Processamento Digital de Sinal

MATÉRIA 2008 (1)

=> Sistemas e Sinais Discretos

$x[n]$ —— SD —— $y[n]$

conj de valores que a saída pode tomar

conj de valores que a entrada pode tomar

$\{x[n]\}$ $\{y[n]\}$

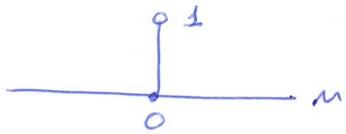
Amostras (reais ou complexos)

$n \in \mathbb{Z}$

=> Algumas sequências Importantes

• **Impulso de Dirac**

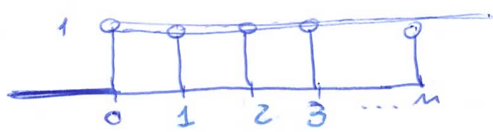
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



• **Degrau Unitário (Heaviside)**

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

ou $\mu[n]$



$$h[n] = h[n]\Big|_{t = nT \,;\, T = 1}$$

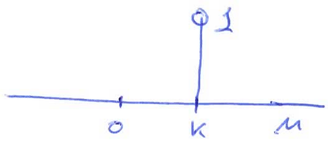
$$\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = ?$$

para $n < 0$ $\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = 0$

$n=0\ ;\ \sum_{k=-\infty}^{0} \delta[k] = \delta[n]$

$n>0\ ;\ \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = 0+1+1+1+\dots = u[n]$

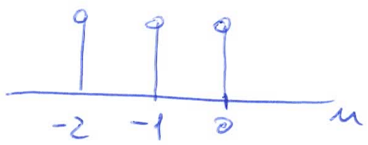
$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1; & n=k \\ 0; & n\neq k \end{cases}$$



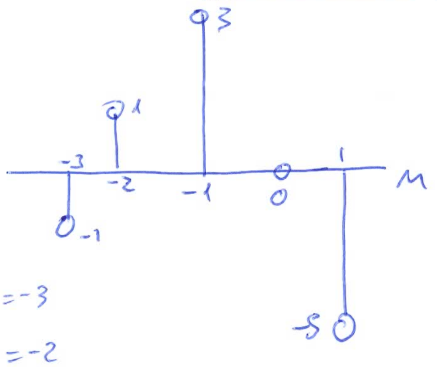
$u[-n] = ?$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \boxed{n>0} \end{cases}$$

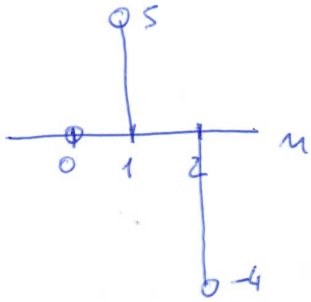
$$u[-n] = \begin{cases} 1\ ; & -n>0 \Leftrightarrow \boxed{n<0} \end{cases}$$



$x_1[n] \Rightarrow$

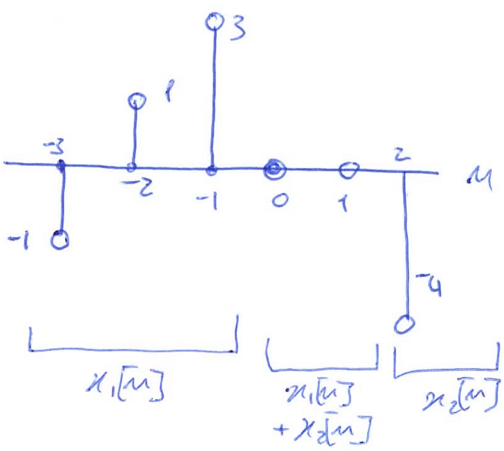


$x_2[n] \Rightarrow$



$$x_1[n] = \begin{cases} -1; & n=-3 \\ 1; & n=-2 \\ 3; & n=-1 \\ 0; & n=0 \\ -5; & n=1 \end{cases}$$

$x_1[n] + x_2[n]$



$\therefore \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = h[n]$

$\therefore \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] = ??$

$\therefore$ Exponencial Complexa

$x[n] = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\,\mathrm{sen}(\omega n)$

⇒ Operações com sinais discretos

⇒ $x[n] \cdot y[n]$ ⇒ $\vdots$
$x[1] \cdot y[1]$
$x[2] \cdot y[2]$
$\vdots$

⇒ $x[n] + y[n]$ ⇒ $x[1] + y[1]$
$x[2] + y[2]$

⇒ Produto por uma constante

$a\,x[n] + b\,y[n]$

⇒ Translação

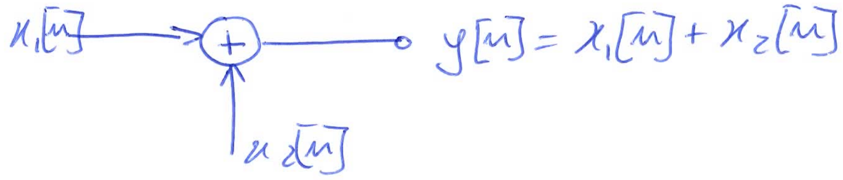
$x[n - n_0]$

⇒ Rotação

$x[-n]$

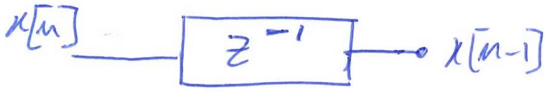
⇒ Componentes necessário para a realização de um sistema discreto.

⇒ Soma



⇒ Produto por uma constante

⇒ Atraso.

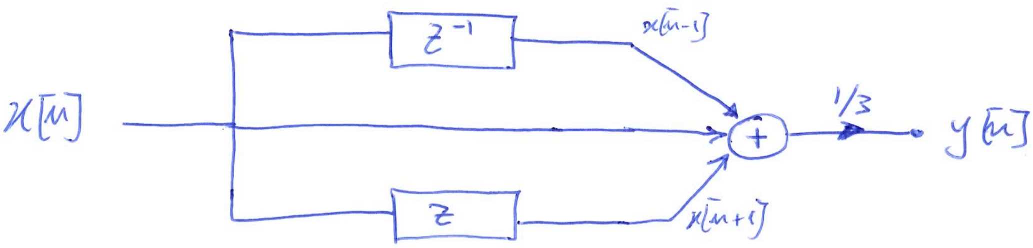


⇒ Avanço

⇒ Sistema discreto não recursivo

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n-1] + x[n] + x[n+1]\right)$$ ⇐ Equação às diferenças

É um processo que existe para caracterizar o sistema, arranjando uma expressão que relaciona a entrada com a saída



Nos sistemas recursivos a saída só depende da entrada e/ou da própria saída.

