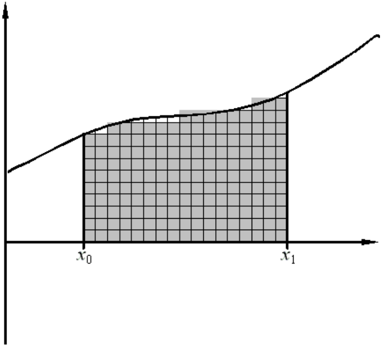
Herramientas Computacionales 2016661

Métodos de integración

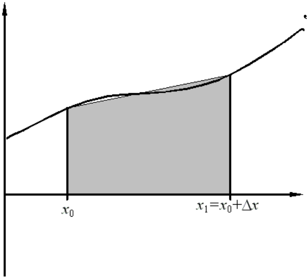
Ricardo Amézquita Orozco

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

14 de octubre de 2015



x_0
x_1



$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \mathrm{Taylor}\left(f(x), x_0\right) dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{x_0}^{x_0+\Delta x} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \frac{\Delta x^{n+1}}{n+1} =$$

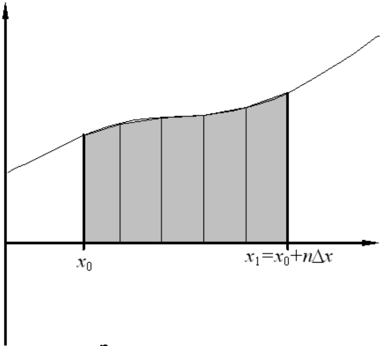
$$f(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2} f'(x_0)\,\Delta x^2 + \frac{1}{6} f''(x_0)\,\Delta x^3 + \ldots$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\, dx = f(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2} f'(x_0)\,\Delta x^2 + O\left(\Delta x^3\right)$$

Remplazando $f'(x)$ por la expresión aproximada que conocemos y despreciando los términos de alto orden, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\, dx &= f(x_0)\,\Delta x + \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x}\Delta x^2 + O\left(\Delta x^3\right) \\
&\simeq \left(f(x_0) + \frac{1}{2}\left(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right)\right)\Delta x \\
&= \frac{\left(f(x_0+\Delta x) + f(x_0)\right)}{2}\Delta x
\end{aligned}$$

Método del trapecio compuesto



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(f(x_0+i\Delta x)+f(x_0+(i+1)\Delta x)\right)$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_0+i\Delta x)\right)$$

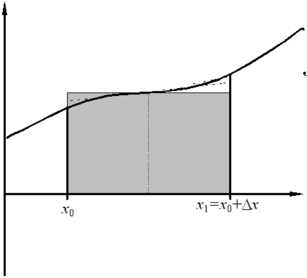
Método del trapecio compuesto

Ejercicio

1. Usando la notación matricial de numpy, escriba una función que calcule la integral utilizando el método del trapecio compuesto. Los parámetros de entrada deben ser:
   1. F - La función a integrar
   2. x_0 y x_1- los limites de integración
   3. n - El numero de particiones a hacer. Por defecto **n=100**

   Nota: Usar notación matricial para este ejercicio, implica que no se pueden usar ciclos for
2. Usando la función creada, calcule la integral a una función para la cual usted conozca los resultados analíticos, y grafique el error de su función aproximada vs n.

Método del punto medio



$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\left(x\right) dx = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \mathrm{Taylor}\left(f\left(x\right), x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{n!} \left(x - x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)^n dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{n!} \left.\frac{\left(x - x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\right|_{x_0}^{x_0+\Delta x} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{n!} \frac{\left(\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^{(n+1)} - \left(-\frac{\Delta x}{2}\right)^{(n+1)}\right)}{n+1} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\, f^{(2n)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{(2n)!} \frac{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^{(2n+1)}}{(2n)+1} = \Delta x\, f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{f''\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{6} \frac{\Delta x^3}{4} + .$$

Si se dejan únicamente las aproximaciones a primer orden, se tiene que:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\,dx = \Delta x\, f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Haciendo una analogía al método del trapecio compuesto se llega a:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_0 + \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)$$

Método del punto medio compuesto

Ejercicio

1. Usando la notación matricial de numpy, escriba una función que calcule la integral utilizando el método del punto medio compuesto. Los parámetros de entrada deben ser:
    1. F - La función a integrar
        1. x_0 y x_1- los limites de integración
        2. n - El numero de particiones a hacer. Por defecto **n=100**

    Nota: Usar notación matricial para este ejercicio, implica que no se pueden usar ciclos for
    2. Usando la función creada, calcule la integral a una función para la cual usted conozca los resultados analíticos, y grafique el error de su función aproximada vs n. Compare los resultados con los obtenidos para el método del trapecio.

