Processamento Digital de Sinal

Exame – 1ª chamada – 18_06_2007

Duração 2H30

....

1. Admitindo que $X(e^{jw})$ é a transformada de Fourier de $x[n]$. Determine em função de $X(e^{jw})$, a transformada de Fourier de $x[n-n_o]$.

2. **Defina** FFT, diga qual o seu **interesse** e para que pode ser **utilizada**.

3. **Compare** os filtros IIR e FIR em relação à **ordem** e à **estabilidade**. Quando se **deve optar** por um FIR?

....

4. Suponha o sistema discreto

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-4]}{2}.$$

Determine:

a) a resposta impulsional do sistema, $h[n]$.

b) a sua resposta em frequência $H(e^{jw})$ e represente-a graficamente (**módulo** e **fase**).

c) um sinal discreto $x[n]$ que, aplicado à entrada do sistema dado, produza uma saída constante igual a zero (saída nula).

5. Considere um sistema discreto, linear e invariante à translação definido pela equação às diferenças

$$y[n-1] - \tfrac{5}{2} y[n] + y[n+1] = x[n].$$

a) Determine a expressão da função de transferência **H(z)** bem como os seus **pólos** e **zeros**.

b) **Represente** os diagramas de pólos e zeros e as regiões de convergência admitindo que o sistema é:

   i. **estável**;

   ii. **causal**.

c) Calcule a **resposta** do sistema ao **degrau unitário** no caso do sistema ser **causal**. acabar!

6. Considere um sistema linear discreto e causal definido pela equação às diferenças $y[n] - \tfrac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = x[n] + x[n-1]$. **Desenhe** o gráfico de fluência que implemente este sistema:

- na **Forma Directa II**;
- em **Associação Série**. (Nota: use apenas secções de 1ª ordem)

Processamento Digital de Sinal

1ª Chamada 18/06/2008 Teórica 1/1

[1] Admitindo que $X(e^{jw})$ é a transformada de Fourier de $x[n]$. Determine em função de $X(e^{jw})$, a transformada de Fourier $x[n-n_0]$.

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jw})$$

$$x[n-n_0] \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$$

$$X'(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0]\, e^{-jwn} =$$

sendo $n - n_0 = k$ mudança de variável

$n = k - n_0$

$$= \sum_{k-n_0=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-jw(k-n_0)} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-jwk}}_{X(e^{jw})} \cdot e^{jwn_0}$$

então

$$x[k] = x[n-n_0] \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{jwn_0} X(e^{jw})$$

[2] Define FFT, diga qual o seu interesse e para que pode ser utilizada

A FFT ou Fast Fourier Transform é um eficiente algoritmo para computar a DFT (Discrete Fourier Transform) e a sua inversa.

A DFT decompõe uma sequência de valores nos seus componentes de diferentes frequências. E esta operação é útil em muitas áreas como por exemplo: análise espectral, compressão de dados, equações parciais diferenciais, etc.

Mas a computação de uma DFT é frequentemente demasiado lenta para poder ser posta em prática. A FFT apareceu como uma maneira de computar a DFT mas muito mais rapidamente

Computar DFT com N pontos (por definição): $O(N^2)$

Computar FFT com N pontos : $O(N \log N)$

3 Compare os filtros IIR e FIR em relação à ordem e à estabilidade. Quando se deve optar por um FIR?

IIR (Infinite Impulsional Responde) Sistemas recursivos.

$y[n] = x[n] + a\, y[n-1]$

$h[n] = a^n u[n]$

Estabilidade

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

$= \sum_{n=+\infty}^{+\infty} a^n u[n] = \sum_{n=\infty}^{+\infty} a^n = \cancel{a^0} \frac{1 - a^{\infty}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$

$\therefore \sum |h[n]| < \infty \Rightarrow \frac{1}{1-a} \Rightarrow |a| < 1$

Vantagem: Custo computacional baixo

Desvantagens: Nem sempre são estáveis, podem ser estáveis, mas tornam-se instáveis muito rápidamente.

