Teste 2 – 2013/2014

2. Considere um sinal ruído branco $s[n]$ de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo aditivo por um outro sinal ruído branco $e[n]$ de média m_e e desvio padrão σ_e.

(a) Determine a média e a variância do processo $x[n] = s[n] + e[n]$ admitindo que os processos são não correlados.

$x[n] = s[n] + e[n]$

$$m_x = E\{x[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - m_x^2 = E\{(x-m_x)^2\}$$

Média:

$$m_x = E\{x[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(s[n]+e[n])$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n] + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e[n]$$

$$= m_s + m_e$$

Variância:

$$\sigma_x^2 = E\{(x-m_x)^2\} = E\{x^2 - 2xm_x + m_x^2\} = E\{x^2\} - 2m_x \underbrace{E\{x\}}_{m_x} + m_x^2$$

$$= E\{x^2\} - m_x^2$$

como:

$$E\{x^2\} = E\{(s+e)^2\} = E\{s^2 + 2se + e^2\} = E\{s^2\} + 2E\{s.e\} + E\{e^2\}$$

e $m_x = m_s + m_e$

Substituindo:

$$\sigma_x^2 = E\{s^2\} + 2E\{se\} + E\{e^2\} - (m_s + m_e)^2$$

$$= E\{s^2\} + 2E\{se\} + E\{e^2\} - m_s^2 - 2m_sm_e - m_e^2$$

$$= \underbrace{E\{s^2\} - m_s^2}_{\sigma_s^2} + \underbrace{E\{e^2\} - m_e^2}_{\sigma_e^2} + 2\underbrace{E\{s.e\}}_{\substack{\text{como } s \text{ e } e \\ \text{são não correlados} \\ \Downarrow \\ m_s.m_e}} - 2m_s.m_e$$

então

$$\sigma_x^2 = \sigma_s^2 + \sigma_e^2$$

(b) Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência de $x[n]$ em função dos parâmetros conhecidos dos processos $s[n]$ e $e[n]$.

$$\phi_{xx}[m] = E\{x[n].x[n+m]\}$$

$$= E\{(s[n]+e[n])(s[n+m]+e[n+m])\}$$

$$= E\{s[n]s[n+m] + s[n]e[n+m] + e[n]s[n+m] + e[n]e[n+m]\}$$

$$= E\{s[n]s[n+m]\} + E\{e[n]e[n+m]\} + E\{s[n]e[n+m]\} + E\{e[n]s[n+m]\}$$

$$= E\{s[n]s[n+m]\} + \phi_{ee}[m] + 2\phi_{se}[m]$$

$$= \phi_{ss}[m] + \ldots$$

como s e e são ruído branco

$$\begin{cases} \phi_{ss}[m] = \sigma_s^2\,\delta[n] + m_s^2 \\ \phi_{ee}[m] = \sigma_e^2\,\delta[n] + m_e^2 \end{cases}$$

então:

$$\phi_{xx}[m] = \sigma_s^2\,\delta[n] + m_s^2 + \sigma_e^2\,\delta[n] + m_e^2 + 2\phi_{es}[m]$$

$\phi_{es}[m] = E\{e[n]s[n+m]\}$ e como são não correlados $\Rightarrow m_e m_s$

$$\phi_{xx}[m] = \sigma_s^2\,\delta[n] + m_s^2 + \sigma_e^2\,\delta[n] + m_e^2 + 2m_em_s$$

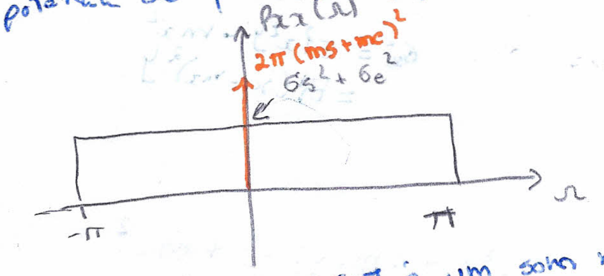
$$= (\sigma_s^2 + \sigma_e^2)\,\delta[n] + m_s^2 + m_e^2 + 2m_em_s$$

Densidade espectral de Potência

$$\delta[n] \xleftrightarrow{T.F} 1$$
$$K \xleftrightarrow{T.F} 2\pi K\,\delta(\Omega)$$

$$P_{xx}(\Omega) = T.F.\{\phi_{xx}[m]\}$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[m]\, e^{-j\Omega m}$$
$$= \sigma_s^2 + \sigma_e^2 + 2\pi\,\delta(\Omega)\, m_s^2 + 2\pi\delta(\Omega) m_e^2 + 2\pi\delta(\Omega)(2 m_e m_s)$$
$$= (\sigma_s^2 + \sigma_e^2) + 2\pi\delta(\Omega)\big[\underbrace{m_s^2 + m_e^2 + 2 m_e m_s}_{(m_s+m_e)^2}\big]$$

(c) Determine e esboce justificando, no contexto da alínea b) a densidade espectral de potência do processo $x[n]$.



(d) Suponha que $s[n]$ é um som não vozeado, que tem um segmento contendo apenas ruído ($e[n]$) e diga como poderia estimar a densidade espectral de potência de $s[n]$. Justifique.

