

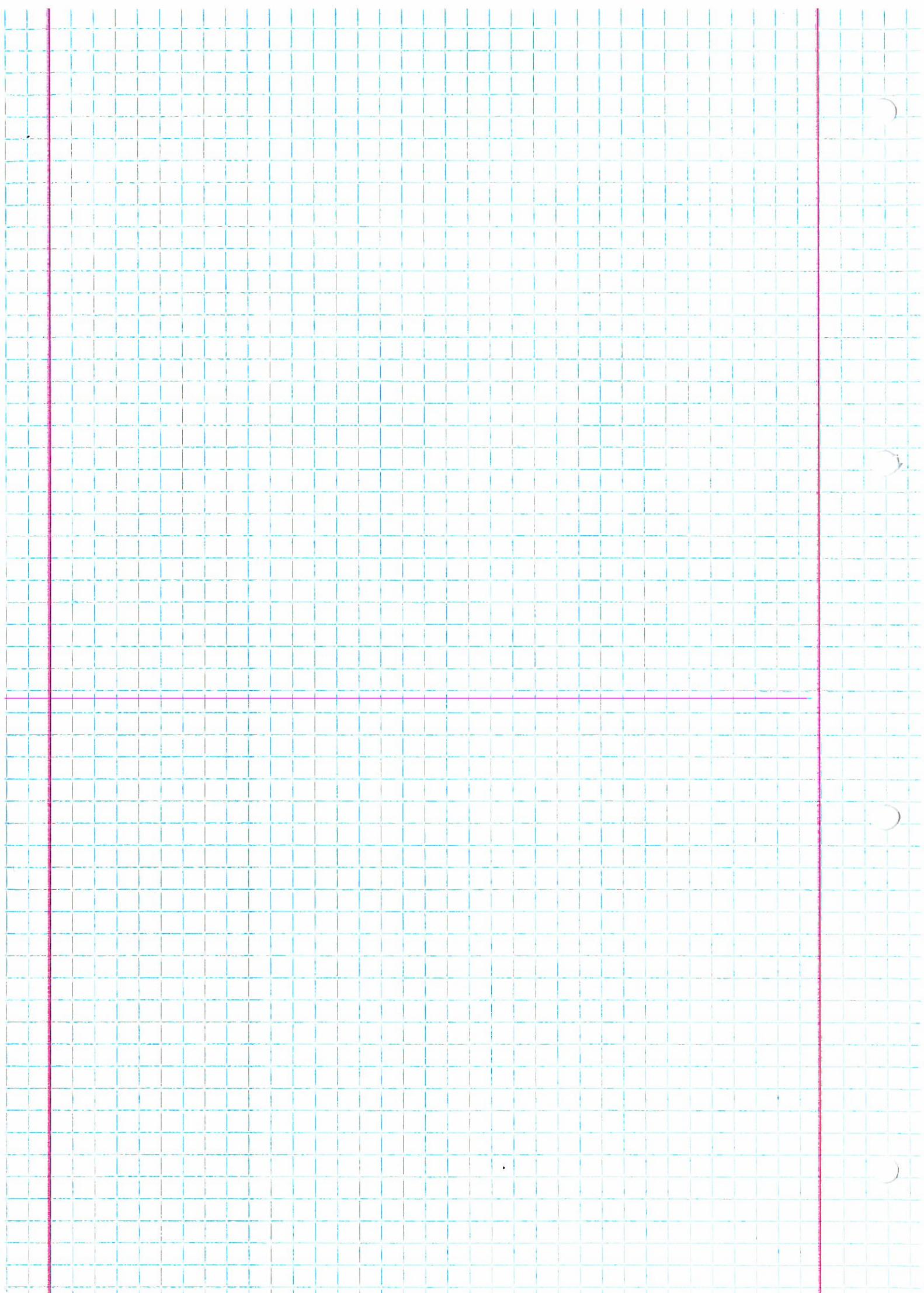
7 execuções de tpc → Apesar de conter os 717. melhores
→ tem-se 972 as casas qd
seão apresentadas os tpc
→ 6 valores (cada 4 valores)

3 testes → 14 valores (uma = 7 valores)
→ 22 março
10 maio
28 julho

Carlos Lima

Afetô d'peço a trabalhar no matlab
↳ sextas feiras

livro: Signals & Systems Allen V. Oppenheim



Revisões P5

Sinais periódicos

sentido Fourier

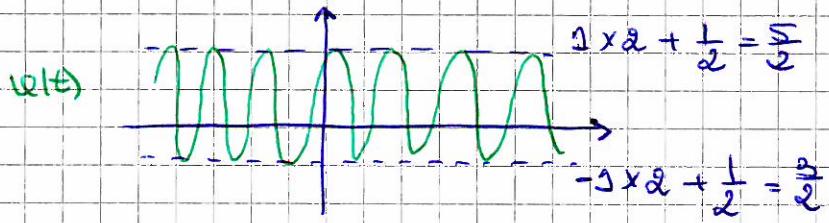
$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$$\downarrow \text{vamos passar a escrever}$$

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}$$

Se $c(n\omega_0)$ real $\rightarrow c(n\omega_0)$ é a amplitude do sinal

$$\text{Ex: } v(t) = \frac{1}{2} + 2 \cos(\omega_0 t)$$



A freq. d' q' uas marca a largura de banda

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= a_0 + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \dots$$

\downarrow
componente constante

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos(\omega_0 t) &= a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_1 e^{j\omega_0 t} \\ &= a_1 (e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) \\ &= 2a_1 \left(\frac{e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}}{2} \right) \\ &= 2a_1 \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

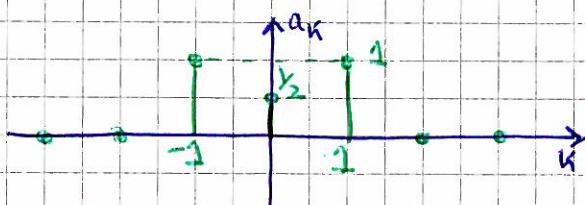
$$\text{Logo } 2 = 2a_1$$

$$\therefore a_1 = 1$$

$$\text{Se } a_1 = a_1$$

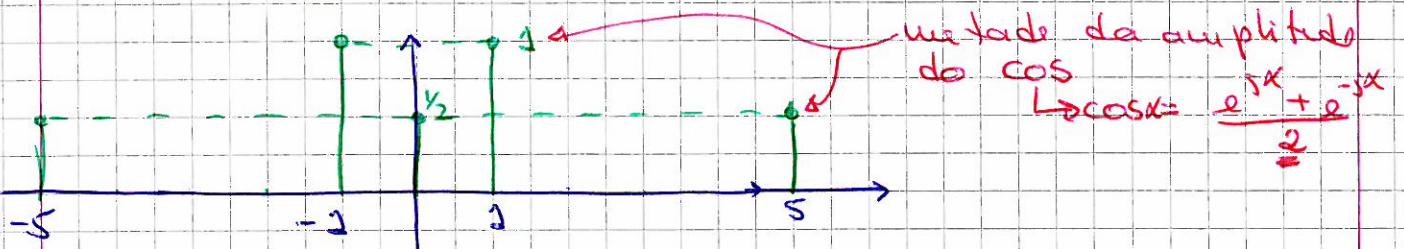
$$\text{Como: } \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = 1 \\ a_{-1} = 1 \end{array}}$$



20

$$v(t) = \frac{1}{2} + 2\cos(\omega_0 t) + \cos(s\omega_0 t)$$



valeores reais

$$v(t) = a_{-5}e^{-j\omega_0 t} + \dots + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1e^{j\omega_0 t} + \dots + a_5e^{j\omega_0 t} + \dots$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{-1} \\ a_5 &= a_{-5} \\ a_0 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cos(\omega_0 t) + \cos(s\omega_0 t) &= a_1(e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) + a_5(e^{-sj\omega_0 t} + e^{sj\omega_0 t}) \\ &= 2a_1\cos(\omega_0 t) + 2a_5\cos(s\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 2 \quad \Rightarrow a_1 = 1 \\ 2a_5 &= 1 \quad \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

os coeficientes são as amplitudes dos cos (a_n)

Transformada de Fourier \rightarrow caract. de qd. signal no domínio das frequências

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

↓ vamos passar a escrever

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} dt \rightarrow \text{aqui o exponencial é } \underline{\text{período}}$$

↓ vamos passar a escrever

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w) e^{j\omega t} dw$$

$$\tilde{\omega} w = 2\pi f$$

Sinais periódicos (Série de Fourier)

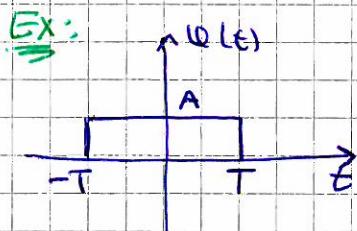
$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k \omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} v(t) e^{-j k \omega_0 t} dt$$

Sinais únicos periódicos (Transformada de Fourier)

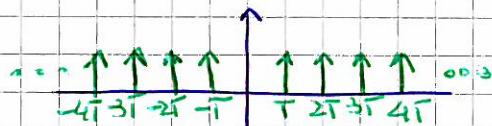
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j \omega t} dt$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j \omega t} d\omega$$



$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j \omega t} dt = A \left(-\frac{1}{j \omega} \right) e^{-j \omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= -\frac{A}{j \omega} (e^{-j \omega \frac{T}{2}} - e^{j \omega \frac{T}{2}}) \\
 &= \frac{A}{\omega} \left(\frac{e^{j \omega \frac{T}{2}} - e^{-j \omega \frac{T}{2}}}{j} \right) \quad \text{Como } \sin \theta = \frac{e^{j \theta} - e^{-j \theta}}{2j} \\
 &= 2 \frac{A}{\omega} \cdot \frac{e^{j \omega \frac{T}{2}} - e^{-j \omega \frac{T}{2}}}{2j} \\
 &= 2 \frac{A}{\omega} \sin \left(\frac{\pi}{T} \cdot \frac{\omega T}{\pi} \right) \quad \text{Como } \sin \theta = \frac{\sin(\theta)}{\pi} \\
 &= 2A \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot \omega T}{\pi} \right)}{\omega} \\
 &= 2AT \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot \omega T}{\pi} \right)}{\pi \cdot \frac{\omega T}{\pi}} \\
 &= 2AT \sin \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)
 \end{aligned}$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



→ Série de impulsos

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) e^{-j \omega t} dt$$

Neste caso podemos invertir as somas

$$P(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) e^{-jwT} dt$$

como $\delta(\phi) = \phi$ op $k \neq 0$ o intervalo entre os

$$P(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwkT} dt$$

Muito difícil de calcular.
Vamos fazer por aqui

- $X(w) = 2\pi \delta(w)$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot \delta(w) e^{jwt} dw$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w) e^{jwt} dw = 1$$

$$v(t) = 1 \iff X(w) = 2\pi \delta(w)$$

só tem componente DC
não tem componente AC
↳ o impulso vai ser
nos ϕ 's Hz.

- $X(w) = 2\pi \delta(w - w_0)$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(w - w_0) e^{jwt} dw = e^{jw_0 t}$$

Logo
vai em todo lado → se $\lambda \neq 0$
menos em w_0 qd $w=w_0$

$$v(t) = e^{jw_0 t} \iff X(w) = 2\pi \delta(w - w_0)$$

- $X(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(w - kw_0)$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(w - kw_0) e^{jwt} dw$$

último

111 111

Neste caso podemos invertir as somas

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w - kw_0) e^{jwt} dw$$

se $\phi \neq 0$ qd $w = kw_0$

$\overline{\Delta} \rightarrow$ Soma discreta
dentro de uma
soma contínua

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

→ igual à exp. das ondas periódicas

qualquer sinal periódico pode-se escrever em termos de termos f. de Fourier

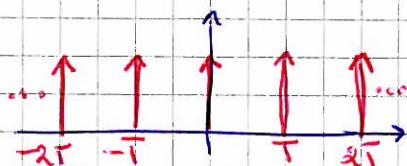
$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t} \longleftrightarrow X(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(w - kw_0)$$

• Termo de impulsos

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad \text{é sinal periódico}$$

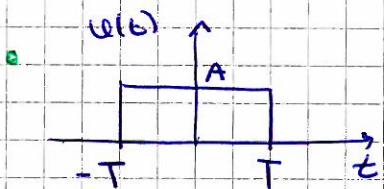
↓
entend

$$P(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot a_k \delta(w - kw_0)$$

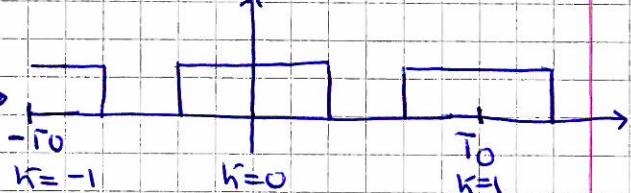


com $a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jkw_0 t} dt = \frac{1}{T}$

$$P(w) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(w - k\frac{2\pi}{T}\right)$$



Vamos a periodicidade de $v(t) \rightarrow$
 $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t - kT)$



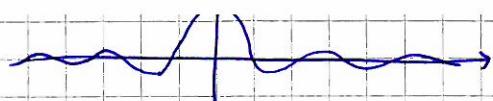
$$y(t) = v(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \rightarrow \text{pegar } v(t) \text{ e centralizá-lo em todos os impulsos}$$

Se temos uma convolução no domínio dos tempos

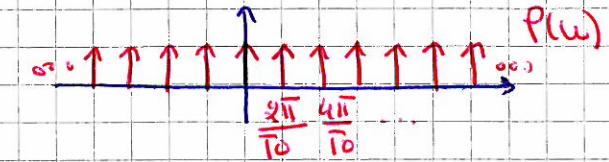
↓
no domínio das frequências temos uma multiplicação

$$v(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = X(w) \cdot P(w) = Y(w)$$

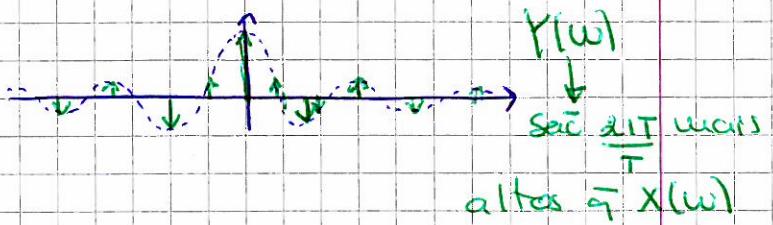
$$X(\omega) = 2AT \sin(\omega \frac{T}{\pi})$$



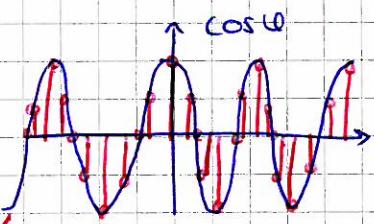
$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$



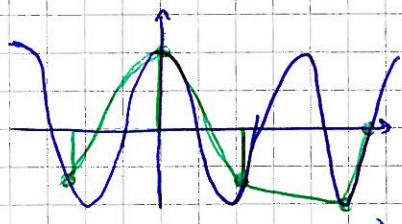
$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot P(\omega)$$



Ausotagem → houve sé alguma informação do sinal



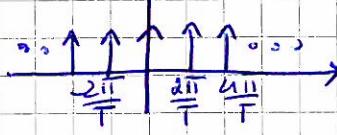
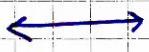
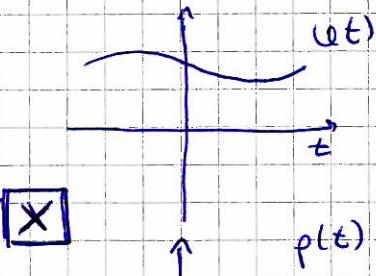
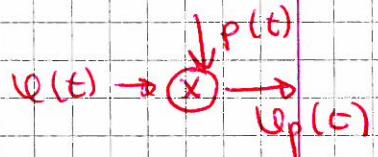
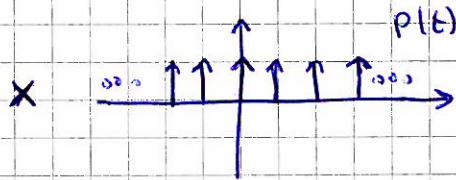
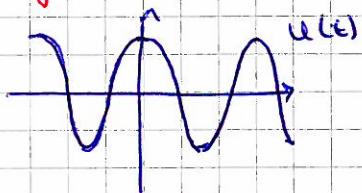
clique freq. de ausotagem desse tipo
não se percebe o sinal original



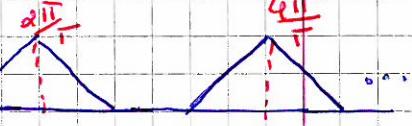
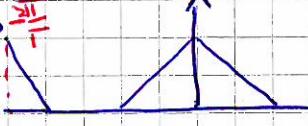
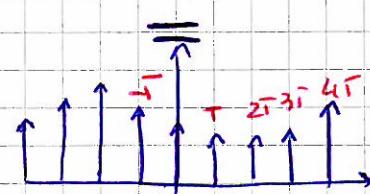
esta freq. de ausotagem é errada
para este sinal, portanto se causar
não se percebe o sinal original

Da este fenômeno chamado aliasing

igualar?



controle-se os pulsos
freq.



$\frac{2\pi}{T} = \omega_s$ → frequência de amostragem



temos estes espacos possíveis
considerando

$\frac{2\pi}{T}$ suficiente maior q ω_R

para haver perdida do sinal tem-se q ter

$$\omega_s - \omega_M > \omega_R$$

$$\omega_s > 2\omega_R$$

para se recuperar corretamente o sinal \rightarrow fazer um filtro passa baixas

Sinal se pode ser amostrado
se de banda limitada

$$U_p(t) = u(t) \cdot p(t)$$

$$X_p(f) = X(f) * P(f)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * P(\omega)]$$

$$(U_p(t) = u(t) \cdot p(t) \iff X_p(\omega) = [X(\omega) * P(\omega)] \frac{1}{2\pi})$$

$$\text{com } x(t) = u(t) \iff h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) P(\omega-\omega) d\omega \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left(\omega - \frac{k2\pi}{T} - \omega \right) d\omega$$

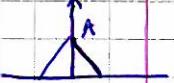
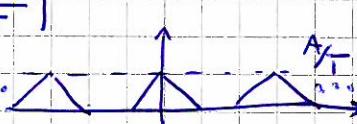
$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot \underbrace{\delta \left(\omega - \frac{k2\pi}{T} - \omega \right)}_{\delta = 1 \text{ qd } \omega - \frac{k2\pi}{T} - \omega = 0} d\omega$$

$$\delta = 1 \text{ qd } \omega - \frac{k2\pi}{T} - \omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{k2\pi}{T}$$

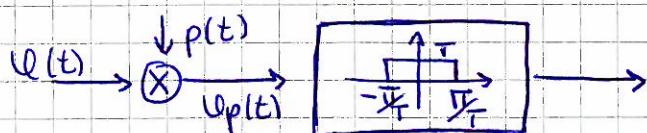
$$\therefore \omega = \frac{k2\pi}{T}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X \left(\omega - \frac{k2\pi}{T} \right)$$

a amplitude de



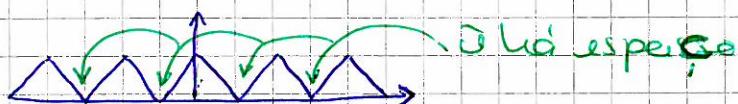
então para recuperar o sinal \rightarrow deve se converter de Nyquist



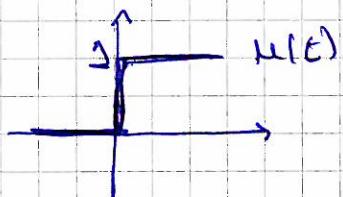
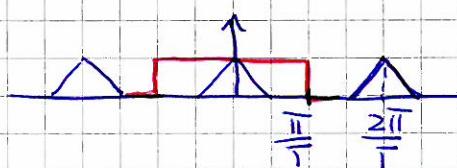
↳ filtro passa baixo de amplitude T
 pico que não tem com amplitude A

$$\frac{A}{T} \times T = A$$

$$\text{Se } w_s = 2\pi R$$



qd já é espaço o ideal pra a freq. do passa baixo é
 metade do espaço

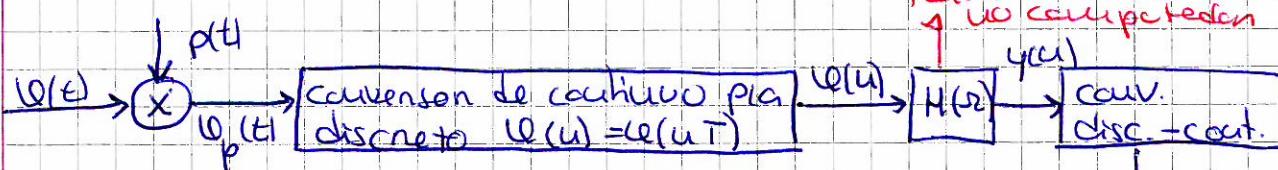


$$\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \quad \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t=0 \end{cases}$$

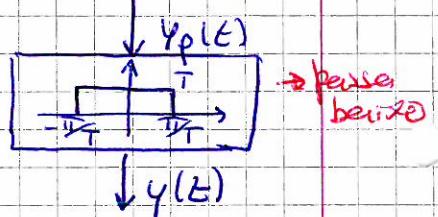
$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) dt = 1$$

$$t > 0 \Rightarrow u(t) = 1$$

1) p/é seu
 amplitude 1
 mas sua duração
 1



reconstrução dos impulsos
 → no compõe deles



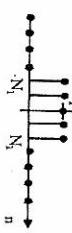
→ passa baixo

Análise de Fourier de Sinais Discretos

- T. F. da sequência não periódica (DTFT)

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{\frac{j k 2\pi}{N} n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j k \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j k \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \\ \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \end{array} \right.$$



$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$

- Em oposição aos sinais contínuos no tempo o intervalo de integração na equação de síntese é finito (2π) pois a DTFT é periódica de período 2π
- $X(\cdot)$ existe ou converge para qualquer ω (sinal de energia finita)



$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Omega_0) e^{j k \Omega_0 n} \Omega_0$$



$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j \Omega n} d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j \Omega n}$$

5

Processamento de Sinais Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

Análise de Fourier de Sinais Discretos

- Observações:

- Na vizinhança de $\Omega = \dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ Os valores de $X(\cdot)$ correspondem a componentes espectrais de baixa frequência.
- Na vizinhança de $\Omega = \dots, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$ Os valores de $X(\cdot)$ correspondem a componentes espectrais de alta frequência.



