Teste 3

Assinale com **(V)erdadeiro** ou **(F)also** as seguintes afirmações:

V – A Transformada de *Fourier* de Tempo Discreto (DTFT) é sempre um sinal periódico com período de 2π.

V – *A resposta em frequência* de um Filtro Passa-Baixo ideal com uma frequência de corte ω_c, deslocada de meio período, é igual à resposta de um Filtro Passa-Alto ideal. 36 /37

V – O Teorema de *Parseval* mostra que a potência média de um sinal periódico é igual à *soma das potências médias* dos seus componentes harmónicos individuais.

V - Uma sequência $x[n]$ real tem a amplitude da DTFT par e fase ímpar.

F - Em muitos contextos, o processamento de sinais de tempo ~~contínuo~~ discreto é mais flexível e geralmente preferível ao processamento de sinais em tempo ~~discreto.~~ contínuo

V – Na retenção de ordem zero, o sistema adquire $x(t)$ num dado instante e mantém esse valor até ao próximo instante em que uma nova amostra é adquirida.

F – A interpolação linear, também chamada de retenção de primeira ordem, pode ser vista como a interpolação usando um $h(t)$ ~~rectangular~~ triangular em vez de um LPF ideal.

F – Num processo de amostragem, quando ocorre o *aliasing*, a frequência original ω_0 assume a identidade de uma frequência mais ~~alta~~ baixa, $\omega_s - \omega_0$.

V – O sistema global que efectua o processamento discreto de sinais contínuos é equivalente a um sistema LTI em tempo contínuo. 42 34

V – No processo de amostragem, se o espectro original $X(e^{j\omega})$ é de banda limitada, para que não ocorra *aliasing* em $X_p(e^{j\omega})$, então o efeito da decimação é alargar o espectro da sequência original na banda de frequências.

1. Determine a DTFT dos seguintes sinais:

a) $x[n] = u[n-2] - u[n-6]$

Não esquecer Formul

DTFT:

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$$

No tempo discreto é equivalente

$$\Leftrightarrow \boxed{x[n] = \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5]}$$

usando a equação

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-2]\, e^{-jwn} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-3] + \sum_{n=-\infty} \delta[n-4] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-5] =$$

$$\sum_{n=2}^{2} e^{-jwn} + \sum_{n=3}^{3} e^{-jwn} + \sum_{n=4}^{4} e^{-jwn} + \sum_{n=5}^{5} e^{-jwn}$$

$$\boxed{= e^{-2jw} + e^{-3jw} + e^{-4jw} + e^{-5jw}}$$

FORMULÁRIO

$$\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{TF} e^{-jwn_0}$$

b) $x[n] = \text{sen}(5\pi n/3) + \cos(7\pi n/3)$

FORMULÁRIO

$$\boxed{\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}n\right) \xrightarrow{DTFT} \frac{\pi}{j}\left(\delta\left(\omega-\frac{5\pi}{3}\right) - \delta\left(\omega+\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{j}\left(\delta\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right) - \delta\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

FORMULÁRIO

$$\boxed{\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{3}n\right) \xleftrightarrow{TF} \pi\left[\delta\left(\omega-\frac{7\pi}{3}\right) + \delta\left(\omega+\frac{7\pi}{3}\right)\right]$$

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{\pi\left(\delta\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right) + \delta\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

juntando:

$$\boxed{\frac{\pi}{j}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{j}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)}$$

2. Use a tabela das propriedades da DTFT para calcular:

a) $y[n] = x[1 - n] + x[-1 + n]$

$1^{o} \rightarrow x[-n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{-j\omega})$

$2^{o} \rightarrow x[-n+1] \xrightarrow{DTFT} X(e^{-j\omega}) \cdot e^{-j\omega}$

Ver formulário

Quando $n+1$ multiplica $e^{-j\omega n}$

Quando -1 multiplica $e^{j\omega}$

$1^{o} \rightarrow x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$

$2^{o} \rightarrow x[n-1] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n}$

$$Y(e^{j\omega}) = \boxed{X(e^{-j\omega}) \cdot e^{-j\omega n} + X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n}}$$

b) $z[n] = (x^*[-n] - x[n])/2$

1º $\rightarrow$ $x[-n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{-jw})$

