Teste 2-19

1. Considere um sinal discreto x[n] obtido por amostragem de uma realização de um processo ruído branco estacionário de média nula e variância σ_x^2.
   a) Explique sucintamente o que significa um processo ruído branco e diga quais os parâmetros que o caracterizam. Refira-se às propriedades de estacionaridade e ergodicidade apontando a necessidade da sua existência e a sua razoabilidade prática. Caracterize analiticamente a sequência de autocovariância do processo x[n]. Justifique.

Ruído Branco → Processo estocástico de variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância finita e constante

↳ parâmetros

Estacionaridade → Esta propriedade significa que, os parâmetros de um processo estocástico não variam no tempo, ou seja a média (m) e variância (σ_v^2) são constantes, e a sequência de autocorrelação $\phi_{xx}(m)$ só depende de m.

?

Ergodicidade → Esta propriedade significa que a estatística do conjunto é igual à estatística temporal.

Um processo é ergódico, se a média de 1 processo com 1 realização é igual a cada uma das médias das variáveis aleatórias.

Sequencia de autocovariância

$$\gamma_{xx}[n] = E\{(x[n] - m_x) \cdot (x[n+m] - m_x)\}$$

$$= E\{x[n] \cdot x[n+m] - x[n] \cdot m_x - m_x \cdot x[n+m] + m_x^2\}$$

$\Rightarrow$ média da soma = soma das médias

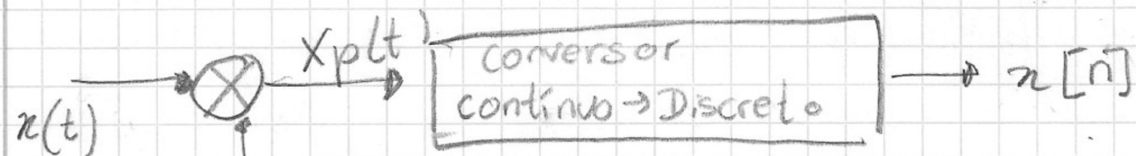
$$\gamma_{xx}[n] = \phi_{xx}[n] - m_x^2$$

Sendo $\phi_{xx}[n] = \sigma_x^2 \cdot \delta[m] + m_x^2$

Como a média é nula então

$$\gamma_{xx}[n] = \phi_{xx}[n] =$$

b) Mostre que amostrar o sinal é equivalente a amostrar a sequência de autocovariância. Para o efeito determine a sequência de autocovariância do sinal amostrado. Justifique.



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kt)$$

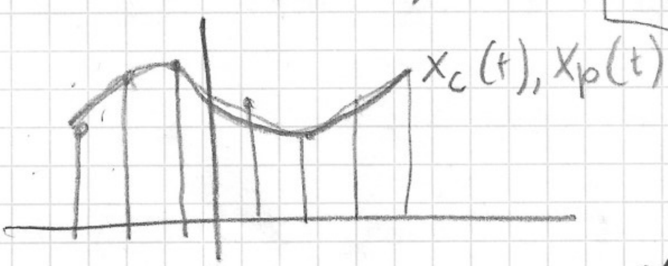
(trem de impulsos)

$$\gamma_{xx}(\tau) = E\{x_c(t) \cdot x_c(t-\tau)\} \Rightarrow \phi_{xx}[n] = E\{x[n] \cdot x[n+m]\}$$

devido à amostragem temos

$$x_p(t) = x_c(nT)$$

$$\boxed{\gamma_{x_c x_c}(m \cdot T) = E\{x_c(nT) \cdot x_c((n+m)T)\} = \gamma_{xx}[m]}$$



$$x[n] = x_c(nT)$$

$$\gamma_{xx}[m] = \gamma_{x_c x_c}(mT)$$

c) Apresente a estimativa de menor variância para a autocovariância do processo. Determine a polarização dessa estimativa e classifique-a quanto à consistência. Justifique.

$$\gamma_{xx}[m] = \phi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \cdot \delta[m]$$

