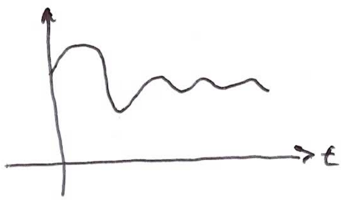
Processamento Digital de Sinal

RESUMO 1ª MATÉRIA ①

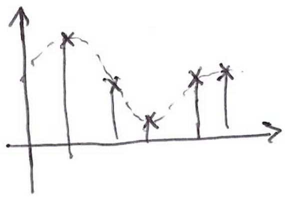
⇒ Sistemas e Sinais:

• **Sistema Contínuo**



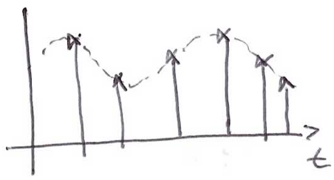
É um sinal contínuo no tempo e não é gerado por impulsos.

• **Sistema Digitais**



Um sinal digital está limitado ao número de bits existentes

• **Sistemas Discretos**

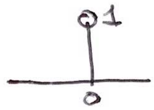


É um sinal descontínuo no tempo representado por um espectro de impulsos

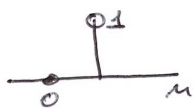
⇒ Sistemas Discretos.

• **Sequências importantes.**

→ Impulso unitário ($\delta[n]$)

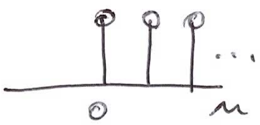


$$\delta[n] = \begin{cases} 1 ; & n = 0 \\ 0 ; & \leftarrow \end{cases}$$



$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 ; & n = k \\ 0 ; & n \neq k \end{cases}$$

→ Degrau unitário ($u[n]$):



$$u[n] = \begin{cases} 1 ; & n \geq 0 \\ 0 ; & n < 0 \end{cases}$$

⇒ $$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]}$$

Para $k=1$ e $x=1$ temos

$$x[1] = x[1] \cdot \overbrace{\delta[1-1]}^{1} = x[1]$$

$\boxed{n<0}$ $\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = 0$

$\boxed{n=0}$ $\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \delta[n]$

$\boxed{n \geq 0}$ $\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \ldots 0 + 1 + 1 + 1 + \ldots$

⇒ Operações

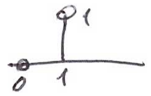
• **Soma** $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$

• **Produto** $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$

• **Translação**
ATRASO

$y[n] = x[n-1]$

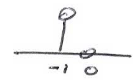
$n-1=0 \Leftrightarrow n=1$



• **Translação**
AVANÇO

$y[n] = x[n+1]$

$n+1=0 \Leftrightarrow n=-1$



• **CONVOLUÇÃO**

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

• **CORRELAÇÃO**

$$y[n] = x[n] \circledast h[n]$$

⇒ **Sistema discreto não-recursivo**: A saída depende da situação actual, passada e futura. Não depende de realimentação (apenas de entrada)

Equação às diferenças:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k\, x[n-k]}$$

Ex: $y[n] = \frac{1}{3}\left[x[n-1] + x[n] + x[n-1]\right]$

$h[n] = \frac{1}{3}\left[\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]\right]$

Sistema em que a Resposta Impulsional é finita (FIR) → Sempre estável → fase linear

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{3} ; & n=-1,0,1 \\ 0 ; & \text{———} \end{cases}$$

⇒ **Sistema discreto recursivo**: A saída não depende apenas das entradas mas também das saídas anteriores

Equação às diferenças:

$$y[n] = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k\, x[n-k] + \sum_{k=1}^{N} b_k\, y[n-k]$$

Ex: $y[n] = x[n] + a\, y[n-1]$

$$h[n] = \begin{cases} a^n ; & n \geq 0 \\ 0 ; & \text{———} \end{cases}$$

Sistema em que a Resposta Impulsional é Infinita (IIR) → pode ser estável

$x[n] = a^n \cdot u[n]$

↳ custo computacional menor

Processamento Digital de Sinal

RESUMO 1ª MATÉRIA 2

⇒ Classificação de sistemas discretos

• **LINEARIDADE:** $T\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 T\{x_1[n]\} + \alpha_2 T\{x_2[n]\}$

Um sistema é linear quando lhe pode ser aplicado o teorema de sobreposição.

• **ESTABILIDADE:** O sistema é estável quando para uma entrada limitada a saída é limitada

Ex $T[x[n]] = a\,x[n] + b$

Recursivo: $\boxed{|x[n]| < \infty} \longrightarrow |a\,x[n] + b| < \infty$

↳ para SDLI (sistemas discretos lineares invariantes)

$T\{x[n]\} = |a\,x[n] + b| \leq |a|\,M + b$ → é estável para valores finitos de a e b sendo $x[n]$ limitado para um valor de M.