2º $\rightarrow$ $x^*[-n] \xrightarrow{DTFT} X^*(e^{jw})$

$$= \boxed{\frac{X^*(e^{jw}) - X(e^{jw})}{2}}$$

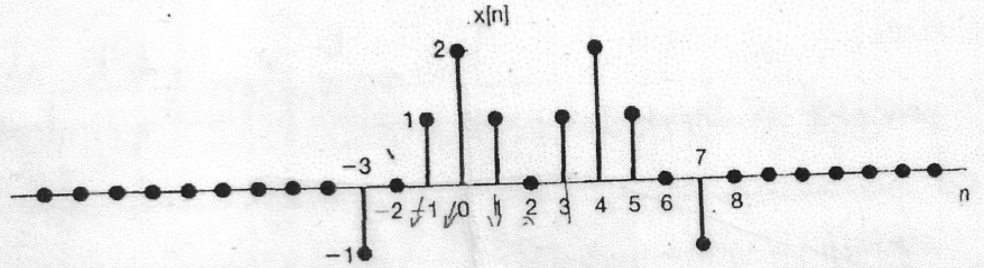
Ver Formulário

$x[n] \rightarrow X[e^{jw}]$

$x[-n] \rightarrow X[e^{-jw}]$

$x^*[n] \leftrightarrow X(e^{-jw})$

3. Considere a função $x[n]$ ilustrada na figura abaixo:



a) Determine $X(e^{j0})$

Recordando que:

$$\boxed{X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}}$$

Logo

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, \cancel{e^{0}}\ 1$$

então:

$$X(e^{j0}) = x[-3] + x[-2] + x[-1] + x[0] + x[1] + x[2] + x[3] + x[4] + x[5] + x[6] + x[7] + x[8]$$

$= \cancel{-1} + 0 + \cancel{1} + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + \cancel{1} + 0 - \cancel{1} + 0$

$= \underline{\underline{6}}$

$X(e^{j0}) = 6$

c) Determine *arg* [$X(e^{j\omega})$]

Se o $x[n]$ for deslocado para a esquerda fica par

logo $y = x[n+2]$ é sinal par

Por isso $Y(e^{jw})$ é também par e real

logo ~~arg~~ $(Y(e^{jw})) = 0$

Aplicando a propriedade de deslocamento no tempo

$$Y(e^{jw}) = e^{2jw} X(e^{jw})$$

$x[n+2]$

$$\text{Logo, } \arg X(e^{jw}) = e^{-2jw}$$

$\boxed{\arg(a \cdot X(e^{-jw})) = \frac{1}{a}}$ FORMULARIO Ver 184 5.24

4. Os sinais $x[n]$ e $h[n]$ têm as seguintes DTFTs, respectivamente:

$$X(e^{j\omega}) = 3e^{j\omega} + 1 - e^{-j\omega} + 2e^{-j3\omega} \qquad H(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} + 2e^{-j2\omega} + e^{-4j\omega}$$

- Determine:

$y[n] = x[n]*h[n]$

De acordo com as propriedades

$$y[n] \xrightarrow{DTFT} Y(e^{jw}) = X(e^{jw})\, H(e^{jw})$$

$$Y(e^{jw}) = \left(3e^{jw} + 1 - e^{-jw} + 2e^{-j3w}\right)\left(-e^{jw} + 2e^{-j2w} + e^{-4jw}\right)$$

$$-3e^{2jw} + 6e^{-jw} + 3e^{-3jw} - e^{jw} + 2e^{-j2w} + e^{-4jw} + \cancel{e^{0}}\, 1 +$$

$$-2e^{-3jw} - e^{-5jw} + -2e^{-2jw} + 4e^{-5jw} + 2e^{-7jw}$$

Agora aplica-se a DTFT (inversa)

$$e^{-jwn_0} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \delta(n-n_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y[n] = -3\delta[n+2] &+ 6\delta[n-1] + 3\delta[n-3] + \\ &- \delta[n+1] + 2\delta(n-2) + \delta(n-4) \\ &+ \delta[n] - 2\delta[n-3] - \delta[n-5] \\ &+ -2\delta[n-2] + 4\delta[n-5] + 2\delta[n-7] \end{aligned}}$$

5. Sejam $h[n]$ e $g[n]$ as respostas impulsionais de dois sistemas de tempo discreto LTI q
são inversos um do outro.

a) Qual é a relação entre as respostas em frequência destes dois sistemas?

$h[n]$

$h[n]^{-1} = g[n] = \frac{1}{h[n]}$

Aplicando a DTFT em ambos os lados

$$\boxed{G(e^{jw}) = \frac{1}{H(e^{jw})}}$$

b) Considere os sistemas LTI causais descritos pelas seguintes equações às diferenças. Em
cada caso, determine a resposta impulsional do sistema inverso e a equação às diferenças
que o caracteriza.