Si tenemos 3 puntos en el espacio,$(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, $(x_{i+2}, f(x_{i+2}))$, la parábola que pasa por estos 3 puntos, esta dada por:

$$
\begin{aligned}
f_{aprox}(x) &= \left(\frac{(x_{i+1}-x)(x_{i+2}-x)}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+2}-x_i)}\right) f(x_i) \\
&+ \left(\frac{(x_i-x)(x_{i+2}-x)}{(x_i-x_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+1})}\right) f(x_{i+1}) \\
&+ \left(\frac{(x_i-x)(x_{i+1}-x)}{(x_i-x_{i+2})(x_{i+1}-x_{i+2})}\right) f(x_{i+2})
\end{aligned}
$$

Si se toma que $(x_{i+2} - x_{i+1}) = (x_{i+1} - x_i) = \Delta x$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
f_{aprox}(x) &= \tfrac{1}{2\Delta x^2} \\
&\quad ((x_{i+1} - x)(x_{i+2} - x) f(x_i) && (1) \\
&\quad -2(x_i - x)(x_{i+2} - x) f(x_{i+1}) && (2) \\
&\quad +(x_i - x)(x_{i+1} - x) f(x_{i+2})) && (3)
\end{aligned}
$$

La aproximación que se hace en este método es:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} f_{aprox}(x)\,dx$$

lo que se puede solucionar integrando 1, 2 y 3

Integral 1

Si se reemplaza $X = x + x_i$, se tiene que:

$$f\left(x_i\right)\int_{x_i}^{x_{i+2}}\left(x_{i+1}-x\right)\left(x_{i+2}-x\right)dx =$$

$$f\left(x_i\right)\int_{0}^{2\Delta x}\left(x_{i+1}-\left(X+x_i\right)\right)\left(x_{i+2}-\left(X+x_i\right)\right)dX =$$

$$f\left(x_i\right)\int_{0}^{2\Delta x}\left(\Delta x-X\right)\left(2\Delta x-X\right)dX =$$

$$f\left(x_i\right)\left(2\Delta x^2 X-\frac{3}{2}\Delta x X^2+\frac{X^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\Delta x} =$$

$$f\left(x_i\right)\left(4\Delta x^3-6\Delta x^3+\frac{8}{3}\Delta x^3\right) =$$

$$f\left(x_i\right)\frac{2}{3}\Delta x^3$$

Integral 2

Si se reemplaza $X = x + x_i$, se tiene que:

$$f\left(x_{i+1}\right)\int_{x_i}^{x_{i+2}}\left(x_i - x\right)\left(x_{i+2} - x\right)dx =$$

$$f\left(x_{i+1}\right)\int_{0}^{2\Delta x}\left(x_i - \left(X + x_i\right)\right)\left(x_{i+2} - \left(X + x_i\right)\right)dX =$$

$$f\left(x_{i+1}\right)\int_{0}^{2\Delta x}\left(-X\right)\left(2\Delta x - X\right)dX =$$

$$f\left(x_{i+1}\right)\left(-\Delta x X^2 + \frac{X^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\Delta x} =$$

$$f\left(x_{i+1}\right)\left(-4\Delta x^3 + \frac{8}{3}\Delta x^3\right) =$$

$$-f\left(x_{i+1}\right)\frac{4}{3}\Delta x^3$$

Integral de 3

Si se reemplaza $X = x + x_i$, la integral se puede reescribir como:

$$f\left(x_{i+2}\right)\int_{x_i}^{x_{i+2}}\left(x_i - x\right)\left(x_{i+1} - x\right)dx =$$

$$f\left(x_{i+2}\right)\int_{0}^{2\Delta x}\left(x_i - \left(X + x_i\right)\right)\left(x_{i+1} - \left(X + x_i\right)\right)dX =$$

$$f\left(x_{i+2}\right)\int_{0}^{2\Delta x}\left(-X\right)\left(\Delta x - X\right)dX =$$

$$f\left(x_{i+2}\right)\left(-\frac{\Delta x X^2}{2} + \frac{X^3}{3}\right)\Big|_0^{2\Delta x} =$$

$$f\left(x_{i+2}\right)\left(-2\Delta x^3 + \frac{8}{3}\Delta x^3\right) =$$

$$f\left(x_{i+2}\right)\frac{2}{3}\Delta x^3$$

Solución de Simpson

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} f_{aprox}(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right)$$

De acá podemos sacar la regla compuesta de Simpson como:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_o) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Donde $x_i = a + i\Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y n par (numero de puntos impar)
Esto se puede reescribir como:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{n/2-2} f(x_{2i+2})\right)$$