• **INVARIÂNCIA À TRANSLAÇÃO:** Um sistema é invariante no tempo se ao aplicar uma translação à entrada, a saída vai apenas sofrer a mesma translação, sem sofrer outras alterações, como a modificação do sinal.

$x[n] \longrightarrow y[n] \quad ; \quad x[n-nd] = y[n-nd]$

Ex $T\{x[n]\} = x[n-n_0]$

$T\{x[n-nd]\} = x[n-n_0-nd]$

$= y[n-nd]$

Ex $T\{x[n]\} = a\,x[n] + b$

$T\{x[n-nd]\} = a\,x[n-nd] + b = y[n-nd]$

Sistemas invariantes à translação.

• **CAUSALIDADE:** Um sistema é causal quando a saída não precede a entrada. Se um sistema não usa valores futuros de $x[n]$ é causal.

⇒ Resposta em frequência de um sistema:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot x[n-k] = \sum_{k} h[k] e^{-jwk} \cdot e^{jwn}$$

$x[n]$

$\downarrow$

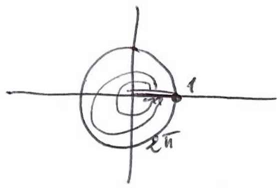
$e^{jwn} = \cos w + j \sin w$

$$\underbrace{\boxed{y[n] = e^{jwn} \sum_{k} h[k] e^{-jwk}}}_{\text{nº complexo}}$$

Periódica de período 2π

$$e^{j(w+2\pi)n} = e^{jwn} + 1\, e^{j2\pi n}$$

$$= e^{jwn}$$



Logo:

$$H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jwn}$$

resposta em frequência.

⇒ Transformada de Fourier de Sinais Discretos

Condição de admissibilidade: As sequências têm de ser absolutamente somáveis

$$\sum_{k} |h[k]| < \infty$$

• **Transformada de Fourier:**

$$\boxed{x[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jwn}}$$

• **Transformada Inversa de Fourier:**

$$\boxed{X(e^{jw}) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}^{-1}} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) e^{jwn}\, dw}$$

Processamento Digital de Sinal

RESUMO 1ª Matéria (3)

⇒ Propriedades da Transformada de Fourier.

• **Linearidade**: $T\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 T\{x_1[n]\} + \alpha_2 T\{x_2[n]\}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} e^{-jwn} = \alpha_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] e^{-jwn} + \alpha_2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] e^{-jwn} \quad (1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1 x_1[n] e^{-jwn} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_2 x_2[n] e^{-jwn} = \alpha_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] e^{-jwn} + \alpha_2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] e^{-jwn} \quad (2)$$

(1) = (2) logo é linear

• **Periodicidade** $T = 2\pi$

$$X(e^{j(w+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{(-j(w+2\pi)+n)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jwn-j2\pi n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jwn}}_{X(e^{jw})} \cancel{e^{-j2\pi n}} = X(e^{jw})$$

⇒ Transformada de Fourier de uma sequência atrasada

$x[n] \longrightarrow X(e^{jw})$

$x[n-n_0] \longrightarrow ?$

Se $n - n_0 = k$

$n = k + n_0$

Mudança Variável

$$X'(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0] e^{-jwn}$$

$$X'(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-jw(k+n_0)} = e^{-jwn_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-jwk}$$

$$X'(e^{jw}) = e^{-jwn} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jwn}}_{X(e^{jw})}$$

$$x[n-n_0] \longrightarrow e^{-jwn} \cdot X(e^{jw})$$

Então:

$$x[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

- **Transformada de Z**

$x[n] \longrightarrow X(z)$

f. complexa

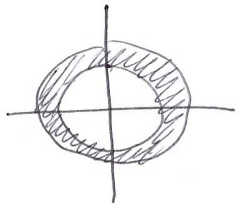
Transformada de Fourier

$x[n] \longrightarrow X(e^{j\omega})$

$\omega = 2\pi$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \quad \text{se} \quad \left| \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \right| < \infty$$

absolutamente somável



$R_{z-} < |z| < R_{z+}$

- **função de Transferência**

$h[n] \xrightarrow{TZ} H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} \qquad \dfrac{N(z)}{\Delta(z)}$

resp. imp.

resposta em freq.

$\Rightarrow$ Calcule a transformada de z da seguinte sequência discreta.