(i) $y[n] = x[n] - ¼.x[n - 1]$

i) Aplicando em ambos os lados

Ver Formulário

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) - \frac{1}{4} X(e^{jw}) . e^{-jw} \quad \text{(time shift)}$$

FORMULARIO

$$\boxed{x[n-n_0] \leftrightarrow X(e^{jw}) . e^{-jwn_0}}$$

$X(e^{jw}) = 1$

$$H(e^{jw}) = 1 - \frac{1}{4} e^{-jw}$$

$$G(e^{jw}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}} = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})}$$

multiplicação cruzada

$$X(e^{jw}) = Y(e^{jw}) - \frac{Y(e^{jw}).e^{-jw}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{4X(e^{jw}) = 4Y(e^{jw}) - Y(e^{jw}).e^{-jw}}$$

Agora aplica-se a DTFT (inversa)

Objetivo: Ter algo em função $X(e^{jw})$ ou $Y(e^{jw})$

$$4x[n] = 4y[n] - y[n-1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y[n] = x[n] + \frac{y[n-1]}{4}}$$

(ii) $y[n] + ½.y[n-1] = x[n]$

ii) Aplicando a DTFT em ambos os lados:

$$y[n] + \frac{y[n-1]}{2} = x[n]$$

$$Y(e^{jw}) + \frac{Y(e^{jw}).e^{-jw}}{2} = X(e^{jw})$$

1

$$H(e^{jw}) + \frac{1}{2} e^{-jw} H(e^{jw}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(e^{jw})\left(1 + \frac{1}{2} e^{-jw}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(e^{jw}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{-jw}}$$

$$G(e^{jw}) = \frac{1}{H(e^{jw})} = 1 + \frac{1}{2} e^{-jw} = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})}$$

(multiplicação cruzada)

$$X(e^{jw}) + \frac{e^{-jw} X(e^{jw})}{2} = Y(e^{jw})$$

Agora aplicando a DTFT inversa

$$\boxed{y[n] = x[n] + \frac{x[n-1]}{2}}$$

6. Seja $x(t)$ um sinal com uma frequência de *Nyquist* ω_0. Determine a frequência de *Nyquist* para cada um dos seguintes sinais:

a) $x(t) + x(t - 1)$

Uma vez que freq. Nyquist $\underline{\omega_N}$, é o dobro a frequência máxima de sinal $\underline{\omega_M}$, a máxima $/2$ frequência ω_M, de $x(t)$ é dada por:

$$\omega_N = 2\omega_M$$

$$\omega_M = \frac{\omega_N}{2}$$

Para $x(t)$:

$$\omega_M = \frac{\omega}{2} = \frac{\omega_0}{2}$$

NÃO ESQUECER

Em cont. $\rightarrow j\omega$

Em disc. $\rightarrow e^{j\omega}$

$$\boxed{y_1(t) = x(t) + x(t-1)}$$

Aplicando a TF a $y_1(t)$ para determinar a frequência máxima ω_{M1}

$$Y_1(j\omega) = X(j\omega) + X(j\omega) \cdot e^{-j\omega}$$

Para $(x(t-1))$

Uma vez que $(t-1)$ apenas representa uma atenuação no domínio das frequências, a frequência máxima $\omega_{M1} = \omega_M$

$$\omega_M = \omega_{M1}$$

$$= \frac{\omega_0}{2}$$

Então, a freq. Nyquist $\omega_{N_1} = 2\omega_{M1}$

$$\omega_{N1} = 2\omega_{M1} \Longrightarrow \boxed{\omega_0}$$

frequência de Nyquist.

b) $dx(t)/dt$

Determinar a transformada de Fourier

$$\boxed{\frac{d\,x(t)}{dt} \xrightarrow{TF} Y_2(j\omega) = j\omega\, X(j\omega)}$$

FORMULÁRIO

A partir desta equação, o efeito da diferenciação não afeta a frequência máxima, por isso $\omega_{M_2} = \omega_0/2$

Por isso, a frequência de Nyquist ω_{N_2} é dada por:

$$\omega_{N_2} = 2\omega_{M_2}$$

$$= \omega_0$$

c) $x^2(t)$

Calcular a TF:

como FORMULÁRIO

$$\boxed{x^2(t) \xrightarrow{TF} Y_3(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * X(j\omega)\right]}$$