6

Processamento de Sinais Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

Análise de Fourier de Sinais Discretos

- Exemplo 1: Determine a DTFT do sinal $x[n] = a^n u[n] |a| < 1$.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j \Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j \Omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j \Omega}}$$



Análise de Fourier de Sinais Discretos

- DTFT de uma sequência periódica

- Exemplo 1: Qual o sinal que tem por DTFT

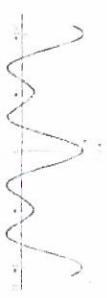
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0) e^{j \Omega n} d\Omega = \sum_k a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$$

$$\text{Então } X'(\Omega) = \sum_k \Omega_0 X(k\Omega_0)$$

- A DTFT de uma sequência periódica $x'[n]$ pode ser interpretada como um item de impulsos espalhados de amplitude $2\pi a_k$ e de periodicidade $2\pi/\Omega_0$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-j k 2\pi n / N} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j k 2\pi n / N} = \frac{\sin \frac{N\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}}$$

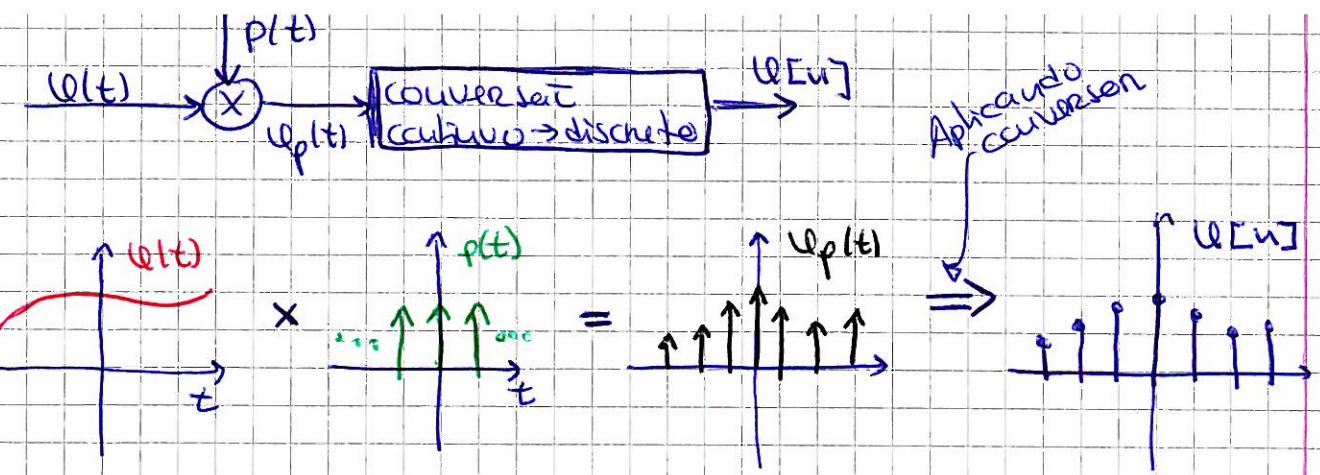


Análise de Fourier de Sinais Discretos

- **Problemas para resolução em casa**

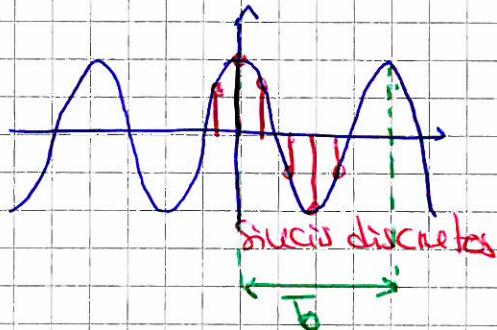
1) Calcule manualmente a DFT do sinal $x[n]=\{3,2,-1,0,0,1,0,2\}$. Combine os coeficientes de índice k e $N-k$ e expresse $x[n]$ como a soma de exponenciais complexas discretas.

2) Repita o problema 1 mas agora usando o algoritmo FFT. Confirme que o número de multiplicações (com números complexos) é no máximo $8 \log_2 8$.



$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j n \omega_0 t}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \rightarrow T_0 = \frac{1}{f_0} \rightarrow \text{tempo de duração qual é repetitivo}$$



$$\text{Período } N \Rightarrow \tau_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$\phi_n(t) = e^{j n \omega_0 t}$ → família de N^o termos infinitos
que existe limite para ω_0

$$\phi_n[u] = e^{j n \frac{2\pi}{N} u}$$

$$\phi_n[n + \tau_0 N] = e^{j (n + \tau_0 N) \frac{2\pi}{N} u} = e^{j n \frac{2\pi}{N} u} \cdot e^{j \tau_0 N \frac{2\pi}{N} u}$$

$e^{j 2\pi u}$ → intervalo fixo

Uma sinusoidal no syst. discreto tem N^o harmônicos → $\tau_0 N$

↓ período do sinal periódico

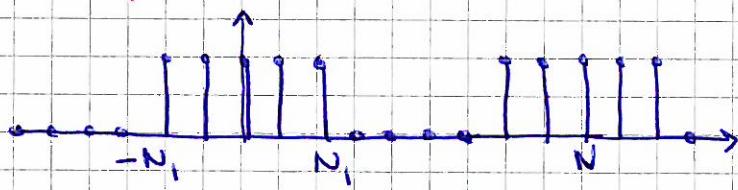
sinal discreto no tempo $u[n]$ periódico

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \frac{2\pi}{N} u}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] e^{-j n \frac{2\pi}{N} u}$$

$$a_N = a_0 + N$$

Exemplos



caso

$$\sum_{n=0}^{N-1} R^n = \frac{1-R^N}{1-R}$$

então

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j n \frac{2\pi}{N} u} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j \frac{2\pi}{N} u} \right)^n$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N} (m-N_1)}$$

$$= \frac{1}{N} e^{\frac{j\pi}{N} N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N} m}$$

De acuerdo a la condición anterior intercaladamente

$$= \frac{1}{N} e^{\frac{j\pi}{N} N_1} \left(\frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N} (2N_1+1)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \frac{-j\frac{2\pi}{N} (N_1 + \frac{1}{2})}{e^{-j\frac{2\pi}{N}} (e^{\frac{j\pi}{N} N_1} - e^{-j\frac{2\pi}{N}})}$$

~~explicación~~ como $\frac{e^{jn} - e^{-ju}}{2j} = \sin u$

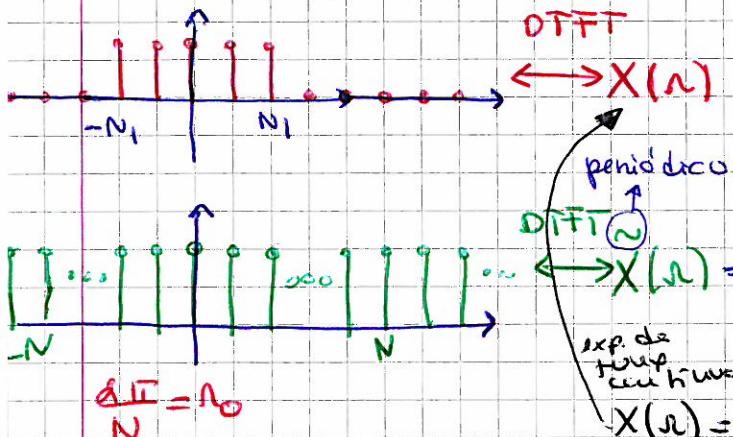
$$a_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi k(N_1 + \frac{1}{2})}{N}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}, k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$



• placa onda cuadrada discreta
La similitud de se aplica hasta π → después de π el señal repite

• de intervalo grande los tiempos → de la freq. de freq.
La lugo que mayor es periodo (N) → más freq. (más riscas)



$$\tilde{x}(t) \leftrightarrow \tilde{X}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(u - k\omega_0)$$

$$a_k = \frac{w_0}{2\pi} (X(k\omega_0))$$

señal q se repite

$$X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jut} dt$$

exp. de tiempo constante

$$X(u) = \frac{1}{N} \sin \frac{\pi}{N} \left(N_1 + \frac{1}{2} \right)$$

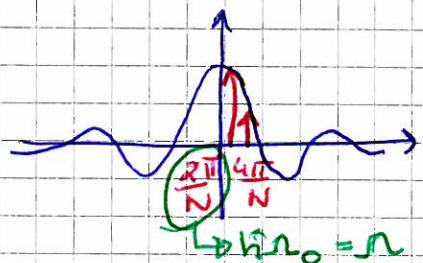
onde tempo é por ksc
vou por n

T. T. da sequência não periódica (DTFT)

$v[u] \rightarrow$ versão cíclica periódica

$\psi'[u] \rightarrow$ " periódica"

$$\psi'[u] = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{\frac{j k 2\pi}{N} u}$$



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \psi'[u] e^{-\frac{j k 2\pi}{N} u}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} (v[u] e^{-j u n_0}) e^{-\frac{j k 2\pi}{N} u} \quad k n_0 = N \quad n_0 = \frac{2\pi}{\Delta f}$$

$$= \frac{1}{N} X(k n_0)$$

$$N \rightarrow +\infty \Rightarrow n_0 = \frac{2\pi}{\Delta f} \rightarrow 0$$

$$\psi'[u] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N-1} X(k n_0) e^{j k n_0 u} \cdot s_0$$

é uma sequência aperiódica de um período

↓
Logo vai ter sequências até 2π em n



$$v[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(n) e^{j n u} dn$$

Resumo

Contínuos

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k w_0 t}$$

periódicos

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{+\infty} v(t) e^{-j k w_0 t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (v(t) e^{-j \omega t}) dt$$

ciclos
periódicos

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j \omega t} d\omega$$

$$n_0 = \frac{2\pi}{\Delta f} \quad w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Discretos

$$v[u] = \sum_{k=-N}^{N-1} g_k e^{\frac{j k 2\pi}{N} u}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} (v[u] e^{-j u n_0}) e^{-\frac{j k 2\pi}{N} u}$$

$$X(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} (v[u] e^{-j u n_0}) e^{-\frac{j k 2\pi}{N} u}$$

$$v[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(n) e^{j n u} dn$$

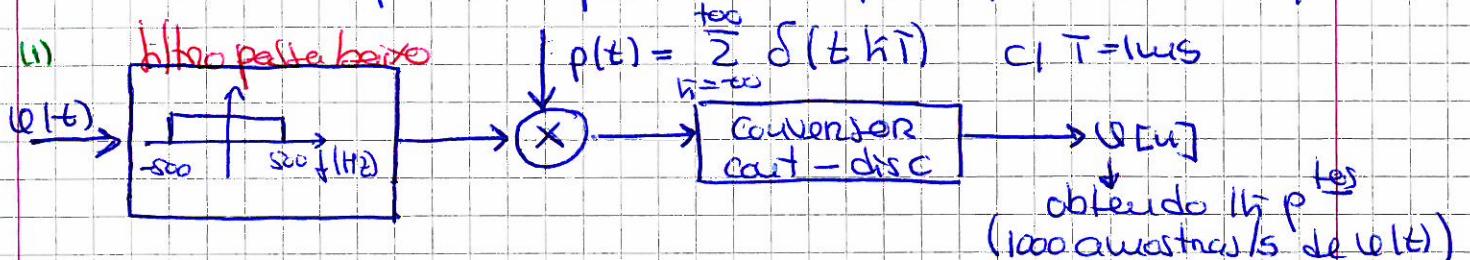
EXEMPLO: Teor. comp. Lentes → freq. amostragem dobro da freq. da sinal

até 500 Hz

Sinal de sinal amostrado a 1 kHz → à freq. de Nyquist

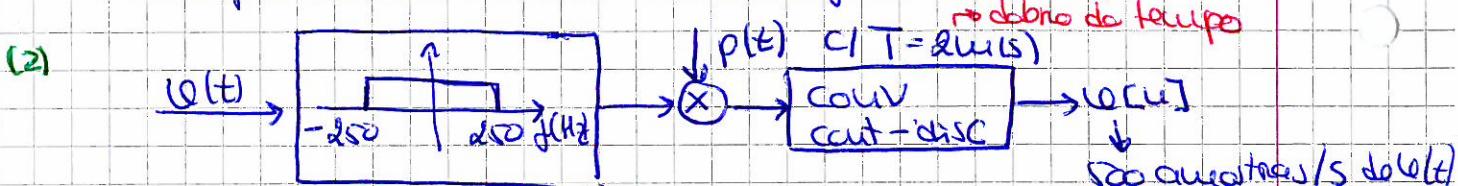
Sinal → se pretende reduzir a representação do sinal por um factor 2 (o sinal passa a ocupar apenas metade da memória)

Dentro da parte impulsional do filtro passa baixo requerido

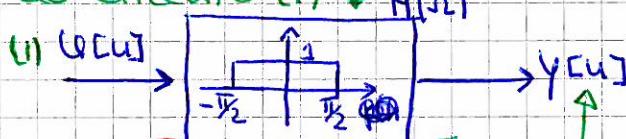


para reduzir pelo factor 2:

- Certo podemos alterar a amostragem do sinal



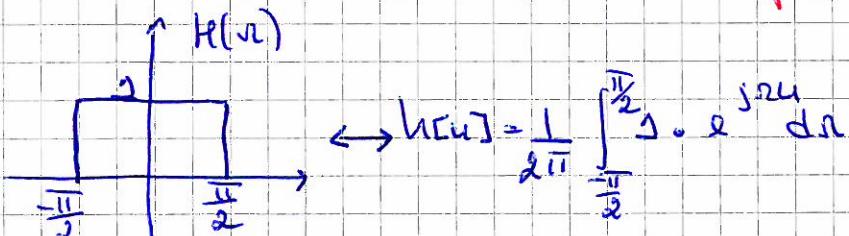
- É possível alterar a amostragem do sinal → concentrar-se no circuito (1) $\Rightarrow H(n)$



$$e^{j\pi n} = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

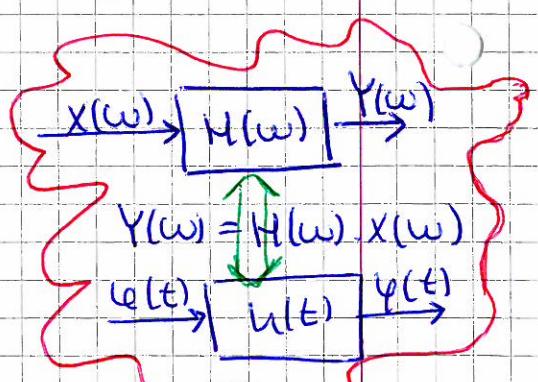
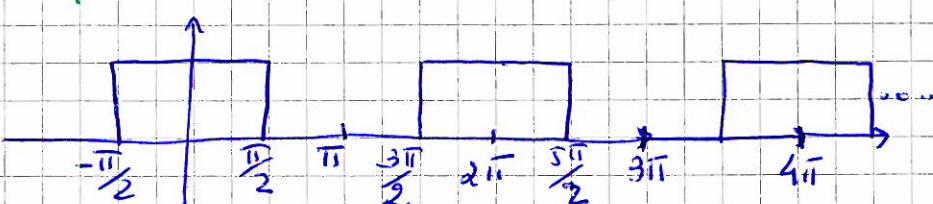
corte constante de freq. de amostragem
quando uma amostra é a seguinte pausa de freq.
e assim sucessivamente

teremos → def. do corte do tempo



se ω se limitasse entre 250, entre 250 e 500 Hz,
ficaria semelhante a estes freq.

Depete-se de 2π em 2π



$$h[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ju\sin n} dn$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{jnu}}{ju} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi ju} (e^{j\frac{\pi}{2}u} - e^{-j\frac{\pi}{2}u})$$

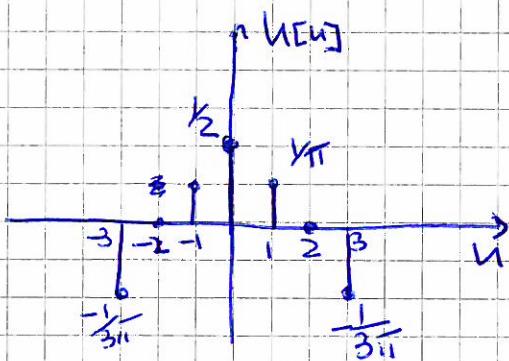
$$= \frac{1}{\pi u} \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}u} - e^{-j\frac{\pi}{2}u}}{2j} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi u} \sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{2 \times \frac{\pi}{2}u}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

ao derivar o resultado



$$u=0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(0)}{0} = \frac{1}{2} \times \cancel{0} = \frac{1}{2}$$

$$u=1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

$$u=2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$$

$$u=3 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{3\pi} = -\frac{1}{6\pi}$$

NOTAS:

□ Se a função é periódica $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$

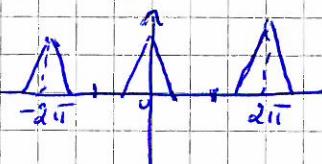
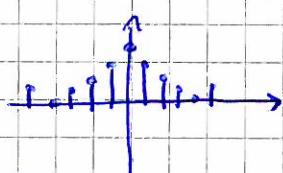
calculos

□ Se a função é não periódica $\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}$

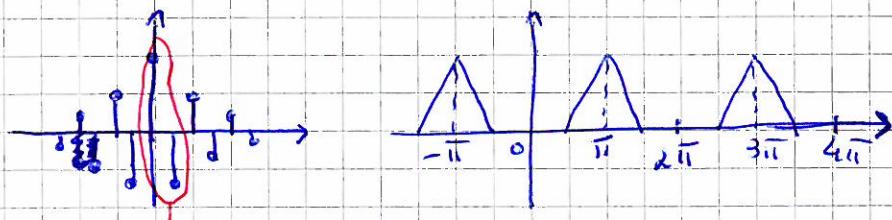
□ $X(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} h[u] e^{-j2\pi u n}$

seu valor descreve ao longo do tempo
pode ser o sinal de convergir

→ em termos de 0 e múltiplos de $\pi/2 \rightarrow X(n) \rightarrow$ (valores) componentes espectrais de baixa freq.



→ Espectro de ψ e seus múltiplos de π (impares) $\rightarrow X(\omega) \rightarrow$ (valores) Coeficientes espectrais de alta freq.



1. Wdx. valres possivel

signal tem q estiver centrado na sua max freq. → centrada em π

$$x(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\psi[n]) e^{-jn\omega}$$

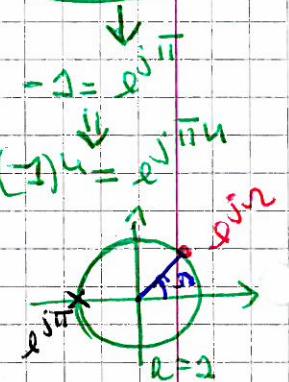
$$(\psi_1[n]) = \sin(n\pi/2) \leftrightarrow X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\psi_1[n]) e^{-jn\omega} =$$

$$(\psi_2[n]) = (-1)^n (\psi_1[n]) \leftrightarrow X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\psi_2[n]) e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n (\psi_1[n]) e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\pi n} (\psi_1[n]) e^{-jn\omega}$$

$$(-1)^n = e^{j\pi n}$$



$X_1(\omega - \pi)$

$$\neq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\psi_1[n]) e^{-jn(\omega - \pi)}$$

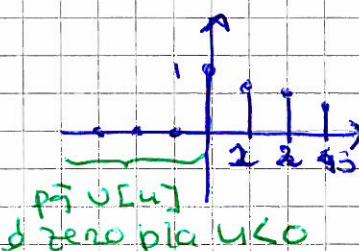
cancela-se $\approx X_2(\omega) \neq'$
centrado em π

Exemplo 1 (Des slides) (Diap. 7)

Def. DTFT

$$(\psi[n]) = a^n \cdot v[n] , |a| < 1 \leftarrow \text{fim}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |(\psi[n])| < \infty \leftarrow \text{cumprindo requisito}$$



$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\psi[n]) e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot v[n] e^{-jn\omega}$$

$$x(n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot e^{-jn})^n$$

$$= \frac{1}{1 - a e^{-jn}}$$

\rightarrow função de hipótese $\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} R^n = \frac{1 - R^N}{1 - R}$

$$\frac{1}{1 - a} \text{ se } |a| < 1$$

$$\frac{1}{1 - a e^{-jn}} \text{ se } |a e^{-jn}| < 1$$

$$\underbrace{|a| e^{-jn}}_1 < 1$$

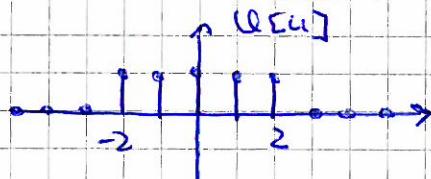
\hookrightarrow para a condição
de convergência basta
 $|a| < 1$ →
 $a \times a = 1$ não vale

$$u \quad \text{DTFT}$$

$$a u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-jn}}, \quad |a| < 1$$

Exemplo 2 (dos slides) (excp 7)

Def. DTFT do pulso rectangular $u[n]$ $\begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$



$$x(n) = \sum_{u=-2}^2 e^{-jnu}$$

V.E.V. $\rightarrow u \rightarrow u + 2 = u + 2 \rightarrow$ soma progressiva geométrica

$$x(n) = \sum_{u=0}^4 e^{-jnu} (u+2)$$

$$= 2 e^{jnu} \sum_{u=0}^4 e^{-juu}$$

$$= 2 e^{jnu} \sum_{u=0}^4 e^{-juu}$$

$$= 2 e^{jnu} \cdot \frac{1 - e^{-jnu}}{1 - e^{-j2u}}$$

$$= 2 e^{jnu} \cdot \frac{e^{-j\frac{n}{2}} \left(e^{j\frac{n}{2}} - e^{-j\frac{n}{2}} \right)}{e^{-j\frac{n}{2}} \left(e^{j\frac{n}{2}} - e^{-j\frac{n}{2}} \right)}$$

metade do
valor do expoente do
denominador

$$= \frac{e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\sin(\frac{\pi}{2})}$$

← função de hpo sinc periódica
q se repete de 2π em 2π

Sinais Discretos

Periódicos

$$\left. \begin{aligned} S.F. \quad & \left\{ \begin{aligned} u[n] &= \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N} u[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

N Periódicos

$$\left. \begin{aligned} X(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] e^{-j\omega n} \\ u[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(n) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned} \right\} T.F.$$

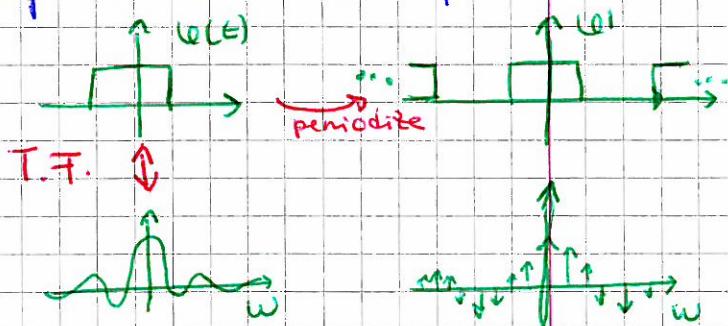
Qq sinal contínuo e periódico se pode escrever seu tempo de T.F.

$$x'(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(w - kw_0)$$

$$a_k = \frac{w_0}{2\pi} X(kw_0)$$

$$\frac{w_0}{2\pi} = \frac{\frac{2\pi}{T_0}}{2\pi} = \frac{1}{T_0}$$

ter-se q supor a existência de impulsos



Exemplo 1 (dos slides) (Prop. 8)

$$x'(n) = \sum_k 2\pi a_k \delta(n - kn_0)$$

$$u[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x'(n) e^{j\omega n} dn$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi a_k \delta(n - kn_0) e^{j\omega n} dn$$

caso func discrete → pode-se trocar as sumas

$$= \sum_k a_k \int_{-\pi}^{\pi} \delta(n - kn_0) e^{j\omega n} dn$$

→ nulo qd $n - kn_0 = 0 \Rightarrow n = k n_0$

$$= \sum_k a_k e^{jk\omega n_0}$$

← é mais q a S.F.

