



Ejercicio 3:

Calcule el potencial dentro de una caja de 10 cm x 10 cm, cuyos lados se encuentran a:





Método de sobre relajación

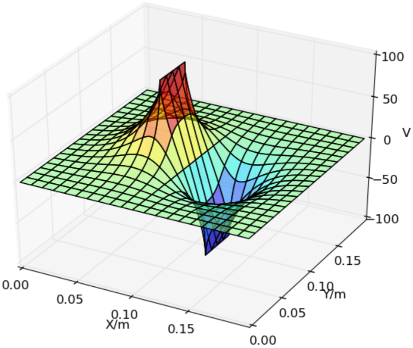
Ecuación de Poisson y Laplace: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = g\left(x, y\right)$

$$R\left(i,j\right) = \Phi\left(i+1,j\right) + \Phi\left(i-1,j\right) + \Phi\left(i,j+1\right) + \Phi\left(i,j-1\right) - 4 \times \Phi\left(i,j\right) - g\left(i,j\right) \times h^2$$

$$\Phi\left(i,j\right)_{k+1} = \Phi\left(i,j\right)_k + \frac{w}{4} R\left(i,j\right)_k$$

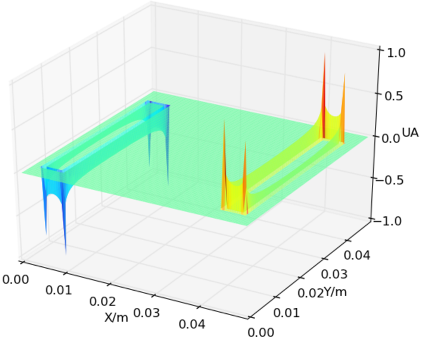
Ejercicio 4:

Calcular el potencial producido por un condensador de placas paralelas delgadas que se encuentra en la mitad de una caja de $20cm \times 20cm$ conectada a tierra. Suponga que las placas miden $4cm$ de largo, y que se encuentran separadas $4cm$. Haga la gráfica para el caso en que una placa está a 100V y la otra está a -100V.



Ejercicio 5:

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -4\pi\rho$, encuentre la distribución de carga en las placas de un condensador similar al simulado en el punto anterior. Tenga en cuenta que para poder calcular esto, las placas deben tener un espesor diferente a 0.



Ejercicio 5:

Teniendo en cuenta que $E = -\nabla U = {}^{\partial U}/_{\partial x}\hat{x} + {}^{\partial U}/_{\partial y}\hat{y}$, y usando la orden quiver, haga una gráfica de las lineas de campo obtenidas.