$x[n]$ é um impulso $\Longrightarrow$ $x[n] = \delta[n]$ $\Longrightarrow$ $y[n] = h[n]$

resposta impulsional

Processamento Digital de Sinal

MATÉRIA 2008 (3)

$\therefore$

$n=-3 \Rightarrow h[-3] = \frac{1}{3}\left(\delta(-3-1) + \delta(-3) + \delta(-3+1)\right) = 0$

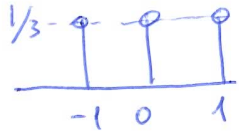
$n=-2 \Rightarrow h[-2] = 1/3\left(\delta(-2-1) + \delta(-2) + \delta(-2+1)\right) = 0$

$n=-1 \Rightarrow h[-1] = 1/3\left(\delta(-1-1) + \delta(-1) + \delta(-1+1)\right) = 1/3$

$n=0 \Rightarrow h[0] = 1/3\left(\delta(-1+0) + \delta(0) + \delta(0+1)\right) = 1/3$

$n=1 \Rightarrow h[1] = 1/3\left(\delta(1-1) + \delta(1) + \delta(1+1)\right) = 1/3$

$\Longrightarrow$ Resposta impulsional do sistema



$\boxed{\text{FIR}}$ finite Impulse Response

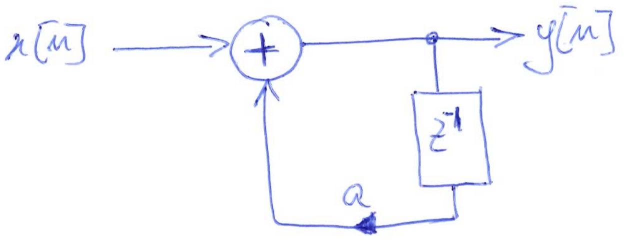
$$h[n] = \begin{cases} 1 & ; n=-1,0,1 \\ 0 & ; \text{———} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k \cdot x[n-k]$$

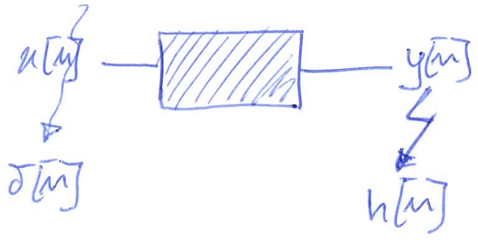
Este é um sistema discreto não recursivo (não depende da saída)

$\Longrightarrow$ Sistema discreto recursivo (depende da saída)

$y[n] = x[n] + a \cdot y[n-1]$



$h[n] = ?$



Da equação às diferenças: $h[n] = \delta[n] + a \cdot h[n-1]$

$n < 0$, $n = 0 \Rightarrow h[0] = \delta[0] + a\, h[-1] = 1$

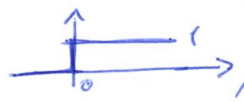
0 cond. iniciais nulas !!

$a^0 = 1$!!

$n = 1 \Rightarrow h[1] = \delta[1] + a \cdot h[1-1] = a$

$n = 2 \Rightarrow h[2] = \delta[2] + a\, h[2-1] = a^2$

ou seja: $h[n] = \begin{cases} a^n ; & n \geq 0 \\ 0 ; & \text{———} \end{cases}$

$\boxed{\text{ou}}$ $h[n] = a^n \cdot u[n]$ ($u[n] \Rightarrow$ )

↳ $\boxed{\text{IIR}}$ Infinite Impulse Response.

Equação às diferenças (IIR):

$$y[n] = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k\, x[n-k] + \sum_{r=1}^{N} b_r \cdot y[n-r]$$

Conclusão

→ Sistemas NÃO Recursivos $\Rightarrow$ Sistema FIR

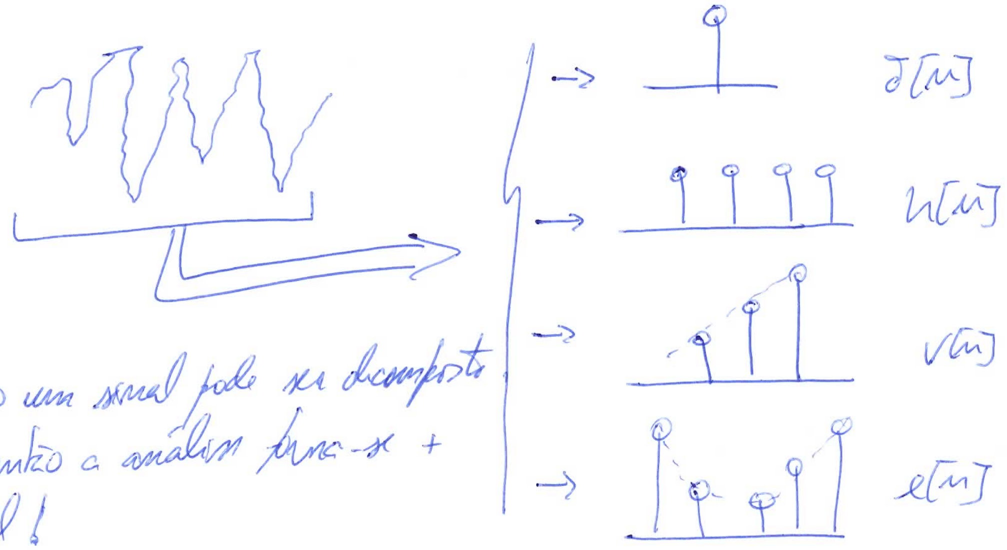
→ Sistemas Recursivos $\Rightarrow$ Sistema IIR.

⟹ Sistemas Discretos (Classificação)

- **LINEAR:** Quando é possível aplicar o Teorema da Sobreposição.

$$T\{a\,x_1[n] + b\,x_2[n]\} = a\,T\{x_1[n]\} + b\,T\{x_2[n]\}$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow T\{x[n]\}$$



Quando um sinal pode ser decomposto nestes então a análise torna-se + fácil!