$x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a^n u[n]\, z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a z^{-1})^n u[n] = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n =$$

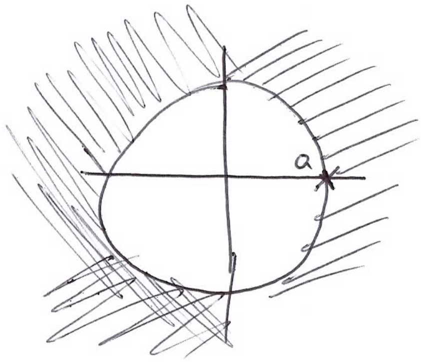
região!

$$= \frac{(a z^{-1})^0 \cdot (1 - a z^{-1})^{\infty}}{1 - a z^{-1}} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

isto não chega!

$|a z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |a| < |z| \Leftrightarrow |z| > |a|$ $\longleftarrow$ é preciso dizer.

Resposta: $X(z) = \dfrac{z}{z-a}$, $|z|>|a|$

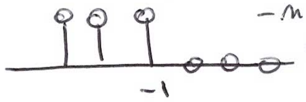


f existe para $|z|>|a|$

Para $|z|<|a|$ não se sabe

Indeterminação quando $z=a$

△ $x[n] = -a^n u[-n-1]$



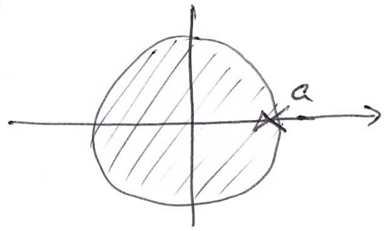
$-n-1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n<-1$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} -a^n u[n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a z^{-1})^n =$$

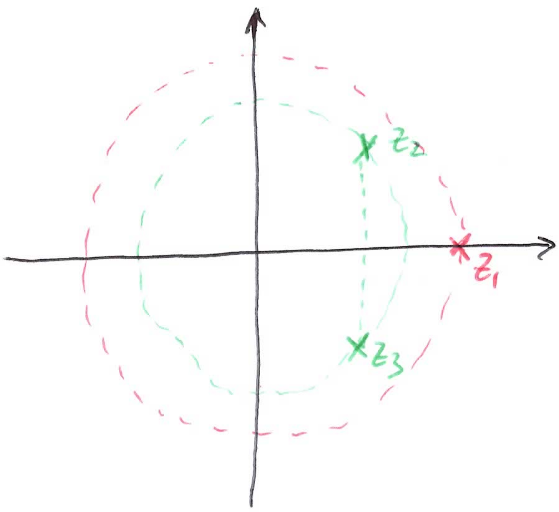
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(a z^{-1})^{-n}}_{(a^{-1}z)^n} = -(a^{-1}z)^1 \frac{\cancel{1-(a^{-1}z)^{\infty}}\to 0}{1-a^{-1}z} = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z}, \quad |a^{-1}z|<1$$

Podiamos continuar...

$$= \frac{-\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}} = \frac{-\frac{z}{a}}{\frac{a-z}{a}} = -\frac{z}{a-z} = \frac{z}{z-a} \quad |z|<|a|$$



⇒ Região de Convergência (ROC): 3 polos



Seq. Causal: ROC é para fora do polo mais exterior

Seq. Ñ Causal: ROC é para dentro do polo mais interior

Estabilidade

É estável se a circunferência de raio unitário estiver contida na ROC.

Processamento Digital de Sinal.
8/1/2009 (2)

⇒ Transformada inversa de Z

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

contorno definido na ROC, que contém a origem e é fechado no sentido directo.

3 técnicas: • resíduos ; • divisão longa ; • expansão em funções parciais.

⇒ Resíduos

polos de $X(z) z^{n-1}$ que estão dentro da ROC

$$x[n] = \sum \text{Res}\left[X(z) \cdot z^{n-1} \cdot \text{nos polos } p_i\right]$$

$$\text{Res}[\ \ ] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \phi_z \Big|_{z=p_i}$$

multiplicidade do polo

$$X(z) z^{n-1} = \frac{\phi(z)}{(z-p_i)^m}$$

⇒ Divisão longa

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

$$\begin{array}{r|l} z & z-a \\ \cline{2-2} -z+a & 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \\ \hline a & \\ -a + a^2 z^{-1} & \\ \hline -a^2 z^{-1} & \\ \hline \dots & \end{array}$$

até encontrar uma lógica

$$\boxed{x[n] = a^n u[n]}$$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{0}^{+\infty} a^n z^{-n}$$

verifica!