Estudamos 2 estimativas da representação da autocorrelação

$$c'_{xx}[n] = \frac{1}{N-|m|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n] \cdot x[n+m]$$

$$c_{xx}[m] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n] \cdot x[n+m]$$

estimativa de menor variância

$$B_{c_{xx}} = \phi_{xx}[m] - E\{c_{xx}[m]\}$$

$$E\{c_{xx}[n]\} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\{x[n] \cdot x[n+m]\}}_{\phi_{xx}[m]} =$$

$$= \phi_{xx}[m] \cdot \frac{N-|m|}{N}$$

$$B_{c_{xx}} = \phi_{xx}[m] \cdot \left[n - \frac{N-|m|}{n}\right] = \phi_{xx}[m] \cdot \frac{|m|}{N}$$

A estimativa é consistente porque $\lim_{N \to +\infty} B_{c_{xx}} = 0$

d) Considere o periodograma de x[n]. Determine a média de cada componente do periodograma ($E\{|X(k)|^2\}$) em função dos parâmetros conhecidos do PE x[n].

$$I_N(\Omega) = T.F\{C_{xx}[m]\} = \frac{|X(\Omega)|^2}{N}$$

$$E\{|X(\Omega)|^2\} = E\{X(k) \cdot X^*(k)\}$$

$$\text{com } X(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n}$$

DFT

$$\text{abordagem (1)} \rightarrow X(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n}$$

$$\text{abordagem (2)} \rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n}$$

$$E\{|X(k)|^2\} = E\left\{\frac{1}{N} \cdot \sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1] e^{-jk\frac{2\pi}{N} n_1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n_2=0}^{N-1} x[n_2] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n_2}\right\}$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdot E\{\underbrace{x[n_1] \cdot x[n_2]}_{\sigma_x^2 \cdot \delta[n_1 - n_2]} \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n_1 - n_2)}\} =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{N^2} \cdot \underbrace{\sum_n 1}_{N} = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

e) Determine a variância de cada componente do periodograma. Com base neste resultado refira-se à consistência do periodograma como estimador da densidade espectral de x[n].

$$y = |X(k)|^2$$

$$\sigma_y^2 = ? \Rightarrow \sigma_y^2 = E\{y^2\} - m_y^2 \Rightarrow \boxed{m_y = \frac{\sigma_x^2}{N}}$$

$$E\{y^2\} = E\{(|X(k)|^2)^2\} = E\{|X(k)^4|\}$$

$$= E\left\{\left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{n_1=0}^{N-1} x_1[n_1]\cdot e^{-jk\cdot\frac{2\pi}{N}n_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{n_2=0}^{N-1} x[n_2]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{n_3=0}^{N-1} x[n_3]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot n_3}\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{n_4=0}^{N-1} x[n_4] e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot n_4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{N^4}\cdot\sum_{n_1}\sum_{n_2} E\{\underbrace{x[n_1]\cdot x[n_2]}_{\sigma_x^2\cdot\delta[n_1-n_2]}\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n_1-n_2)}\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n3}\sum_{n4} E\{\underbrace{x[n_3]\, x[n_4]}_{\sigma_x^2\cdot\delta[n_3-n_4]}\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n_3-n_4)}\} =$$

$$= \frac{\sigma_x^4}{N^4}\cdot\left[\sum_{n_1}\sum_{n_2} 1 + \sum_{n3}\sum_{n4} 1\right] = \frac{2\cdot\sigma_x^4}{N^4}\cdot N^2 =$$

$$= \frac{2\sigma_x^4}{N^2}$$

$$\sigma_y^2 = E\{y^2\} - m_y^2 = \frac{2 \cdot \sigma_x^4}{N^2} - \left(\frac{\sigma_x^2}{N}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sigma_x^4}{N^2}$$

f) Determine a função de autocorrelação do PE $I_N(k)$. Trata-se de um processo ruído branco? Justifique.