↳ cálculo de neste calc. o tempo de pto, apenas temos k nulos

$$\sum_n a_n e^{j\omega n} \leftrightarrow \sum_k 2\pi a_k \delta(n - k\omega)$$

$\psi[n]$ é representável no nível do computador

$$x(n) \leftarrow \bar{\psi} \quad \dots \quad \rightarrow \text{ponto fixo}$$

funs contínuas à ser rep. no computador

DFT (Transformada Discreta de Fourier)

↳ existe plausível sinal periódico

↳ funç freq c/ d/ contínua

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}$$

Atribui valores a cada p/ c/ sinal

$$\stackrel{\circ}{\psi}[p] \text{ no tempo} = \stackrel{\circ}{\psi}[p] \text{ na freq. } \psi[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi}{N} kn}$$

sequência → sinal discreto

Seriam os valores de T.F desse sinal

FFT (Transformada Rápida de Fourier)

↳ forma rápida de calcular DFT

$$\text{DFT: } X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} \quad k=0, \dots, N-1$$

Operações matemáticas = 1 soma + 1 Multiplicação complexa

N mult. complexa + $(N-1)$ somas complexas $\Rightarrow N$ operações mat.

aproximamos a soma a N em vez de $(N-1)$

como ir pode fornecer N valores

então $\rightarrow N^2$ operações



No entanto estamos a efectuar cálculos repetidos

↳ devido às simétricas exponenciais complexas

↳ dependem das componentes de ordenem par das impares

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \omega[2k] w_n^{2k} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \omega[2k+1] w_n^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (\omega[2k] w_n^2)^{2k} + w_N^{-\frac{N}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (\omega[2k+1] w_N^2)^{2k}$$

$$w_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \implies w_N^2 = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} = e^{-j\left(\frac{N}{2}\right)} = w_{N/2}$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \omega[2k] w_{N/2}^{2k} + w_N^{-\frac{N}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \omega[2k+1] w_{N/2}^{2k}$$

$$= G(n) + w_N^{-n} H(n)$$

Valor ter que cada seq.

$\hookrightarrow \binom{N}{2}^2$ operações

cada seq é de seq $\rightarrow 2 \times \binom{N}{2}^2$ operações

caso para cada n temos que fazer $\frac{N}{2}$ multiplicações e $\frac{N}{2}$ soma

\downarrow total de operações

$$2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N}{2}$$

Se o w de p^{tej} do final haver uma potência de base 2

\hookrightarrow podemos partilhar o final até ficar com 2^p

w de final

$N = 2^4$ posso partilhar a sequência 4 vezes

$$n = \log_2 N$$

\Leftrightarrow para dividir a w de operações

$$N \log_2 N$$
 operações

DTFT (sintese)

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega[k] e^{-jn\omega}$$

w periódicos

$$\omega[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(n) e^{jn\omega} dn$$

periódicas

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \alpha_k \delta(n - k\omega_0)$$

$$\alpha_k = \frac{N\omega_0}{2\pi} \frac{1}{T} (k\omega_0)$$

Propriedades da D.T.F.T.

- Interferência de movimentos musculares em ECG's.

Causas: Movimentos do tronco (tosse, respiração, movimentos de pernas ou braços, ...). Variações de temperatura, fenómenos eléctricos (polarização dos amplificadores, etc.,..)

Consequências: Dificuldade de análise do ST



Figura 3.25 - Exemplo de interferência muscular no sinal ECG.

66

Propriedades da D.T.F.T.

- Uma função de transferência mais apropriada às características do ECG.

Conteúdo espectral significativo em baixas freqüências (0,5-1Hz)

$$H(\Omega) = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - 0,995e^{-j\Omega}}$$

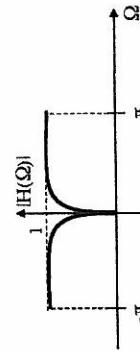


Figura 3.26 - Efecto de um filtro Butterworth na interferência muscular.

68

Propriedades da D.T.F.T.

- Eliminação de interferências de baixa freqüência com o derivador

$$\begin{array}{c} \frac{dx(t)}{dt} \quad \xrightarrow{\text{T.F.}} \quad jwX(w) \\ \xrightarrow{\quad} \quad X(jw-1) \quad \xrightarrow{\text{T.F.}} \quad (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega) \\ H(\Omega) = 1 - e^{-j\Omega} = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}} \right) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \left(2j \sin \frac{\Omega}{2} \right) \\ |H(\Omega)| = 2 \sin \frac{\Omega}{2} \\ \angle H(\Omega) = \frac{\Pi}{2} - \frac{\Omega}{2} \end{array}$$

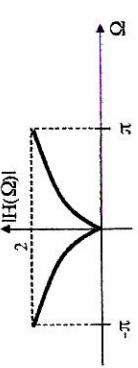


Figura 3.24 - Bloco de diferençador para a remoção das interferências de baixa freqüência.

67

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

68

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

69

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

70

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

71

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

72

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

73

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

74

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

75

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

76

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

77

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

78

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

79

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

80

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

81

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

82

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

83

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

84

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

85

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

86

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

87

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

88

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

89

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

90

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

91

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

92

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

93

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

94

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

95

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

96

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

97

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

98

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

99

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

100

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

101

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

102

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

103

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

104

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

105

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

106

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

107

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

108

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

109

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

110

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

111

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

112

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

113

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

114

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

115

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

116

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

117

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

118

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

119

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

120

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

121

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

122

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

123

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

124

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

125

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

126

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

127

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

128

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

129

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

130

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

131

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

132

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

133

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

134

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

135

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

136

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

137

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

138

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

139

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

140

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

141

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

142

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

143

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

144

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

145

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

146

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

147

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

148

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

149

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

150

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

151

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

152

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

153

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

154

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

155

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

156

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

157

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

158

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

159

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

160

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

161

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

162

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

163

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

164

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

165

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

166

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

167

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

168

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

169

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

170

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

171

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

172

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

173

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

174

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

175

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

176

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

177

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

178

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

179

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

180

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

181

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

182

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI) Universidade do Minho

</

Propriedades da D. T. F. T.

• Propriedades da Transformada de Fourier (DTFT)

- **Periodicidade** - É sempre periódica de período 2π , em contraste com a T.F. em tempo contínuo.

$$- \text{Linearidade} \quad ax[n] + bx[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$$

- **Simetrias** - Se $x[n]$ é real então:

- $X(\Omega) = X^*(-\Omega)$
- $\operatorname{Re}[X(\Omega)]$ e $\operatorname{Im}[X(\Omega)]$ são funções pares
- $\operatorname{Im}[X(\Omega)]$ e a fase de $X(\Omega)$ são funções ímpares

- Atraso temporal

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

- Diferença e soma

$$[x[n] - x[n-1]] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \{1 - e^{-j\Omega}\} X(\Omega)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(\Omega) + jX(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

58

Processamento de Sinal | Carlos Lima | DFE - Universidade do Minho

Propriedades da D. T. F. T.

- **Dualidade**: Não se verifica. Mostre a relação seguinte e compare com a DTFT de uma seq. finita.

$$\frac{w}{\pi} \sin c \left(\frac{wn}{\pi} \right) \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \frac{1}{w} \begin{cases} 1 & |n| \leq w \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Derivação na frequência:

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = - \sum_{n=0}^{\infty} j n x[n] e^{-jn\Omega} \xrightarrow{\text{T. F.}} nx[n]$$

- Relação de Parseval

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

- **Convolução**: Muito importante na análise de sistemas LTI discetos

$$h[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

Propriedades da D. T. F. T.

- Escalonamento no tempo e na frequência ($x[n]a^n$)

- Não existe pelo menos no sentido tradicional pois n é inteiro e a terá que ser inteiro. Por exemplo $x[2n]$ não é uma versão "acelerada" do sinal mas simplesmente as suas amostras de índice par. No entanto define-se

$$x_{(a)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & n \text{ é múltiplo de } k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_{(a)}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\Omega/a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(a)}[n] e^{-jn\Omega/a}$$

$$x_{(a)}[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} X(a\Omega)$$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} X(\Omega)$$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jn\Omega_k}$$

59

Processamento de Sinal | Carlos Lima | DFE - Universidade do Minho

Propriedades da D. T. F. T.

- **Exemplo 1**: Determine a resposta de um sistema LTI discreto no tempo a um sinal genérico $x[n]$ sabendo que a sua resp. a impulso é $h[n] = \delta[n - n_0]$.

- No domínio do tempo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-n_0-k] = x[n-n_0]$$

- No domínio da freq. aplicando as propriedades da convolução e desl. no tempo

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[\Omega - n_0] e^{jk\Omega} = e^{-jn_0\Omega} \quad Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = e^{-jn_0\Omega} X(\Omega) \xleftrightarrow{\text{T. F.}} y[n] = x[n - n_0]$$

- **Exemplo 2**: Determine a resposta, de um sistema LTI discreto no tempo cuja resp. a impulso é $h[n] = \alpha^n u[n]$, a $x[n] = \beta^n u[n]$.

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})(1 - \beta e^{-j\Omega})} = \frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} + \frac{\beta}{1 - \beta e^{-j\Omega}}$$

$$y[n] = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \beta^n u[n] = \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^n u[n] - \beta^n u[n]]$$

Propriedades da D. T. I. T.

- Exemplo 3: Repita o exemplo 2 para o caso em que $\alpha=\beta$

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right)^2 & Y(\Omega) &= \frac{j}{\alpha} e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right) & \alpha^n u[n] &\xrightarrow{\text{T.F.}} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \\ (n+1)x^{n-1}u[n+1] &\xleftarrow{\text{T.F.}} \frac{j}{\alpha} e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right) & n\alpha^n u[n] &\xleftarrow{\text{T.F.}} j \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right) \\ &\xleftarrow{\text{T.F.}} \frac{j}{\alpha} e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right)^2 & y[n] &= (n+1)\alpha^n u[n] \end{aligned}$$

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1] \xleftarrow{\text{T.F.}} \frac{j}{\alpha} e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right)^2 \xrightarrow{\quad} y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

62

Propriedades da D. T. F. T.

- Exemplo: Considere o sistema LTI com resposta a impulso $h[n]=(1/2)^n u[n]$. Utilize a DTFT para determinar a resposta do sistema ao sinal $x[n]=(n+1)(1/4)^n u[n]$.

Das tabelas temos

$$(n+1)x^n u[n] \xleftarrow{\text{T.F.}} \frac{j}{\alpha} e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right)^2$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega} \right)^2}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega} \right)^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega} \right)^2} \right]^2 = \frac{4}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} + \frac{-2}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} + \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega} \right)^2}$$

$$y[n] = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] - 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n u[n] - (n+1) \left(\frac{1}{4} \right)^n u[n]$$

Propriedades da D. T. F. T.

- Sistemas discretos LTI e equações diferenças

$$\sum_{k=0}^n a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \xleftarrow{\text{T.F.}} Y(\Omega) \sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} = X(\Omega) \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}}$$

- Exemplo: Qual é $h[n]$ e $H(\Omega)$ do sistema descrito por

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n]$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\Omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\Omega}} = \dots = \frac{4}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega}}$$

$$h[n] = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] - 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n u[n]$$

63

Propriedades da D. T. F. T.

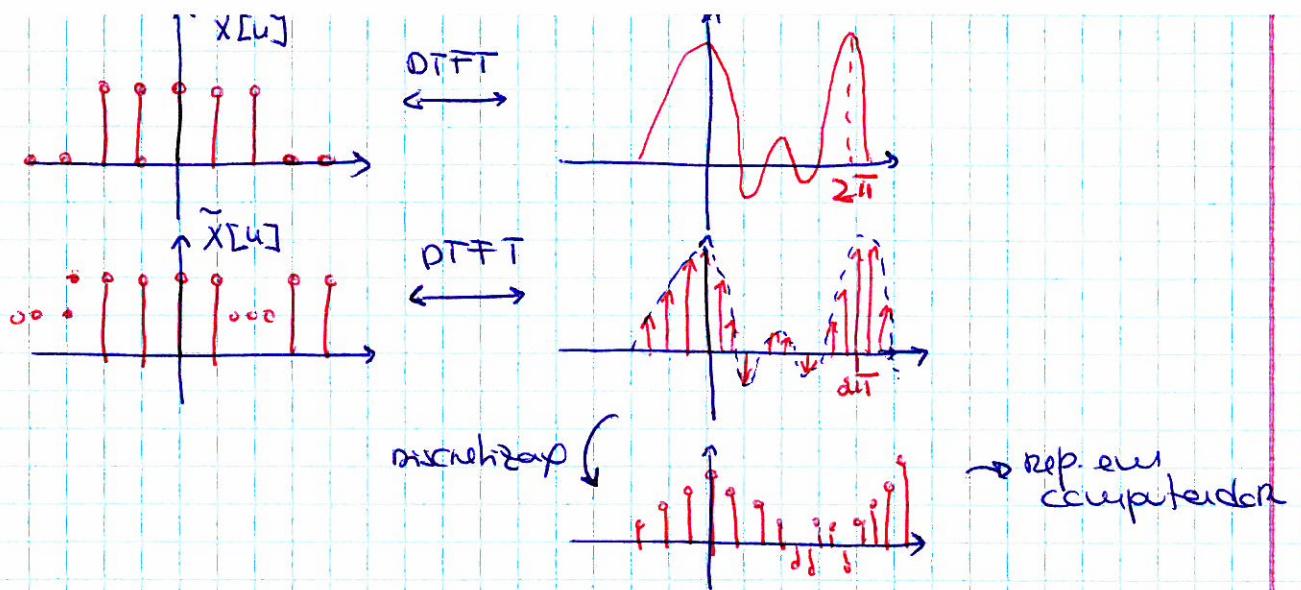
- Problemas para resolução em casa

- Repita o exemplo anterior para

$$1) \quad x[n] = (3/4)^n u[n]$$

$$2) \quad x[n] = (-1)^n$$

64



Propriedades da Transformada de Fourier (DTFT)

Periodicidade → É sempre periódica de período 2π
 (seu cosseno é $\cos(\frac{2\pi}{T}t)$ em tempo contínuo)
 \downarrow
 se é o ângulo

Linearidade → $a\psi_1[u] + b\psi_2[u] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} aX_1(n) + bX_2(n)$

$$\psi_1[u] \longleftrightarrow X_1(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \psi_1[u] e^{-j\pi n u}$$

$$\psi_2[u] \longleftrightarrow X_2(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \psi_2[u] e^{-j\pi n u}$$

$$\psi_3[u] = a\psi_1[u] + b\psi_2[u] \longleftrightarrow X_3(n) = aX_1(n) + bX_2(n)$$

$$X_3(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} (\psi_3[u]) e^{-j\pi n u} = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} (a\psi_1[u] + b\psi_2[u]) e^{-j\pi n u}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} a\psi_1[u] e^{-j\pi n u} + \sum_{u=-\infty}^{+\infty} b\psi_2[u] e^{-j\pi n u}$$

$$= a \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \psi_1[u] e^{-j\pi n u} + b \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \psi_2[u] e^{-j\pi n u}$$

$$= aX_1(n) + bX_2(n) \quad \text{c.q.d.}$$

Simetrias → de $X(u)$ e' real entõe :

$$\circ X(n) = X^*(-n)$$

• $\operatorname{Re}[X(n)]$ e $|X(n)|$ sõe funções pares

• $\operatorname{Im}[X(n)]$ e a fase de $X(n)$ sõe funções ímpares

$$\text{Atende temporal} \rightarrow u[u-u_0] \xleftrightarrow{T.F} e^{-j\omega u_0} X(n)$$

$$e^{j\omega u} u[u] \xleftrightarrow{T.F} X(n-u_0)$$

$$u[u] \longleftrightarrow X(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} u[u] e^{-jn(u-u_0)}$$

↑ tempo de n real
plano T-F.

$u[u-u_0]$ $\longleftrightarrow ?$
Finalmente

$$u[u-u_0] = u'[u] \longleftrightarrow X'(n) = ?$$

$$\begin{aligned} X'(n) &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} u'[u] e^{-jn(u-u_0)} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} u[u-u_0] e^{-jn(u-u_0)} e^{-jn(u_0)} e^{-jn(u-u_0)} \\ &= e^{-jn(u_0)} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} u[u-u_0] e^{-jn(u-u_0)} \end{aligned}$$

↑ pleno uso
valor unívoco

$$\text{U.V. } u \rightarrow R : u-u_0 = R$$

$$\begin{aligned} &= e^{-jn(u_0)} \sum_{R=-\infty}^{+\infty} (u[R]) e^{-jRN} \\ &= e^{-jn(u_0)} \cdot X^*(n) \end{aligned}$$

$$X'(n) = e^{-jn(u_0)} X(n)$$

Ex:

$$u[u] \longleftrightarrow X(n) = \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

$$u'[u] \longleftrightarrow X'(n) = \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \cdot e^{-2jn}$$

Diferença e Soma

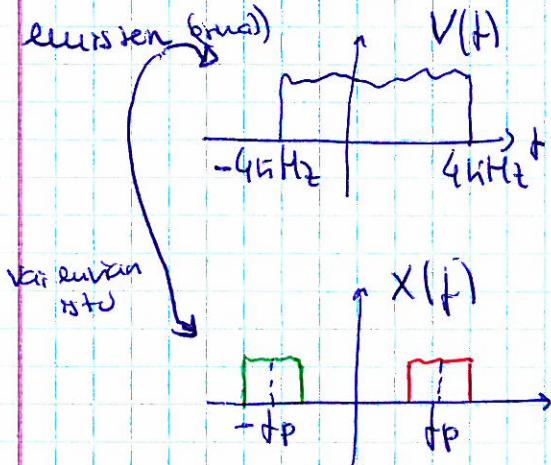
$$u[u] - u[u-1] \xleftrightarrow{T.F} (1 - e^{-j}) X(n)$$

$$\sum_{u=-\infty}^u u[u] \xleftrightarrow{T.F} \frac{1}{1-e^{-j}} X(n) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-2\pi k)$$

Escalação de tempo e da frequência ($\mathcal{U}[au]$)

NOTAS

Problema do modelap



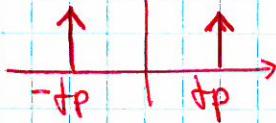
→ propriedade da modelap

$$v(t) = V(t) \cdot \cos(\omega_p t)$$

↓ T.F.

$$X(f) = V(f) * T.F. (\cos(\omega_p t))$$

$$\frac{1}{2} [\delta(f - fp) + \delta(f + fp)]$$



fp deve ser escolhido de forma a que seja grande o suficiente para não haver inter干ção entre elas

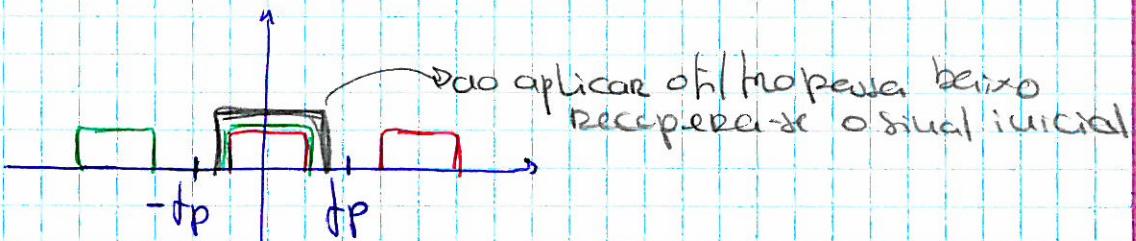
→ mas também pode haver interferência com o termo de fundo

Receptor

$$R(t) = v(t) \cdot \cos(\omega_p t) \quad \text{e}$$

Reproduzir o sinal já no modeloado

$$R(t) = V(t) \cdot \cos(\omega_p t) \longleftrightarrow R(f) = X(f) \cdot T.F. (\cos(\omega_p t))$$



$$v[u] \longleftrightarrow X(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} v[u] e^{-j\omega u}$$

$$y[u] = e^{j\omega u}; v[u] \longleftrightarrow ??$$

$$\begin{aligned} Y(n) &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega u} v[u] e^{-j\omega u} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} v[u] e^{-j(n-u)\omega} \\ &\underbrace{=}_{X(n-n_0)} \end{aligned}$$



↑
efecto de modelap pura

Qualidade → Em contínuo, tem $v(t) \rightarrow Y(f)$ e $y(t) \rightarrow V(f)$.
Em discreto, isto é, se verificam linearmente mais $v(t) \rightarrow Y(f)$ entre $y(t) \rightarrow V(f)$ repetido em período de 2π .