Por isso, a frequência máxima ω_{M_3} é igual a soma de 2 frequencias de sinais convoluidos

$$\omega_{M_3} = \omega_M + \omega_M = \omega_0$$

Por isso, a frequencia ω_{N_3} é dada por

$$\omega_{N_3} = 2\omega_{M_3}$$

$$= \boxed{2\omega_0}$$

d) $x(t).\cos \omega_0 t$

FORMULÁRIO

$$Y_4(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]\right] =$$

$$= X(j\omega) * \left[\frac{1}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\delta(\omega+\omega_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(j\omega) * \delta(\omega-\omega_0)\right] + \frac{1}{2}\left[X(j\omega) * \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

Por isso, a $\overset{\text{freq máx}}{\omega_{M_4}} = \omega + \omega_0$

$$\omega_{M4} = \omega + \omega_0$$

$$= \omega_M + \omega_0$$

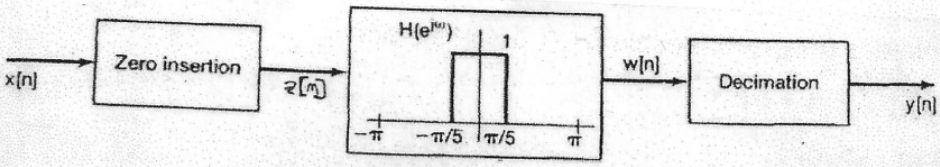
$$= \frac{\omega_0}{2} + \omega_0$$

$$\omega_{M4} = \frac{3\omega_0}{2}$$

A frequência de Nyquist ω_{N4}

$$\omega_{N4} = 2\omega_{M4} = \boxed{3\omega_0} = \omega_{N4}$$

7. Considere o sistema mostrado na figura abaixo, com a entrada $x[n]$ e a saída correspondente $y[n]$. O sistema de inserção de zeros insere dois pontos com amplitude zero entre cada um dos valores da sequência em $x[n]$.



A decimação é definida por:

$$y[n] = w[5n]$$

onde $w[n]$ é a sequência de entrada para o sistema de decimação. Se a entrada do sistema for:

$$x[n] = \frac{\sin \omega_1 n}{\pi n}$$

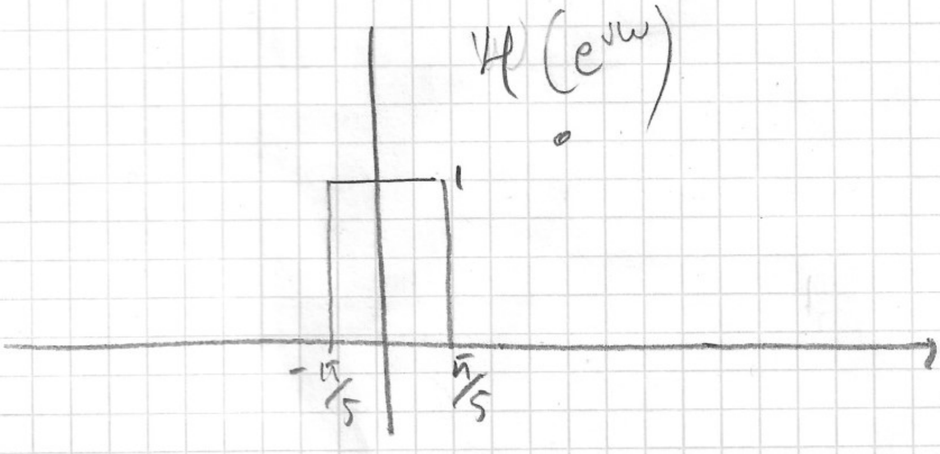
- Determine a saída $y[n]$ para os seguintes valores de ω_1

a) $\omega_1 \le 3\pi/5$

A TF de $x[n]$ é:

Ver formulário

$$X[n] = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_1 \\ 0, & \text{outros } \omega \end{cases}$$



Portanto, $\omega_1 \le \frac{3\pi}{5}$ está dentro do $\le \frac{\pi}{5}$?

Sim, está. Então temos que multiplicar pelo $x[n]$.

Por quanto tem que ser multiplicado ω_1 para dar $\frac{\pi}{5}$?