Se o sistema for não causal

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \; ; \; |z| < |a|$$

$$\begin{array}{l|l} z & -a+z \\ \hline -z + a^{-1}z^2 & a^{-1}z - a^{-2}z^2 \\ a^{-1}z^2 & \end{array}$$

← pequeno truque no não causal!

$$\boxed{x[n] = -a^{n}\, u[-n-1]}$$

⇒ **Expansão em fracções parciais**

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

1ª Situação: Grau denominador > Grau numerador, polos simples

$$X(z) = \sum \frac{A_K}{z - z_K} \; , \; A_K = X(z)\,(z - z_K)\Big|_{z = z_K}$$

2ª Situação: Grau Denominador ≤ Grau numerador, multiplicidade simples.

$$X(z) = P(z) + \frac{N'(z)}{D(z)} \qquad \begin{array}{r|l} N & D \\ \hline N' & P \end{array}$$

3ª Situação: Grau denominador ≤ Grau numerador; polos de multiplicidade m

$$X(z) = P(z) + \frac{N'(z)}{D(z)}$$

$$\hookrightarrow \sum \frac{A_K}{z - z_K} + \sum_{r=1}^{m} \frac{C_R}{(z - z_i)}$$

Com $C_R = \dfrac{1}{(m-r)!} \dfrac{d^{m-r}}{dz^{m-r}} (z - z_i)^2 X(z)\Big|_{z = z_i}$

P.D.S

Aula Extra (1)

Revisões 2ª Freq

⇒ Sai:

- Técnica de DFT (DFT/FFT)
- Frequência de Nyquist
- Aliasing no domínio: do tempo / frequência

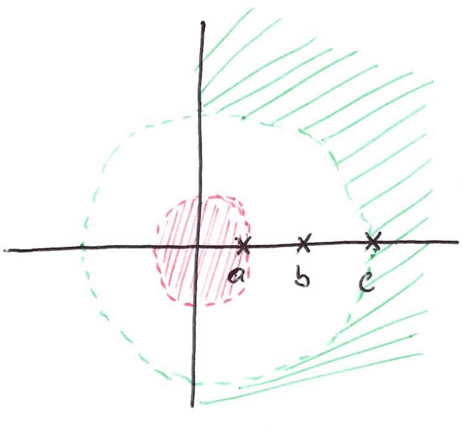
qd a DFT q se pretende calcular tem menos pontos que a função amostrada

- não fazemos com que os triângulos se afastem
- oversampling (acima do max) para afastá-los.

- Relação entre frequência digital/analógica
- Transformada de Z / inversa

— " — " —

⇒ Região de Convergência (ROC)



Sistema não causal [zona interior ao polo mais à esquerda]

Sistema causal [zona exterior ao polo mais à direita]

Se a circunferência de raio unitário pertence à ROC o sistema é estável

⇒ Propriedades da Transformada de Z

• **Linearidade:**

$$x[n] = a\, x_1[n] + b\, x_2[n]$$

$$\boxed{X(z) = \sum_n x[n]\, z^{-n}} = \sum_n \{a\, x_1[n] + b\, x_2[n]\}\, z^{-n} =$$

$$= a \sum_n x_1[n]\, z^{-n} + b \sum x_2[n]\, z^{-n} = \boxed{a\, X_1(n) + b\, X_2(n) = X(z)}$$

$$a\, x_1[n] + b\, x_2[n] \hookrightarrow a\, X_1(n) + b\, X_2(n)$$

• **Translação:**

$$x[n] \hookrightarrow X(z)$$

$$x[n-n_0] \hookrightarrow \ ?$$

$$X(z) = \sum_n x[n-n_0]\, z^{-n}$$

$$n - n_0 = m \Leftrightarrow m + n_0 = n \Leftrightarrow -n = -m - n_0$$

$$= z^{-n_0} \sum_m x[m]\, z^{-m} =$$

$$-\infty \nearrow n \nearrow +\infty \Rightarrow -\infty \nearrow m \nearrow +\infty$$

$$= z^{-n_0} X(m) = z^{-n_0} X(n - n_0)$$

• **Convolução**

$$h[n] \hookrightarrow H(z)$$

$$x[n] \hookrightarrow X(z)$$

$$y[n] \hookrightarrow Y(z)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\sum_k h[k]\, x[n-k] \hookrightarrow H(z) \cdot Y(z)$$

Transformada de Fourier.

Pode-se dizer que

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) = H(z) * X(z)$$

PDS

Aula Extra ②

⟹ Função de Transferência

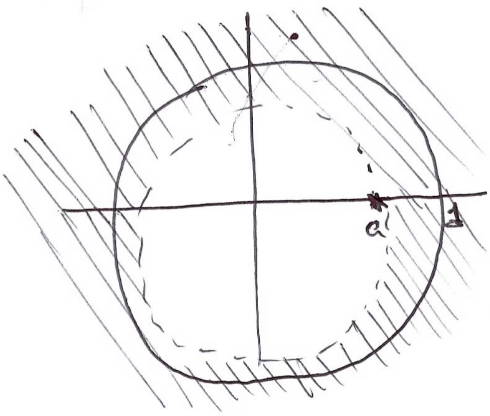
é a transformada de Z da resposta impulsional.

$$h[n] \longrightarrow H(z)$$

Podemos caracterizar um sistema através da função de transferência, da equação às diferenças, ou da resposta impulsional.