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]\right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot T\{\delta[n-k]\}$$

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot h_k[n-k]}$$

EXERCÍCIO Classifique o seguinte sistema não recursivo quanto à linearidade

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$$

$$T\{a\,x_1[n] + b\,x_2[n]\} = a \cdot T\{x_1[n]\} + b \cdot T\{x_2[n]\} \quad ?$$

$$T\{a\,x_1[n] + b\,x_2[n]\} = 1/3\{a\,x_1[n-1] + a\,x_1[n] + a\,x_1[n+1] +$$
$$+ b\,x_2[n-1] + b\,x_2[n] + b\,x_2[n+1]\}$$

$$a\,T\{x_1[n]\} + b\,T\{x_2[n]\} = 1/3\,a\{x_1[n-1] + x_1[n] + x_1[n+1]\}$$
$$+ 1/3\,b\{x_2[n-1] + x_2[n] + x_2[n+1]\}$$

$$= 1/3\{a[x_1[n-1] + x_1[n] + x_1[n+1]] +$$
$$+ b[x_2[n-1] + x_2[n] + x_2[n+1]]\}$$

$\therefore$ O sistema é linear!

⇒ Invariância à Translação

$$x[n] \rightsquigarrow y[n]$$

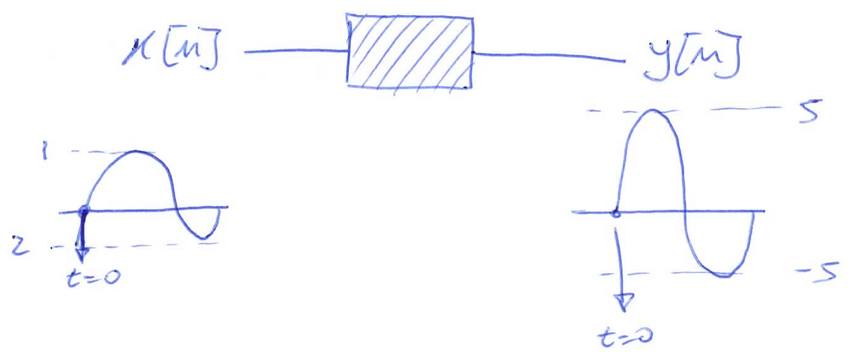
$\downarrow$ atraso

$$x[n-k] \longrightarrow y[n-k] \quad ; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Quando o sistema discreto é invariante à translação:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] \longrightarrow \text{convolução linear discreta.}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[n]$$



Definir um sistema
- → equação às diferenças
- → conhecendo $h[n]$ e fazendo a operação de convolução com a entrada.

$$y[n] = \sum_{k=M_1}^{M_2} a_k \cdot x[n-k]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

Convolução linear.

EXEMPLO

$$x[n] = \begin{cases} -1 ; & n = 0, -1, 1 \\ 0 ; & \text{———} \end{cases}$$

Tamanho : $M = 3$

$$h[n] = \begin{cases} 1 ; & n = 0, 1, 2 \\ 0 ; & \text{———} \end{cases}$$

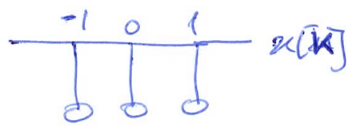
Tamanho : $N = 3$

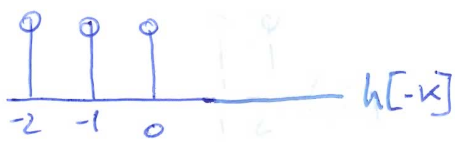
$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n]} = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

Tamanho de $y[n] = M + N - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

$$y[n] = \sum x[k]\, h[n-k]$$

Ex: $n = 0 \Rightarrow \sum x[k]\, h[-k]$





• CONVOLUÇÃO LINEAR DISCRETA

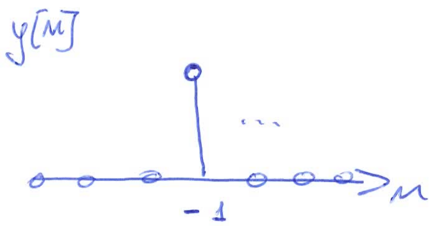
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$\boxed{n = -1}$

$$y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[-1-k] =$$

$$\underbrace{x[\quad]\cdot h[\quad]}_{k<-1} + \underbrace{x[-1]\, h[-1-k]}_{k=-1} + \underbrace{x[0]\, h[-1+1]}_{k=0} + \dots$$

$$\Leftrightarrow y[-1] = 0 + 1 + 0 + \dots = 1$$



Porquê???