Sendo $\omega_1 = \frac{3\pi}{5} \Rightarrow$

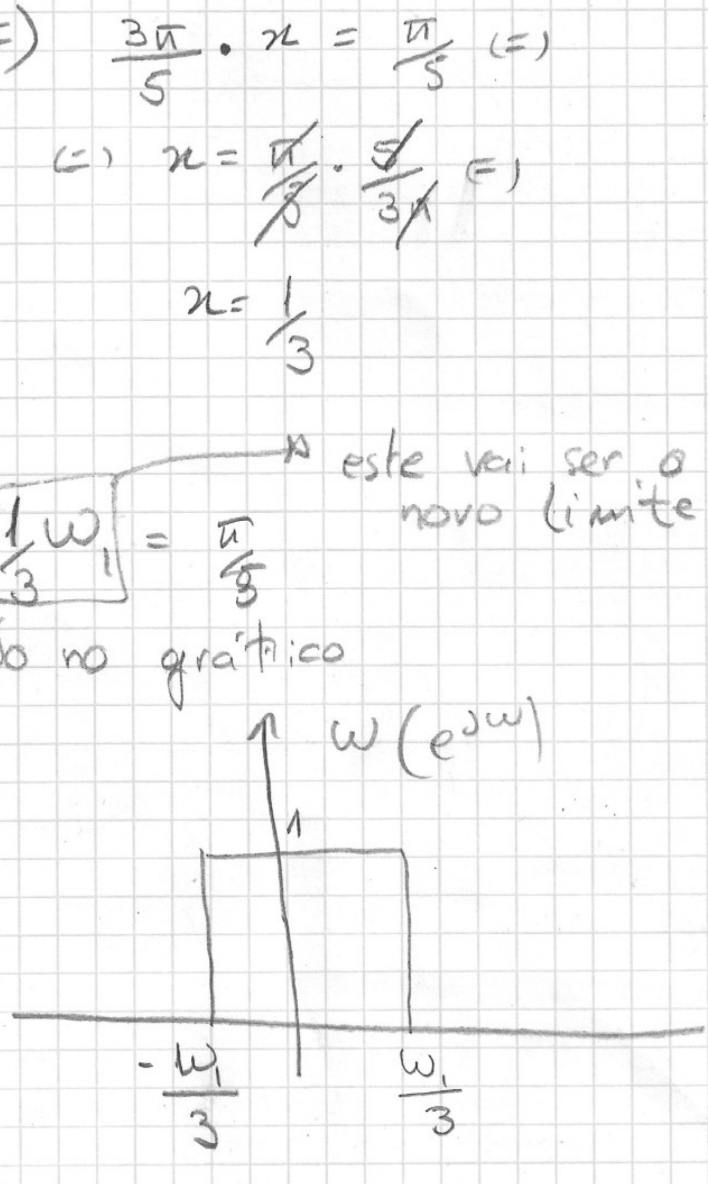
$$\Rightarrow \frac{3\pi}{5} \cdot x = \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3\cancel{\pi}} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Logo $\boxed{\frac{1}{3}\omega_1} = \frac{\pi}{5}$ → este vai ser o novo limite

Substituindo no gráfico



2º Calcular $Y(e^{j\omega})$

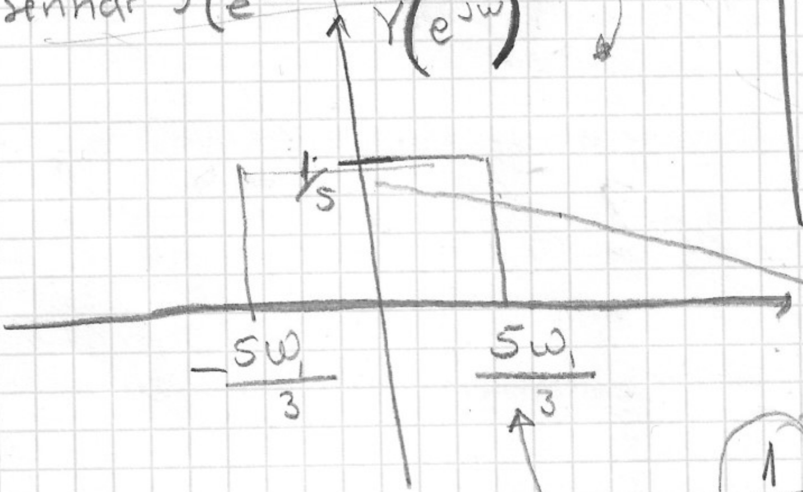
$$y[n] = w[5n]$$

Recordar

$$x[an] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a} X\left[e^{\frac{j\omega}{a}}\right]$$

$$w[5n] \xrightarrow{FT} \frac{1}{5} W\left[e^{\frac{j\omega}{5}}\right]$$

3º Desenhar $Y(e^{j\omega})$



amplitude

$$\frac{1}{5} W\left[e^{\frac{j\omega}{5}}\right]$$

$$\frac{1}{\text{amplitude}} = 5$$

$$= 5 \cdot \frac{\omega_1}{3}$$

yy → amplitude

xx → $\frac{\omega_1}{3} \times \frac{1}{\text{amplitude}}$

4º Escrever $y[n]$ final de saída

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & |\omega| < \frac{5}{3}\omega_1 \\ 0, & \text{outros valores de } \omega \end{cases}$$