$P_{ss}(\Omega) = ?$

$e[n]$; $s[n] + e[n] = x[n]$ ← $P_{xx}(\Omega)$ da mesma forma

Divido em segmentos, calculo a FFT para cada segmento, faço a média dos segmentos ao quadrado

$e[n]$ ⇓ $P_{ee}(\Omega)$ ↓

Divido em segmentos, calculo o espetograma

$$P_{ee}(\Omega) = \frac{1}{N}|E(\Omega)|^2$$ ← Método da média dos periodogramas (Bartlett)

↑ FFT

$P_{xx}(\Omega) = P_{ss}(\Omega) + P_{ee}(\Omega)$ → Pois $\phi_{xx}[m] = \phi_{ss}[m] + \phi_{ee}[m]$ e a linearidade da DFT mantém-se na frequência. } as sequências de auto correlação tb são somadas Pela linearidade da DFT (Transformada de Fourier).

$$\boxed{P_{ss}(\Omega) = P_{xx}(\Omega) - P_{ee}(\Omega)}$$ ← Subtração espectral

Uso o segmento sem sinal para calcular a densidade espectral como os ruídos são independentes, podemos somar pois as sequências de autocorrelação tbm se somam

(e) Apresente um método eficiente para estimar a densidade espectral do ruído $e[n]$ tomando por base $C_{xx}(m)$. Mostre que este estimador é consistente relativamente à média.

O método eficiente é o Método de Bartlett

$$\boxed{E\{C_{xx}[m]\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \phi_{xx}[m]}$$ Provar

Média do estimador

$$C_{xx}[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,x[n+m]$$

$$E\{C_{xx}[m]\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\cdot x[n+m]\right\}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\{x[n]\cdot x[n+m]\}}_{\phi_{xx}[m]} \quad (N-|m|\cancel{-1}\cancel{+1})$$
$$= \frac{1}{N}(N-|m|)\,\phi_{xx}[m]$$
$$= \frac{N-|m|}{N}\,\phi_{xx}[m]$$

Então: Se $N \to +\infty$ $\xrightarrow{\text{Então}}$ $E\{C_{xx}[m]\} \to \phi_{xx}[m]$

$$\lim_{N\to+\infty} E\{C_{xx}[m]\} = \lim_{N\to+\infty} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}[m] = \lim_{N\to+\infty} \phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[m]$$

Assim: $B = E\{C_{xx}[m]\} - \phi_{xx}[m]$

Portanto $B \to 0$ quando $N \to +\infty$

$$\lim_{N\to+\infty} B = 0$$

Logo, $C_{xx}[m]$ é um estimador assintoticamente consistente relativamente à média da sequência de autocorrelação.

(f) Mostre que o periodograma é um estimador consistente da densidade espectral de potência mas apenas relativamente à média. Explique como é que o método de Bartlett diminui a variância deste estimador. Justifique.

$$I_N(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}[m] e^{-j\Omega m}$$

Provar

$$\boxed{E\{I_N(\Omega)\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} P_{xx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}[m] e^{-j\Omega m}}$$

$$\boxed{C_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,x[n+m]}$$

$$\boxed{E\{C_{xx}[m]\} = \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}[m]}$$

$$E\{I_N(\Omega)\} = E\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}[m] e^{-j\Omega m}\right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E\{C_{xx}[m]\} e^{-j\Omega m}$$

$$\Rightarrow E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}[m] e^{-j\Omega m}$$

$$\lim_{N\to+\infty} E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[m] e^{-j\Omega m} = P_{xx}(\Omega)$$

Logo $I_N(\Omega)$ é um estimador assintoticamente consistente relativamente à média

$B = E\{I_N(\Omega)\} - P_{xx}(\Omega)$

$N \to +\infty \to B = 0$

O método de Bartlett é o método da média dos periodogramas.

Dividimos em segmentos, calculamos os periodogramas e fazemos a média dos periodogramas. Foi uma forma que se encontrou de diminuir a variância, pois dividimos em segmentos e somamos a média, diminuindo a variância.

Assim, diminui a variância, porque ao somar variáveis independentes nos segmentos diminui a variância (sinal dividido em segmentos)

Modelo de Bartlett

Usando o conhecimento de estatística que diz que a soma de K variáveis aleatórias (idênticas e independentemente distribuídas) gera uma variável aleatória cuja variância é $\frac{1}{K}\sigma^2$.

③. Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela F.T.

$$H(z) = \frac{1}{1-\sum_{K=1}^{N} a_K z^{-K}}$$

N é o grau do preditor, o número de amostras p/ trás existentes, pólos

e ao qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula

(a) Dos métodos de estimação espectral que conheça qual o mais indicado para estimar a densidade espectral de potência do processo de saída? Justifique.