Derivação na frequência $\frac{dx(n)}{dn} = -\sum_{u=-\infty}^{+\infty} u e^{j\omega u} \Rightarrow x(u) \leftrightarrow \int \frac{dx(n)}{dn}$

$$v[u] \leftrightarrow X(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} v[u] e^{-j\omega u}$$

$$\frac{dX(n)}{dn} = -\sum_{u=-\infty}^{+\infty} v[u] \cdot (\#(u)) e^{-j\omega u} \quad \text{cada } j^2 = -1$$

$$\frac{dX(n)}{dn} = -\int \sum_{u=-\infty}^{+\infty} v[u] \cdot u \cdot e^{-j\omega u} \quad -j = \frac{1}{j}$$

$$j \frac{dX(n)}{dn} = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} v[u] \cdot u \cdot e^{-j\omega u}$$

~~assim~~

$$v[u] \leftrightarrow j \frac{dX(n)}{dn}$$

Relação de Parseval

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} |v[u]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{Sinais periódicos} \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} |v[u]|^2 = \sum_{u=0}^{N-1} |a_k|^2$$

Convolução $y[u] = v[u] * h[u] \xrightarrow{\text{T.F}} Y(n) = x(n) H(n)$

No domínio dos tempos



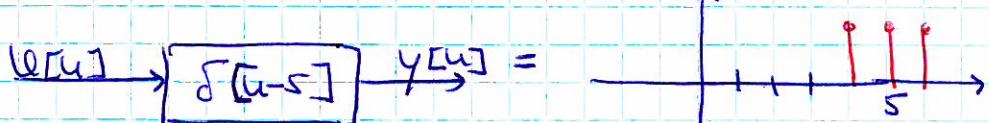
$$h[u] = \delta[u - u_0]$$

$$v(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} y[u] &= v[u] * h[u] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k] h[u-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k] \delta[u-u_0-k] \quad \text{termo não nulo qd} \\ &= v[u-u_0] \quad u-u_0-k=0 \\ &\quad k=u-u_0 \end{aligned}$$

O impulso atrasado u_0 unidades

Seendo $v[u] = \begin{cases} 1 & u=0 \\ 0 & \text{outros} \end{cases}$ e $u_0=5$



Mo definição das frequências

caso $\delta[n] \xleftrightarrow{DTFT} 1$

$$\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{} 1 \cdot e^{-jn_0}$$

então

$$Y(n) = X(n) \cdot H(n)$$
$$= X(n) \cdot e^{-jn_0}$$

caso $\psi[n] \xleftrightarrow{} e^{-jn_0} \cdot X(n)$

$$\text{então } Y[n] = \psi[n-n_0]$$

Exemplo 2 (slides) (map 6)

$$\underbrace{\psi[n] = \beta^n u[n]}_{\text{caso }} \xrightarrow{\text{DTFT}} Y[n] = ?$$
$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

caso $\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{} \frac{1}{1-\alpha e^{-jn}}$ $|\alpha| < 1$

então

$$X(n) = \frac{1}{1-\beta e^{-jn}}$$

$$H(n) = \frac{1}{1-\alpha e^{-jn}}$$

metodo das
coeficientes
↓
indeterminada

$$Y(n) = \frac{1}{1-\beta e^{-jn}} \cdot \frac{1}{1-\alpha e^{-jn}} = \frac{A}{1-\beta e^{-jn}} + \frac{B}{1-\alpha e^{-jn}}$$

↓
calculado
pelo metodo
dos tempos

$$A = Y(n) \cdot (1-\beta e^{-jn}) \Big|_{e^{-jn}=\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha e^{-jn}} \Big|_{e^{-jn}=\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$$

$$B = Y(n) \cdot (1-\alpha e^{-jn}) \Big|_{e^{-jn}=\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1-\beta e^{-jn}} \Big|_{e^{-jn}=\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

$$Y(n) = \frac{\beta}{1-\beta e^{-jn}} + \frac{\alpha}{1-\alpha e^{-jn}}$$



$$Y[n] = \frac{\beta}{\beta-\alpha} \cdot \beta^n u[n] + \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \alpha^n u[n]$$

Exemplo 3 (slides) (rap 62)

$$u[n] = \alpha \cdot u[n], \boxed{h[n] = \alpha^n u[n]} \rightarrow y[n]$$

$$X(n) = H(n) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-jn}}$$

$$Y(n) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-jn}} \right)^2$$

Usa pedimos ir pelo método dos coeficientes indeterminados para

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{A}{1-\alpha} + \frac{B}{(1-\alpha)^2}$$

para obtemos um

$y(n)$ com sua
expressão ao quadrado
temos que devolver o $x(n)$

temos ter o
mesmo problema

$$\text{caso: } u \cdot u[n] \leftrightarrow j \frac{dX(n)}{dn}$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-jn}} \right) = -\frac{(-\alpha(-j)e^{-jn})}{(1 - \alpha e^{-jn})^2} = \frac{-\alpha j e^{-jn}}{(1 - \alpha e^{-jn})^2}$$

$$j \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-jn}} \right) = \frac{\alpha e^{-jn}}{(1 - \alpha e^{-jn})^2} \quad \text{pois } -j = \frac{1}{j} \quad (j^2 = -1)$$

podemos concluir que

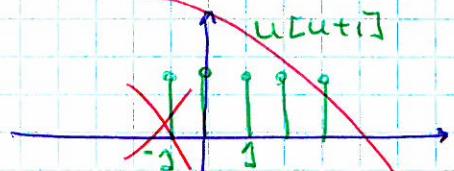
$$u \cdot a^n u[n] \leftrightarrow \frac{a e^{-jn}}{(1 - a e^{-jn})^2}$$

anidir
pla

$$u \cdot a^{n-1} u[n] \leftrightarrow \frac{e^{-jn}}{(1 - a e^{-jn})^2} \rightarrow \begin{array}{l} \text{diz q n este T-F} \\ \text{esta atrasada} \end{array}$$

$$(u+1) a^{n+1-1} u[n+1] \leftrightarrow \frac{e^{-jn}}{(1 - a e^{-jn})^2} \times e^{jn}$$

$$\cancel{(u+1)} a^n u[n+1] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - a e^{-jn})^2}$$



$$\therefore (u+1) a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - a e^{-jn})^2}$$

pl causa do $(u+1)$
pois quando $u = -1$ vai
causar a fup

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

$$y[n] = h[n - n_0]$$

$$h[n] \longleftrightarrow X(n)$$

$$h[n - n_0] \longleftrightarrow X(n) e^{-jn_0}$$

• Sistemas discretos LTI e eq-diferença

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y[n - n] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h[n - n]$$

$$a[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

Exemplo para $\begin{cases} N=2 \\ M=2 \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{2} a_n y[n - n] = \sum_{n=0}^{2} b_n h[n - n]$$

Notas
y[n]

$$(1) a_0 y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 h[n] + b_1 h[n-1] + b_2 h[n-2]$$

$$\text{T.F. } \downarrow a_0 Y(n) = -a_1 Y(n) e^{-jn} - a_2 Y(n) e^{-2jn} + b_0 X(n) + b_1 X(n) e^{-jn} + b_2 X(n) e^{-2jn}$$

$$\Rightarrow Y(n) [a_0 + a_1 e^{-jn} + a_2 e^{-2jn}] = X(n) (b_0 + b_1 e^{-jn} + b_2 e^{-2jn})$$

$$H(n) = \frac{Y(n)}{X(n)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-jn} + b_2 e^{-2jn}}{a_0 + a_1 e^{-jn} + a_2 e^{-2jn}}$$

Exemplo (slides) (Cap. 6.3)

$$\text{T.F. } \downarrow y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n]$$

$$Y(n) \left(1 - \frac{3}{4} e^{-jn} + \frac{1}{8} e^{-2jn} \right) = 2X(n)$$

$$H(n) = \frac{Y(n)}{X(n)} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-jn} + \frac{1}{8} e^{-2jn}}$$

eq. de 2º grau em e^{-jn}

$$\text{onde } e^{-jn} \rightarrow \omega$$

$$a\omega^2 + b\omega + c$$

Notas

$$\begin{aligned} &= (\omega^2 + a\omega + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\omega - c)(\omega - d) \end{aligned}$$

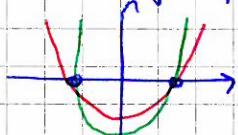
$$\frac{1}{8}\omega^2 - \frac{3}{4}\omega + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 - 6\omega + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = 4 \vee \omega = 2$$

obteremos
as suas raízes
depois somar e multiplicar
por 2



As raízes são -2 e 4,
então mas $\omega \in \mathbb{R}$
a unica função

$$H - \omega \omega = 0 \rightarrow (\omega - 4)(\omega - 4)$$

$$\text{Colo } R = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8}b^2 - \frac{3}{4}b + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{8}(b-4)(b-2)$$

$$1 - \frac{3}{4}e^{-jn} + \frac{1}{8}e^{-jn} \Rightarrow \frac{1}{8}(e^{-jn}-4)(e^{-jn}-2)$$

para kcan ua formula $a e^{-jn} - 1$

$$= \left(\frac{e^{-jn}}{4} - 1 \right) \left(\frac{e^{-jn}}{2} - 1 \right)$$

para kcan ua formula $1 - a e^{-jn}$

$$= \left(1 - \frac{e^{-jn}}{4} \right) \left(1 - \frac{e^{-jn}}{2} \right)$$

$$H(n) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn} \right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-jn} \right)}$$

Agora tem-se que expandir em fracc panceis

$$H(n) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn} \right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-jn} \right)} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}e^{-jn}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}}$$

$$A = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}} \Big|_{e^{-jn}=4} = \frac{2}{1-2} = -2$$

↑ valor q calcula

$$B = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-jn}} \Big|_{e^{-jn}=2} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

$$H(n) = \frac{-2}{1 - \frac{1}{4}e^{-jn}} + \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}}$$

$$a^4 u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-jn}} \quad (a < 1)$$

$$h[n] = -2 \left(\frac{1}{4} \right)^n u[n] + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n]$$

Exemplo (slides) (Dirac p.64)

$$u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow H(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}}$$

$$(u+i) \alpha u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{(1-\alpha e^{-jn})^2}$$

$$(e[n] = (u+i)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]) \Rightarrow X(n) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn}\right)^2}$$

$$Y(n) = X(n) \cdot H(n)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn}\right)^2}$$

$$Y(n) = \frac{A}{\frac{1}{2}e^{-jn}} + \frac{B}{\frac{1}{4}e^{-jn}} + \frac{C}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn}\right)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}e^{-jn}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-jn}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn}\right)^2} = \frac{A\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn}\right)^2 + B\left(1 - \frac{1}{2}e^{-jn}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn}\right) + C\left(1 - \frac{1}{2}e^{-jn}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-jn}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn}\right)^2}$$

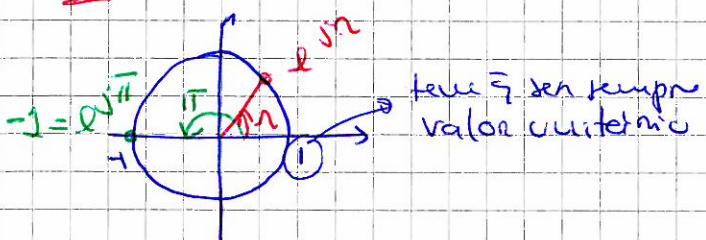
$$1 = A\left(1 - \frac{1}{2}e^{-jn} + \frac{1}{16}e^{-2jn}\right) + B\left(\frac{1}{4}e^{-jn} + \frac{1}{8}e^{-2jn}\right) + C\left(\frac{1}{2}e^{-jn}\right)$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ \frac{A}{2} - \frac{3B}{4} - \frac{C}{2} = 0 \\ \frac{A}{16} + \frac{B}{8} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C=1+B \\ B - \frac{3B}{4} - \frac{(1+B)}{2} = 0 \\ B = -\frac{A}{2} \Rightarrow A = -2B \end{cases} \quad \begin{cases} C=-1 \\ 4B - 3B - 2 - 2B = 0 \Rightarrow B = -2 \\ A = 4 \end{cases}$$

$$Y(n) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}} + \frac{-2}{1 - \frac{1}{4}e^{-jn}} + \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-jn}\right)^2}$$

$$y[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \{(u+i)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\}$$

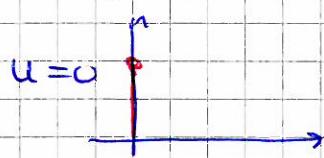
Notes



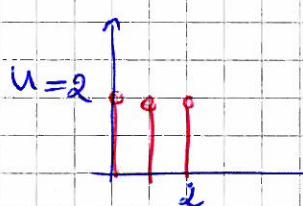
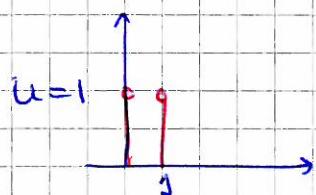
Considera o sistema LPI discreto caracterizado pelo seguinte egrap de diferenças

$$y[n] = \sum_{i=0}^4 \delta[i] \quad \forall n \geq 0$$

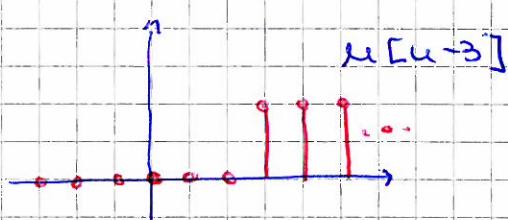
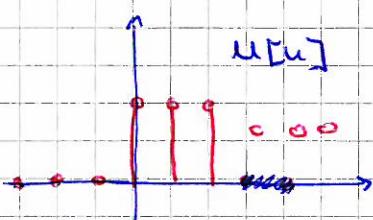
Det. a resp. deste sistema ao impulso



$$\mathcal{U}[u[n]] \leftrightarrow \frac{1}{1-a e^{-jn}}$$



→ posto escreverlo caindo tendo
 $\downarrow u[n] - u[n-3]$



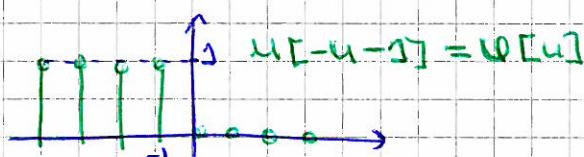
$$\text{T-F de } u[n] \text{ é qd } a=1 \quad u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-jn}}$$

$$y[n] = u[n] - u[n-4]$$

$$Y(n) = \frac{1}{1-e^{-jn}} - \frac{1}{1-e^{-jn}} \cdot e^{-jn(4,-1)} = \frac{1}{1-e^{-jn}} \left(1 - e^{-jn(4,-1)} \right)$$

Exercício 2 (slides) (Diap 65) → parte da resolução

$$(-1)^n = (-1)^n \cdot u[n] + (-1)^n u[-n-1]$$



$$1 \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-jn}}$$

$$x(n) = \sum_{u=-\infty}^{-1} u[n] e^{-jnu}$$

O somatório é igual de -1 a $-\infty$
 e de 0 a $+\infty$ e trocam o sinal
 da exponencial

$$= \sum_{u=1}^{+\infty} 1 \cdot e^{-jnu}$$

pla estan ua função de progressão geométrica

$$= \frac{1}{1-e^{-jn}} = \sum_{u=0}^{+\infty} e^{jnu}$$

pla x pedem por $u=0$

$$(-1) u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j(n-\pi)}}$$

$$y[n] = (-1)^n \cdot u[n] \leftrightarrow Y(n) \underset{=} {=} e^{j\pi n} \cdot u[n]$$

pla estan ua função

de progressão geométrica

$= \sum_{u=0}^{+\infty} u[n] \cdot e^{-j(n-\pi)u}$

$$= X(n-\pi)$$

$$= -1 + \frac{1}{1-e^{j\pi}}$$

$$= \frac{-1 + e^{-j\pi} + 1}{1-e^{j\pi}}$$

$$= \frac{1}{e^{j\pi} - 1}$$

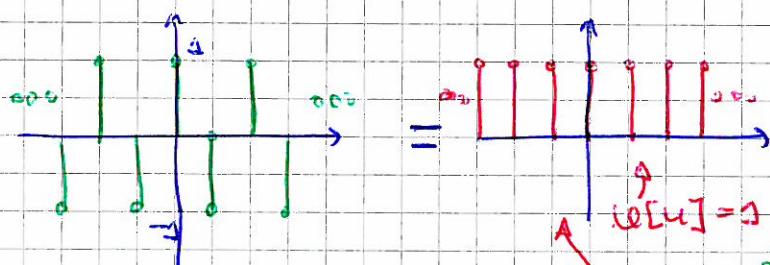
$$= -\frac{j}{1-e^{j\pi}}$$

$$\mathcal{U}[n-1] \longleftrightarrow -\frac{j}{1-e^{j\pi}}$$

$$(-1)^4 \mathcal{U}[n-1] \longleftrightarrow -\frac{j}{1-e^{-j(2\pi-\pi)}}$$

fórmula mais simples de resolver

$$(-1)^n = (-1)^n \mathcal{U}[n] + (-1)^n \mathcal{U}[n-1]$$



$$(-1)^n = (-1)^n \cdot 1 \rightarrow 2\pi\delta(n-\pi)$$

~~seus de cima~~

$$\underbrace{\mathcal{U}[n] + \mathcal{U}[n-1]}_{=1} \longleftrightarrow 2\pi\delta_n$$

$$\leftrightarrow 2\pi\delta(n) = x(n)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} x(n) e^{jn} dn$$

prova
a T.F.
 $v[n] = 1$
 $\delta(n)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} 2\pi\delta(n) e^{jn} dn$$

$$= e^{j2\pi jn} = 1$$

a partir
daqui multiplicam
os valores da
1 e -1

valores seio
alternados

$$(-1)^n \cdot v[n] = (-1)^n \cdot 1 \rightarrow 2\pi\delta(n-\pi)$$

Seundo $(-1)^n \cdot v[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X(n-\pi)$ a fórmula de traçar os valores
alternados a $2\pi\delta(n)$ é multiplicado por $(-1)^n$, entao
 $X(n) = 2\pi\delta(n) \times \text{tracar fórmula } (e^{-j2\pi n}) = 2\pi\delta(n-\pi)$

MATLAB

guardar seu : $u = \text{WavRecord}([16000, 8000])$

$\underbrace{16000}_{N}$ $\underbrace{8000}_{\text{frequência}}$

u de amostras que se quer recolher

$\text{plot}(u)$

Reproduzir seu : $\text{sound}(u(1:3000), 8000)$

$\underbrace{u(1:3000)}_{\text{amostras 1 até 3000}} \quad \underbrace{8000}_{\text{frequência}}$

As ten só uma letra (neste caso A)

Calcula-se a seguir a T.F

$f_x = \text{abs}(\text{fft}(u(1:3000)))$

figure

$\text{plot}(u)$

espetro \rightarrow temos os fôneantes

\hookrightarrow mas alter freq. \bar{u} aparece quase nenhuma

Se querer mais saber a freq. do pico

\hookrightarrow pela func max do matlab \rightarrow Dá-nos a freq. a q̄ ocorre o pico

T.F corresponde a metade de freq. de amostragem

Um tom só consegue fazer p/ 3 fôneantes \rightarrow 3 picos

$[Y, I] = \text{max}(u)$

\uparrow valor do pico \uparrow valor do índice

\Rightarrow valor p/ o qual ocorreu max

Só vai interessar o valor de I

$[Y, I] = \text{max}(f_x(i:750))$ $\underbrace{\text{metade}}$

750 \rightarrow 4000/2

max \rightarrow u

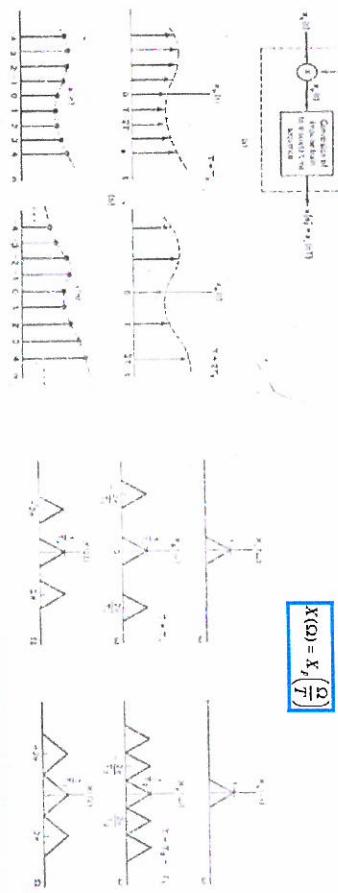
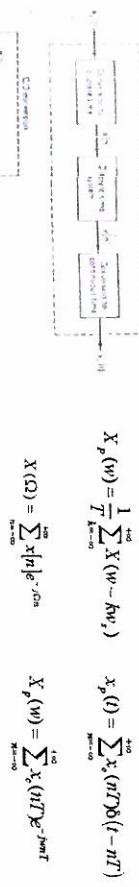
177 é valor de I

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- Processamento Digital de Sinais Contínuos

- Exemplo:

Considere o sistema de processamento de sinal representado na figura seguinte:



80

Processamento de Sinal | Carlos Lobo | DEI | Universidade do Minho

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

a) $T_0 < \frac{\pi}{w_M} \Rightarrow w_0 > 2w_M$

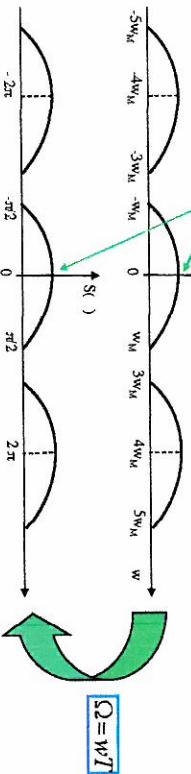
b) $S_c(t) = x(t-T_0) + x(t+T_0)$

$\xrightarrow{\text{T. F.}}$ $S_c(w) = e^{-jwT_0} X(w) + e^{jwT_0} X(w) = ... = 2 \cos(wT_0) X(w)$

$T = T_0 \quad \xrightarrow{\text{ }} S_c(w) = 2 \cos\left(\frac{wT}{2w_M}\right) X(w)$

Pelo teorema da amostragem $S_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_c(w - kw_0)$

$\Omega = wT$



Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

c)

$$S_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} S_c(w - kw_0) = ... = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} [2 \cos(jw - 2wk) X(w - kw_0)] = \frac{2}{T} \cos(wT) \sum_{k=0}^{\infty} X(w - kw_0)$$

$$S(\Omega) = S_p\left(\frac{\Omega}{T}\right) = \frac{2}{T} \cos(\Omega) \sum_{k=0}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right)$$

d) Para que $x(t)$ seja recuperado $y[n] = x(nT)$

$$[y[n]] = S_p(nT) = x(nT - T_0) + x(nT + T_0)$$

$$[y[n]] = x((n-1)T) + x((n+1)T)$$

$$\begin{cases} y[n-1] = x((n-1)T) \\ y[n+1] = x((n+1)T) \\ y[n-1] + y[n+1] = s[n] \end{cases}$$

$\downarrow \text{T. F.}$

$$S(\Omega) = Y(\Omega) e^{-j\Omega} + e^{j\Omega} = Y(\Omega) 2 \cos(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{S(\Omega)} = \frac{1}{2 \cos(\Omega)}$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega) S(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right)$$

$$A = T = \frac{\pi}{2w_M}$$

82

Processamento de Sinal | Carlos Lobo | DEI | Universidade do Minho

- d) Sabendo que se deseja um filtro digital $[h[n]]$ tal que $y[n] = x(nT)$ (ou $y[n-1] = x((n-1)T)$, ...) determine a equação de diferenças do filtro e a sua resposta em frequência $H(\Omega)$.
- e) Represente $Y(\Omega)$ e diga qual deverá ser o ganho A do filtro passa-baixo ideal de forma que $y_c(t) = x(t)$.



