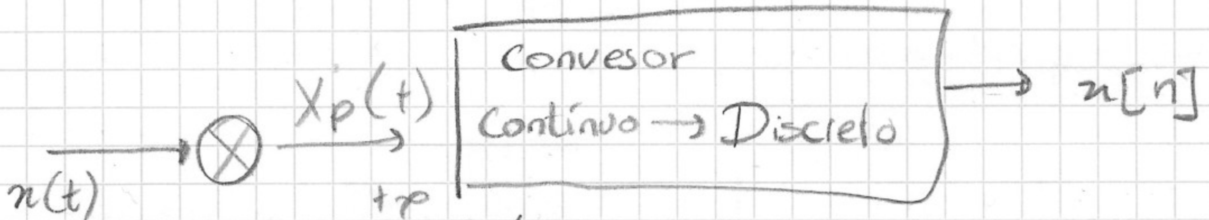
Teste 2 21-E

1. Considere um sinal discreto x[n] obtido por amostragem de uma realização de um processo ruído branco estacionário de média m_x e variância σ_x^2.
   a) Mostre que amostrar o sinal é equivalente a amostrar a sequência de autocorrelação. Para o efeito determine a sequência de autocorrelação do sinal amostrado. Justifique.



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kt)$$

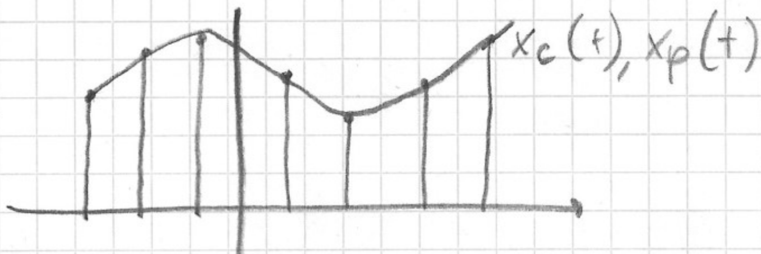
(trem de impulsos)

$$\phi_{xx}(\tau) = E\{x_c(t) \cdot x_c(t-\tau)\} \Rightarrow \phi_{xx}[n] = E\{x[n] \cdot x[n+m]\}$$

devido à amostragem temos

$$X_p(t) = X_c(nT)$$

$$\phi_{x_c x_c}(mT) = E\{x_c(nT) \cdot x_c((n+m)T)\} = \phi_{xx}[m]$$



$$x[n] = x_c(nT)$$

$$\phi_{xx}(m) = \phi_{x_c x_c}(mT)$$

b) Considere a estimativa da sequência de autocorrelação $C_{xx}[m]$. Com base nesta estimativa desenvolva uma estimativa para a sequência de autocovariância ($G_{xx}[m]$) do processo x[n]. $\gamma_{xx}[m] = \phi_{xx}[m] - m_x^2$

$$\gamma_{xx}[m] = \phi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \cdot \delta[m]$$

Estudamos 2 estimativas da representação da autocorrelação

$$c'_{xx}[n] = \frac{1}{N-|m|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n] \cdot x[n+m]$$

$$\underbrace{c_{xx}[m] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\, x[n+m]}$$

↳ estimativa de menor variância

c) Determine a polarização de $G_{xx}[m]$. Como classifica este estimador relativamente à consistência? Justifique.

$$B_{c_{xx}} = \phi_{xx}[m] - E\{c_{xx}[m]\}$$

$$E\{C_{xx}[n]\} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E\{\underbrace{x[n] \cdot x[n+m]}_{\phi_{xx}[m]}\} =$$

$$= \phi_{xx}[m] \cdot \frac{N-|m|}{N}$$

$$B_{C_{xx}} = \phi_{xx}[m] \cdot \left[\frac{n - N - |m|}{n}\right] =$$

$$= \phi_{xx}[m] \cdot \frac{|m|}{N}$$

A estimativa é consistente porque

$$\lim_{N \to +\infty} B_{C_{xx}} = 0$$

✓ d) **Considere a definição da DFT apresentada no final deste teste. Determine a média de X(k) para esta definição de DFT. Justifique.**

DFT

abordagem 1 → $X(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n}$$

abordagem 2 → $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n}$

$$x[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n}$$

$$E\{|X(k)|^2\} = E\left\{\frac{1}{N} \cdot \sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1] e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n_1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n_2=0} x[n_2] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N} \cdot n_2}\right.$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{n_1}\sum_{n_2} E\{\underbrace{x[n_1]\cdot x[n_2]}_{\sigma_x^2 \cdot \delta[n_1-n_2]}\} e^{-jK\frac{2\pi}{N}(n_1-}$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{N^2}\cdot\underbrace{\sum_n 1}_{N} = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

e) Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência do PE X(K). Justifique.