O mais indicado é o Método da entropia máxima, pois este sinal possui na sua função de transferência N pólos, ou seja, ressonâncias, pelo que o sinal possui, assim sendo, predibilidade.

white noise

$$w[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x[n]$$

$$X(z) = H(z)\cdot W(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-\sum_{K=1}^{N} a_K z^{-K}} \cdot W(z)$$

$$X(z)\left[1-\sum_{K=1}^{N} a_K z^{-K}\right] = W(z)$$

z^{-1}

$$x[n] = \underbrace{\sum_{K=1}^{N} a_K\, x[n-K]}_{\text{Sinal é preditivo}} + w[n]$$

valores passados, logo é previsível

Sinal preditivo

$$\hat{x}[n] = \sum_{K=1}^{N} a_K\, x[n-K]$$

como temos sempre erro mas é o menor possível que é ruído branco

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$
$$= w[n]$$

(5) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

$$\phi_{xx}[m] = \sum_{K=1}^{N} a_K\, \phi_{xx}[|m-K|]$$

$$\phi_{xx}[m] = E\{x[n]\cdot x[n \pm m]\}$$

Pois a função é par

$$\phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m]$$

$$x[n] = \sum_{K=1}^{N} a_K\, x[n-K]$$

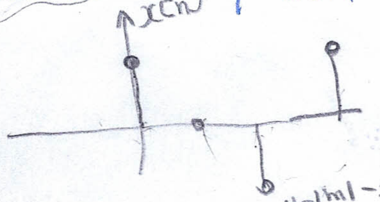
$$x[n]\,x[n-m] = \sum_{K=1}^{N} a_K\, x[n-K]\,x[n-m]$$

$$E\{x[n]\,x[n-m]\} = \sum_{K=1}^{N} a_K\, E\{x[n-K]\cdot x[n-m]\}$$

$$\phi_{xx}[-m] = \sum_{K=1}^{N} a_K\, \phi_{xx}[\underbrace{n-m-(n-K)}_{K-m}] = m-K \Rightarrow \text{pois } \phi_{xx} \text{ é par}$$

$$\phi_{xx}[m] = \sum_{K=1}^{N} a_K\, \phi_{xx}[|m-K|]$$

c) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 4 pontos $\{1, 0, -1, 1\}$. Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $-3 \leq m \leq 3$.



$$C_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,x[n+m]$$

$$C_{xx}[0] = \frac{1}{4}\left(x[0]^2 + x[1]^2 + x[2]^2 + x^2[3] \right) = \frac{3}{4}$$

$$C_{xx}[1] = C_{xx}[-1] = \frac{1}{4}\left(x[0]x[1] + x[1]x[2] + x[2]x[3] \right) = \frac{1}{4} \times (-1) = -\frac{1}{4}$$

$$C_{xx}[2] = C_{xx}[-2] = \frac{1}{4}\left(x[0]x[2] + x[1]x[3] \right) = -\frac{1}{4}$$

$$C_{xx}[3] = C_{xx}[-3] = \frac{1}{4}\left(x[0]x[3] \right) = \frac{1}{4}$$

d) Determine o erro do preditor. MMSE

$$MMSE = \phi_{xx}(0) - \sum_{i=1}^{p} a_i \phi_{xx}(i)$$

$\phi_{xx}(0)$ → potência real que o sinal tem; $\sum a_i \phi_{xx}(i)$ → Pot. estimada do sinal

$$\phi[m] = \sum_{i=1}^{p} a_i \phi[|m-i|]$$

$p = 3 \Rightarrow 4$ amostras $\rightarrow N-1$

$\phi[4] = a_1 \phi(3) + a_2 \phi(2) + a_3 \phi(1)$

$\phi[1] = a_1 \phi(0) + a_2 \underset{\phi(1)}{\phi(-1)} + a_3 \underset{\phi(2)}{\phi(-2)}$ par

$\phi[2] = a_1 \phi(1) + a_2 \phi(0) + a_3 \phi(-1) \rightarrow \phi(1)$

$\phi[3] = a_1 \phi(2) + a_2 \phi(1) + a_3 \phi(0)$

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \phi(2) \\ \phi(1) & \phi(0) & \phi(1) \\ \phi(2) & \phi(1) & \phi(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(1) \\ \phi(2) \\ \phi(3) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a_1 - a_2 - a_3 = -1 \\ -a_1 + 3a_2 - a_3 = -1 \\ -a_1 - a_2 + 3a_3 = 1 \end{cases} \begin{matrix} (2) \times (-1) + (3) \\ \\ (\times 3) + (1) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a_2 + 4a_3 = 2 \\ -4a_2 + 8a_3 = 2 \end{cases} (\times -1) \Leftrightarrow \begin{cases} -4a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_3 = 0}$$

- $-4a_2 + 8 \times 0 = 2 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$
- $-a_1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \times 0 = -1 \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{1}{2}}$

$$MMSE = \underbrace{\frac{3}{4}}_{\phi_{xx}(0)} - \underbrace{\left(a_1 \phi(1) + a_2 \phi(2) + \cancel{a_3}^{0} \phi(3) \right)}_{\sum_{i=1}^{p} a_i \phi(i)} = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) \right) = \frac{3}{4} - \left(\frac{2}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

(e) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $m > 3$ e $m \leq 8$

$$\hat{\phi}(4) = a_1 \phi(3) + a_2 \phi(2) + \cancel{a_3}^{\,0} \phi(1) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$$

$$\hat{\phi}(5) = a_1 \phi(4) + a_2 \phi(3) + \cancel{a_3}^{\,0} \phi(2) = 0 - \frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{8}$$

$$\hat{\phi}(6) = a_1 \phi(5) + a_2 \phi(4) + \cancel{a_3}^{\,0} \phi(3) = \frac{1}{16}$$

$$\phi(7) = a_1 \phi(6) + a_2 \phi(5) + \cancel{a_3}^{\,0} \phi(4) = \frac{1}{32} - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{8}\right)_{\times 2} = -\frac{1}{32}$$

$$\hat{\phi}(8) = a_1 \phi(7) + a_2 \phi(6) + \cancel{a_3}^{\,0} \phi(5) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{32}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{64} - \frac{1}{32}^{(\times 2)}_{(\times 2)} = -\frac{1}{64}$$

Recurso 2014/2015

3. Considere um sinal discreto $s[n]$ de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo multiplicativo por um sinal ruído branco $e[n]$ de média m_e e desvio padrão σ_e.