A FT serve para fazer a analise e síntese de filtros digitais.
(produzir)

$$H(e^{jw}) \sum_n h[n] e^{-jwn} \xrightarrow[z=e^{jw}]{} H(z) = \sum_n x[n] z^{-n}$$



$|a| < 1$

Condição para existir Transformada de Fourier
- O sistema tem de ser estável

$$\sum |h[n]| < \infty$$

⟹ Equação às diferenças

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r \, x[n-r] \qquad H(z) = \frac{\sum_r b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Exemplo:

$$y[n] = a_0 x[n] + b_1 y[n-1]$$

LINEAR

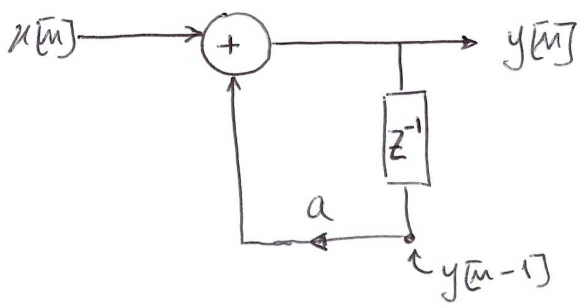
$$\xrightarrow{Z} \quad Y(z) = a_0 X(z) + b_1 z^{-1} Y(z) \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{1 - b_1 z^{-1}}$$

⟹ Estruturas para a realização de filtros discretos

$$H(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \implies X(z) = Y(z) - a z^{-1} Y(z)$$

contrário de há bocado

$$y[n] - a\, y[n-1] = x[n]$$

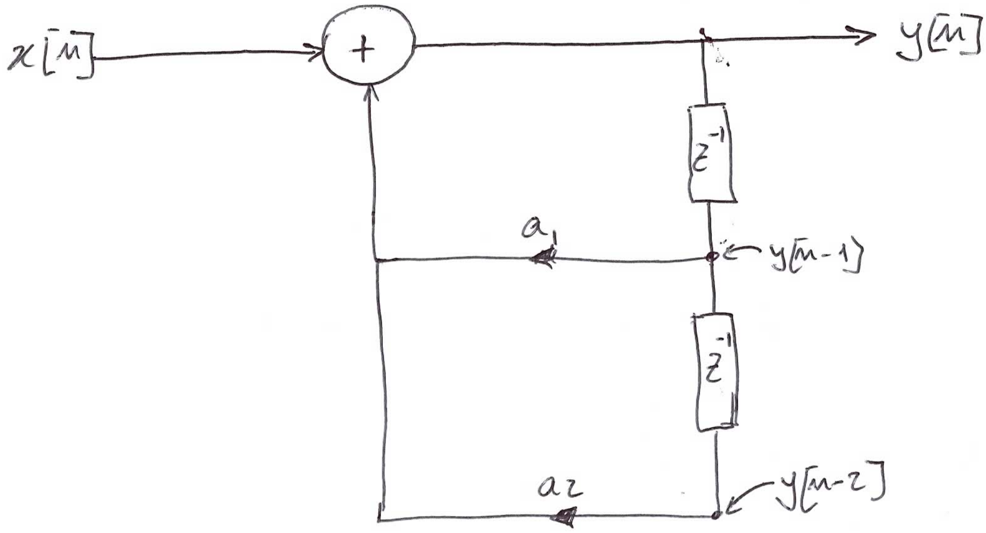


P.D.S.

Aula Extra ③

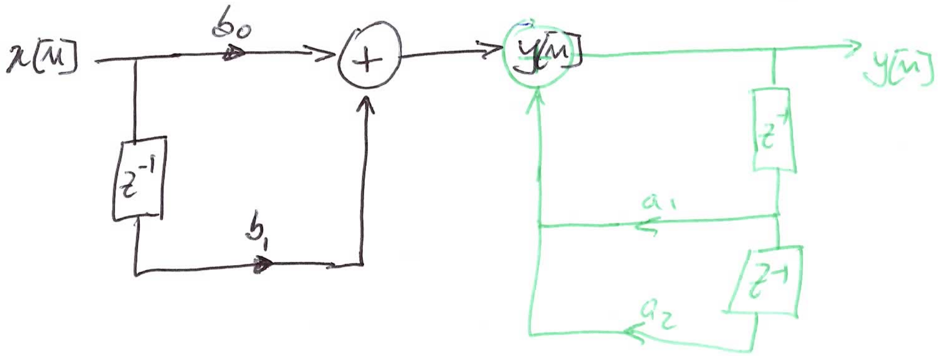
OUTRO EXEMPLO:

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$



Outro Exemplo: $H(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})} = b_0 + b_1 z^{-1} \cdot \dfrac{1}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$

já feito!