FIR (Finite Impulsional Response) Sistemas não-recursivos.

$x[n] = y[n] \Rightarrow h[n] = y[n]$

Exemplo de filtro de 3ª ordem ; $y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$

$\sum |h[n]| < \infty$ Verifica sempre.

neste caso? $\left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right| < \infty \Leftrightarrow 1 < \infty$ ✓

Devemos usar o FIR sempre que desejar-mos ter a fase linear e que o filtro seja sempre estável, porém o FIR tem um maior custo computacional que o IIR

Processamento Digital de Sinal

1ª Chamada 18/06/2007 ①/4

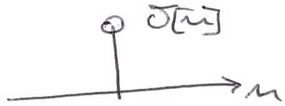
$\boxed{4}$ Suponha o sistema discreto: $y[n] = \dfrac{x[n] + x[n-4]}{2}$

Determine:

a) a resposta impulsional do sistema $h[n]$

$h[n] = y[n]$ quando $x[n] = \delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}$$



Logo

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-4]$$

Dando valores a n:

$$n = 1 \Rightarrow h(1) = \cancel{\tfrac{1}{2}\delta(1)} + \cancel{\tfrac{1}{2}\delta[-3]} = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow h(2) = \cancel{\tfrac{1}{2}\delta(2)} + \cancel{\tfrac{1}{2}\delta[-2]} = 0$$

$$n = 3 \Rightarrow h(3) = \cancel{\tfrac{1}{2}\delta(3)} + \cancel{\tfrac{1}{2}\delta[-1]} = 0$$

$$n = 4 \Rightarrow h(4) = \cancel{\tfrac{1}{2}\delta(4)} + \tfrac{1}{2}\delta[0] = 1/2$$

$$n = 0 \Rightarrow h(0) = \tfrac{1}{2}\delta(0) + \cancel{\tfrac{1}{2}\delta[-4]} = 1/2$$

logo

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; n = 0;\ 4 \\ 0 & ; n \neq 0, 4 \end{cases}$$

b) A sua resposta em frequência $H(e^{jw})$ e represente-a graficamente (módulo e fase)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$z = e^{jw}$

$$y[n] = \frac{x[n]}{2} + \frac{x[n-4]}{2}$$

atraso!

$$Y(z) = \frac{X(z)}{2} + \frac{1}{2} X(z)\, z^{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = X(z) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-4}$$

$$\boxed{H(e^{jw})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(e^{jw})^{-4} =$$

meter em evidência a metade.

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-jw4} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-jw4}\right) =$$

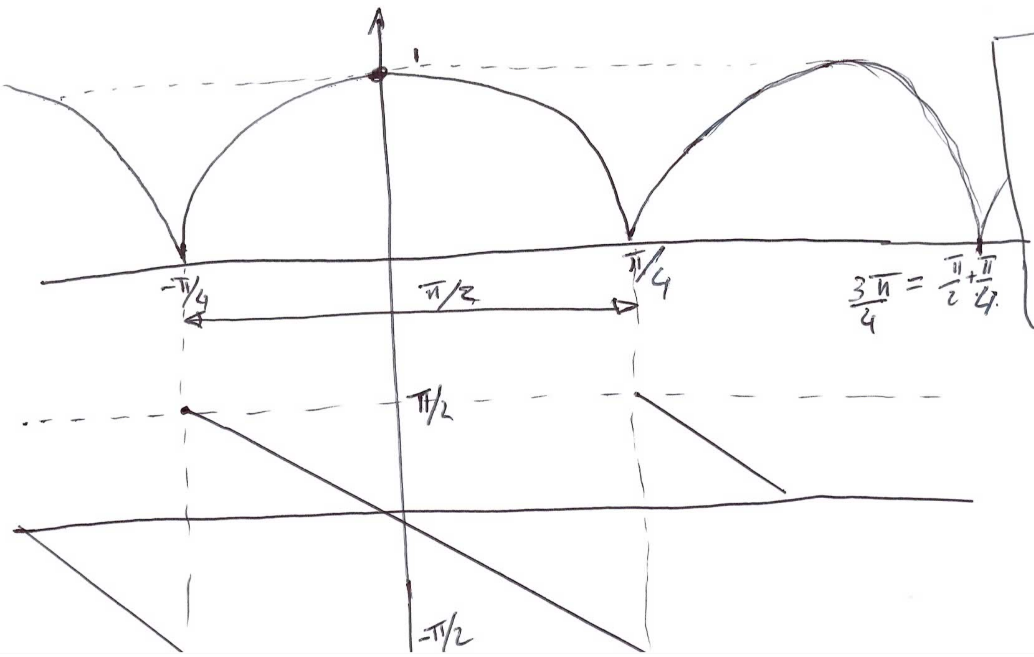
$$= \frac{1}{2} e^{-jw2}\left(e^{jw2} + e^{-jw2}\right) = e^{-jw2}\left(\frac{e^{jw2} + e^{-jw2}}{2}\right) =$$