x min + h min : x max + h max

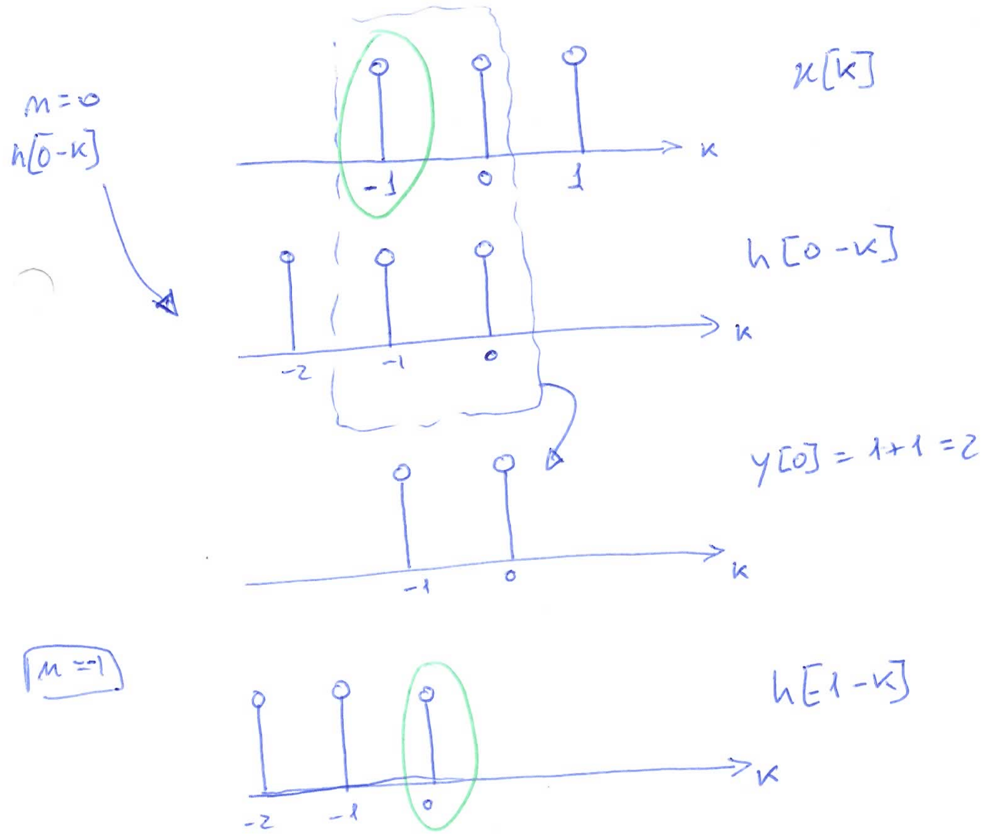
$-1 + 0 \quad : \quad 1 + 2$

$-1 \quad : \quad 3 \longrightarrow 5$ iterações

⇒ Interpretação Geométrica da Convolução Linear.

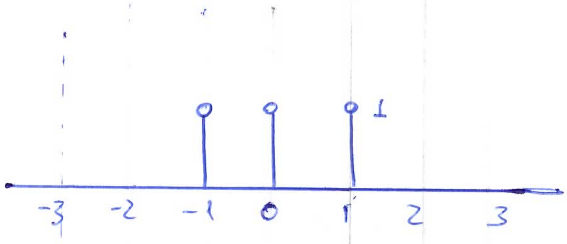
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k x[k]\, h[n-k] = \sum_k h[k] \cdot x[n-k]$$

convolução linear

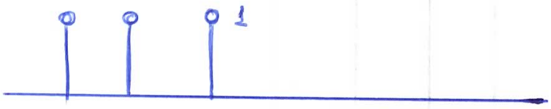


Quando o argumento é positivo somar faz andar para a direita.
Se o argumento for negativo faz andar para a esquerda.

⇒ Traça-se $x[k]$ roda-se $h[n-k]$ em torno da origem e desloca-se para trás as vezes suficientes até aparecer uma sobreposição $\neq 0$.

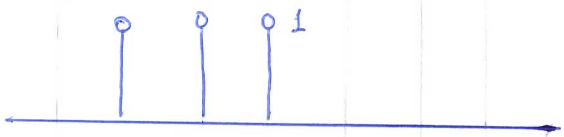


$x[k]$



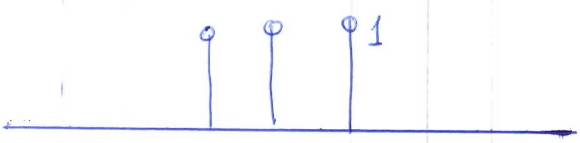
$h[-1-k]$

$y[-1] = 1 \cdot 1 = 1$ $\boxed{n=-1}$



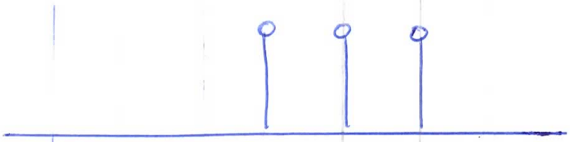
$h[0-k]$

$y[0] = 1+1 = 2$ $\boxed{n=0}$



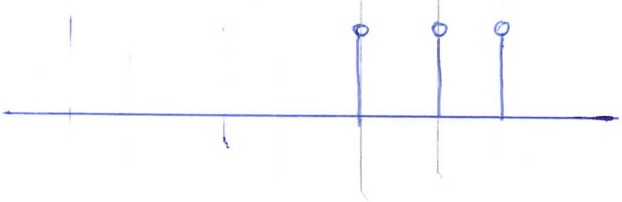
$h[1-k]$

$y[1] = 3$ $\boxed{n=1}$



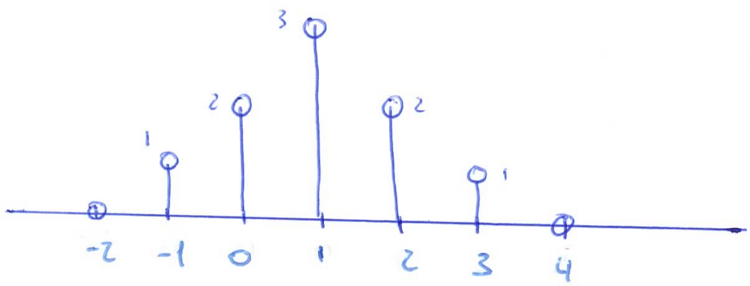
$h[2-k]$

$y[2] = 2$ $\boxed{n=2}$



$h[3-k]$

$y[3] = 1$ $\boxed{n=3}$



$\boxed{y[n] = x[n] * h[n]}$

$\therefore y[n] = \begin{cases} 1; & n = -1; 3 \\ 2; & n = \\ 3; & n = \\ 0; & \end{cases}$

Processamento Digital de Sinal

MATÉRIA 2008 7

Tamanho de $y[n] = M + N - 1$

Tamanho de $y[n] = (N_2 - N_1 + 1) + (N_4 - N_3 + 1) - 1$

$= N_2 - N_1 + N_4 - N_3 + 1 =$

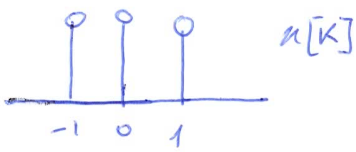
$$\boxed{\text{TAM } y[n] = N_2 + N_4 - (N_1 + N_3) + 1}$$