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

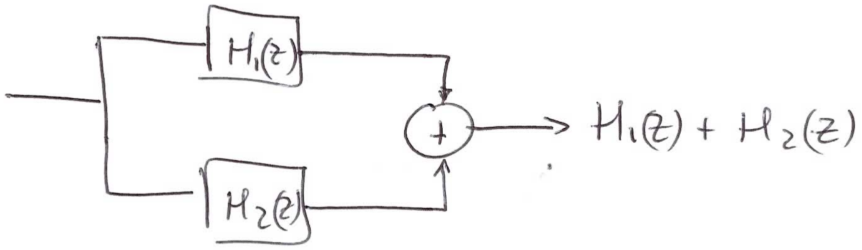
$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

$$y[n] = x[n] + b_1 x[n-1]$$

⇒ **Associação Série**

não é convolução; estamos no domínio dos tempos

⇒ **Associação Paralelo**



→ Na simplificação dos grafos de fluência temos que dizer que é devido ao esforço computacional reduzindo o número de posições de memória

- ATENÇÃO: Recursividade ≠ Causalidade
  Domínios tempo/frequência

⇒ **Parte dos filtros** (só teórica)

IIR	FIR
pode ser não estável	estável
menor ordem	fase linear

a $H(z)$ ñ tem denominador

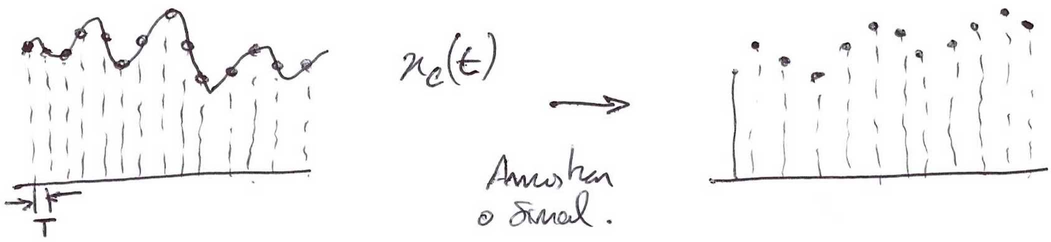
Síntese de Filtros Digitais

É o projecto de filtros a partir de uma determinada especificação de filtros analógicos.

Processamento Digital de Sinal

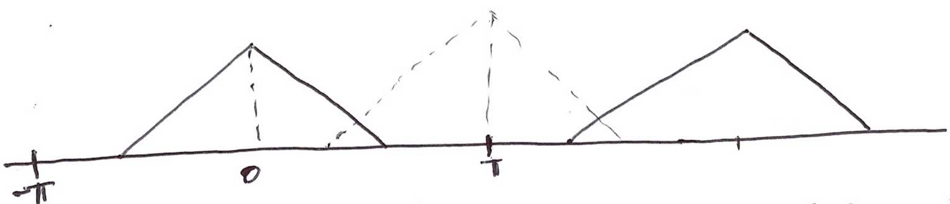
MATERIA 2ª FREQ

⇒ Amostragem e Reconstrução de Sinais



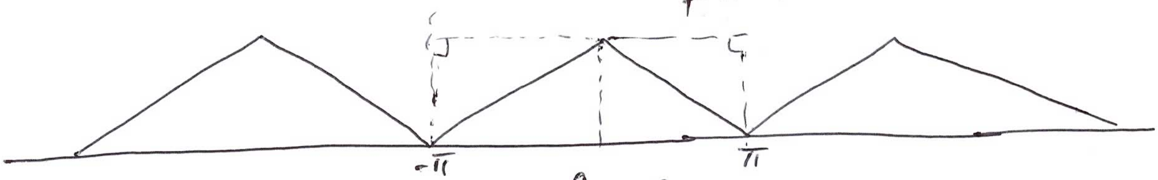
$$f_a = \frac{1}{T} \geq 2 f_{max}$$

$$x[n] = x_c(t) \Big|_{t=nT}$$



↳ sobreposição de sinal (Aliasing) devido ao desrespeito do Teorema de Sobreposição.

filtro ideal (inconcebível na prática)



$f_a = 2 f_{max}$

Oversampling: efectuar mais amostras que o necessário.

$$X_c(j\Omega) \xleftrightarrow{?} X(e^{j\omega})$$

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$ ← T. Fourier Contínua inversa

$$x[n] = x_c(t)\Big|_{t=nT}$$ ← em digital

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega)\, e^{j\Omega nT}\, d\Omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$ ← T. Fourier Discreta inversa.