$$\phi_{xx}[m] = E\{x[n]\,x[n+m]\} = E\{(v[n]+e[n])(v[n+m]+e[n+m])\}$$

$$= E\{v[n]\,v[n+m] + v[n]\cdot e[n+m] + e[n]\,v[n+m] + e[n]\,e[n+m]$$

Coma a E (Esperança) da soma é sempre a soma das Esperanças,

$$\phi_{xx}[m] = \phi_{vv}[m] + 2\,\phi_{ev}[m] + \phi_{ee}[m]$$

Como os sinais v e e são não correlados

$$\phi_{xx}[m] = \phi_{vv}[m] + 2m\,\phi + m^2 + \sigma_e^2\,\delta[m]$$

$$\phi_{ev}[m] = E\{e[n]\cdot v[n+m]\} = E\{e[n]\}\cdot E\{v[n+m]\} =$$

$$= m \times 0 = 0$$

4

$$\phi_{ee}[m] = m^2 + \sigma^2 \delta[m]$$

$$\phi_{xx}[m] = E\{v[n]\, v[n+m]\} =$$

$$= E\{A\cos(r_0 n + \varphi)\, A\cos(r_0(n+m) + \varphi)\}$$

RECORDAR QUE:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

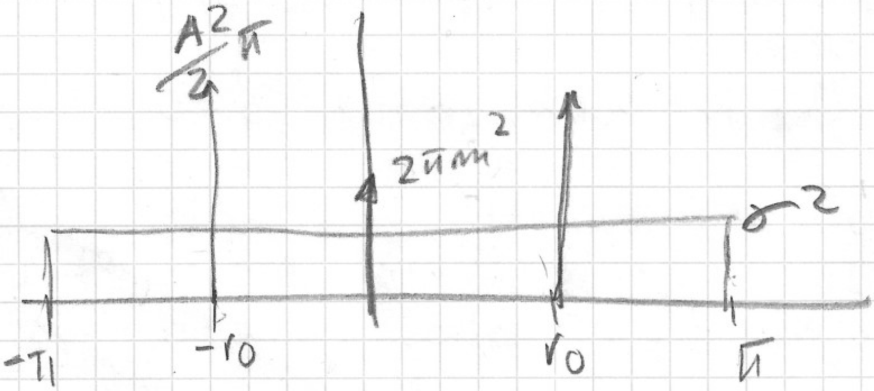
$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\phi_{vv}[m] = \frac{A^2}{2} E\{\cos(2r_0 n + r_0 n + 2\varphi) + \cos(r_0 m)\}$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(r_0 n)$$

$$\phi_{xx}[n] = \frac{A^2}{2}\cos(r_0 m) + m^2 + \sigma^2 \delta[m]$$

$$P_{xx}(r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[m]\, e^{-jrm}$$



f) Mostre que o periodograma é um estimador consistente da densidade espectral de potência mas apenas relativamente à média. Explique como é que o método de Bartlett diminui a variância deste estimador. Justifique.

$$I_N(r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}[m]\, e^{-jrm}$$

$$E\{I_N(r)\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} P_{xx}(r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}[m]\, e^{-jrm}$$

$$E\{I_N(r)\} = E\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}[m]\, e^{-jrm}\right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E\{C_{xx}[m]\}\, e^{-jrm} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{N-|m|}{N}\, \phi_{xx}[m]\, e^{-jrm}$$

$$\lim_{N\to+\infty} E\{I_N(r)\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[m]\, e^{-jrm} = P_{xx}(r)$$

Logo $I_N(r)$ é um estimador assintóticamente consistente relativamente à média

$$B = E\{I_N(r)\} - P_{xx}(r)$$

$$N \to +\infty \longrightarrow B = 0$$

O método de Barlett é o método da média dos periodogramas. Dividimos em segmentos, calculamos os periodogramas e fazemos a média dos periodogramas. Foi uma forma que se encontrou de diminuir a variância, pois dividimos em segmentos e somamos a média, diminuindo a variância

Assim, diminui a variância, porque ao somar variáveis independentes nos segmentos, diminui a variância.