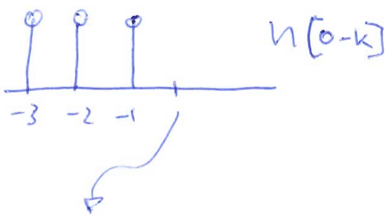
$N_1 \rightarrow$ min $x(n)$

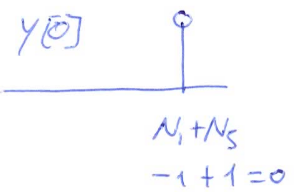
$N_2 \rightarrow$ max $x(n)$

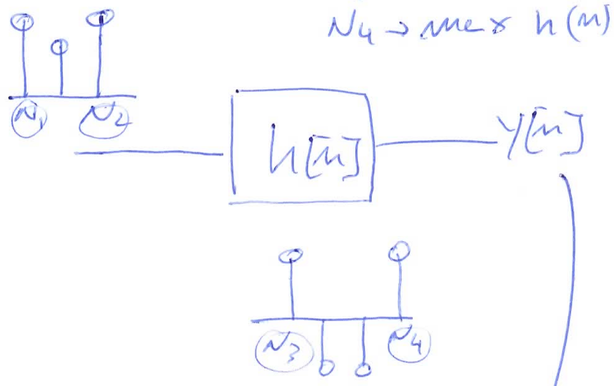
$N_3 \rightarrow$ min $h(n)$

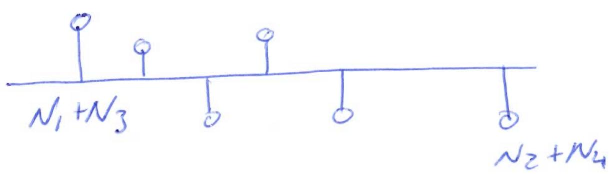
$N_4 \rightarrow$ max $h(n)$





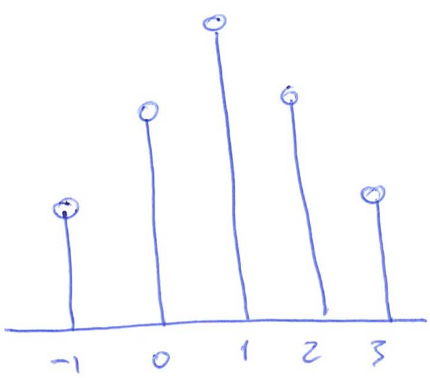






$(N_2 + N_4) - (N_1 + N_3) + 1$

(ÚLTIMO) (PRIMEIRO)



⇒ Estabilidade de Sistemas Discretos.

Um sistema é estável se a uma entrada limitada corresponde uma saída limitada!

Entrada Limitada ⟶ Saída Limitada

$$\text{SDLI} \longrightarrow \sum_{n} |h[n]| < \infty$$

SISTEMA
DISCRETO
LINEAR
INVARIANTE

• Análise de Estabilidade de um sistema não recursivo.

$\boxed{\text{FIR}}$

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n+1] + x[n] + x[n-1]\}$$

SDLI

$$h[n] = \begin{cases} 1/3\ ; & n = -1; 0; 1 \\ 0\ ; & \text{———} \end{cases}$$

logo $\sum |h[n]| < \infty$?

$$\left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right| < \infty$$

$1 < \infty$ Verdade!

∴ Sistema estável.

FIR

Vantagens: Fase linear e sempre estável

Desvantagens: Custo computacional (custo alto)

IIR

Vantagens: Custo Computacional: baixo

Desvantagens: Nem sempre são estáveis, podem ser instáveis, mas tornam-se instáveis muito facilmente

Análise Estabilidade num sistema recursivo

∴ IIR

$$y[n] = x[n] + a\, y[n-1]$$

$$x[n] = 0 \; ; \; n<0$$

$$\boxed{h[n] = a^n u[n]}$$

IIR

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = u_1 \frac{1-\text{razão}^{n \text{ termos}}}{1-\text{razão}} = a^0 \cdot \frac{1-a^{\infty}}{1-a}$$

∴ $\sum_n |h[n]| < \infty$ Verdade

$\hookrightarrow \frac{1}{1-a}$ $\boxed{|a|<1}$ se isto se verificar

• Progressão geométrica

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_4}{u_3} = \dots = a$$

• Progressão aritmética

u_1, u_2, u_3, u_4

$r = (u_2 - u_1) = u_4 - u_3$

⇒ Causalidade de Sistemas Discretos

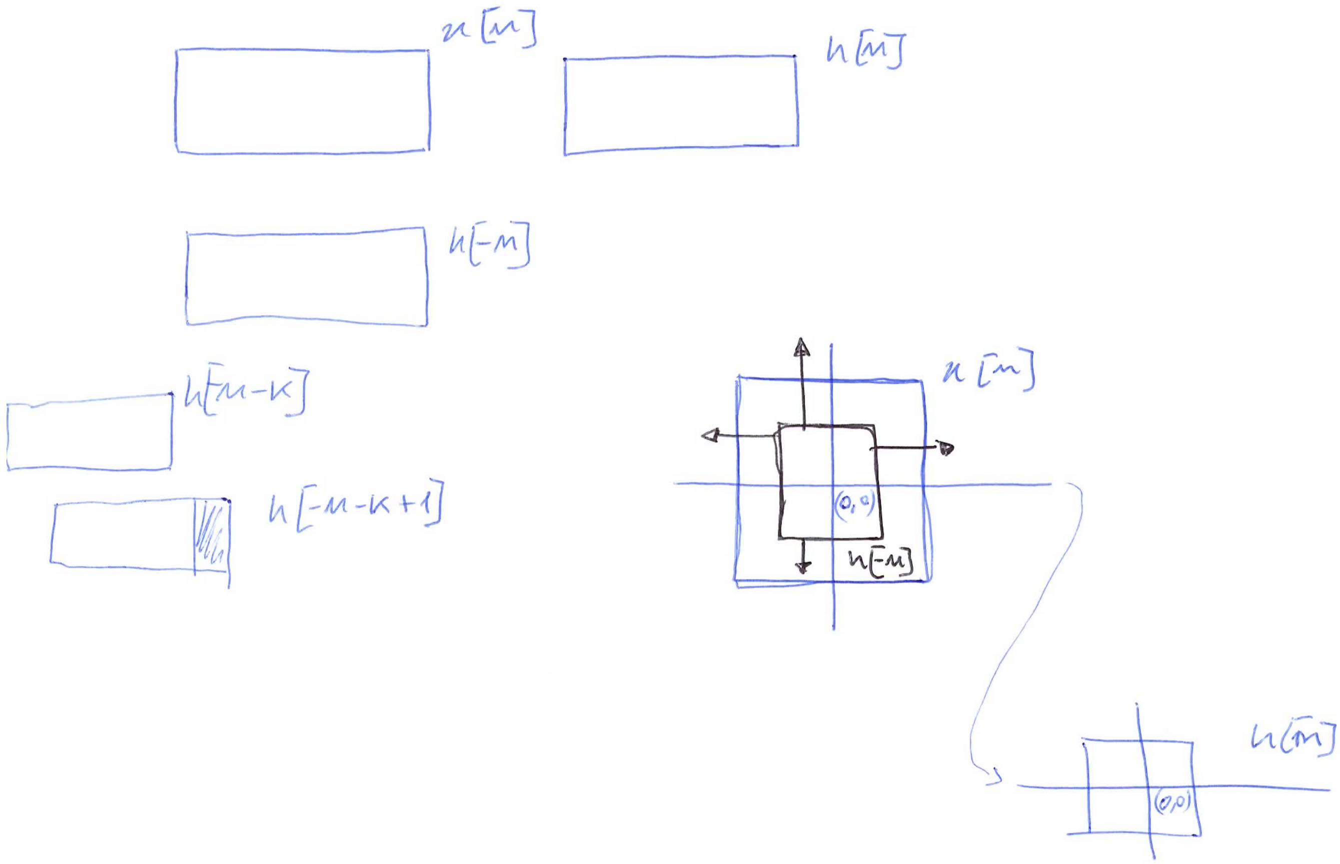
Um sistema é causal quando a saída não precede a entrada.