(a) Determine a média e a variância do processo $x[n] = s[n] \cdot e[n]$ admitindo que os processos são ñ correlados

$s[n] \to m_s, \sigma_s$

$\underbrace{e[n]}_{\text{ruido branco}} \to m_e, \sigma_e$

$\Rightarrow \phi_{ee}[m] = \sigma_e^2 \cdot \delta[m] + m_e^2$

$\Rightarrow \gamma_{ee}[m] = \sigma_e^2 \delta[m]$

$x[n] = s[n] \cdot e[n]$

Media:

$$m_x = E\{x[n]\} = E\{s[n] \cdot e[n]\} \overset{\text{como são ñ correlados}}{=} E\{s[n]\} \cdot E\{e[n]\} = m_s \cdot m_e$$

Variância

$$\sigma_x^2 = E\{(x - m_x)^2\} = E\{x^2 - 2xm_x + m_x^2\} = E\{x^2\} - 2m_x \underbrace{E\{x\}}_{m_x} + m_x^2$$

$$= E\{x^2\} - m_x^2$$

$$= E\{s[n]^2 e[n]^2\} - m_s^2 m_e^2 \quad \text{como são ñ correlados}$$

$$= E\{s^2[n]\} \cdot E\{e^2[n]\} - m_s^2 m_e^2$$

$$= (\sigma_s^2 + m_s^2)(\sigma_e^2 + m_e^2) - m_s^2 \cdot m_e^2$$

$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - m_x^2$

$E\{x^2\} = \sigma_x^2 + m_x^2$

$$= \sigma_s^2 \cdot \sigma_e^2 + \sigma_s^2 m_e^2 + \sigma_e^2 m_s^2 + \cancel{m_s^2 m_e^2} - \cancel{m_s^2 \cdot m_e^2}$$

$$= (\sigma_s \cdot \sigma_e)^2 + (\sigma_s m_e)^2 + (m_s \sigma_e)^2$$

(b) Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência de $x[n]$ em função dos parâmetros conhecidos dos processos $s[n]$ e $e[n]$.

$\phi_{xx}[m] = ?$ $\quad P_{xx}(\Omega) = ?$

$$\phi_{xx}[m] = E\{x[n] \cdot x[n+m]\}$$

$$= E\{(s[n] \cdot e[n])(s[n+m] e[n+m])\}$$

$$= E\{(s[n] s[n+m]) \cdot (e[n] \cdot e[n+m])\} \quad \text{não correlados}$$

$$= E\{s[n] s[n+m]\} \cdot E\{e[n] \cdot e[n+m]\}$$

$$= \phi_{ss}[m] \cdot \phi_{ee}[m]$$

$$= \phi_{ss}[m] \cdot (\sigma_e^2 \cdot \delta[m] + m_e^2)$$

$$= \phi_{ss}[0] \cdot \sigma_e^2 + \phi_{ss}[m] m_e^2$$

$$P_{xx}(\Omega) = DFT\{\phi_{xx}[m]\}$$

$$= DFT\{\sigma_e^2 \phi_{ss}[0] + \phi_{ss}[m] m_e^2\}$$

$$= 2\pi \sigma_e^2 \phi_{ss}[0] \cdot \delta[m] + m_e^2 P_{ss}(\Omega)$$

(c) Considere que $s[n]$ é um sinal sinusoidal com fase aleatória e uniformemente distribuída em $[0, 2\pi[$ ou seja, $s[n] = A\cos(w_0 n + \Phi)$. Mostre que nestas circunstâncias, se os processos são não correlados então:

$$\phi_{xx}[m] = \frac{A^2}{2}\cos w_0 m \cdot [\sigma_e^2 \delta[m] + m_e^2]$$

$s[n] = A\cos(w_0 n + \theta)$ → Como $s[n]$ tem fase aleatória é um p.e., como é uniformemente distribuída todos têm a mesma probabilidade de acontecer

$$\boxed{\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}}$$

$$\phi_{xx}[m] = E\{x[n]\cdot x[n+m]\}$$
$$= E\{s[n]\cdot e[n]\cdot s[n+m]\, e[n+m]\}$$
$$= E\{(s[n]\cdot s[n+m])(e[n]\, e[n+m])\}$$ ↓ como são $\bar{n}$ correlados

$$= E\{s[n]\, s[n+m]\}\cdot E\{e[n]\cdot e[n+m]\}$$
$$= E\{\underbrace{A\cos(w_0 n+\theta)}_{a}\cdot A\cos(\underbrace{w_0(n+m)+\theta}_{b})\}\ \phi_{ee}[m]$$
$$= \frac{A^2}{2} E\{\cos(w_0 n + \theta + w_0(n+m)+\theta) + \cos(w_0 n + \theta - (w_0(n+m)+\theta))\}\cdot\phi_{ee}[m]$$