Modelo de Barlett

Usando o conhecimento de estatística que diz que a soma de K variáveis aleatórias idênticas e independentemente distribuídas gera uma variável aleatória cuja variância é $\frac{1}{K}\sigma^2$

g) Considere que o sinal x[n] é aplicado ao sistema LTI cuja Transformada-z da resposta impulsional é dada por

$$H(z) = \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Determine a sequência de autocorrelação do sinal de saída. Justifique.

$$\phi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{xx}(|m-k|)$$

tem que dar isto mas no ex ñ dá

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k x[n-k]$$

$$x[n] \cdot x[n-m] = \sum_{k=1}^{N} a_k x[n-k] x[n-m]$$

$n-k-(n-m) = m-k$

$$\underbrace{E\{x[n] \cdot x[n-m]\}}_{\phi_{xx}[-m]} = \sum_{k=1}^{N} a_k E\{x(n-k) x[n-m]\}$$

$$\phi_{xx}[m] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{xx}[|m-k|]$$

h) Considere que dispõe de 6 amostras do sinal de saída do sistema apresentado na alínea anterior. Escreva um conjunto de equações que lhe permitam calcular os coeficientes a_k que minimizam o erro do preditor. Apresente uma expressão que lhe permita calcular esse erro. Justifique.

...nsidere um sinal s[n] de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo ...itivo por um sinal ruído branco e[n] de média m_e e desvio padrão σ_e

✓ a) Determine a média e a variância do processo x[n]=s[n]+e[n] admitindo que os processos são não correlados.

$$x[n] = s[n] + e[n]$$

<u>Média:</u>

$$m_x = E\{x[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(s[n]+e[n]\right)$$

$$x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n] + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e[n]$$

$$= m_s + m_e$$

<u>Variância</u>

$$\sigma_x^2 = E\{(x-m_x)^2\} = E\{x^2 - 2x\,m_x + m_x^2\} =$$

$$= E\{x^2\} - 2m_x \underbrace{E\{x\}}_{m_x} + m_x^2$$

$$= E\{x^2\} - m_x^2$$

Como:

$$E\{x^2\} = E\{(s+e)^2\} = E\{s^2 + 2se + e^2\} =$$

$$= E\{s^2\} + 2E\{s.e\} + E\{e^2\} \quad \text{, sendo } m_x = m_s + m_e$$

$$\sigma_x^2 = E\{s^2\} + 2E\{se\} + E\{e^2\} - (m_s + m_e)^2 =$$

$$= E\{s^2\} + 2E\{se\} + E\{e^2\} - m_s^2 - 2m_s m_e - m_e^2 -$$

$$\sigma_s^2 = E\{s^2\} - m_s^2 + E\{e^2\} - m_e^2 + 2\cancel{E}\{s.e\} - 2m_s m_e$$

Então $\sigma_x^2 = \sigma_s^2 + \sigma_e^2$

✓ **b)** **Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência de x[n] em função dos parâmetros conhecidos dos processos e e[n].**

$$\phi_{xx}[n] = E\{x[n] \cdot x[n+m]\}$$

$$= E\{(s[n]+e[n])(s[n+m]+e[n+m])\}$$

$$= E\{(s[n]\,s[n+m] + s[n]\,e[n+m] + e[n]\,s[n+m] +$$

$$+ e[n]\,e[n+m]\}$$

$$= E\{(s[n]\,s[n+m] + E\{e[n]\,e[n+m]\} +$$

$$+ E\{s[n]\,e[n+m]\} + E\{e[n]\,s[n+m]\}$$

$$= \phi_{ss}[m] + \phi_{ee}[m] + 2\phi_{se}[m]$$

Como s e e são ruído branco

$$\begin{cases} \phi_{ss}[m] = \sigma_s^2\,\delta[n] + m_s^2 \\ \phi_{ee}[m] = \sigma_e^2\,\delta[n] + m_e^2 \end{cases}$$

Então

$$\phi_{xx}[m] = \sigma_s^2 + \delta[n] + m_s^2 + \sigma_e^2\,\delta[n] + m_e^2 +$$

$$+ 2\phi_{es}[m] =$$

$$= (\sigma_s^2 + \sigma_e^2)\,\delta[n] + m_s^2 + m_e^2 + 2m_e m_s$$

Densidade espetral de potência

$$P_{xx}(r) = T.F.\{\phi_{xx}[m]\}$$

$$= \sum_{m=-a}^{+a} \phi_{xx}[m]\, e^{-jrm}$$

$$= \sigma_s^2 + \sigma_e^2 + 2\pi\delta(r)\, m_s^2 + 2\pi\delta(r)\, m_e^2 +$$

$$2\pi\delta(r)\, \cancel{(m_e m_s)}$$

$$(m_s + m_e)^2$$

$$= (\sigma_s^2 + \sigma_e^2) + 2\pi\delta(r)[m_s^2 + m_e^2 + 2 m_e m_s]$$