mudança de variável.

$$\Omega T \to \omega \qquad \frac{d\omega}{d\Omega} = T \Leftrightarrow \frac{d\omega}{T} = d\Omega$$

Substituindo em

$$x[n] = \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) e^{j\omega n}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi T}\int_{-(2r-1)\pi}^{(2r+1)\pi} X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) e^{j\omega n}\, d\omega.$$

Mudança de Variável

$$\omega = \omega' + 2\pi r$$

$$d\omega = d\omega'$$

$$2\pi r + \pi = \omega' + 2\pi f$$

fica:
$$x[n] = \frac{1}{2\pi T}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} X_c\left(j(\omega+2\pi r)/T\right) e^{j(\omega+2\pi r)n}\, d\omega$$

Processamento Digital de Sinal

MATÉRIA 2ª Freq.

$$= \frac{1}{2\pi T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} X_e\left(\frac{j(\omega + 2\pi r)}{T}\right) e^{j\omega n} \, d\omega$$

$e^{j\pi 2 a r} = 1$

$$= \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_e\left(j\frac{\omega + 2\pi r}{T}\right) e^{j\omega n}$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_e\left(j\frac{\omega + 2\pi r}{T}\right)}$$

→ O espectro do discreto é igual ao do contínuo repetido de um lado para o outro.

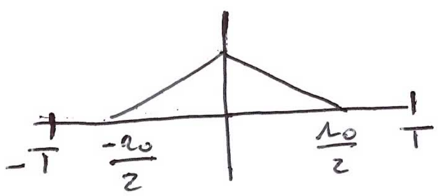
Ex $r = 0$

$$\ldots X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} X_e\left(j\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{T} X(j\Omega)$$

Ω

Qd se respeita o teorema da sobreposição vai haver sempre preservação do sinal.

⇒ Reconstrução do Sinal Analógico



$$\boxed{\frac{\Omega_0}{2} < \frac{\pi}{T}}$$

f_{max}

① $X(e^{j\omega}) = X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} X_e(j\Omega) \quad ; -\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T}$

② $X(e^{j\omega}) = \sum_{n} x[n]\, e^{-j\omega n}$

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_c(j\Omega)\, e^{j\Omega T}\, d\Omega =$$

① + ②

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}\left[\sum x_c(nT)\, e^{-j\Omega T n}\right] e^{j\Omega t}\, d\Omega =$$

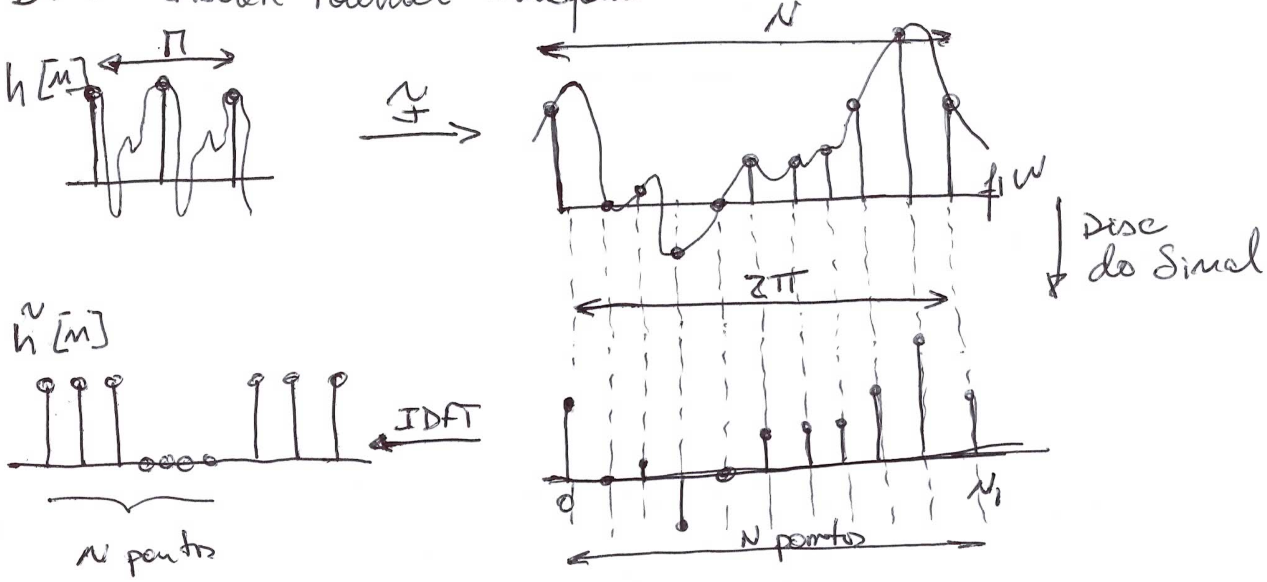
$$= \frac{T}{2\pi}\sum \underbrace{x_c(nT)}_{\text{sind Amostrais.}} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-j\Omega(t-nT)}\, d\Omega$$

$\to \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$

Processamento Digital de Sinal

MATÉRIA 2ª FREQ

DFT - Discrete Fourier Transform



$H(e^{jw}) \rightarrow$ Transformada de Fourier (contínua), $H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-jw}$

Complicado de resolver por computador.