$$\phi_{xx}[m] = \frac{A^2}{2} E\{\underbrace{\cos(2w_0 n + w_0 m + 2\theta)}_{0} + \cos(-w_0 m)\}\cdot \phi_{ee}[m]$$

depende de n → valor médio → 0 ↘ constante em n

$E\{K\} = K$

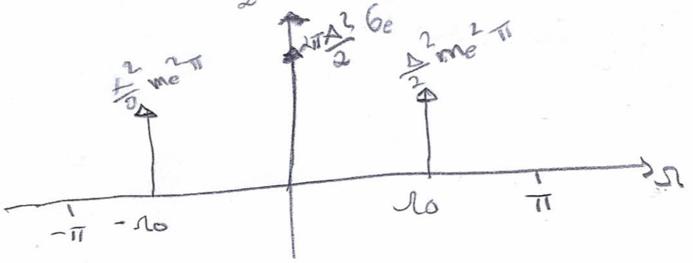
cos é par

$$= \frac{A^2}{2}\cos(w_0 m)\cdot\phi_{ee}[m]$$
$$= \frac{A^2}{2}\cos(w_0 m)\cdot[\sigma_e^2\delta[m] + m_e^2]$$
$$= \frac{A^2}{2}\sigma_e^2 + \frac{A^2}{2}\cos(w_0 m)m_e^2$$

(d) Determine e esboce justificando, no contexto da alínea c) a densidade espectral de potência do processo $x[n]$.

$$P_{xx}(\Omega) = DFT\{\phi_{xx}[m]\}$$
$$= DFT\left\{\frac{A^2}{2}\sigma_e^2 + \frac{A^2}{2}\cos(w_0 m)m_e^2\right\}$$

$$P_{xx}(\Omega) = \frac{A^2}{2}\sigma_e^2\, 2\pi\delta[m] + \frac{A^2 m_e^2 \pi}{2}[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)]$$



$$\sum_{k=1}^{N} a_k x[n-k]$$

(e) Apresente um método eficiente para estimar a densidade espectral do ruído $e[n]$ tomando por base $C_{xx}[m]$. Mostre que este estimador é consistente relativamente à média.

Como $e[n]$ é ruído branco, a sua autocorrelação não é infinita, logo não se pode usar o método de entropia máxima. Como não processo AR, temos que usar os métodos clássicos, como Bartlett, ou método das janelas.

$$\boxed{E\{C_{xx}[m]\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \phi_{xx}[m]}$$

média do estimador

Para $C_{xx}[m]$ ser consistente relativamente à média $B = E\{C_{xx}[m]\} - \phi_{xx}[m] = 0$

$$C_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+m]$$

$$E\{C_{xx}[m]\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+m]\right\}$$

$$E\{C_{xx}[m]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\{x[n]x[n+m]\}}_{\phi_{xx}[m]}$$

$N - |m| \cancel{-1} + 1$

$$= \frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}[m]$$

$$B = E\{C_{xx}[m]\} - \phi_{xx}[m]$$

$$\lim_{N\to+\infty} B = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}[m] - \phi_{xx}[m]\right)$$

$$= \phi_{xx}[m] - \phi_{xx}[m]$$

$$= 0$$

Logo, $C_{xx}[m]$ é um estimador assintoticamente consistente relativamente à média da sequência de autocorrelação.

(f) Mostre que o periodograma é um estimador consistente da densidade espectral de potência mas apenas relativamente à média. Explique como é que o método de Barlett diminui a variância deste estimador. Justifique.

$$\boxed{E\{I_N(\Omega)\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} P_{xx}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\phi_{xx}[m]e^{-j\Omega m}}$$

$B = E\{I_N(\Omega)\} - P_{xx}(\Omega)$

$$C_{xx}[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+m]$$

$$E\{C_{xx}[m]\} = \frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}[m]$$

$$I_N(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}[m]e^{-j\Omega m}$$

$$E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E\{C_{xx}[m]\}e^{-j\Omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}[m]e^{-j\Omega m}$$

$$B = E\{I_N(\Omega)\} - P_{xx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}[m]e^{-j\Omega m} - \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\phi_{xx}[m]e^{-j\Omega m}$$

$$\lim_{N\to+\infty} B = \lim_{N\to+\infty}(\cdots\cdots) = P_{xx}(\Omega) - P_{xx}(\Omega) = 0$$

Logo $I_N(\Omega)$ é um estimador consistente assintoticamente relativamente à média

Relativamente à variância:

$$\lim_{N \to +\infty} \text{var}\{I_N(\lambda)\} = \lim_{N\to+\infty} \sigma^4 \left[1 + \left(\frac{\sin(\lambda N)}{N \sin(\lambda)}\right)^2\right] \neq 0$$

- O periodograma $I_N(\lambda)$ é um estimador não consistente da densidade espectral de potência, pois o limite quando $N \to +\infty$ da variância de $I_N(\lambda)$ não é nulo, é $\neq 0$.

- O método de Bartlett consiste em dividir os dados em K segmentos de M pontos, calcular os K periodogramas de M pontos e fazer a média dos K periodogramas. Diminuindo assim a variância total.

(4). Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela F.T

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{K=1}^{N} a_K z^{-K}}$$

e a qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula.