81

Processamento de Sinal | Carlos Lobo | DEI | Universidade do Minho

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

• Amostragem no Domínio das Frequências

- Se conhecermos um sinal $x(t)$ através de $X(w)$ em que condições podemos representar o sinal por amostras de $X(w)$.

$$\tilde{X}(w) = X(w)P(w) = \sum_{k=0}^{\infty} X(kw_0)\delta(w - kw_0)$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_m)$$



$$W(w) = 2\pi \sin c\left(\frac{w}{w_0}\right)$$



$$\begin{aligned} \text{T.F. } & p(t) = \frac{1}{w_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi}{w_0} k\right) \\ \text{T.F. } & \tilde{X}(t) = \frac{1}{w_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(kw_0\right) \delta\left(t - \frac{2\pi}{w_0} k\right) \\ X(w) & = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kw_0) \sin c\left(\frac{w - kw_0}{w_0}\right) \end{aligned}$$

Processamento de Sinais

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

SS

Processamento de Sinais

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- Recuperação do sinal através das suas amostras



$$\text{T.F. } h[n] = \frac{N\Omega_c}{2\pi} \sin c\left(\frac{\Omega_c}{\pi} n\right)$$

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta\left(n - k\frac{N}{\Omega_c}\right)$$



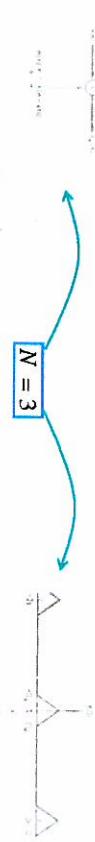
$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\tilde{x}[n] = x[n] * p[n] = \dots = \frac{N}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta\left(n - k\frac{N}{\Omega_0}\right)$$

$$x[n] = 0 \iff n < 0, n > N-1$$

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

• Amostragem de Sequências



$$P(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\Omega - k\Omega_r)$$

$$X_r(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\Omega - k\Omega_r)$$



$$\begin{aligned} x_r[n] &= x[n]\delta[n - N] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\delta[n - kN] \end{aligned}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\delta[n - kN]$$

$$\Omega_r = \frac{2\pi}{N}$$

$$\tilde{x}[n] = x[n] * p[n] = \dots = \frac{N}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta\left(n - k\frac{N}{\Omega_r}\right)$$

Processamento de Sinais

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

SS

Processamento de Sinais

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

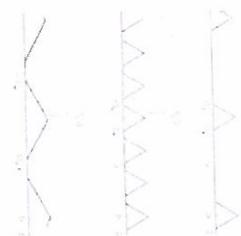
- Decimação e Interpolação de Sequências

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x_d[n] N^{-\Omega n}$$

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}\Omega n} = X_p\left(\frac{\Omega}{N}\right)$$



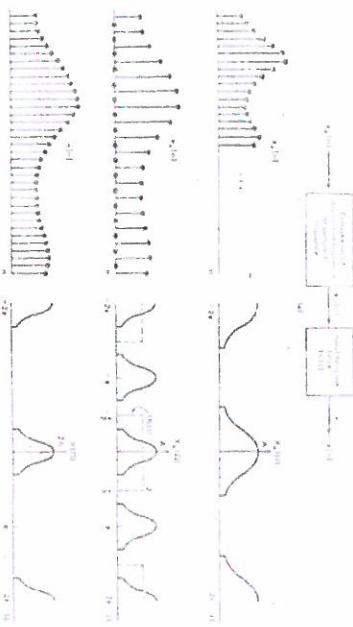
$$x_d[n] = x_p[nN] = x_p[n]$$



Processamento de Sinal | Cátia Lima (DEI/Universidade do Minho)

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- **Interpolação:** Processo inverso da decimação e corresponde a aumentar a frequência de amostragem de um sinal. A sequência $x_p[n]$ é interpolada com zeros sendo a sequência interpolada $x[n]$ obtida por filtragem passa-baixo.



Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- Principal Aplicação: Transmodulação ou transmultiplexagem

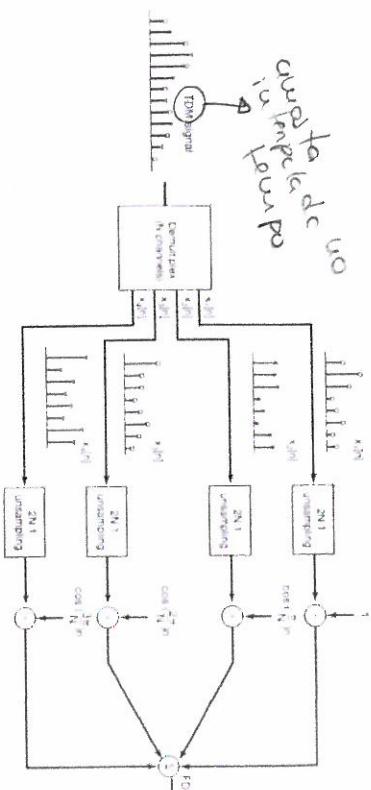
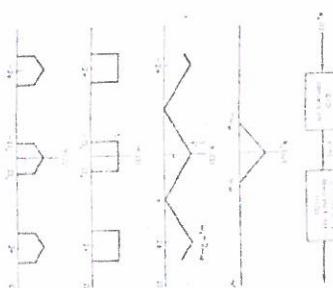


Figure B.44 Block diagram for TDM-M-to-FDM upconversion

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

A decimação corresponde a diminuir a frequência de amostragem, tendo só utilidade efectiva se um sinal foi amostrado a uma taxa maior que a taxa de Nyquist. No entanto se um sinal foi amostrado à taxa de Nyquist e a sua largura de banda foi reduzida por um filtro discreto a sua frequência de amostragem pode ainda ser reduzida por decimação.



Processamento de Sinal | Cátia Lima (DEI/Universidade do Minho)

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- **Problemas para resolução em casa**

- 1) Considere o exemplo da pág. 84 onde agora o sinal $x(t)$ se apresenta degradado à entrada do sistema da forma $s_c(t)=x(t)+cx(t-T_0)$. Resolva todas as alíneas excepto a c).
- 2) Para o mesmo exemplo suponha agora que $\pi/w_M < T_0 < 2\pi/w_M$. Determine o período de amostragem, o ganho do filtro passa-baixo e a resposta em frequência do filtro digital que permitem a recuperação de $x(t)$.

$$f(x) = f(x)$$

$f_x(177) = 0$; \leftarrow fazendo o pico a zero no f_x .

e afrom juntar de outra vez o $\max(f_x)$ e saberai o segundo \max e assim sucessivamente ate ao 3º pico.

Relatório:

- * Reclamam os bairros para as outras variáveis muito c/ a fomeia como se diz e pela pessoa q diz
- * Estudo prévio das sons (das vogais e das consoantes)
- * p̄ q̄ ī trabalhamos as consoantes
- * estudam a variabilidade da estrutura harmonica com as palavras
- * Análise de fomeia como o éfectuado a produzir

$$[y, i] - \max(f_x(1:1000))$$

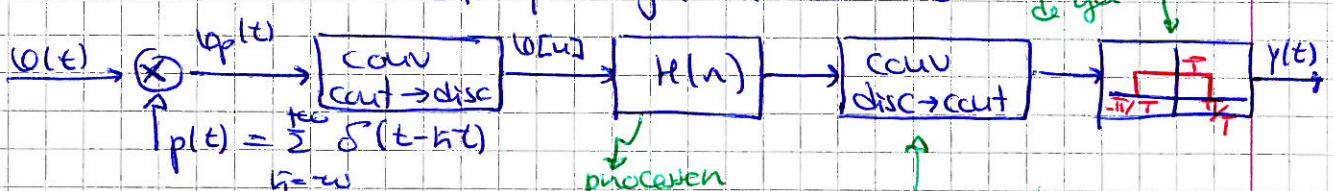
$$f_x = \text{abs}(fft((0:8000))) \quad fft \rightarrow \text{haar}. \text{fones}$$

\hookrightarrow passa as amplitudes plena do sinal do fone

Aleatorização (usar frequências e de sequências)

Processamento digital de sinais (aleatorizar)

Se tivermos um sinal que seja amostrado



$u_p(t) \rightarrow$ sinal
depois
de amostrado $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$

corresponde a
impulsos plena
variação da altura
do impulso

corresponde a
cada área dos impulsos ver \downarrow

$\downarrow (\text{conv. cut} \rightarrow \text{disc})$



Exemplo Inap. 01

Sinal é degradado.

Pode-se → sinal de um vento adiante e retardo do sinal

$T_0 \rightarrow$ atraso do sinal

$\omega_n \rightarrow$ componente max. e velocidade angular

a) Teorema de Nyquist $\rightarrow f_s > 2f_n$ (placar haja altares)

↓
freq. de amostragem deve ser $\omega_m > \omega_n$ (a degradação de sinal)

$$\frac{2\pi}{T} > 2\omega_n \quad (\text{expressão feita para placa de amostragem})$$

$$\Rightarrow T \leq \frac{\pi}{\omega_n} \rightarrow \text{placar haja altares}$$

$$\text{caso } T_0 < \frac{\pi}{\omega_n} \quad (\text{devido ao problema})$$

$$\text{Se usarmos } T = T_0 \Rightarrow T < \frac{\pi}{\omega_n} \leftarrow \text{Cumpre a condição } T \leq \frac{\pi}{\omega_n}$$

↓
placar haja altares

T_0 pode ser período de amostragem

$$b) T = T_0 = \frac{\pi}{2\omega_n}$$

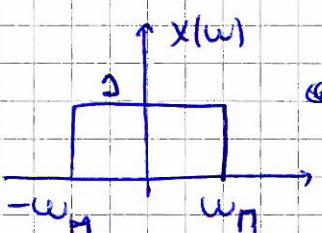
$$S_c(\omega) = T \cdot \mathcal{F}\{S_c(t)\}$$

caso

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ x(t-t_0) &\leftrightarrow X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} + X(\omega) \cdot e^{j\omega t_0} \\ &= X(\omega) (e^{-j\omega t_0} + e^{j\omega t_0}) \quad \text{caso } \cos \alpha = \frac{e^{-j\omega t_0} + e^{j\omega t_0}}{2} \\ &= X(\omega) \cdot 2 \cdot \cos(\omega t_0) \end{aligned}$$



$x(t)$ é sempre igual a 1 entre $-w_n$ e w_n

$$S_C(\omega) = 2 \cos(\omega t_0)$$

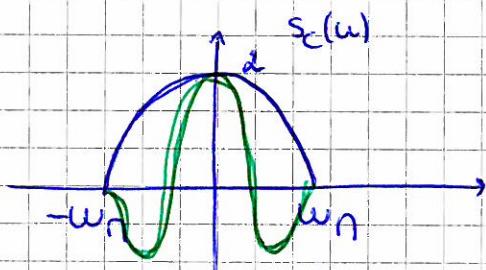
para se saber o valor de α em $2\cos(\alpha)$) = w_1

$$\omega_{T_0} = \omega_n \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_n} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{qd de chegar a } w_1 \text{ o } \forall i \in \{1, 2\} \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{então } w_1 = 2\cos(w_1) = 0$$

↓ logo cos vai desde 1 e desce ate zero

fonuc
connecte
activi



a sebenő
de cis pris
benzinbenz

Los se
saben
a acabar
en un

fracciones a se bajar
o vi de tener q
contarlos ahi won

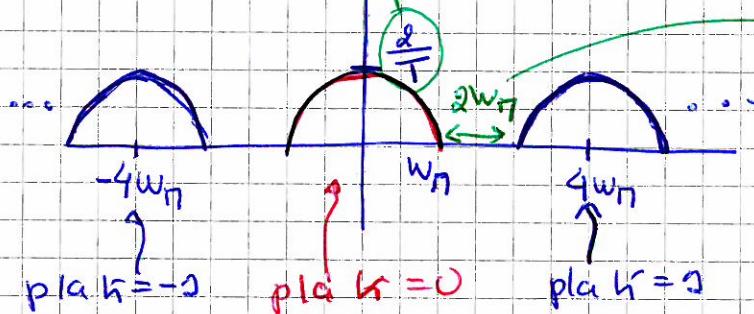
$$S_p(t) = S_c(t) \cdot p(t) \longleftrightarrow S_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} [S_c(\omega) * P(\omega)]$$

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\phi) \frac{e^{j\omega\phi}}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{\left(\omega - \frac{k2\pi}{T}\right)} d\phi$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[f_c(\omega) \delta\left(\omega - \frac{k2\pi}{T} - \phi\right) d\phi \right]$$

$$\text{qd } f(\dots) = 1 \Rightarrow 0 = \omega - \frac{\hbar 2\pi}{T}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} S_C \left(\omega - \frac{h2\pi}{T} \right) \leftarrow \text{espectro centrado en } \frac{h2\pi}{T}$$

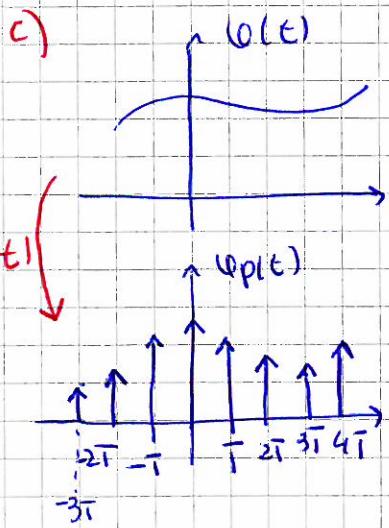


$$\frac{-2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad T = \frac{\pi}{\omega_0}$$

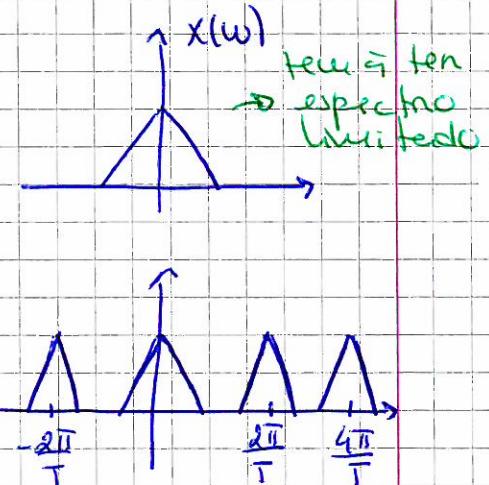
• hic un dependencia
de bernde

परिवर्तन
o दब्बा नहीं
असुधा।

↓
peix uterino
o útero de
freg. de Myrist

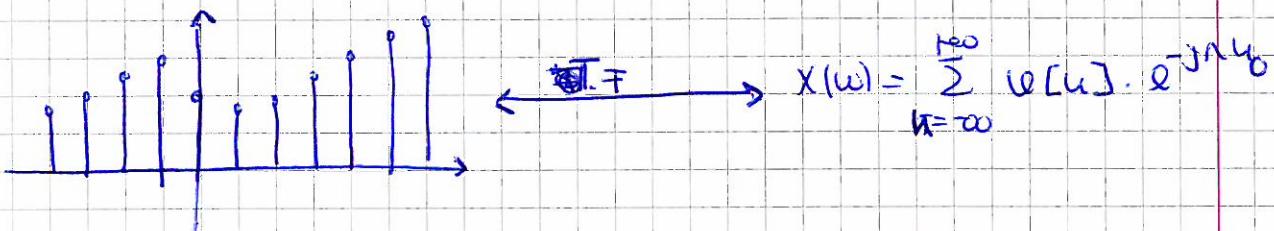


$$\text{Pfa um gg } v(t) \xleftarrow{T.F} X(w)$$



inschrijfay

$$X_p(w) = \frac{1}{2\pi} (X(w) * P(w)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\phi) \cdot P(w-\phi) d\phi = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(w - \frac{k2\pi}{T}\right)$$



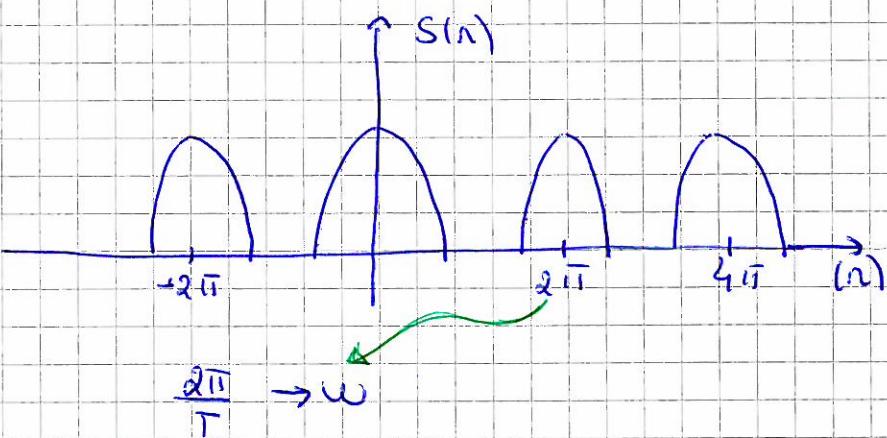
$$v[n] = v_p(nT) = v_c(nT)$$

~~Periodenverdeelde opname R=omega_0 T (1/T * X_p(k))~~

$n_T = \omega_0 T$ vandaar quando $n = wT$, $X(n) = X_p(w)|_{n=wT}$

↓

$$X(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v[n] e^{-jn\omega_0 T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_c[n] e^{-jn\omega_0 T} \quad \text{vs} \quad X_p(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (v_c(nT)) e^{-jn\omega_0 T}$$



$$\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{T} \rightarrow n = wT$$

$$X(n) - X_p(\omega) \Big|_{n=\omega\bar{i}} \Rightarrow S(n) - S_p(\omega) \Big|_{n=\omega\bar{i}}$$

$$S_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_c \left(\omega - \frac{k2\pi}{T} \right)$$

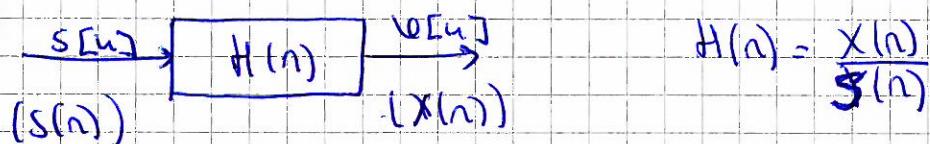
$$\text{caso } S_c(\omega) = 2\cos(\omega\bar{i}) \cdot X(\omega)$$

$$\begin{aligned} \text{então } S_p(\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\cos \left[\left(\omega - \frac{k2\pi}{T} \right) T_0 \right] \cdot X \left(\omega - \frac{k2\pi}{T} \right) \\ T &= T_0 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\cos \left(\omega\bar{i} - k2\pi \right) \cdot X \left(\omega - \frac{k2\pi}{T} \right) \\ &\quad \text{(cos } k2\pi \text{ p} \rightarrow \text{ pla constante)} \\ &\quad \text{Valor de } k \text{ varia de } 0 \text{ a } \infty \\ &\quad 0 \nrightarrow \text{dd o mesmo valor} \\ &= \frac{2}{T} \cos(\omega\bar{i}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X \left(\omega - \frac{k2\pi}{T} \right) \end{aligned}$$

$$S(n) = S_p(\omega) \Big|_{n=\omega\bar{i}}$$

$$\begin{aligned} \therefore S(n) &= \frac{2}{T} \cos \left(\frac{n}{T} \cdot T \right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X \left(\frac{n}{T} - \frac{k2\pi}{T} \right) \\ &= \frac{2}{T} \cos(n) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X \left(\frac{n-k2\pi}{T} \right) \end{aligned}$$

d)



$$S_c(t) = \psi(t-T_0) + \psi(t+T_0) \xrightarrow{T=T_0} \psi(t-T) + \psi(t+T)$$

$$S[u] = S_c(u\bar{i}) = \psi(u\bar{i}-\bar{i}) + \psi(u\bar{i}+\bar{i})$$

$$S S_c \left(\frac{u\bar{i}}{T} \right) = \psi \left(\frac{u\bar{i}-\bar{i}}{T} \right) + \psi \left(\frac{u\bar{i}+\bar{i}}{T} \right) = \psi[u-1] + \psi[u+1]$$

Ou seja, discrete signal permite $\bar{i} = T_0 = T$ ou $\bar{i} \nrightarrow$ dd!

$$S(t) = \psi(t-\bar{i}) + \psi(t+\bar{i})$$

O que é um discrete dd!

$$S(t) = \psi[u-1] + \psi[u+1] = S[u]$$

$$\text{caso } \begin{cases} \psi[n] & \xleftarrow{} X(n) \\ \psi[n-1] & \xrightarrow{} e^{-jn\omega} X(n) \end{cases}$$

$$\text{entonces } S[n] = \psi[n-1] + \psi[n+1] \longleftrightarrow S(n) = X(n) (e^{-jn\omega} + e^{jn\omega}) \\ = 2\cos(\omega n) \cos(\omega)$$

$$\text{o sea } S(n) = \frac{2}{T} \cos(\omega n) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(n - 2\pi k \frac{T}{\omega}\right) \Big|_{k=0} = 2X(n) \cos(\omega n)$$

$$H(n) = \frac{X(n)}{S(n)} = \frac{X(n)}{2X(n) \cdot \cos(\omega n)} = \frac{1}{e^{-jn\omega} + e^{jn\omega}} = \frac{Y(n)}{S(n)}$$

$$Y(n) \cdot [e^{-jn\omega} + e^{jn\omega}] = S(n)$$

$$\Rightarrow Y[n-1] + Y[n+1] = S[n]$$

2 hipótesis:

- $S = 0 \Rightarrow Y[n+1] = \psi[n] - Y[n-1]$

- $S = 0 \Rightarrow Y[n-1] = \psi[n] - Y[n+1] \Rightarrow$ No causal!
pueden chegar a un valor de u futuro q
saben valores futuros!
Logo vira a 1^o hipótese.