$$x_1[n] = x_2[n] \quad n < n_0 \longrightarrow y_1[n] = y_2[n] \quad n < n_0$$

SDLI

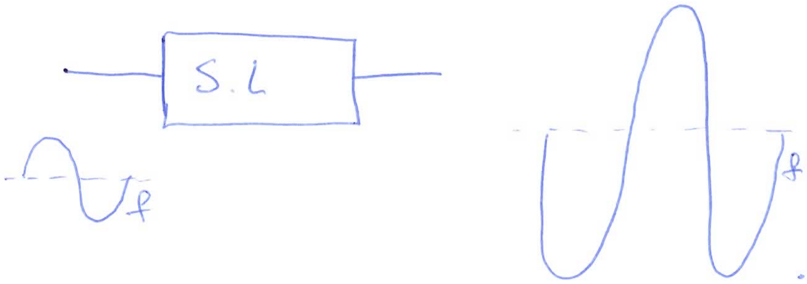
$$h[n] = 0 \quad , n < 0 \qquad n - n_0 \,!$$

⇒ CONVOLUÇÃO DISCRETA

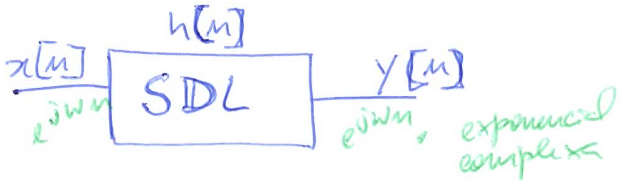


⇒ Resposta em frequência de um Sistema discreto

É a forma como o sistema se comporta com a variação de frequência à entrada.



. mudou a amplitude e a fase.



$$x[n] = e^{jwn} = \cos(wn) + j\,\mathrm{sen}(wn)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k} h[k]\, e^{j(n-k)w}$$

$$= e^{jnw} \boxed{\sum_{k} h[k]\, e^{-jwk}}$$

A resposta em frequência do sistema varia com $h[k]$!

Resposta em frequência de um Sistema Discreto Linear!

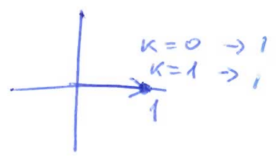
• Características de $H(e^{jw})$

Temos então $H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{-jwk}$ é uma função contínua

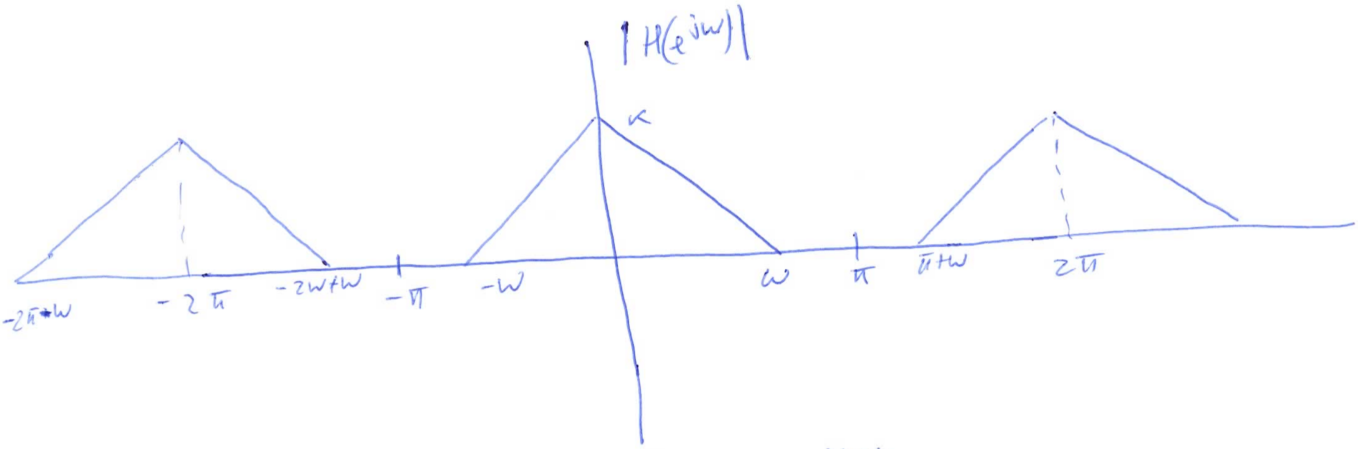
$$= H_R(e^{jw}) + j\, H_I(e^{jw}) =$$

$$= |H(e^{jw})| \cdot e^{j\arg(H(e^{jw}))}$$

$$e^{j(w+2\pi)k} = e^{jwk} \cdot e^{j2k\pi}$$



função periódica de $\boxed{T=2\pi}$



$$h[n] \longrightarrow H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-jwn}$$

$$H(e^{jw}) \longrightarrow h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jw})\, e^{jwn}\, dw$$

Resposta em frequência

Resposta Impulsional.

