



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



- Método da invariância da resposta impulsional (rever a aula 10 de P. S.)

$$\begin{aligned} H_c(s) &= \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} & \xleftrightarrow{\mathcal{L}} & h_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \\ & \downarrow \\ H_d(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{A_k T}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} & \xleftrightarrow{Z} & h_d[n] = h_c(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u[n] = \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n u[n] \end{aligned}$$

-Exemplo 1: Consideremos o projecto de um filtro digital a partir de um filtro de Butterworth pelo método da invariância da resposta impulsional. As especificações do filtro digital são:

$$0.8925 \leq |H(\Omega)| \leq 1; \quad 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi$$

$|H(\Omega)| \leq 0.17783; \quad 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi$
Considerando $T=1$ as especificações do filtro analógico são? ($w=\Omega/T$)

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{0.2\pi}{w_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.8925} \right)^2 \\ 1 + \left(\frac{0.3\pi}{w_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783} \right)^2 \end{cases} \xrightarrow{N = 5.8858} \begin{cases} N = 6 \\ w_c = 0.70474 \end{cases} \xrightarrow{N = 6} w_c = 0.7032$$

15

21/02/17

Processamento Digital de Sinal

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



- Método da invariância da resposta impulsional (cont.)

s-plane

$$\begin{cases} -0.182 \pm 0.679j \\ -0.497 \pm 0.497j \\ -0.679 \pm 0.182j \end{cases} \quad H_c(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.3640s + 0.4945)(s^2 + 0.9945s + 0.4945)(s^2 + 1.3585s + 0.4945)}$$

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1455z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8557 - 0.6303z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}$$

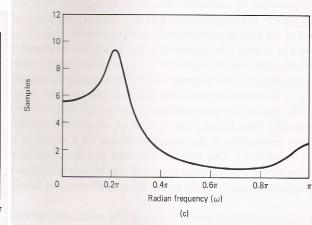
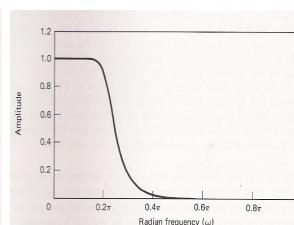
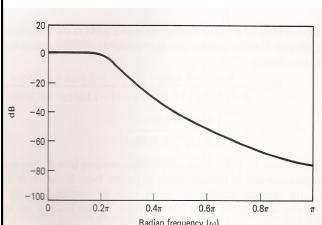


Figure 7.6 Frequency response of sixth-order Butterworth filter transformed by impulse invariance. (a) Log magnitude in dB. (b) Magnitude. (c) Group delay.

16

21/02/17

Processamento Digital de Sinal

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



- Método da transformação bilinear (rever a aula 10 de P. S.)

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \Omega = 2 \arctan \frac{wT}{2} \quad w = \frac{2}{T} \tan(\Omega/2)$$

-Exemplo 2: Consideremos o filtro digital especificado anteriormente e sintetizemo-lo agora, do mesmo modo, a partir de um filtro de Butterworth mas usando método da transformação bilinear. As especificações do filtro digital são então as mesmas

$$\begin{aligned} 0.8925 &\leq |H(\Omega)| \leq 1; \quad 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi \\ |H(\Omega)| &\leq 0.17783; \quad 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{aligned}$$

As especificações do filtro analógico são agora

$$\begin{aligned} 0.8925 &\leq |H_c(jw)| \leq 1; \quad 0 \leq w \leq \frac{2}{T} \tan \frac{0.2\pi}{2} \\ |H_c(jw)| &\leq 0.17783; \quad \frac{2}{T} \tan \frac{0.3\pi}{2} \leq w \leq \infty \end{aligned}$$

17

21/02/17

Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

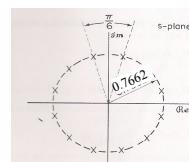


Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



Considerando T=1

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{2 \tan(0.1\pi)}{w_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.8925} \right)^2 \\ 1 + \left(\frac{2 \tan(0.15\pi)}{w_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783} \right)^2 \end{cases}$$