Desarrollando una
verdade $\rightarrow Y[n] = \psi[n-1] - Y[n-2]$

No matlab chutar qual atuado põe testar propriedade
da

$$\psi[n] = \psi[n-1] + \psi[n+1] \quad (\text{correspondido ao sinal degradado
do problema})$$

for i=2 : length(ψ) - 1
 $\psi1(i) = \psi(i-1) + \psi(i+1);$
 end

como sinal se for deslocado uma
unidade e i se fez no par o saido
vai砌tate a diferença. Deslocamento
de fato vira el resultado.

for i=1001 : length(ψ) - 1001
 $\psi1000(i) = \psi(i-100) + \psi(i+100);$
 end

com 1000 laí se nota q o que
diz laí variava no sinal.
Desliza uma espécie de eco

com $Y[n] = \psi[1000][n-1000] - Y[n-2000]$ permite recuperar o
sinal original

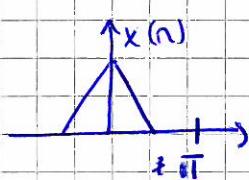
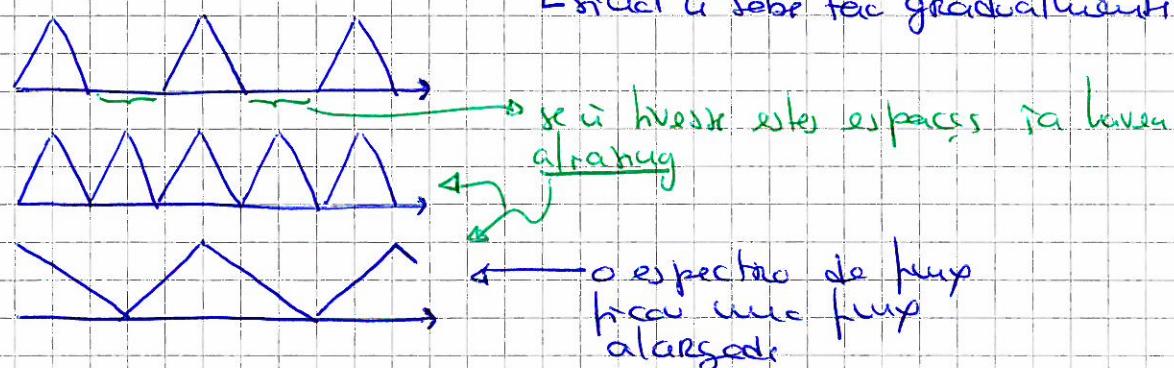
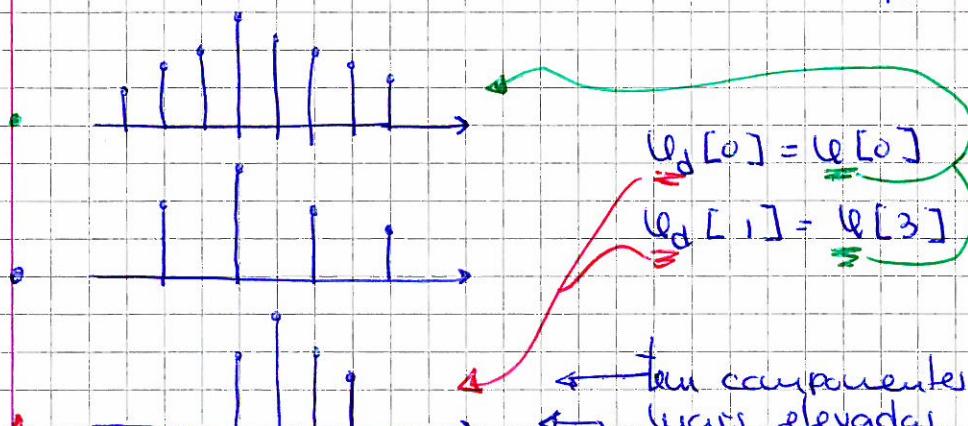
for i=2001 : length(ψ1000)
 $\psi(i) = \psi1000(i-1000) - Y(i-2000)$
 end

→ recupera de "eco" uas muitas
ridas uas

$$X_d(n) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} v_p(N) e^{-j n N}$$

u.v.

$$X_d(n) = \sum_{N=0}^{+\infty} v_p(N) e^{-j n N} = X_p|_{N \geq 0}$$

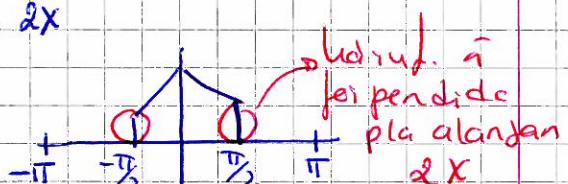


\Rightarrow comparten pl.
un factor de 2

\Rightarrow pl. ocupan menos
memoria a gravado

N varia igual a 2
e o espetro vai alargando ΔX

1º temos a filtrar o sinal

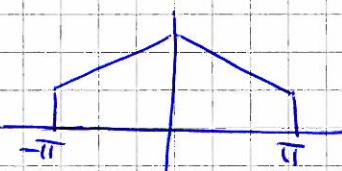


2º for i = 0 : length(v) / 2
 $v_d(i) = v(2+i)$

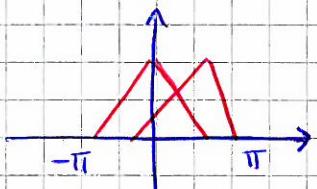
unica maneira de
Recuperar

end

resulta



Se tiver de filtrar o sinal e de comecar logo pelo p^{to} 2 ramos obter



→ ramos tem a selva p^{to} a p^{te}

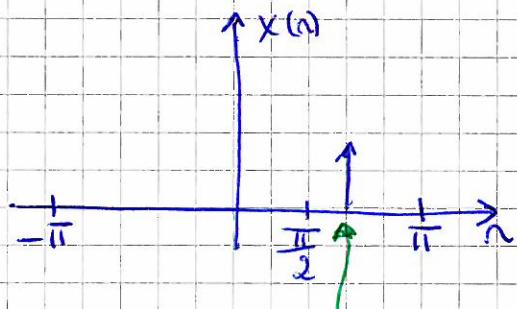
↑ a rif. alta freq. sup. sobreposta c/
" " baixa "

↳ sinal concurrido

Transmودify → de um sinal longo (na largura de banda) e per. nos tempos pla um sinal longo nos tempos e de per. banda de freq.

Interpolation → processo inverso da decimify

MATLAB



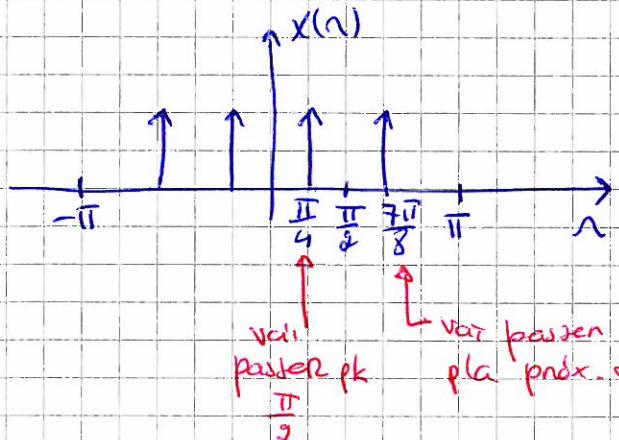
quero conter alguma

↓ colocar componente acima
de $\frac{\pi}{2}$ → q factor 2

vari passen p/ a
acima de π

põe uma componente
de baixa freq.

tem q ser p/ a prox. de π → pla dps prox. de 2π



→ temos representados 2 cos

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}n\right)$$

1º gerar ou $\sqrt{n/p}$ les

$u: 1 : 1 : 1000;$

2º gerar funç

$$x = \cos\left(\frac{u\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}u\right);$$

○ tentar a fft e pra verificar q temos os 4 traços

$$fx = \text{abs}(\text{fft}(u))$$

valor absoluto de fft

$$4^{\text{a}} \text{ plot}(fx) \rightarrow 0 \leq \text{var} \leq 500$$

valores variam entre 0 e 500

NOTA:

x é filtrado a fft(x).

for i=1 : length(u)/2 → p → var grande c/ pesos metade das amostras
y(i) = u(2*i);
end

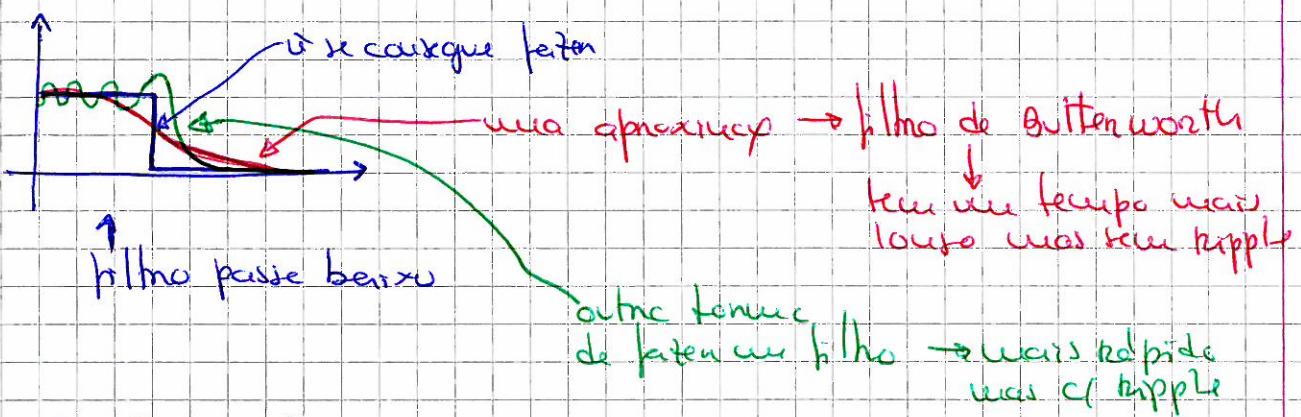
$$fy = \text{abs}(\text{fft}(y));$$

subplot(2, 1, 2), plot(fy)
" " (2, 1, 1), " "(fx)

O q é esteve em 125 mantém-se

e a em 500 desaparece → tem plas baixas freq.

crescente mas compeente
às alturas



5º ~~Adicione~~ filtro

$$[B, A] = \text{Butter}(N, w_n)$$

coeficiente an
orden do filho
coeficiente bn

entre $0 < w_n < 1$
corresponde à metade das amostras
($\frac{1}{2}$ plas II → 0.5)

qtd maior mais rap. desce

$$H(n) = \frac{Y(n)}{X(n)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-jn} + b_2 e^{-2jn} + \dots}{a_0 + a_1 e^{-jn} + a_2 e^{-2jn} + \dots}$$

$B, A = \text{buffer}(8, 0.5)$

6º Verificar as freq.

$\text{freq}(B, A) \rightarrow$ devo dar diagrama de blocos

Resposta aproximada, bairros

↳ se fosse uma rede iria filtrar o sistema iria alterar
o sinal → através todos os componentes
do sinal o mesmo valor

7º Aplicar filtro ao sinal

$$y = \text{filter}(B, A, x)$$

sinal
filtrado

↙
 x filtrado

$$x_f = \text{filter}(B, A, x);$$

Algumas freqs geradas alguns

$$fx_f = \text{abs}(\text{fft}(x_f)); \rightarrow \text{fft do } x_f$$

plot(fx_f)

↓
apenas termos em $\frac{\pi}{4}$ → desapareceu
o outro → fez
(prox. de π) → eliminado
pelo filtro

8º Descrever sobre o sinal filtrado

for i = 1 : length(u)/2

$$y_f(i) = x_f(2*i);$$

end

$$fy_f = \text{abs}(\text{fft}(y_f));$$

subplot(2, 1, 1), plot(fx_f)

"(2, 1, 2), "fy_f) → a freq aumentou

para o dobro

→ não aparece os componentes do sinal perto de π

↳ π é a metade ($\pi = 180^\circ$)

Notas:

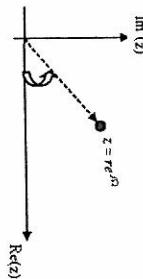
$\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$ altas freqs.

$0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ baixas freqs.

Transformada Z

- Definição

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$



$$X(re^{\imath\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_n] r^{-n}$$

A transformada-Z converge ou não dependendo de $|r|$ (amplitude de Z). Logo associada à transformada-Z existe o conceito de região de convergência (ROC).

A transformada de Fourier de uma sequência converge ou não converge independentemente de qualquer parâmetro.

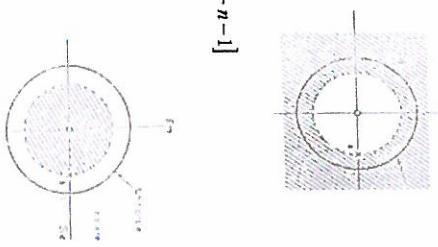
Uma sequência não fica unicamente determinada por $X(z)$ sendo necessário especificar a ROC.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \dots = \frac{z}{z-a}$$

Exemplo 2: Calcule a transformada-z de $x[n] = |z|^n$

$$ROC \equiv |z| > |a|$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = \dots = \frac{z}{z-a}$$



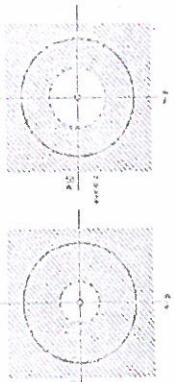
Transformada Z

- Exemplo 3:** Calcule a transformada-z de

卷二

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n] \right] z^{-n} = \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1} \right)^n = \dots = 2 \left(\frac{z - \frac{5}{12}}{z - \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{z - \frac{1}{3}}{z - \frac{1}{2}} \right)$$

$$ROC = |z| > \frac{1}{2} \wedge |z| > \frac{1}{3}$$



Transformada Z

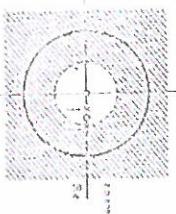
- Propriedades da ROC da Transformada-Z

- 1. A ROC de $X(z)$ é um anel no plano-z centrado na origem
 - 2. A ROC não contém pólos.
 - 3. Se $x[n]$ tem duração finita a ROC é todo o plano-z, excepto possivelmente $z=0$ ou $z=\infty$.

$$X(z) = \sum_{n=-N}^N x[n]z^{-n}$$

 - 4. Se $x[n]$ é uma sequência do lado direito a ROC é o exterior de um círculo excepto possivelmente em $z=\infty$. (exemplo 1).
 - 5. Se $x[n]$ é uma sequência do lado esquerdo a ROC é o interior de um círculo excepto possivelmente em $z=0$. (exemplo 2).
 - 6. Se $x[n]$ é uma sequência dos dois lados a ROC é uma coroa circular.

$$x \cdot z[n] = (z)X$$



Exemplo 1: Calcule a transformada-Z de $x[n] = a^n u[n]$

a transformada Z de $x[n] = a^n u[n]$

1

Procedimento de

卷之三

Transformada Z

Exemplo 4: Calcule a transformada-z de

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \quad a > 0 \\ 0, & \text{outros } n \end{cases}$$

$$X(z) = \dots = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{z^N - a^N}{z^N - (z-a)}$$

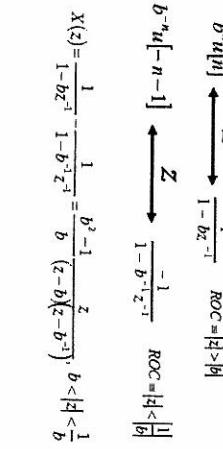
$$\begin{aligned} z_k &= ae^{j(2\pi k/N)}, \\ k &= 0, \dots, N-1 \\ z_k &= ae^{j2\pi k/N}, \\ k &= 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Exemplo 5: Calcule a transformada-z de

$$x[n] = b^n, \quad b > 0$$



$$X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}} = \frac{b^2-1}{b} \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}, \quad b < |z| < \frac{1}{|b|}$$



$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

Transformada Z

Exemplo 6: Determine $x[n]$ para

$$x[n] = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (x[n]z^{-n}) z^n = T.F.\{x[n]z^{-n}\} \\ x[n] &= r^n \frac{1}{2\pi j} \int_{C_R} X(re^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_R} X(re^{j\omega}) Y(re^{j\omega})^* d\omega = \dots = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz \end{aligned}$$

A equação anterior é a expressão formal da transformada-z inversa. O seu uso envolve o cálculo de um integral de linha ao longo de um contorno fechado. Por isso muito raramente é usado dado existirem métodos alternativos, onde o mais comum é a decomposição em frações parciais.

Transformada Z

- Transformada-z Inversa

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n}) r^{n\omega} = T.F.\{x[n]r^{-n}\}$$

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi j} \int_{C_R} X(re^{j\omega}) r^{n\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_R} X(re^{j\omega}) Y(re^{j\omega})^* d\omega = \dots = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

A equação anterior é a expressão formal da transformada-z inversa. O seu uso envolve o cálculo de um integral de linha ao longo de um contorno fechado. Por isso muito raramente é usado dado existirem métodos alternativos, onde o mais comum é a decomposição em frações parciais.

Exemplo 7: Considere o exemplo 6 com

$$ROC = \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} x_1[n] &\xrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} \\ x_2[n] &\xrightarrow{Z} \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 7: Considere o exemplo 6 com

$$ROC = \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

Transformada Z

97

Processamento de Sinal | Carlos Lima (DEI/U Universidade do Minho)

98

Processamento de Sinal | Carlos Lima (DEI/U Universidade do Minho)

99

Processamento de Sinal | Carlos Lima (DEI/U Universidade do Minho)

100

Processamento de Sinal | Carlos Lima (DEI/U Universidade do Minho)

Transformada Z

- Propriedades da Transformada-Z

Linearidade

Sé $X_1(z)$ e $X_2(z)$ são respectivamente as transformadas-z de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ com ROC R_1 e R_2 , então:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC \text{ contém } R_1 \cap R_2$$

Deslocamento no tempo

$$x[n-n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z) \quad ROC = R, \text{ Excepto possivelmente } z=0 \text{ ou } z=\infty$$

Deslocamento na frequência

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{Z} X(e^{-j\omega_0} z) \quad ROC = R,$$

Inversão do eixo dos tempos

$$x[-n] \xleftarrow{Z} z \xrightarrow{Z} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad ROC = \frac{1}{R},$$

101

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

Téorema do valor inicial

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

- Análise de Sistemas LTI através da utilização da Transformada-Z

Se $x[n]=0$ para $n < 0$ então

elevado

Sé um sistema é causal a sua ROC deve estar fora do polo com módulo mais

Eitaõ para que um sistema seja estável e causal todos os pólos de $H(z)$ terão que estar localizados dentro do círculo de raio unitário.

Exemplo 10: A F.T. de um sistema de 2ª ordem com pólos complexos é dada por

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$z_i = r e^{j\theta}$$



Sistema instável para $|r| > 1$

Transformada Z

Convolução

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z) \quad ROC \text{ contém } R_1 \cap R_2$$

Diferenciação no domínio-Z

$$nx[n] \xrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad ROC = R,$$

Exemplo 8:

Determine a transformada-z inversa de $X(z) = \log(1 + az^{-1})$ para $|z| > |a|$

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{(-a)^n}{n} u[n-1] & a(-a)^n u[n-1] & \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 + az^{-1}} & |z| > |a| \\ & a(-a)^n u[n-1] & \xleftarrow{Z} \frac{1}{1 + az^{-1}} & & |z| > |a| \end{aligned}$$

Exemplo 9: Considere o exemplo 8 com $X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$, $|z| > |a|$

$$\begin{aligned} a^n u[n] & \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, & |z| > |a| \\ na^n u[n] & \xrightarrow{Z} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, & |z| > |a| \end{aligned}$$

102

Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

Exemplo 11: Determine a função de transferência em z do sistema LTI caracterizado pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Para $|z| > 1/2$ $h[n]$ será uma sequência do lado direito (sistema causal), senão ...

- Problemas para resolução em casa

- 1. Determine a T.Z de $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \delta\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

- 2. Determine $x[n]$ para $X(z) = \frac{4 - \frac{3}{5}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$, $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$

103

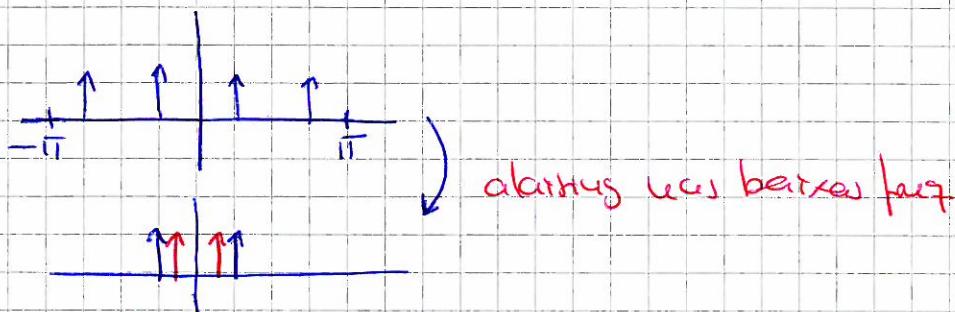
Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

104

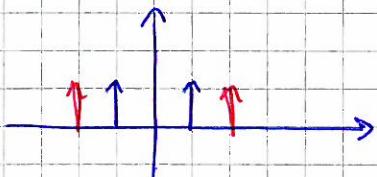
Processamento de Sinal - Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

TPC

Repetir este exemplo feito no matlab, mas fazendo o aliasing nas altas freq.

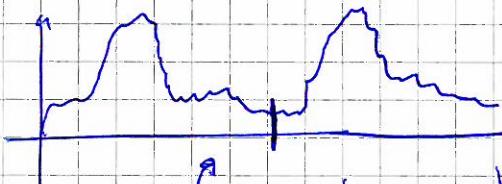


O objetivo é gerar uma componente nas altas freq.



NOTA!

Se falarmos pra opç e fizermos a fft vimos tem qq coisa errada



qd as baixas freq. se sobrepõem nas altas o nosso ouido qd as distingue

qd se faz na tempeça, bem feito ou mal feito o nosso ouido não distingue

Transformada de Z

$$DTFT \rightarrow X(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} (x[u] \cdot e^{-jn u})$$

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} (x[u] \cdot (R \cdot e^{-jn u}))$$

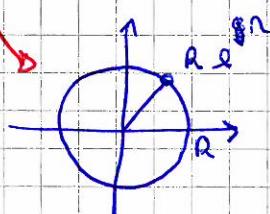
$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} R^u \cdot x[u] \cdot e^{-jn u}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} R^u \cdot (x[u] \cdot (e^{-jn})^u)$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} z^u \cdot x[u]$$

$$\text{Se } R=1 \Rightarrow X(z) = X(n)$$

$|x[u]| e^{-jn u} | < 2$
↳ se você usar o conceito da conveniência do somatório



Na transformada de Z
var depender R

var haver umas gema de valores de R
qd faz c/ qd o somatório converge

Exemplo 1 Drap. 94

Calc. transf. de Z de $\{a[u] = a^u u[u]\}$

$$X(z) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} a^u u[u] z^{-u}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} a^u \cdot u[u] \cdot z^{-u}$$

$u[u]$ é 1 se $u \geq 0$

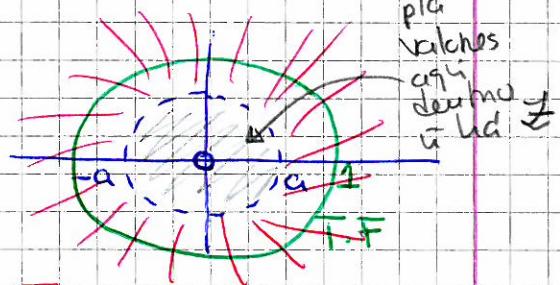
$$= \sum_{u=0}^{+\infty} a^u z^{-u}$$

$$\approx \sum_{u=0}^{+\infty} (a \cdot z^{-1})^u$$

$$\text{canso } \sum_{u=0}^{N} R^u = \frac{1-R^{N+1}}{1-R} \text{ se } R < 1$$

$$|a \cdot z^{-1}| < 1 \Rightarrow |a| < |z|$$

$$= \frac{1-0}{1-a z^{-1}}$$



$$\boxed{a^u u[u]} \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1-a z^{-1}}$$

$$|a z^{-1}| < 1 \quad (|z| > |a|)$$

Exemplo 2 Drap. 94

$$\{a[u] = -a^u u[-u-1]\}$$

$$X(z) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} a^u u[-u-1] z^{-u}$$

$$X(z) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} -a^u \cdot u[-u-1] \cdot z^{-u} \quad u=1 \text{ p/la } u \leq -1$$

$$= -\sum_{u=-\infty}^{+\infty} a^u \cdot z^{-u} \quad \text{u.v: } u \rightarrow k: u = -k$$

$$= -\sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k} \cdot u \cdot z^k$$



sistema aqui é errado
causal?

p/ risco de ser
o n.p.