$$= \boxed{e^{-jw2} \cdot \cos(2w)}$$

Nota: O objectivo é ficar $|\ |\ e^{-jw}$ (módulo, fase)

Assim $|H(e^{jw})| = \cos(2w)$

$\angle H(e^{jw}) = -2w$



$\cos(2w) = 0$

$\Rightarrow 2w = \pi/2$

$\Leftrightarrow w = \pi/4$

Processamento Digital de Sinal

1º Chamada 18/06/2007 ②/4

c) um sinal discreto $x[n]$ que, aplicado à entrada do sistema dado, produza uma saída constante igual a zero (saída nula)

O $x[n]$ tem de ter a frequência $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ pois pela análise gráfica podemos constatar que é nestes pontos a saída é nula.

5 Considere um sistema discreto, linear e invariante à translação definido pela equação às diferenças:

$$y[n-1] - \frac{5}{2}\,y[n] + y[n+1] = x[n]$$

z

a) Determine a expressão da FT $H(z)$ bem como os seus polos e zeros.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = ? \qquad Y(z)\,z^{-1} - \frac{5}{2}\,Y(z) + z\,Y(z) = X(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(z)\left(z^{-1} - \frac{5}{2} + z\right) = X(z) \Leftrightarrow$$

zeros

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^{-1} - \frac{5}{2} + z} = \frac{z}{1 - \frac{5}{2}z + z^2}$$

pólos

$\frac{z}{z}\times$

Zeros: $z = 0$

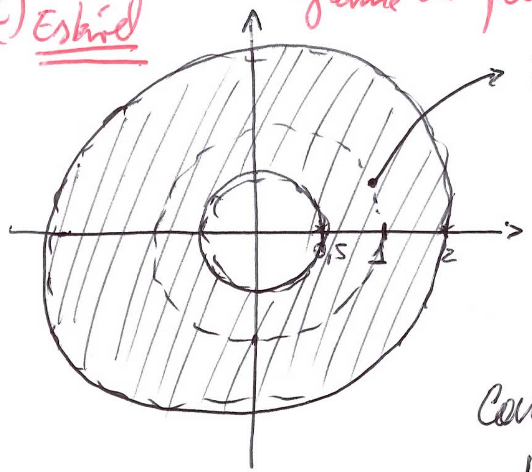
Polos: $z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -5/2 \\ c = 1 \end{cases} \qquad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \ldots =$