Autocorrelação $|X(k)|^2$

Ver sinais ?

$$E\{|X(k)|^2 \cdot |X(r)|^2\} =$$

$$E\left\{\left(\frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot n_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{n_2=0}^{N-1} x[n_2]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot n}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{n_3=0}^{N-1} x[n_3] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot n_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{N}\sum_{n_4=0}^{N-1} x[n_4]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot n_4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{N^4} \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\sum_{n_4} \cdot \underbrace{E\{x[n_1] \cdot x[n_2] \cdot x[n_3] \cdot x[n_4]\}}_{\sigma_x^4[\delta[n_1-n_2] \cdot \delta[n_3-n_4]]} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n_1-n_2)} \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n_3-n_4)}$$

$$= \frac{2\sigma_x^4}{N^4} \cdot \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\sum_{n_4} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}(n_1 \cdot n_3)\right)(K+r)} \cdot$$

Verificar ?

$$\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(n_2 \cdot n_4)\cdot(K+r)} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sigma_x^4}{N^4} \sum_{n_1}\sum_{n_4} e^{-j(K-r)\cdot(n_1 \cdot n_4)\cdot\frac{2\pi}{N}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n_2}\sum_{n_3} e^{-j(K-r)\cdot(n_2 n_3)\cdot\frac{2\pi}{N}}$$

$K = r \Rightarrow 1$

$K \neq r \Rightarrow 0$

ruído branco

$$= \frac{2\sigma_x^4}{N^4} \cdot \delta(K-r)$$

Conclusão ?

2. Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

e ao qual é aplicado o sinal x[n] descrito no problema 1.

a) Mostre que o sinal de saída do sistema é autorregressivo de ordem N. Justifique.

$$H(z) = \frac{x(z)}{w(z)}$$

então

$$w(z) = x(z) - \sum_{K=1}^{N} x(z) \cdot a_K \cdot z^{-K}$$, pelo que

$$x(z) = w(z) + \sum_{K=1}^{N} x(z) \cdot a_K z^{-K}$$ então,

$$x[n] = w[n] + \sum_{K=1}^{N} a_K x[n-K]$$

Assim, e sabendo que $N \neq 0$ e que considerando eq. às diferenças de um sistema LTI, pode ser concluido que o processo estocástico é autoregressivo e ainda de ordem N.

b) Dos métodos de estimação espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espetral de potência do processo de saída? Justifique.

O mais adequado é o de máximo entropia porque se trata de um sistema autoregressivo (tem periodicidade)

Os métodos clássicos truncam a sequencia de autocorrelação, o de máxima entropia estima para fora neste caso a seq. autocorrelação é periódica

c) Estabeleça um conjunto de equações lineares que lhe permitam determinar os coeficientes a_k do sistema. Justifique.

7

d) Determine uma estimativa para a densidade espectral de potência do sinal de saída do sistema admitindo que possui uma amostra de N pontos e que não conhece os parâmetros de x[n]. Justifique.

Sabendo que erro preditor será

$$E\{(x_N - \hat{x}_N)^2\} = E\{(x_N - \hat{x}_N)\cdot(x_N - \hat{x}_N)\} =$$

$$= E\{x_N(x_N - \hat{x}_N)\} - \underbrace{E\{\hat{x}_N \cdot (x_N - \hat{x}_N)\}}_{=0}$$

$$E[(x_N x_N - x_N \hat{x}_N)]$$

$$\phi_{xx}(0) - \sum_{K=1}^{N} a_K \underbrace{x[n]\, x[n-K]}_{\phi_{xx}(K)} \quad \text{então}$$

$$\phi_{xx}(0) - \sum_{K=1}^{N} a_K \phi_{xx}(K)$$

este valor $= \sigma_x^2$ mas não são conhecidos os parâmetros

$$P_{MEM}(r) = \frac{\phi_{xx}(0) - \sum_{K=1}^{N} a_K \phi_{xx}(K)}{\left|1 - \sum_{K=1}^{N} a_K e^{-jKr}\right|^2}$$

e) Determine a densidade espectral de potência cruzada entre a saída e a entrada do sistema.