Dividir um pelo outro e

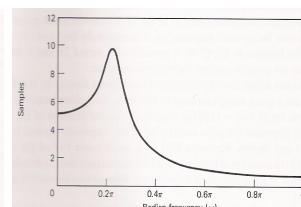
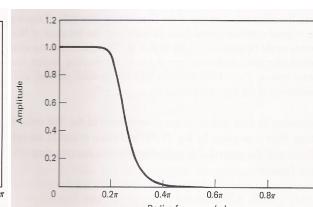
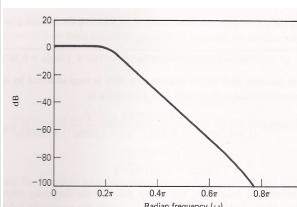
$$\log_b y = \frac{\log y}{\log b}$$

$$N = \frac{\log \left[\left(\frac{1}{0.178} \right)^2 - 1 \right]}{2 \log \left(\frac{1}{0.89} \right)^2 - 1} = 5.30466$$

$$w_c = 0.76622 \quad N = 6$$

$$H_c(s) = \frac{0.20238}{(s^2 + 0.3996s + 0.5871)(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)}$$

$$H(z) = \frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}$$



18

21/02/17

Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



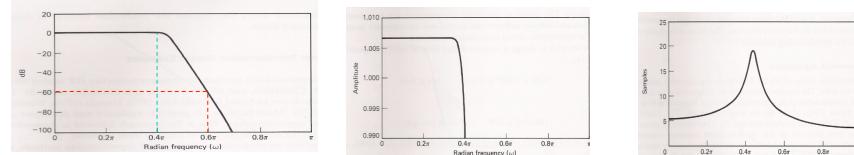
Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



-Exemplo 3 : Consideremos o projecto de um filtro digital cujas especificações são as seguintes:

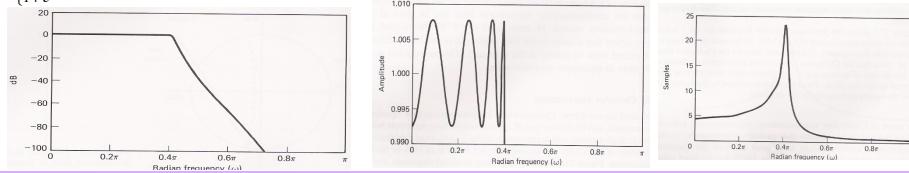
$$\begin{aligned} 0.99 \leq |H(\Omega)| &\leq 1.01; & 0 \leq |\Omega| \leq 0.4\pi \\ |H(\Omega)| &\leq 0.001; & 0.6\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{aligned}$$

1) Aproximação de Butterworth $\rightarrow N = \frac{\log \left[\left(\frac{1}{0.001} \right)^2 - 1 \right]}{2 \log \tan(0.3\pi)} = 13.86 \rightarrow N = 14$



2) Aproximação Chebyshev

$$\begin{cases} 1 + \varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{2 \tan(0.3\pi)}{2 \tan(0.2\pi)} \right) = \left(\frac{1}{0.001} \right)^2 \\ \frac{1}{1 + \varepsilon^2} = (0.99)^2 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon^2 = 0.02 \quad \rightarrow T_N^2(\alpha) = g^2 \Rightarrow N = \frac{\log(g + \sqrt{g^2 - 1})}{\log(g + \sqrt{\alpha^2 - 1})} = \frac{4.15}{0.55} = 7.54 \rightarrow N = 8$$



19

21/02/17

Processamento Digital de Sinal

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



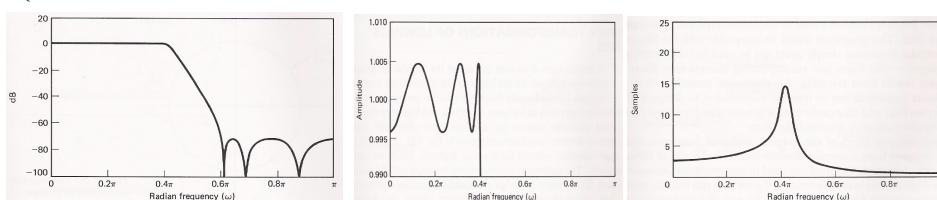
Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



3) Aproximação elíptica

$$|H_c(w)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2 \left(\frac{jw}{jW_c} \right)} \quad N = \frac{K(k)K(\sqrt{1 - k_1^2})}{K(k_1)K(\sqrt{1 - k^2})} \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}} \quad k = \frac{\Omega_c}{\Omega_s} \quad k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$$

$$\begin{cases} 1 + \varepsilon^2 U_N^2 \left(\frac{2 \tan(0.3\pi)}{2 \tan(0.2\pi)} \right) = \left(\frac{1}{0.001} \right)^2 \\ \frac{1}{1 + \varepsilon^2} = (0.99)^2 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon^2 = 0.02 \quad \rightarrow \text{Função ellipke (matlab)} \rightarrow N = 6$$