$z = 2 \quad \vee \quad z = 1/2$

$$H(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)(z-2)}$$

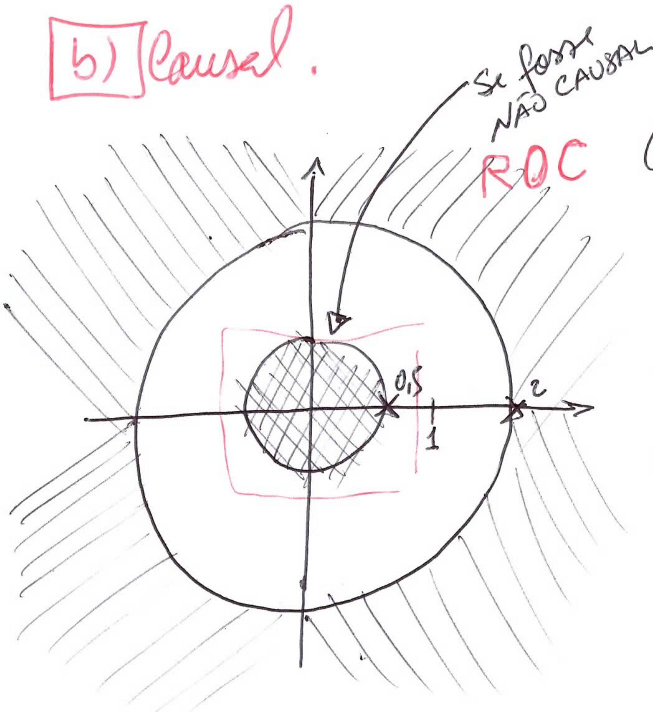
$\boxed{b)}$ (i) Representa o diagrama de polos e zeros e as ROCs admitindo o sistema: Estável



$\boxed{|z| > 0,5}$ $\boxed{|z| < 2}$

Como a ROC contém a circunferência unitária o sistema é estável

$\boxed{b)}$ Causal.



Causal: O sistema é causal se a ROC está para fora do polo + exterior.

Ñ Causal: O sistema é não causal se a ROC está interior ao polo mais interior.

$\boxed{c)}$ Calcule a resposta do sistema ao degrau unitário no caso do sistema ser causal.

$x[n] = u[n] \overset{Z}{\rightsquigarrow} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} =$?

$$\boxed{\begin{array}{l} y[n-1] + \frac{5}{2} y[n] + y[n+1] = x[n] \\ Y(z) z^{-1} - \frac{5}{2} Y(z) + Y(z) z^{1} = X(z) \end{array}}$$

$= (z^{-1})^0 \cdot \frac{1-(z^{-1})^n}{1-z^{-1}}$

$= \frac{z}{z-1}$

$a^0 \frac{1-r^n}{1-r}$

$z^0 \frac{1-z^{-1-n}}{1-1/z^n}$

$= \frac{1-z^{-1-n}}{1-z^{-n}} = \frac{1-z^{-1}z^{-n}}{1-\frac{1}{z^n}} =$

$= \frac{1-\frac{1}{zz^n}}{\frac{z^n-1}{z^n}} = \frac{\frac{zz^n-1}{\cancel{zz^n}}}{\frac{z^n-1}{\cancel{z^n}}} = \frac{zz^n-1}{z(z^n-1)} =$

$= (z^n - z)z$

Processamento Digital de Sinal

1ª Chamada 18/06/2007 3/4

$\boxed{6}$ Considere um sistema linear discreto e causal definido pela equação às diferenças: $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$

Desenhe o gráfico de fluência que implementa este sistema:

- Na forma directa II
- em Associação em série (Nota: use apenas secções de primeira ordem)