⇒ Transformada de Fourier

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jwn}$$

$X(e^{jw}) \Rightarrow x[n]$

$H(e^{jw}) \Rightarrow h[n]$

SÓ existe se $x[n]$ for absolutamente somável:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

EXERCÍCIO Representar em módulo e em fase a Transformada de Fourier da Resposta Impulsional do Sistema discreto:

$\delta[n]$

$$y[n] = \frac{x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]}{2}$$

$h[n]$

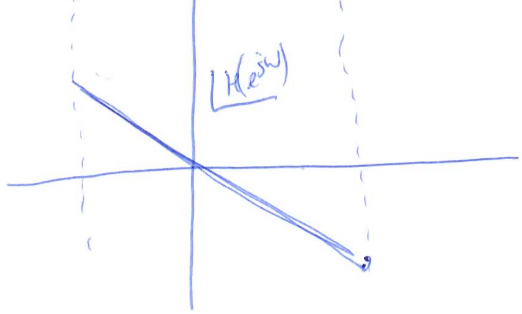
$$y[n] = \begin{cases} 1/2 \;; & n = 0 \;; 2 \\ 1 \;; & n = 1 \\ 0 \;; & \text{———} \end{cases}$$

na aula $e^{j\frac{0+2}{2}}$

porque?

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jwn} = \frac{1}{2} e^{-j0} + 1\, e^{-jw} + \frac{1}{2} e^{-2jw}$$

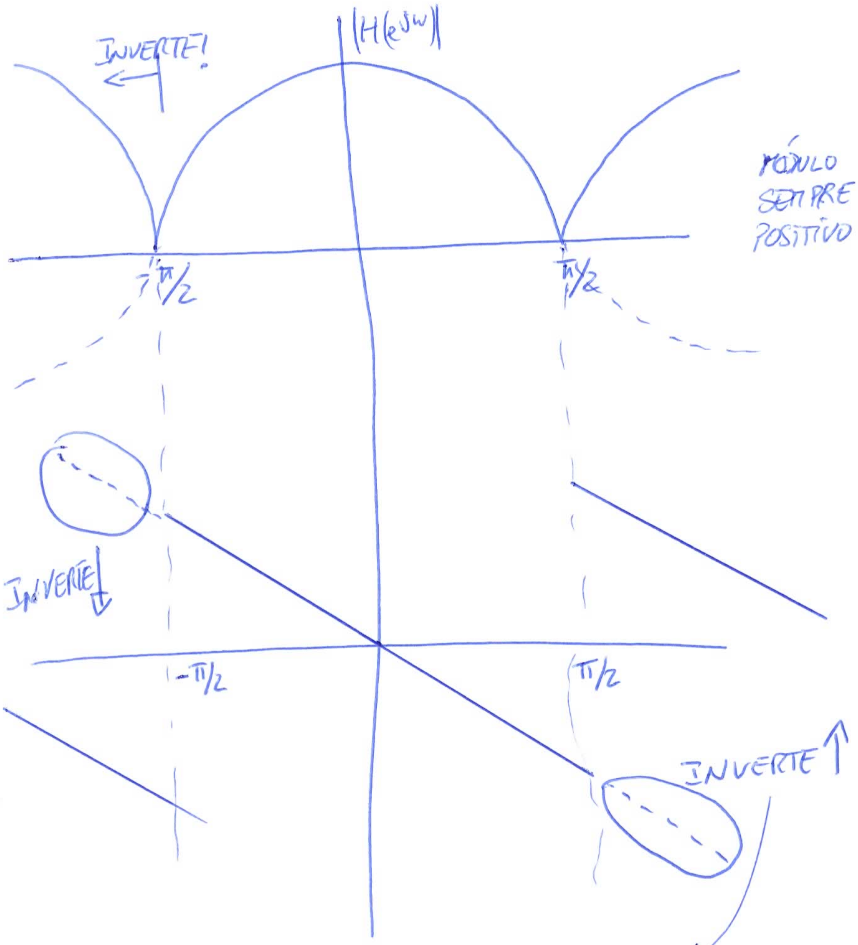
$$= \frac{1}{2} e^{-jw} \left(e^{jw} + 2 + e^{-jw} \right) = \boxed{\frac{1}{2} e^{-jw} (2\cos w + 2)} = (\cos w + 1)\, e^{-jw}$$



EXERCÍCIO

Representação em módulo e em fase de $\mathcal{F}$.

$$H(e^{jw}) = \cos w - e^{-jw}$$



Com a inversão soma-se π ou $-\pi$ à fase.

Pq em cima inverteu-se

LEMBRAR

$$e^{jw} = \cos w + j \operatorname{sen} w$$

$$e^{-jw} = \cos w - j \operatorname{sen} w$$

$$\cos w = \frac{e^{jw} + e^{jw}}{2}$$

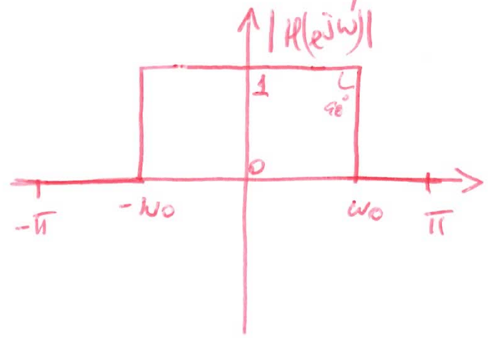
$$\operatorname{sen} w = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j}$$

$$a + jb = |\ \ | \, e^{j\angle}$$

$$|\ \ | = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\angle = \operatorname{arctg}(b/a)$$

Ex Calcule a resposta impulsional da função representada graficamente:



$$H(e^{jw}) = \begin{cases} 1 \; ; & |w| \leq w_0 \\ 0 \; ; & w_0 \leq |w| \leq \pi \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jw})\, e^{jwn}\, dw$$

representa um filtro passa-baixo ideal

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-w_0}^{w_0} 1\, e^{jwn}\, dw = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\left[e^{jwn}\right]_{-w_0}^{w_0} = \frac{1}{2\pi j n}\underbrace{\left(e^{jw_0 n} - e^{-jw_0 n}\right)}_{2j\,sen(w_0 n)} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi \cancel{j} n}\,\cancel{2j}\,sen(w_0 n) = \frac{1}{\pi n}\,sen(w_0 n)$$