↳ possivel haver
autres da estrutura

Voltar a escrever li sno si hck

$$= - \sum_{u=0}^{+\infty} a^{-u} \cdot z^u$$

$$= - \sum_{u=0}^{+\infty} a^{-u} \cdot z^u + 1 \quad \begin{array}{l} \text{pós (+) um fator } (-a^0 \cdot z^0) \\ \text{caso subtraí uma unidade, logo} \\ \text{fator } \Rightarrow \text{sem uma unidade} \end{array}$$

$$= - \sum_{u=0}^{+\infty} (a^{-1} \cdot z)^u + 1 \quad |a^{-1} \cdot z| < 1 \Rightarrow |a| > |z|$$

$$= 1 - \frac{1}{1-a^{-1} \cdot z}$$

$$= \frac{a^{-1} \cdot z}{1-a^{-1} \cdot z}$$

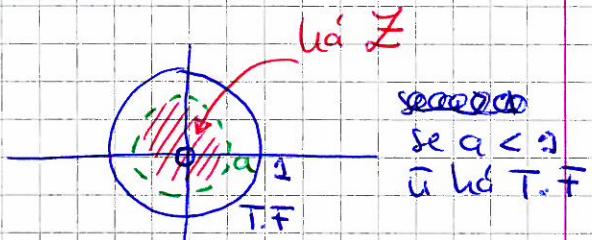
$$= \frac{-z}{a-z}$$

$$= \frac{z}{z-a}$$

$$\left| -a u [-u-1] \right| \xrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{1-a e^{-z}}$$

$\text{se } a < z$
não T.F

$$\frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$



Exemplo 3 Mapa 95

$$U[u] = \left(\frac{1}{2}\right)^u u[u] + \left(\frac{1}{3}\right)^u u[u]$$

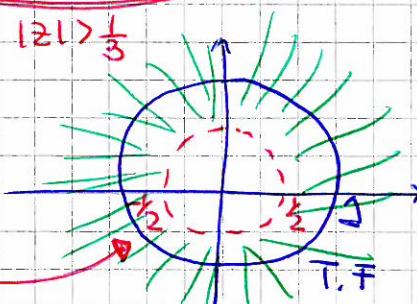
$$X(z) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^u u[u] + \left(\frac{1}{3}\right)^u u[u] \right] \cdot z^{-u}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^u \cdot u[u] \cdot z^{-u} + \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^u \cdot u[u] \cdot z^{-u} \Rightarrow a^u \cdot u[u]$$

$|z| > \frac{1}{2}$ $|z| > \frac{1}{3}$

$$= \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$|z| > \frac{1}{2} \cap |z| > \frac{1}{3} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

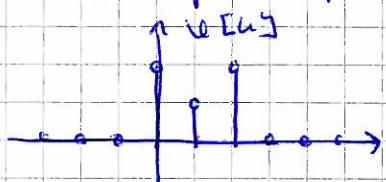


Precipriedades da Roc Z

1. A Roc de $X(z)$ é o maior no plano-z centrado na origem
 $|z| \rightarrow \infty$ → círculo completo → Rota da circunferência

2. A Roc é controlada pelos polos e onde a função seja oo

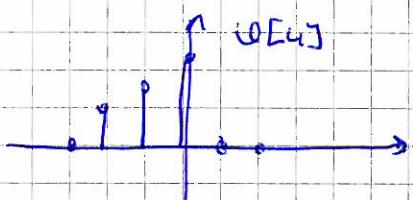
3. Se $\{u_n\}$ tem juros finitos a Roc é todo o plano-z,
excepto possivelmente $z=0$ ou $z=\infty$



$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u[n] \cdot z^{-n} \\ &= u[0] \cdot z^0 + u[1] \cdot z^{-1} + u[2] \cdot z^{-2} \\ &= u[0] + \frac{u[1]}{z} + \frac{u[2]}{z^2} \end{aligned}$$

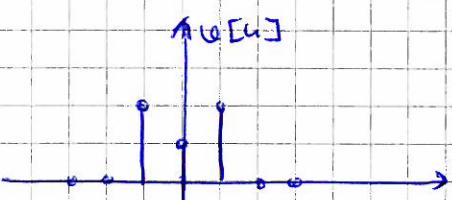
Se é oo se $z=0$
logo a soma da razão convergente é todo o plano excepto $z=0$

Roc $\neq z \neq 0$



$$X(z) = u[0] + u[-1] z^1 + u[-2] z^2$$

Se é oo se $z=\infty$ logo a Roc $\neq z \neq \pm\infty$



$$X(z) = u[0] + u[-1] z^1 + u[1] z^{-1}$$

Se é oo se $z=\pm\infty \vee z=0$ logo a Roc $\neq z \neq [0, \pm\infty]$

4. Se $\{u_n\}$ é seq. do lado direito a Roc é pra fora do círculo

5. " " " " " esquerda " " " dentro " "

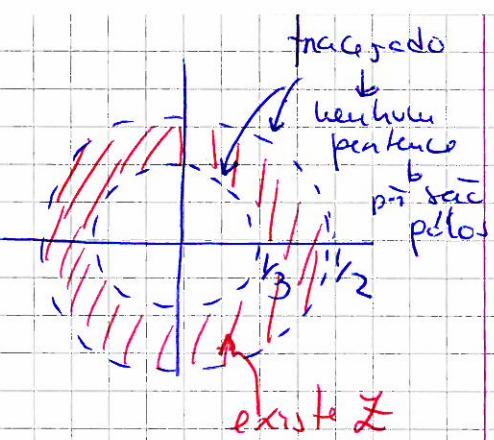
6. " " " " dois lados " " " uma coroa circular

$$v[u] = \binom{1}{3} u[u] - \binom{1}{2} u[-u-1]$$

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Roc } |z| > \frac{1}{3}$$

$$\text{Roc } |z| < \frac{1}{2}$$



$$\text{Se houvermos } v[u] = \binom{1}{2} u[u] - \binom{1}{3} u[-u-1]$$

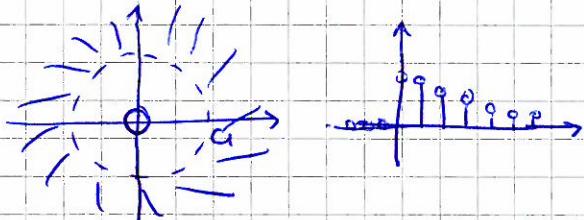
ficaria ten cotação e a baixa Z

Síntese

$$\text{DTFT} \rightarrow X(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} v[u] e^{-j\pi u}$$

$$T. Z \rightarrow X(z) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} v[u] z^{-u}$$

$$c_n u[u] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > a$$

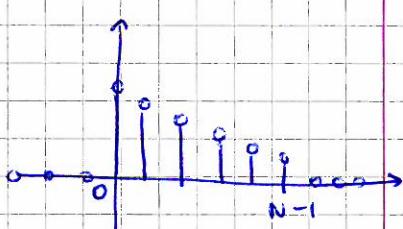


Exercício 4 Prop. 97

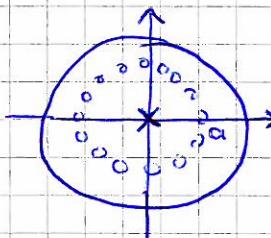
$$v[u] = \begin{cases} a^u, & 0 \leq u \leq N+1, a > 0 \\ 0, & \text{outros } u \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{u=0}^{N+1} (a \cdot z^{-1})^u = \frac{1 - (az^{-1})^{N+1}}{1 - az^{-1}}$$

$$= \frac{z^{N+1} - a}{z^{N+1} (z - a)}$$



$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$



(A parte das zeros e dos polos trocam-se
com arbitrariedade)

Exercício 5 Cap. 9.7

$\mathcal{U}[u] = b^{|u|}$, $b > 0$ tem \mathbb{Z} ?

tem DTFT p/ a funç Cauvante p/ $b > 0$

$$z = R \cdot e^{j\omega}$$

$$z^{-u} = R^{-u} \cdot e^{-ju\omega}$$

$$x(x) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} R^{-u} \cdot e^{-ju\omega} \cdot \mathcal{U}[u]$$

convergir p/ a pelo menos um R na fronteira \mathbb{Z}

$$-a^u u[-u-1] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, |z| < a$$

$$b^{|u|} = \begin{cases} b^u & u \geq 0 \\ b^{-u} & u < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{U}[u] = b^u u[u] + b^{-u} u[-u-1]$$

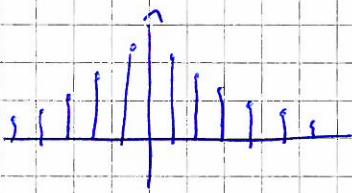
$$R > b$$

$$|z| < \frac{1}{b}$$

$$x(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} + \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}}$$

$$= \frac{b^2 - 1}{b} \cdot \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}, b < |z| < \frac{1}{b}$$

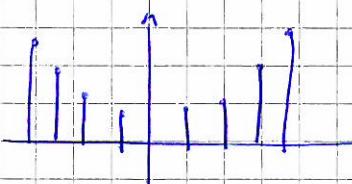
1) $b < 1$



tem DTFT

tem \mathbb{Z}

2) $b > 1$



tem DTFT

nenhum \mathbb{Z}

p/ n existe convergência

tem expressão mas p/ $b > 1$ n existe domínio
p/ se verificam as condições

Transformada -2 Inversa

$$(Tz) \mathbb{Z} \rightarrow \text{DTFT} \{ R^{-u} \cdot \mathcal{U}[u] \}$$

$$(ITz) \mathbb{Z}^{-1} \rightarrow \text{DTFT} \{ \underbrace{\text{DTFT} \{ R^{-u} \cdot \mathcal{U}[u] \}}_{X(R \cdot e^{j\omega})} \}$$

$$(\text{DFT}) \quad \mathcal{U}[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(k) e^{-jk} dk$$

$$R^4 \cdot \mathcal{U}[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{-e^{j\theta}}) e^{jn\theta} d\theta$$

$$\mathcal{U}[u] = R^4 \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{-e^{j\theta}}) e^{jn\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) \cdot z^4 \cdot \frac{dz}{z^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) \cdot z^{u-1}$$

$$z = e^{jn\theta} \cdot R$$

$$X(z) = X(R \cdot e^{jn\theta})$$

$$R^4 e^{jn\theta} = z^4$$

$$\frac{dz}{d\theta} = j R \cdot e^{jn\theta}$$

$$d\theta = \frac{dz}{j R e^{jn\theta}}$$

$$d\theta = \frac{dz}{j z}$$

qd (2) $\int_{2\pi} \Rightarrow$ soma de todos os p^{tos} de b.

ent \Rightarrow $\oint \Rightarrow$ integral de linha

\downarrow

x te indica

o sentido da soma
 \hookrightarrow a é obliquetrix

Exercício 6 map 99

def $\mathcal{U}[u]$ pla

$$X(z) = \frac{3 - 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, |z| > \frac{1}{3}$$

$$X(z) = \frac{3 - 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

pela Regra do topo

$$A = X(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=4} = \frac{3 - 5 \cdot 4}{1 - \frac{1}{3} \cdot 4} = \frac{3 - 20}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{-17}{-\frac{1}{3}} = \frac{51}{1} = 51$$

$$B = X(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=3} = \frac{3 - 5 \cdot 3}{1 - \frac{1}{4} \cdot 3} = \frac{3 - 15}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{-12}{\frac{1}{4}} = \frac{-48}{1} = -48$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad \text{com } |z| > \frac{1}{3}$$

$$\text{e como } a^4 u[a] \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > a$$

$$\text{então } \mathcal{U}[u] = \left(\frac{1}{4}\right)^4 u[a] + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 u[a]$$

Exercício 7 map. 100

(último caso mas c/ $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$)

$$\text{pla } |z| < \frac{1}{3} \quad -a^u u[-u-1] \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| < a$$

$$v[u] = \left(\frac{1}{4}\right)^u u[u] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^u u[-u-1]$$

Propriedades da Z

Linearidade

$$v_1[u] \leftrightarrow X_1(z)$$

$$v_2[u] \leftrightarrow X_2(z)$$

$$v_3[u] \Rightarrow a v_1[u] + b v_2[u] \leftrightarrow a X_1(z) + b X_2(z) = X_3(z)$$

Provar:

$$X_3(z) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} v_3[u] \cdot z^{-u}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} (a v_1[u] + b v_2[u]) \cdot z^{-u}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} a \cdot v_1[u] z^{-u} + \sum_{u=-\infty}^{+\infty} b \cdot v_2[u] z^{-u}$$

$$= a X_1(z) + b X_2(z)$$

Deslocamento no tempo = o prazo de vida tempos \rightarrow BTFT
 " " na freq. " " " " " " " " " "

Inversão do eixo de tempos

$$X\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} v[u] \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{-u}$$

Caracter

Diferencição $v[u] \leftrightarrow X(z)$

$$v[u] \leftrightarrow z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$X(z) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} u[u] \cdot z^{-u}$$

$$\frac{dx(z)}{dz} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} u[u] \cdot (-u \cdot z^{-u-1})$$

pla (cuadrante)

a la izq (z-4 temos)

\Rightarrow ten z^{-4}

$$z \frac{dx(z)}{dz} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} u[u] \cdot (-u) \cdot z^{-u}$$

$$-z \frac{dx(z)}{dz} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} u[u] \cdot u \cdot z^{-u}$$

Exercício 8 Map. 10.2

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) \quad |z| > a$$

$$u[u] \longleftrightarrow \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > a$$

$$a^u u[u] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > a$$

usando a propriedade de diferenças

$$u[u] \longleftrightarrow -z \frac{dx(z)}{dz}$$

$$\frac{dx(z)}{dz} = \frac{d}{dz} (\underbrace{\log(1 + az^{-1})}_{Y}) = \frac{-az^{-2}}{(1 + az^{-1})} \xrightarrow{Y}$$

$$-z \frac{dx(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} = a \cdot \frac{1}{1 + az^{-1}} \cdot \cancel{z^{-1}} \xrightarrow{\text{atende}} \frac{a^{-1}}{z^{-1}} \longleftrightarrow (-a)^{u-1} u[u-1] \times a$$

$$a = -(-a)$$

$$-z \frac{dx(z)}{dz} \xleftarrow{z^{-1}} u[u] = -(-a)^u u[u-1]$$

$$\text{então } -(-a)^u u[u-1]$$

$$u[u] = -\frac{(-a)^u}{u} u[u-1]$$

Exercício 9 Map. 10.2

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 + az^{-1})^2}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{-(az^{-1})^2}{(1 - az^{-1})^2}$$

$$a^u u[u] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$u a^u u[u] \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right)$$

$$-z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

$$u \cdot a^u u(z) \longleftrightarrow \frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

Teorema do valor inicial

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (v[n] \cdot z^{-n}) \quad \text{se } v[n] \text{ é nulo p/ } n < 0$$

então

$$= (v[0])z^0 + [v[1]]z^1 + \dots$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = (v[0])z^0 + \underbrace{[v[1]]z^1 + \dots}_{\text{O resto é plato ou zero}}$$

$$\text{então } \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = v[0]$$

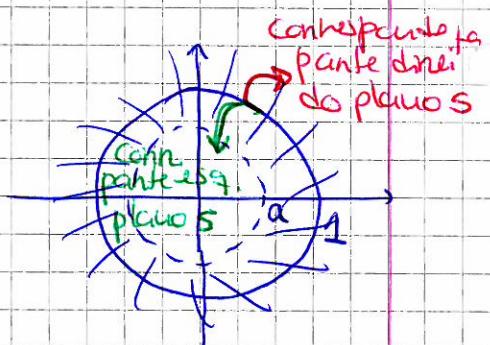
Análise de Sistemas pl \mathbb{Z}

Se um sistema é estacionário

\downarrow todos os pts q um sistema teve
teve q estavam no interior da circunferência
de radio R interno

\downarrow se $a < 1$

\downarrow teve q pertencesse
à reunião de convergência

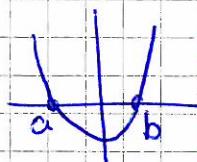


Exercício 10 map. 103

$$y = f(u)$$

det. um funç y q tem 2 zeros \rightarrow corte o

exix das
abscissas
em 2 ptos



e uma das funç f'

$$(u-a)(u-b)$$

e $\alpha(u-a)(u-b)$ tbm parte

No exemplo que nous encontrou um funç trawf. q
tem 2 polos.

$$H(z) = \frac{k}{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z^{-1})}, \text{ contabilizamos } \alpha \text{ e } \beta \text{ polos}$$

α β

e estes ptos α e β sã os zeros das denominadoras e
correspondem aos máximos de $H(z)$.

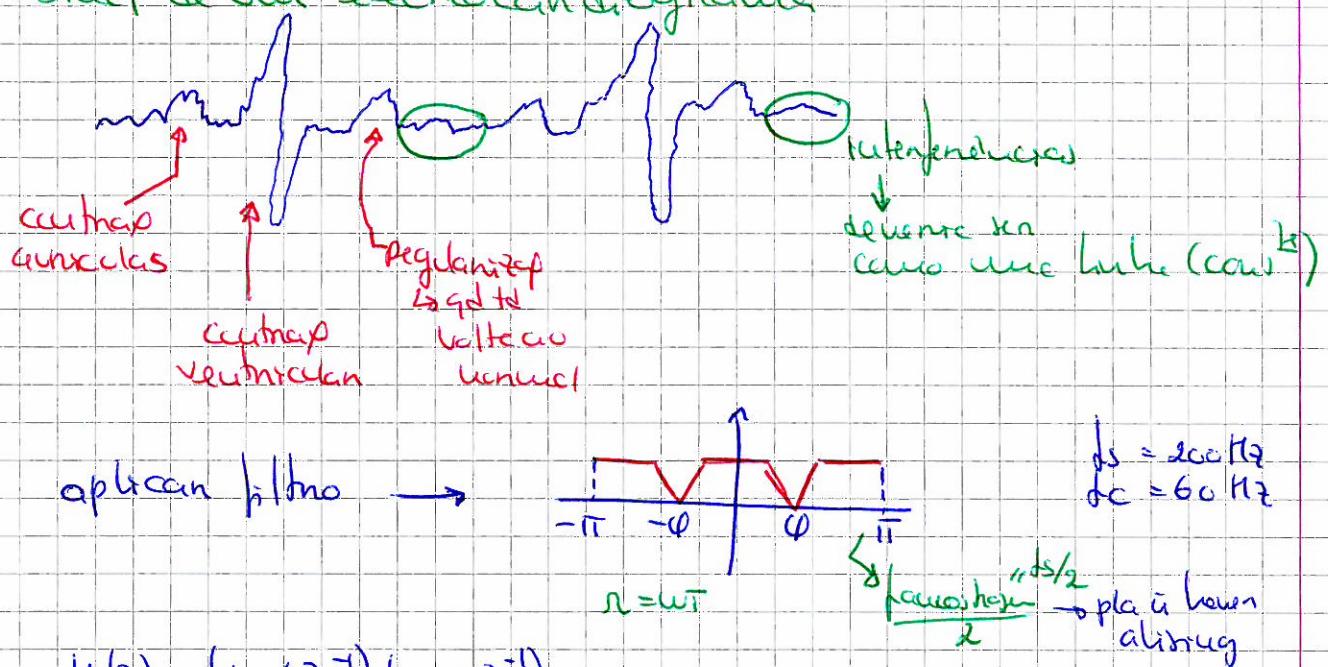
$$1 - \alpha z^{-1} \Big|_{z=R \cdot e^{j\varphi}} = 0$$

$$1 - \beta z^{-1} \Big|_{z=R \cdot e^{j\varphi}} = 0$$

qd se multiplicase $(1 - \alpha z^{-1})(1 - \beta z^{-1})$

chihuahua $H(z) = \frac{1}{1 - 2R(\cos\varphi) \cdot z^{-1} + R^2 \cdot z^{-2}}$

Sinc. de un electrocardiograma



R tenu en sen = 2 plc sem castel

$$H(z) = (1 - \alpha z^{-jn}) (1 - \beta z^{-jn})$$

$$\alpha = ? \quad (0 = \frac{3\pi}{5}) \quad 1 - \alpha e^{-jn} \Big|_{n=\frac{3\pi}{5}} = 0 \Rightarrow 1 - \alpha e^{-j\frac{3\pi}{5}} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = e^{-j\frac{3\pi}{5}}$$

$$\frac{f_s}{2} = \frac{\pi}{2}$$

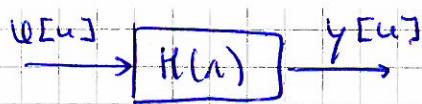
$$f_c = \omega$$

$$63 \quad \omega = \frac{3\pi}{5}$$

$$\beta = ? \quad (0 = -\frac{3\pi}{5}) \quad 1 - \beta e^{-jn} \Big|_{n=-\frac{3\pi}{5}} = 0 \Rightarrow 1 - \beta e^{j\frac{3\pi}{5}} = 0$$

$$\Rightarrow \beta = e^{-j\frac{3\pi}{5}}$$

$$\begin{aligned}
 H(n) &= 1 - (\alpha + \beta) e^{-jn} + \alpha \beta e^{-2jn} \\
 &= 1 - (e^{j\frac{3\pi}{5}} + e^{-j\frac{3\pi}{5}}) e^{-jn} + e^{j\frac{3\pi}{5}} \cdot e^{-jn} \cdot e^{-j\frac{3\pi}{5}} \cdot e^{-jn} \\
 &= 1 - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) e^{-jn} + e^{-2jn}
 \end{aligned}$$



$$H(n) = \frac{Y(n)}{X(n)}$$

$$y(n) = [(1 - 2\cos(3\pi))e^{-jn} + e^{-2jn}] \cdot x(n)$$

$$y[n] = \frac{u[n] - 2\cos(3\pi)u[n-1] + u[n-2]}{x(n) - 2\cos(3\pi)e^{-jn}x(n)}$$

MATLAB

bad cs... ← pra "separar"

$u = ECG \times 60$ → var

plot(u)

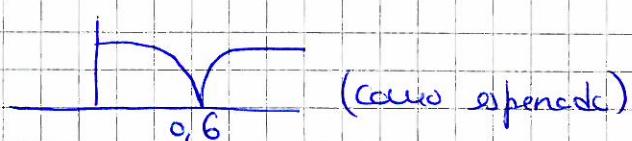
~~real(u)~~, ~~length(u)~~ → apenas valores apurados → hilho

~~plot(u)~~

$$[B] = [1 \quad -2\cos(\frac{3\pi}{5}) \quad 1]$$

$$A = 1$$

filtfilt(B, A)



agora

for i=3 : Length(u) → tem q sen 3 pi x n q é fundamental
pt qd qd u[n-2] e pt os radicais no
matlab conseguem ser 1
 $y(i) = u(i) - 2\cos(3\pi)\frac{u(i-1)}{5} + \frac{u(i-2)}{5};$

end

subplot(2, 1, 1), plot(x) → o resultado é um sinal com muitas oscilações

"(2, 1, 2), "(y) → sinal com poucas oscilações

verificar q há
um ganho

verificar se os resultados
estão corretos para os círculos

pra filtrar → aumentar
ordem do
hilho

$$H(z) = (1-\alpha)(1-\beta)$$

$$H(z) = (1+\alpha)(1+\beta)$$

var atenuar 2x na comp. (↑) → $H(z) = (1-\alpha z^-1)(1-\beta z^-1) \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ ordem}$
 $H(z) = (1-\alpha z^{-1})^2(1-\beta z^{-1}) \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ "}$

se conseguirmos vir a freq. do sinal subtraímos
no $H(n)$ o n, pela freq. do sinal e vemos o gelho

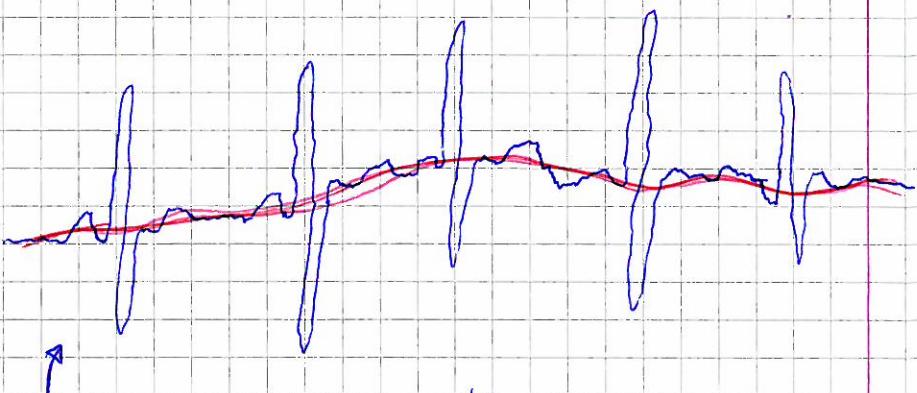
↓
depois multiplicar o sinal de saída a componente gelho

outro exemplo

load

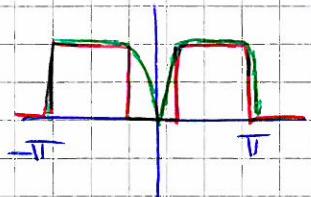
$$y_1 = ECG_LFN;$$

$$pla + (y_1)$$



tem uma trai de berixa freq. Sairia de

berixa à trai nestes traias



fazendo a approximação assim
pq a freq. do sinal é um trai berixa q a
freq. maior berixa do trai

hipótese de abordagem:

1º → Precisamos de tirar freq. mit berixa → onde ir vanc → devendo mit per.