(a) Dos métodos de estimação espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espectral de potência do processo de saída? Justifique.

$$w[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x[n]$$

$$X[z] = H(z) \cdot W(z)$$

$$X[z] = \frac{1}{1 - \sum_{K=1}^{N} a_K z^{-K}} \cdot W(z)$$

$$X[z]\left[1 - \sum_{K=1}^{N} a_K z^{-K}\right] = W(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\} \quad x[n] = \underbrace{\sum_{K=1}^{N} a_K x[n-K]}_{\text{sinal preditivo}} + w[n]$$

Sinal preditivo

$$\hat{x}[n] = \sum_{K=1}^{N} a_K x[n-K]$$

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$
$$= w[n]$$

Como é ruído branco

É um sistema ressonante. Faz com que um sinal tenha na saída uma parte predizível e imprevisível pois utiliza um conjunto de amostras passadas.

Como temos preditibilidade na saída, podemos aplicar o método de entropia máxima.

(b) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

$$\phi_{xx}[m] = \sum_{K=1}^{N} a_K \phi_{xx}(|m-K|)$$

$$\phi_{xx}[m] = E\{x[n] \cdot x[n \pm m]\}$$
Função par
$$\phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m]$$

$$x[n] = \sum_{K=1}^{N} a_K x[n-K]$$

$$\{x[n-m]\}$$

$$x[n]\, x[n-m] = \sum_{K=1}^{N} a_K x[n-K]\, x[n-m]$$

$$E\{x[n]\, x[n-m]\} = \sum_{K=1}^{N} a_K E\{x[n-K] \cdot x[n-m]\}$$

$$n-m-(n-K)$$
$$-m+K$$

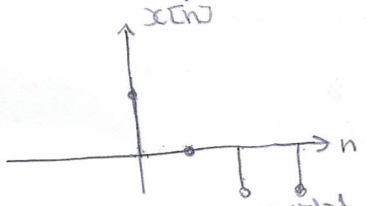
$$\phi_{xx}[-m] = \sum_{K=1}^{N} a_K \phi[-m+K]$$

como $\phi_{xx}[m]$ é par

$$|m-K| = m-K$$
$$-m+K$$

$$\phi_{xx}[m] = \sum_{K=1}^{N} a_K \phi[|m-K|]$$

(c) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 4 pontos $\{1, 0, -1, -1\}$. Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $-3 \le m \le 3$.



$$C_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\, x[n+m]$$

$$C_{xx}[0] = \frac{1}{4}\left(x[0]^2 + x[1]^2 + x[2]^2 + x[3]^2\right) = \frac{3}{4}$$

$$C_{xx}[1] = \frac{1}{4}\left(\cancel{x[0]x[1]}^{0} + \cancel{x[1]x[2]}^{0} + x[2]x[3]\right) = \frac{1}{4} = C_{xx}[-1]$$

$$C_{xx}[2] = C_{xx}[-2] = \frac{1}{4}\left(x[0]x[2] + \cancel{x[1]x[3]}^{0}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$C_{xx}[3] = C_{xx}[-3] = \frac{1}{4}\left(x[0]\, x[3]\right) = -\frac{1}{4}$$

(d) Determine o erro do preditor

$$MMSE = \phi_{xx}(0) - \sum_{i=1}^{p} a_i\, \phi_{xx}(i)$$

$$P = N - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\phi[m] = \sum_{i=1}^{p} a_i\, \phi[|m-i|]$$

$$\phi[4] = a_1 \phi(3) + a_2 \phi(2) + a_3 \phi(1)$$

$$\phi[1] = a_1 \phi(0) + a_2 \underbrace{\phi(-1)}_{\phi(1)\ \text{Par}} + a_3 \underbrace{\phi(-2)}_{\phi(2)} \quad \text{Par}$$

$$\phi[2] = a_1 \phi(1) + a_2 \phi(0) + a_3 \underbrace{\phi(-1)}_{\phi(1)}$$

$$\phi[3] = a_1 \phi(2) + a_2 \phi(1) + a_3 \phi(0)$$

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \phi(2) \\ \phi(1) & \phi(0) & \phi(1) \\ \phi(2) & \phi(1) & \phi(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(1) \\ \phi(2) \\ \phi(3) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + a_2 - a_3 = 1 \\ a_1 + 3a_2 + a_3 = -1 \\ -a_1 + a_2 + 3a_3 = -1 \quad x(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a_2 + 4a_3 = -2 \\ 4a_2 + 8a_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow -4a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$4a_2 = -2 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$+a_1 - \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{a_1 = +\frac{1}{2}}$$

$$MMSE = \phi_{xx}(0) - \sum_{i=1}^{p} a_i\, \phi_{xx}(i)$$

$$= \frac{3}{4} - \left(a_1 \phi_{xx}(1) + a_2 \phi(2) + \cancel{a_3}^{0} \phi(3)\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

(e) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $m>3$ e $m<9$.