Aplicando a TF inversa

Ver formulário

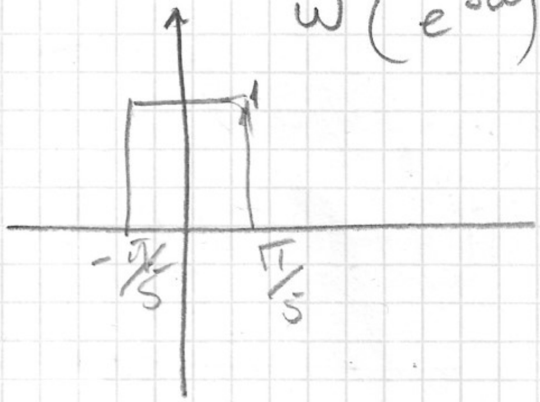
$$\boxed{y[n] = \frac{1}{5} \frac{\sin\left(\frac{5}{3}\omega_1 n\right)}{\pi n}}$$

b) $\omega_1 > 3\pi/5$

1º $> \frac{3\pi}{5}$ está dentro do gráfico de $H(e^{j\omega})$

Não. Então $\bar{n}$ se multiplica xx

$W(e^{j\omega})$

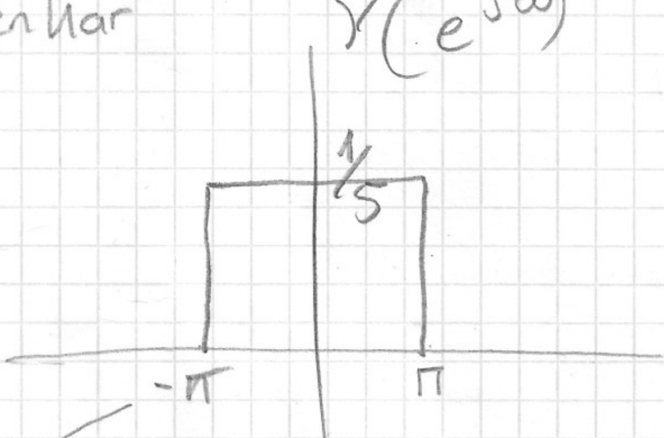


2º Calcula $Y(e^{j\omega})$

$$Y[n] = w[5n]$$

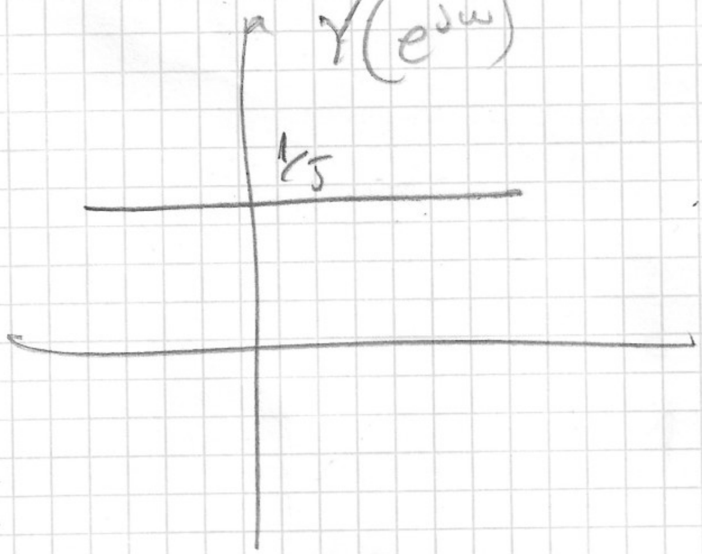
$$w[5n] \xrightarrow{FT} \frac{1}{5}\, W[e^{j\omega/5}]$$

3º Desenhar $Y(e^{j\omega})$



Observação, como $\bar{n}$ tem nenhum W,
está[illegible]

Logo



4.º Escrever $y[n]$ final de saída

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{y[n] = \frac{1}{5}\delta[n]}$$

Ver Formulário

Recordar:

$a\delta[n] = a$