20

21/02/17

Processamento Digital de Sinal

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



- Transformações de Frequência em filtros passa-baixo (LPF)

$$H(z) = H_p(Z) \Big|_{Z^{-1}=G(z^{-1})}$$

- Se H_{lp} é racional, causal e estável e pretendemos o mesmo para $H(z)$ então
 - $G(z^{-1})$ deve ser racional em z^{-1} .
 - O interior da circunferência de raio unitário no plano Z deve ser mapeada para o interior da circunferência de raio unitário no plano z.
 - O mesmo para a circunferência de raio unitário.
- Sejam θ e Ω os ângulos nos planos Z e z. Então pela última condição

$$|\alpha_k| < 1$$

$$e^{-j\theta} = |G(e^{-j\Omega})| e^{j\angle G(e^{-j\Omega})} \quad \Rightarrow \quad |G(e^{-j\Omega})| = 1 \quad \Rightarrow \quad Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}$$

LPF \rightarrow LPF

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\Omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \quad \Omega = \arctan \left[\frac{(1 - \alpha^2) \sin \theta}{2\alpha + (1 + \alpha^2) \cos \theta} \right] \quad \alpha = \frac{\sin(\theta_p - \Omega_p)/2}{\sin(\theta_p + \Omega_p)/2}$$



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



- Síntese de qualquer filtro a partir de um LPF

TABLE 7.1 TRANSFORMATIONS FROM A LOWPASS DIGITAL FILTER PROTOTYPE OF CUTOFF FREQUENCY θ_p

Filter Type	Transformation	Associated Design Formulas
Lowpass	$Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin(\frac{\theta_p - \omega_p}{2})}{\sin(\frac{\theta_p + \omega_p}{2})}$ ω_p = desired cutoff frequency
Highpass	$Z^{-1} = -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos(\frac{\theta_p + \omega_p}{2})}{\cos(\frac{\theta_p - \omega_p}{2})}$ ω_p = desired cutoff frequency
Bandpass	$Z^{-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{k-1 z^{-2} - \frac{2\alpha}{k+1} z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2})}{\cos(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2})}$ $k = \cot(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}) \tan(\frac{\theta_p}{2})$ ω_{p1} = desired lower cutoff frequency ω_{p2} = desired upper cutoff frequency
Bandstop	$Z^{-1} = \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{1-k z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2})}{\cos(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2})}$ $k = \tan(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}) \tan(\frac{\theta_p}{2})$ ω_{p1} = desired lower cutoff frequency ω_{p2} = desired upper cutoff frequency



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



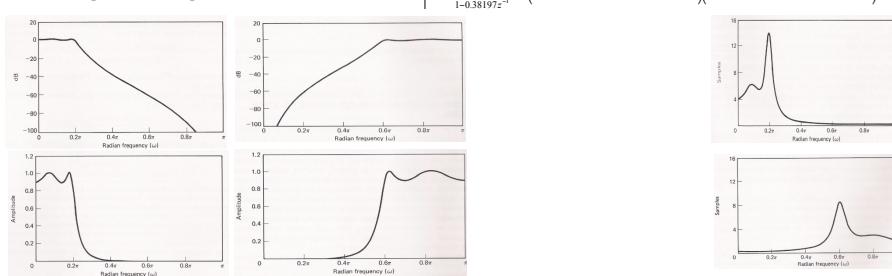
-Exemplo 4: Consideremos o projecto do filtro digital cujas especificações são dadas nos exemplos 1 e 2. Confirme que o filtro digital Chebyshev tipo I sintetizado pelo método da transformação bilinear é dado por

$$H_{lp}(Z) = \frac{0.001836(1+z^{-1})^4}{(1-1.5548z^{-1}+0.6493z^{-2})(1-1.4996z^{-1}+0.8482z^{-2})} \quad |H_{lp}(\theta)| \leq 1; \quad 0 \leq |\theta| \leq 0.2\pi$$

$$|H_{lp}(\theta)| \leq 0.17783; \quad 0.3\pi \leq |\theta| \leq \pi$$

Suponha que se pretende sintetizar um filtro passa-alto (HPF) a 0.6π

$$\alpha = -\frac{\cos[(0.2\pi + 0.6\pi)/2]}{\cos[(0.2\pi - 0.6\pi)/2]} = -0.38197$$



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



- TPC
 - Execute em Matlab o exemplo 3 (transparência 19). Use a função para representar e resposta em frequência do sistema e verifique se o sistema cumpre ou não as especificações (ripple na banda passante e ganho na banda de rejeição)