$$\phi[m] = \sum_{i=1}^{p} a_i \, \phi[m-i]$$

$$\hat{\phi}[4] = a_1 \phi(3) + a_2 \phi(2) + \cancel{a_3} \cancelto{0}{\phi(1)} = +\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\hat{\phi}[5] = a_1 \cancelto{0}{\phi(4)} + a_2 \phi(3) + \cancel{a_3} \cancelto{0}{\phi(2)} = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\hat{\phi}[6] = a_1 \phi(5) + a_2 \cancelto{0}{\phi(4)} + \cancel{a_3} \cancelto{0}{\phi(3)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

$$\hat{\phi}(7) = a_1 \phi(6) + a_2 \phi(5) + \cancel{a_3} \cancelto{0}{\phi(4)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{32}$$

$$\hat{\phi}[8] = a_1 \phi(7) + a_2 \phi(6) + \cancel{a_3} \cancelto{0}{\phi(5)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{32}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{16} = -\frac{1}{64} - \frac{1}{32} = -\frac{3}{64}$$

Teste 2 2014/2015

1. Considere um sinal discreto sinusoidal de amplitude A e fase aleatória uniformemente distribuída em $[0, 2\pi[$ contaminado por ruído branco aditivo de média m, variância σ^2 e não correlado com o sinal.

(a) Diga como é que o sinal sinusoidal sendo determinístico pode ser considerado aleatória e determine a média e a variância do sinal contaminado

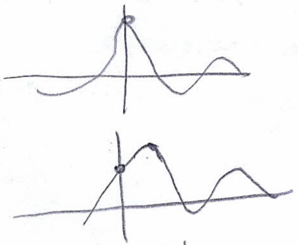
$s[n] = A\cos(\Omega_0 n + \theta) \Rightarrow$ como $s[n]$ tem fase aleatória é um P. E., como é uniformemente distribuída todos têm a mesma probabilidade de acontecer.

$$\phi_{ee}[m] = \sigma^2 \delta[m] + m^2$$

$x[n] = s[n] + e[n]$

como a fase é aleatória → o sinal é deslocado aleatoriamente

como a fase é aleatória significa, que o sinal sofrerá deslocações no tempo, aleatoriamente, logo "nunca" poderá obter o mesmo valor no mesmo instante de tempo



(b) Média:

$$m_x = E\{x[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(s[n]+e[n]) = \frac{1}{N}\sum_n s[n] + \frac{1}{N}\sum_n e[n] = \cancel{m_s}^{0} + m = m$$

Variância:

$$\sigma_x^2 = E\{(x-m_x)^2\} = E\{x^2 - 2xm_x + m_x^2\} = E\{x^2\} - 2m_x E\{x\} + m_x^2$$

$$= E\{x^2\} - m_x^2$$

$$E\{x^2\} = E\{(s[n]+e[n])^2\} = E\{s^2 + e^2 + 2se\} = E\{s^2\} + E\{e^2\} + 2E\{s \cdot e\}$$

como s e n são ñ correlados

$$E\{x^2\} = E\{s^2\} + E\{e^2\} + 2\cancel{m_s}^{0} m = E\{s^2\} + E\{e^2\}$$

$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - m_x^2$

$E\{x^2\} = \sigma_x^2 + m_x^2$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Assim:

$$\sigma_x^2 = E\{s^2\} + E\{e^2\} - (\cancel{m_s}^{0} + m)^2 = E\{s^2\} + E\{e^2\} - m^2$$

$$E\{s^2\} = E\{A^2\cos^2(\Omega_0 n + \theta)\} = A^2 E\{\cos^2(\Omega_0 n + \theta)\} = A^2 E\left\{\frac{1 + \cos(2\Omega_0 n + 2\theta)}{2}\right\}$$

$$= \frac{A^2}{2} + A^2 E\left\{\frac{\cancel{\cos(2\Omega_0 n + 2\theta)}^{0}}{2}\right\}$$ valor médio cos é 0

$$= \frac{A^2}{2}$$

Assim:

$$\sigma_x^2 = \frac{A^2}{2} + \sigma^2 + \cancel{m^2} - \cancel{m^2} = \frac{A^2}{2} + \sigma^2$$

σ^2 → P. AC do ruído

$\frac{A^2}{2}$ → Pot. AC sinusoide

1.

(b) Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência do sinal contaminado:

$\phi_{xx}[m] = E\{x[n]\,x[n+m]\}$

$= E\{(s[n]+e[n])(s[n+m]+e[n+m])\}$

$= E\{s[n]\,s[n+m]\} + E\{e[n]\,e[n+m]\} + E\{s[n]e[n+m]\} + E\{e[n]e[n+m]\}$

$= \phi_{ss}[m] + \phi_{ee}[m] + 2\phi_{se}[m]$

como os processos são não correlados

$\phi_{xx}[m] = \phi_{ss}[m] + \phi_{ee}[m] + \cancel{2m_s m}$ 0

como:

$\phi_{ss}[m] = E\{s[n]\,s[n+m]\} = E\{A\cos(\Omega_0 n+\theta)\cdot A\cos(\Omega_0(n+m)+\theta)\}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$

$+\cos(a-b) = \cos a\cos b + \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$

$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b$

$\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} = \cos a\cos b$

$= A^2 E\{\underbrace{\cos(\Omega_0 n+\theta)}_{a}\cdot\underbrace{\cos[\Omega_0(n+m)+\theta]}_{b}\}$

$= A^2 E\left\{\frac{\cos(\Omega_0 n+\theta+\Omega_0 n+\Omega_0 m+\theta) + \cos(\Omega_0 n+\theta-(\Omega_0(n+m)+\theta))}{2}\right\}$