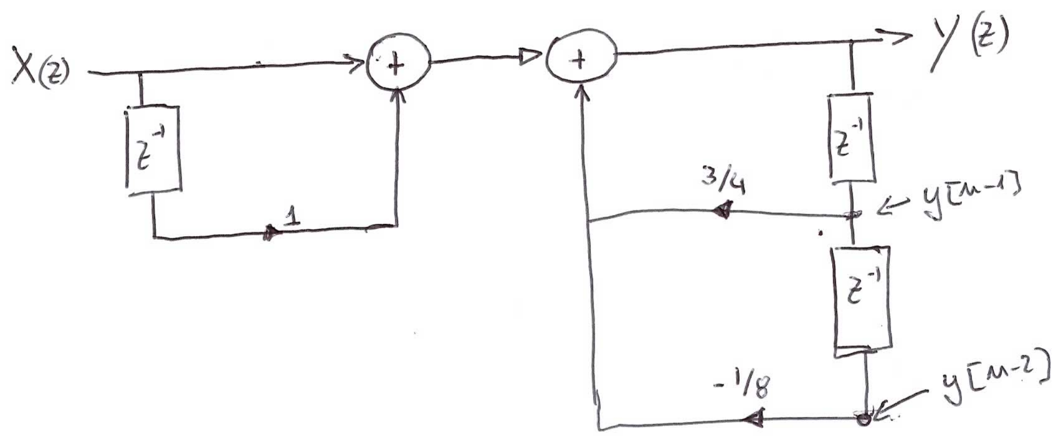
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \begin{matrix} \to \text{zeros} \\ \to \text{polos} \end{matrix}$$

$$Y(z) - \frac{3}{4}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{8}Y(z)z^{-2} = X(z) + X(z)z^{-1}$$

$$\Leftrightarrow Y(z)\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right) = X(z)\left(1 + z^{-1}\right) \Leftrightarrow$$

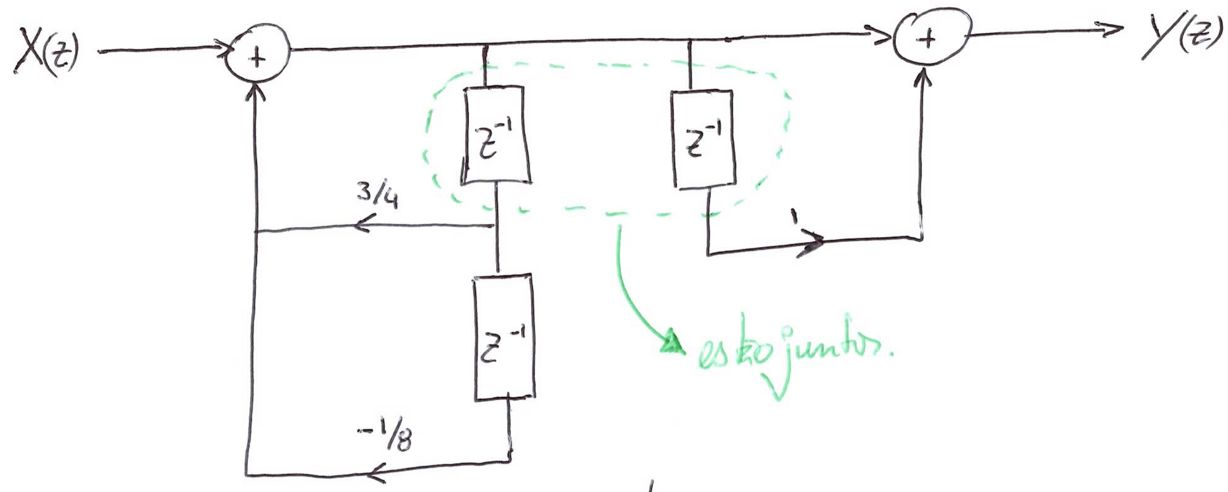
$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = (1+z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right)}$$