$H(k)$ ⇝ DFT em "N" pontos

$$H(k) = H(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2\pi}{N}\cdot k}, \quad k=0,\dots,N-1$$

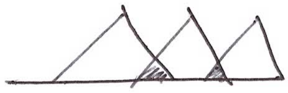
- Serve para analisar sinais em frequência.
- Filtragem no domínio das frequências

$$y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow X(k)\cdot H(k) = Y(k)$$

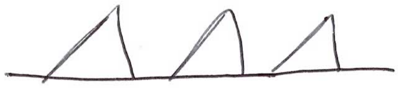
⇒ Aliasing no domínio das frequências

• Sobreposição dos espectros

$\begin{cases} \text{aliasing} \\ f_a \leq 2 f_{max} \end{cases}$



$\begin{cases} \text{anti-aliasing} \\ f_a \geq 2 f_{max} \end{cases}$



• Não se recupera o sinal se $M > N$ (no domínio do tempo).
Garante-se que não existe time-aliasing se $M \leq N$

EX3 Considere um sistema linear, invariante no tempo, com resposta impulsional

$$h[n] = \begin{cases} a^n & , n \geq 0 \\ \phi & , n < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad x[n] = \begin{cases} 1 & , 0 \leq n \leq (N-1) \\ 0 & , \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

a) Determine a saída $y[n]$ calculando a convolução discreta entre $x[n]$ e $h[n]$

b) Determine a saída $y[n]$ usando a transformada Z^{-1} do produto das transformadas Z da entrada e da resposta impulsional.

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

$X(z) \qquad H(z) \qquad Y(z) = X(z) \cdot H(z)$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

importante: esta é a passagem para digital

DFT $\quad H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad ; \; 0 \leq k < N$

IDFT $\quad h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad ; \; 0 \leq n < N$

Processamento Digital de Sinal

MATÉRIA 2ª Freq.

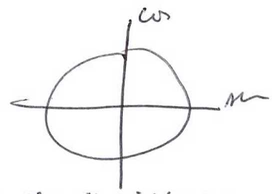
$\boxed{N=4}$

$\boxed{\text{EX:}}$ Calcular a DFT com 4 pontos de: $h[n] = \begin{cases} 1/3 & ; 0 \leq n < 3 \\ 0 & ; \text{———} \end{cases}$

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad ; 0 \leq k < 4$$

$$= \sum_{n=0}^{3} h[n]\, e^{-j\frac{2\pi k n}{4}} = ⊛$$

—— " ——



$e^{-jw} = \text{sen}\, w + j\,\text{sen}\, w$

$$H(0) = \sum_{n=0}^{3} h[n]\, e^{0} = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{3} \cdot 1 = 1/3$$

$$H(1) = \sum_{n=0}^{3} h[n]\, e^{-j\frac{2\pi n}{4}} = \frac{1}{3}\Big(\underbrace{\cancel{e^{0}}}_{n=0}^{1} + \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{4}}}_{n=1} + \underbrace{e^{-j\frac{4\pi}{4}}}_{n=2} + \underbrace{e^{-j\frac{6}{4}\pi}}_{n=3}\Big) =$$

$$H(2) = \sum h[n]\, e^{\underbrace{-j\frac{2}{4}\cdot 4\pi n}_{-j2n}} = \frac{1}{3}\Big(\cancel{e^{0}}^{1} + e^{-j2\pi} + e^{-j4\pi} + e^{-j6\pi}\Big) =$$

$$H(3) = \sum h[n]\, e^{\underbrace{-j\frac{6}{4} n}_{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\Big(\cancel{e^{0}}^{1} + e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j3\pi} + e^{-j\frac{9}{2}\pi}\Big) = e$$

—— " ——

$$⊛ = \frac{1}{3}\Big(\underbrace{1}_{n=1} + \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}k}}_{n=2} + \underbrace{e^{-j\pi k}}_{n=3} \underbrace{+0}_{n=4}\Big) = \frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi k}{2}+0}\Big(e^{j\frac{\pi k}{2}} + 1 + e^{-j\frac{\pi k}{2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(2\cos\Big(\frac{\pi k}{2}\Big) + 1\Big) e^{-j\frac{\pi}{2}k}$$