$= \frac{A^2}{2} E\{\cos(2\Omega_0 n+\Omega_0 m+2\theta)\} + \cos(-\Omega_0 m)\}$ ↳ constante

$= \frac{A^2}{2}\cos(-\Omega_0 m) \rightarrow$ Par

$= \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0 m)$

como:

$\phi_{ee}[m] = \sigma^2\delta[m] + m^2$

Assim

$\phi_{xx} = \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0 m) + \sigma^2\delta[m] + m^2$

$P_{xx}(\Omega) = DFT\{\phi_{xx}[m]\}$

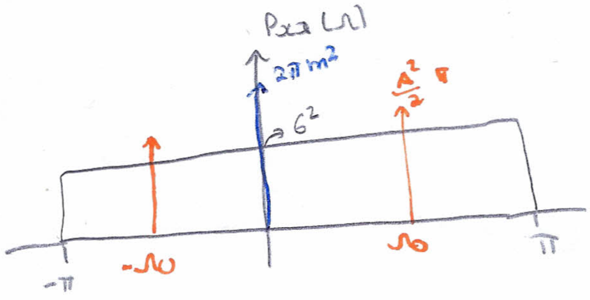
$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[m]\,e^{-j\Omega m}$

$= \frac{A^2}{2}\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)] + \sigma^2 + 2\pi m^2\delta(\Omega)$

$\delta[n] \longleftrightarrow 1$

$K \longleftrightarrow 2\pi K\,\delta(\Omega)$

$\cos(\Omega_0 m) \longleftrightarrow \pi(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0))$



(c) Execute uma função em matlab que gera o sinal contaminado e devolva a sequência de autocorrelação do mesmo. Comente convenientemente o código.

```
function a = gerar_sinal_contaminado ( A, ohmega , N, m , SNR)
    % A - amplitude da sinusoide
    % ohmega - ângulo (freq.) da sinusoide
    % N -> comprimento do sinal
    % m - média do processo de ruído
    % SNR - Relação sinal ruído pretendida (dB)

n = 1 : 1 : N;
s = A * cos(ohmega * n);
e = randn(1,N);
e = e * sqrt(A^2 /(2* exp(SNR/10)) );   % SNR garante a relação sinal-ruído
e = e - mean(e);   % média residual

x = s + e;
a = (xcorr(x))/N;   % a = Cxx[m] = 1/N sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+m]

end
```

$SNR = \frac{S}{N} = \frac{\text{Pot. Sinal}}{\text{P. Ruído}}$

$SNR|_{dB} = 10\log\frac{S}{N}$

$\frac{S}{N} = \frac{A^2}{2(\sigma^2+m^2)}$

$20\log\frac{A_S}{A_R}$

$\frac{A_S^2}{A_R^2} = \left(\frac{A_S}{A_R}\right)^2$

$\log\left(\frac{A_S}{A_R}\right)^2 = 2\log\left(\frac{A_S}{A_R}\right)$

$10\log\left(\frac{A_S}{A_R}\right)^2 = 20\log\left(\frac{A_S}{A_R}\right)$

Supondo média nula

$SNR|_{dB} = 10\log\frac{A^2}{2\sigma^2}$

$\frac{SNR_{dB}}{10} = \log\frac{A^2}{2\sigma^2}$

$\frac{A^2}{2\sigma^2} = 10^{\frac{SNR}{10}dB}$

$\sigma^2 = \frac{1}{2}\frac{A^2}{10^{\frac{SNR}{10}}}$

$\sigma = \sqrt{\frac{A^2}{2\times10^{\frac{SNR}{10}dB}}}$

$\sigma = \sqrt{\frac{A^2}{2\times10^{\frac{SNR}{10}}}}$

@. Considere as duas estimativas de sequências de autocorrelação que estudou

(a) Determine a polarização de cada uma delas. Sabendo que as variâncias são .... Classifique-as quanto à consistência.

Polarização B de estimador $\hat{\alpha}$ de α é por definição $B = E\{\hat{\alpha}\} - \alpha$

Para $c_{xx}[m] \rightarrow B = E\{c_{xx}[m]\} - \phi_{xx}[m]$

$$c_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+m]$$

$N-|m|-1+1$

$$E\{c_{xx}[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\{x[n]\,x[n+m]\}}_{\phi_{xx}[m]}$$

$$E\{c_{xx}[m]\} = \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}[m]$$

$$\Rightarrow B = \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}[m] - \phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[m]\left[\frac{N-|m|}{N} - 1\right]$$

$$\lim_{N \to +\infty} B = 0$$

$c_{xx}[m]$ e ...

$$\lim_{N \to +\infty} \mathrm{var}[c_{xx}[m]] = 0$$

e. ...

$$c'_{xx}[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,x[n+m]$$

$$E\{c'_{xx}[m]\} = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\{x[n]\,x[n+m]\}}_{\phi_{xx}[m]}$$

$N-|m|-1+1$

$$= \frac{N-|m|}{N-|m|} \phi_{xx}[m]$$

$$= \phi_{xx}[m]$$

$$\Rightarrow B = E\{c'_{xx}[m]\} - \phi_{xx}[m] = 0$$

$$\lim_{N \to +\infty} \mathrm{var}\{c'_{xx}[m]\} = 0 \quad \to 0$$