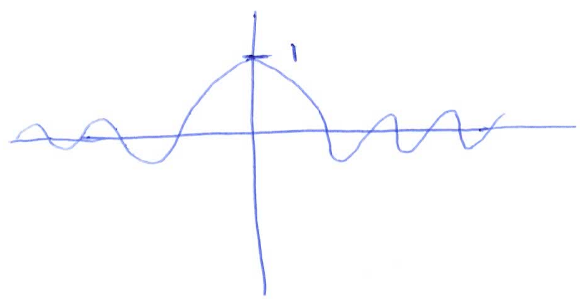
$$= \frac{1\, w_0}{\pi}\,\frac{sen(w_0 n)}{n\, w_0} = \frac{w_0}{\pi}\,sinc(w_0 n)$$

logo

$$\boxed{h[n] = \frac{w_0}{\pi}\,sinc(w_0 n)}$$

LEMBRAR:

$$sinc(x) = \frac{sen(x)}{x}$$



⇒ Propriedades da Transformada de Fourier

• Linearidade

$$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \qquad X(e^{jw}) = \sum_n x[n] e^{-jwn}$$

$$\downarrow$$

$$X(e^{jw}) = \sum_n \{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} e^{-jwn}$$

$$= \sum_n a_1 x_1[n] e^{-jwn} + \sum_n a_2 x_2[n] e^{-jwn} =$$

$$= a_1 \underbrace{\sum_n x_1[n] e^{-jwn}} + a_2 \underbrace{\sum_n x_2[n] e^{-jwn}} =$$

$$\therefore \quad T\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 X_1(e^{jw}) + a_2 X_2(e^{jw})$$

• Periodicidade

$$T \rightarrow 2\pi$$

• Transformada de Fourier de uma sequência atrasada.

JÁ SAIU EXAME!!

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jw})$$

$$x[n-n_0] \xrightarrow{\mathcal{F}} ??$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0] e^{-jwn}$$

$$\downarrow \; n - n_0 = k \Leftrightarrow n = k + n_0$$

$$X(e^{jw}) = \sum_k x[k] e^{-jw(k+n_0)} =$$

$$= \sum_k x[k] e^{-jwk} \cdot e^{-jwn_0}$$

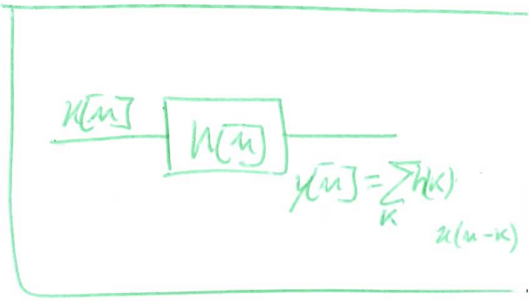
constante!

nestes casos o atraso afecta a fase!!

$$\Longrightarrow \boxed{T\{x[n-n_0]\} = e^{-jwn_0} X(e^{jw})}$$

⇒ Transformada de Fourier da convolução de 2 sinais

$$y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} ??$$



$$Y(e^{jw}) = \sum y[n] e^{-jwn} =$$

$$= \sum_n \sum_k h[k]\, x[n-k] e^{-jwn}$$

$$= \sum_k h[k] e^{-jwk} \cdot \sum_n x[n-k] e^{-jwn} e^{jwk} =$$

$$= \underbrace{\sum_k h[k] e^{-jwk}}_{H(e^{jw})} \cdot \underbrace{\sum_n x[n-k] e^{-jw(n-k)}}_{X(e^{jw})}$$

$$\therefore \quad T\{x[n] * h[n]\} \longrightarrow X(e^{jw})\, H(e^{jw})$$

⇒ Propriedade de simetria da Transformada de Fourier (Rotação)

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jw})$$

$$x^*[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$$

$$T\{x^*[n]\} = \sum_n x^*[n] e^{-jwn} = \sum_n \{x[n] e^{-jwn}\}^* = \Big(\underbrace{\sum_n x(n)\, e^{-jwn}}_{X(e^{-jw})}\Big)^*$$

$$\therefore \quad \boxed{T\{x^*[n]\} = X^*(e^{-jw})}$$

$\Longrightarrow$ Decomposição em partes

+/-

- Par (simétrica) x_e (even)
- Impar (anti-simétrica) x_o (odd)

Se $x[n]$ for real $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_o \rightarrow \text{componente ímpar} \\ x_e \rightarrow \text{componente par.} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_e[n] = \dfrac{x[n] + x^*[n]}{2} \\ x_o[n] = \dfrac{x[n] - x^*[n]}{2} \end{cases} \rightsquigarrow X(e^{jw}) = X_o(e^{jw}) + X_e(e^{jw})$$

$$x_e[n] = Re\left[X(e^{jw})\right]$$

$$x_o[n] = Im\left[X(e^{jw})\right]$$

$\boxed{\text{EXEMPLO 1}}$ Considere $h[n]$ uma sequência real.

$$h[n] \longrightarrow H(e^{jw})$$

$$H(e^{jw}) = \sum_n h[n] e^{-jwn} = \underbrace{\sum_n h[n] \cos(wn)}_{H_R(e^{jw})} - \underbrace{j \sum_n h[n] \sin(wn)}_{H_I(e^{jw})}$$

$$H(e^{-jw}) = \sum_n h[n] e^{jwn} = \underbrace{\sum_n h[n] \cos wn}_{H_R(e^{jw})} + \underbrace{j \sum_n h[n] \sin(wn)}_{-H_I(e^{-jw})}$$

função par $\rightarrow$ $f(x) = f(-x)$ $\boxed{Ex: \cos(x)}$

função ímpar $\rightarrow$ $f(-x) = -f(x)$

Processamento Digital de Sinal

MATÉRIA 2008 13

$$H(e^{-jw}) = \sum_n \left(h^*[n]\, e^{-jwn}\right)^*$$

p/ $h[n]$ é real

$$= \left(\sum_n h[n] e^{-jwn}\right)^*$$

$$\therefore \boxed{H(e^{-jw}) = H^* e^{jw}}$$

⇒ Resposta em frequência de um SD recursivo causal

$$h[n] \longrightarrow H(e^{jw})$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} a_k\, x[n-k] + \sum_{k=1}^{N} b_r\, y(n-r)$$

Passando p/ freqs.

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \sum_{k=0}^{M} a_k\, e^{-jwk} + Y(e^{jw}) \sum_{k=1}^{N} b_r\, e^{-jwr} =$$

$$Y(e^{jw}) \left\{ 1 - \sum_{r=1}^{N} b_r\, e^{-jwr} \right\} = X(e^{jw}) \sum_{k=0}^{M} a_k\, e^{-jwk}$$

$$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k\, e^{-jwk}}{1 - \sum_{r=1}^{N} b_r\, e^{-jwr}}$$