forma directa I

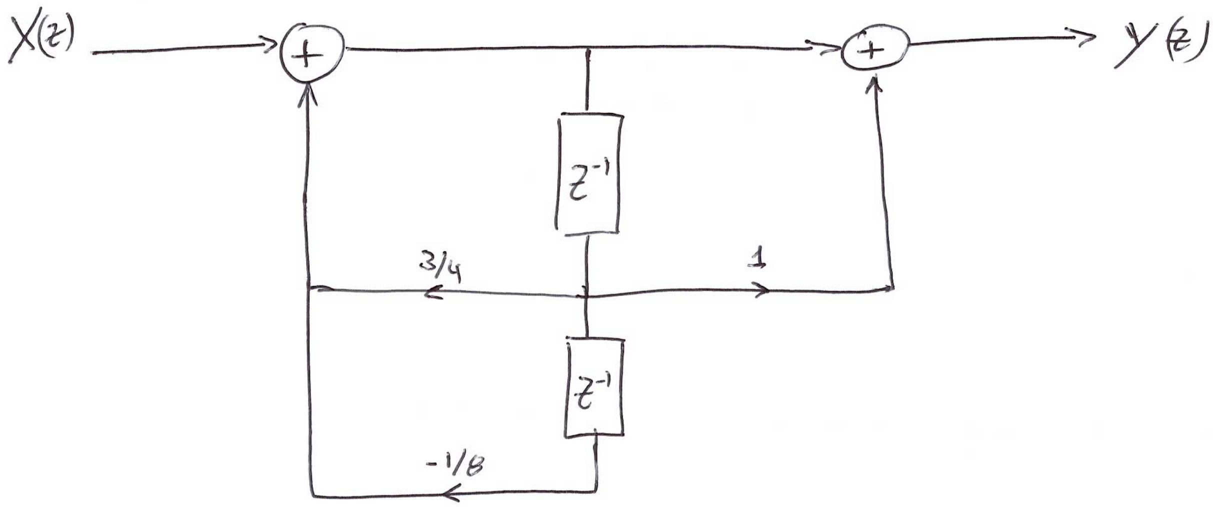


Forma Directa II

Troca-se (1) com (2) para poder-se reduzir atrasos.



então:



• <u>Associação em Paralelo</u>

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$ → fórmula resolvente $z^{-1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^{-1} = 4 \lor z^{-1} = 2$

então fica

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(z^{-1}-4)(z^{-1}-2)} = \frac{1+1/z}{\left(\frac{1-4z}{z}\right)\left(\frac{1-2z}{z}\right)} = \frac{\frac{z+1}{z}}{\left(\frac{1-4z}{z}\right)\left(\frac{1-2z}{z}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{z+1}{z}}{\frac{(1-4z)(1-2z)}{zz}} = \frac{(z+1)z}{(1-4z)(1-2z)} = \frac{z^2+z}{1-2z-4z-8z^2}$$

Como têm o mesmo grau

$$\begin{array}{l|l} z^2+z & -8z^2-6z+1 \ (C) \\ -z^2+\frac{6}{8}z-\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \ (A) \\ \hline \frac{7}{4}z-\frac{1}{8} \ (B) & \end{array}$$

$$A + \frac{B}{C} = \frac{1}{8} + \frac{\frac{7}{4}z-\frac{1}{8}}{-8z^2-6z+1}$$

Calcular os polos.

fórmula resolvente ...

... $z = 1/2 \land z = 1/4$

Então fica:

$$\boxed{\frac{1}{8} + \frac{\frac{7}{4}z-\frac{1}{8}}{8(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}} \quad (1)$$

$$\frac{\frac{7}{4}z-\frac{1}{8}}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-\frac{1}{4}}$$

Numerador:

$$\frac{7}{8}z - \frac{1}{8} = A\left(z - 1/4\right) + B\left(z - 1/2\right) \Leftrightarrow \frac{7}{8}z - \frac{1}{8} = Az - \frac{A}{4} + Bz - \frac{B}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7/8 = A + B \\ \cancel{-}1/8 = \cancel{-}\frac{A}{4} \cancel{-} \frac{B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \frac{1}{\cancel{8}_{2}} = \frac{A+2B}{\cancel{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 7/8 - B \\ \frac{1}{2} = \frac{7}{8} - B + 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ B = \frac{1}{2} - \frac{7}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 10/8 \\ B = -3/8 \end{cases}$$

então de (1) ficamos com:

$$H(z) = \frac{1}{8} + \frac{10/8}{z - 1/2} - \frac{3/8}{z-4} \quad \times \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$

Precisa de estar na forma $\boxed{1 - x z^{-1}}$

$$H(z) = \frac{1}{8} + \frac{\frac{10}{8}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{3}{8}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$