↓
devendo

$$\Rightarrow y[n] = \frac{y[n] - y[n-1]}{1}$$

$$\text{fazer } \sum pla y[n] = [y[n] - \cancel{[y[n-1]]}]$$

$$Y(z) = X(z) - X(z) \cancel{z^{-1}} \quad \text{pq a cotação de saída}\braket{mit}$$

$$= X(z) (1 - z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{1 - z^{-1}}$$

2º temos um zero na frequ. → temos $H(z) = 1 - \alpha z^{-1}$ pla ($n=0$)

$$H(n) = 1 - \alpha e^{-jn} \quad (\text{calc. x. de saída a ser zero pla } n=\infty)$$

$$\alpha = ? \quad (-\alpha e^{-jn}) \Big|_{n=\infty} = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$H(z) = \boxed{1 - z^{-1}}$$

Alebas os métodos dentro a unha Z

fun $i=2$: length (v_i)

$$y_{i+1} = v_i(i) - v_i(i-1);$$

end

Subplot $(z, 1, 1)$, plot (v_i)

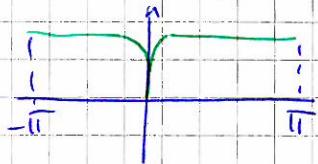
" " $(z, 1, 2)$, " (y_i)



temos que escolher o filtro s-
sistema contínuo
de berçais freq.

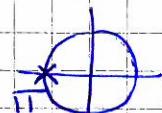
sistemas contínuos
de berçais freq.

O resultado é um
altor freq. aumentar



atenuar mais
componentes s-
detraídas

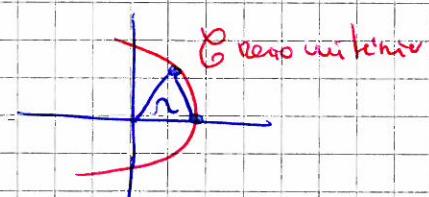
$$H(\lambda) = 1 - e^{-\lambda n} \Big|_{\lambda=0} = 0$$



$$H(\lambda) = 1 - e^{-\lambda n} \Big|_{\lambda=\infty} = 1 - (-1) = 2 \leftarrow \text{Ruido de alte freq. for componente } 2 \times \text{ polo n-ésimo}$$

Vamos fee q facen a componentes de um zero
↳ anexase tam um polo

está a centrar nos 0Hz ($\omega \approx 0$) → seu euteito nos valores
ponto de zero coincide co
centro



temos q anexar
um polo prox.

pela fez q estan pls
dentro → loje polo < 1
pla sistema instável
 $\omega \geq 1$ polo responder
de imediatas

$$H(n) = \frac{1 - e^{-jn}}{1 - 2e^{-jn}}, \quad \gamma \approx 1$$

$$\frac{Y(n)}{X(n)} = \frac{1 - e^{-jn}}{1 - 2e^{-jn}}$$

$$\Rightarrow Y(n)[1 - 2e^{-jn}] = X(n)[1 - e^{-jn}]$$

$$Y[n] = \gamma Y[n-1] + u[n] - v[n-1]$$

• Breves notas sobre filtros analógicos

- Justificação para o processamento digital de sinais

- Precisão e reprodutibilidade

possibilita de uma operação muito mais precisa no cálculo das transformadas.

- Capacidade em efectuar operações mais complexas

- Flexibilidade

permite a utilização de um grande número de componentes e ligações.

- Desvantagem

- Conversão A/D e D/A

introduzindo erros de conversão.

- Bode real e assumptólico

- Resposta em frequência de filtros reais

- Resposta em frequência de filtros idealizados

- Localizar no eixo das freqüências o polo ($w=R/L$), a freq. dez vezes inferior e a freq. dez vezes superior
- À esquerda da freq. dez vezes inferior traçar uma recta horizontal a passar nos 0 radianos. À direita da freq. dez vezes superior traçar uma recta horizontal a passar nos $-\pi/2$ radianos. Unir as extremidades mais próximas destes 2 segmentos de recta com um outro segmento de recta com decaimento de $-\pi/4$ radianos por década.

Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

22/09/2012 | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

22/09/2012 | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

• Breves notas sobre filtros analógicos

- Traçado de Bode real e assumptólico ($R/L=10^4$)

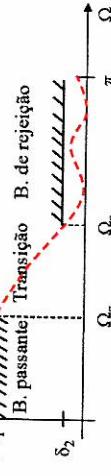


- Sistemas de ordem mais elevada (teoria dos sistemas)

- overshoot

• Breves notas sobre filtros analógicos

- Resposta em frequência de filtros reais



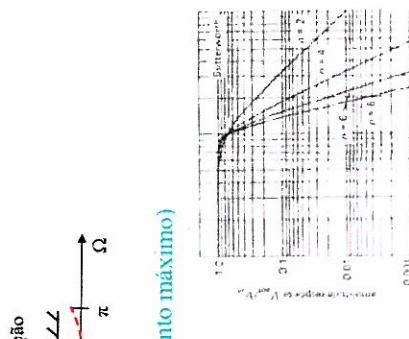
- Filtros de Butterworth (Aplanamento máximo)



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Traçado assimptótico da fase

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow \text{Fase } H(jw) = -\arctg \frac{wL}{R} \\ wL \gg R \Rightarrow \text{Fase } H(jw) = -\frac{\pi}{2} \\ wL = R \Rightarrow \text{Fase } H(jw) = -\arctan \frac{wL}{R} \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Traçado assimptótico do módulo

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$



• Breves notas sobre filtros analógicos

- Processamento Digital de Sinais | Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

$$\begin{cases} wL \ll R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \sqrt{1 + \left(\frac{wL}{R}\right)^2} \\ wL \gg R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log \frac{wL}{R} \\ wL = R \Rightarrow |H(jw)|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) = -3dB \end{cases}$$

Se $\gamma = 0,9999 \dots$ connemos o risco de círreos na orelha
as berixas freit.

$$\gamma = 0,98 \text{ ou } 0,99$$

$$y_2 = 0$$

for $i=2 : \text{length}(v_i)$

$$y_2(i) = 0,98 * y_2(i-1) + v_i(i_r) - v_i(i-1);$$

end

subplot (3, 1, 2), plot (y)
 " (3, 1, 1), "
 " (3, 1, 3), "
 $\rightarrow (y_2)$



como
esperado

Filtros acústicos

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{R+SL} \rightarrow \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R}{R+j\omega L} = \frac{1}{1+\frac{j\omega L}{R}}$$

teorema das asimptóicas do weddo

$$\left| \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \right|_{\text{dB}} \Rightarrow 20 \log \left| \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \right| = 20 \log \left| \frac{1}{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} \right| \\ = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} \\ = -20 \log \sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}$$

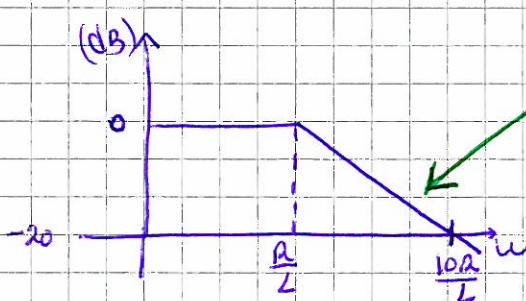
$$\cancel{\times} \frac{\omega L}{R} \ll 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \approx 1 \Rightarrow \left| \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \right| \approx 0 \text{ dB}$$

$$\times \frac{\omega L}{R} \gg 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \Rightarrow \left| \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \right| = -20 \log \frac{\omega L}{R}$$

$$\omega_L \approx \omega_r = 10 \omega$$

$$\left| \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \right| = -20 \log \frac{\omega L}{R} = -20 \log \frac{10 \omega L}{R} = -20 \log 10 - 20 \log \frac{\omega L}{R}$$

Muita dolceza a função mantém
muito desca e dB



desca \tilde{a} cai 20dB/dec

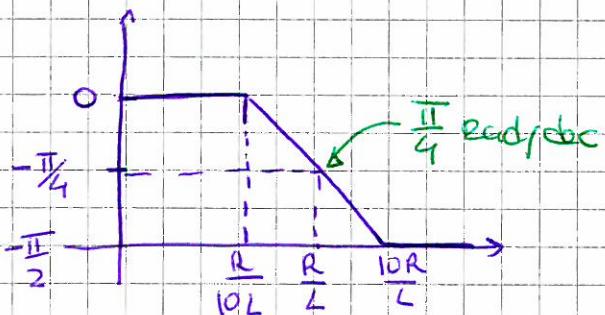
Tratando o critério híbrido da JFE

$$\angle H(j\omega) = 0 - \arctg \left(\frac{\omega L}{R} \right) \quad (\text{o } \angle \text{ do multiplicador} - \cancel{\text{de comunicação}})$$

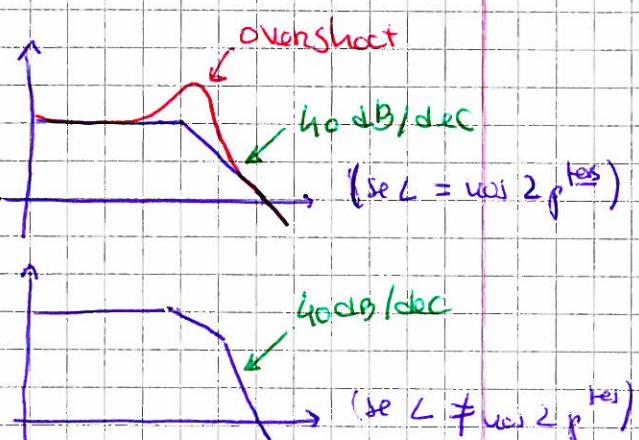
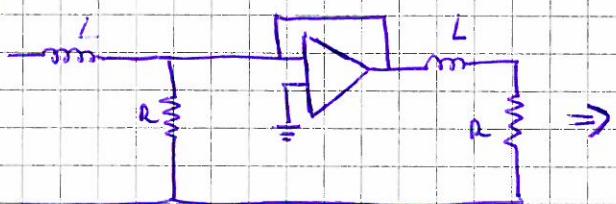
Se $\frac{\omega L}{R} \ll 1 \Rightarrow 1 + j\frac{\omega L}{R} \approx 1 \Rightarrow \angle H(j\omega) = 0$

Se $\frac{\omega L}{R} \gg 1 \Rightarrow 1 + j\frac{\omega L}{R} \approx j\frac{\omega L}{R} \Rightarrow \angle H(j\omega) = 0 - \arctg(\text{too}) = -\frac{\pi}{2}$

Se $\frac{\omega L}{R} = 1 \Rightarrow 1 + j\frac{\omega L}{R} = j \Rightarrow \angle H(j\omega) = 0 - \arctg(1) = -\frac{\pi}{4}$



Se



Filtro Butterworth (Aplanamento vertical)

- Na banda passante o ganho é fixo \rightarrow a curva recta
 ↓
 polos tem q estarem igualmente espalhados em x.
 ↓
 qd temos uns polos \rightarrow uns zeros \rightarrow elevada ordem

\times 's \rightarrow definição sistema de elevada ordem

- Na frequência do corte \rightarrow ganho d menor 3dB
 independentemente da ordem do filtro

- tem uma banda de transição mais pequena

↓ no entanto el. o maior valor p/ q tam distingue as amplitudes

Filtros de chebyshov

desvantagens:

- Relaciona distâncias da fase superior do filtro biquadrado
↳ atinge o sistema daí ao final
- Ha distâncias de amplitude da banda passante
↳ tem-se menor banda de transição

Nota:

tratando condicionais c/ hipóteses e vice-versa
↳ passante de filtro parte baixo pra cima
↳ adem → 3 condições gerais

$$\text{freq. de corte} \rightarrow \frac{1}{2\pi R_C}$$

Filtros Elípticos \rightarrow funç. elíptica jaccobiana substitui os polinômios de chebyshev

Metodo da reconstituição da resposta impulsional

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = A_n e^{s_n t} u(t)$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{s_n t} u(t) e^{-st} dt \quad \text{caso } u(t) \neq 0 \text{ para } t < 0$$

$$= A_n \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_n)t} dt$$

$$= -\frac{A_n}{s-s_n} \cdot e^{-s(s-s_n)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{A_n}{s-s_n} [0-1]$$

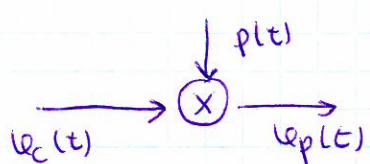
$$= \frac{A_n}{s-s_n}$$

$$F(s) = \frac{A_n}{s-s_n} \xleftarrow{\mathcal{L}} A_n e^{s_n t} \cdot u(t) = f(t)$$

Oz quenomas dão o sistema discreto → quenomas alternadas

$$f[n] = A_n \cdot e^{\frac{s_n n \pi i}{T}} u[n] \xrightarrow{\text{período de amostragem}} \text{o ruído}$$

$$f[u] = A_{Kz} e^{\frac{S_K u T}{a^u}} u[u] \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) = ? \quad a^u_u(u) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}$$



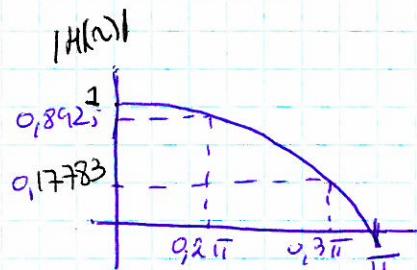
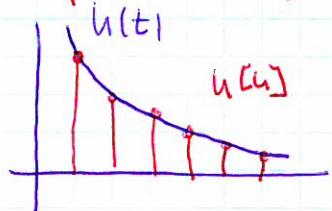
$$X_p(u) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(u-n\omega)$$

versist. analítico \rightarrow tempo T
 qd nula amplituda para plc ver círculo
 dentro \mathbb{Z} var chegar \pm mias freq.
 dai se multiplica pl. T pl. repor
 a amplitude de transfiguração

sempre q se tem q ver freq. desto hpo em T aplicar \Rightarrow
 logo a em \mathbb{Z} correspondente

sempre q tem q ver freq em \mathbb{Z} aplicar \mathbb{Z} correspondente
 decompon
 pela negra das freq

Exemplo 3 (Brap. 15)



$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

\rightarrow expressão do filtro

$$\begin{cases} |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j0.2\pi}{\omega_c}\right)^{2N}} = 0.8925^2 \\ |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j0.3\pi}{\omega_c}\right)^{2N}} = 0.17783^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(\frac{j0.2\pi}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.8925}\right)^2 \\ 1 + \left(\frac{j0.3\pi}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2 \end{cases}$$

mudar uma expressão pela outra \rightarrow det. $(N) \rightarrow$ frequ. em sistema

$$\left\{ \left(\frac{j0.2\pi}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.8925}\right)^2 - 1 \right.$$

$$\left. \left(\frac{j0.3\pi}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2 - 1 \right.$$

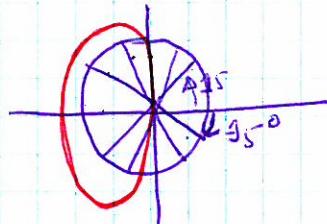
Pelo fato q estan iguais espacados $(N=6)$

↳ no semi-plano negativo \rightarrow f1 se é sistema q é estavel

Logo duplicam N, dividin circumferencia em 12 partes e pegam apenaas las 6 no plano negativo

$$N=6 \Rightarrow N=12$$

$$\frac{360}{12} = 30^\circ$$



$$\omega_c$$

$$\lambda = 0,7032$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{6} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{12}$$

$$\frac{9\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12}$$

$$H_C(s) = \frac{k}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)(s-s_5)(s-s_6)}$$

$$s_{1,2} = \omega_c \left[\cos \frac{7\pi}{12} + j \sin \frac{7\pi}{12} \right]$$

$$s_{3,4} = \omega_c \left[\cos \frac{9\pi}{12} + j \sin \frac{9\pi}{12} \right]$$

$$s_{5,6} = \omega_c \left[\cos \frac{11\pi}{12} + j \sin \frac{11\pi}{12} \right]$$

$$H_C(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \frac{A_3}{s-s_3} + \frac{A_4}{s-s_4} + \frac{A_5}{s-s_5} + \frac{A_6}{s-s_6}$$

Método dos coeficientes indet. a val trabalhoso

$k = ? \rightarrow$ colocado de forma q qndo à componente cosseno ten valor zero

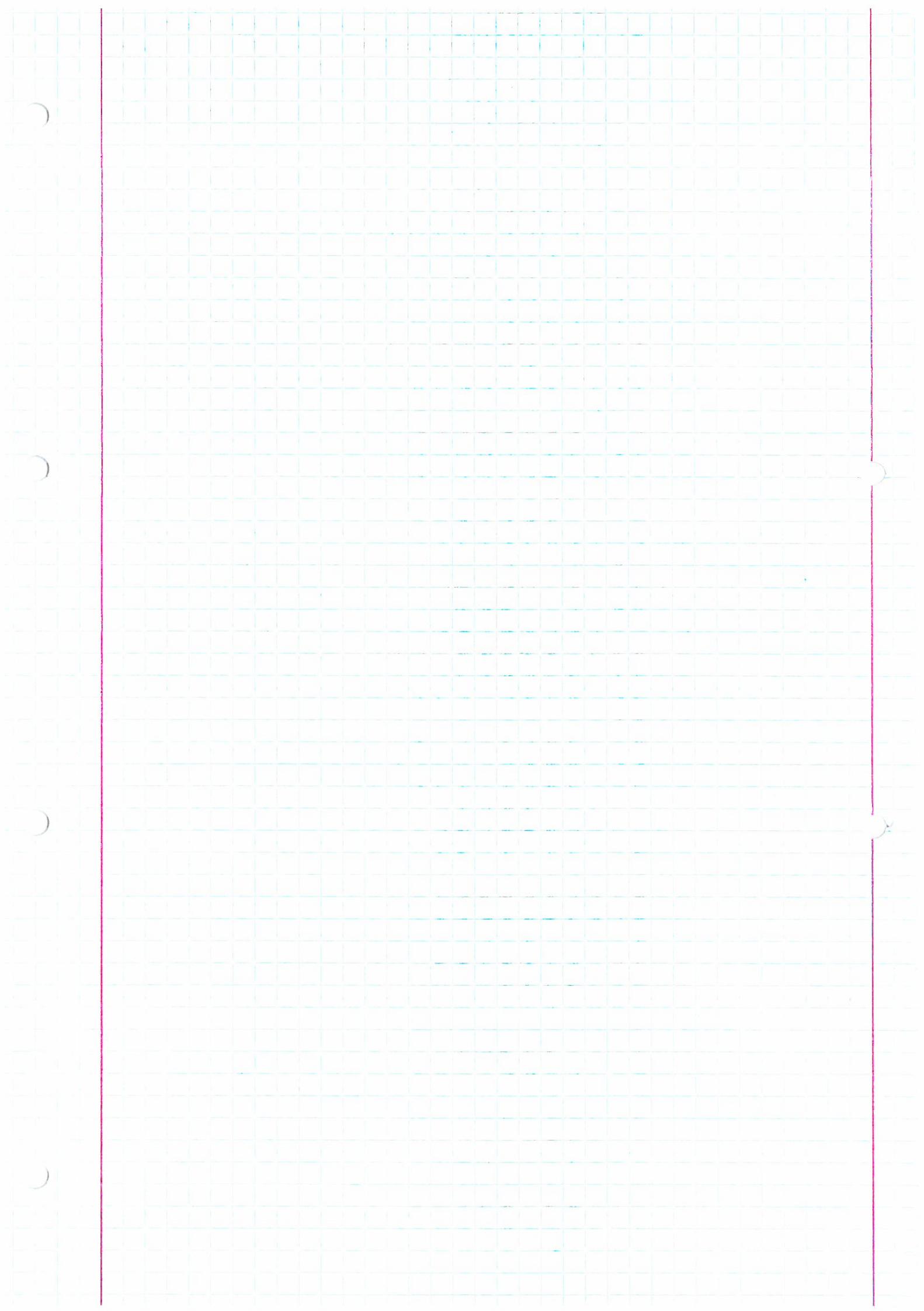
$$H_C(s) = \frac{k}{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4 \cdot s_5 \cdot s_6} = 1 \text{ pra qndo sen} = 0$$

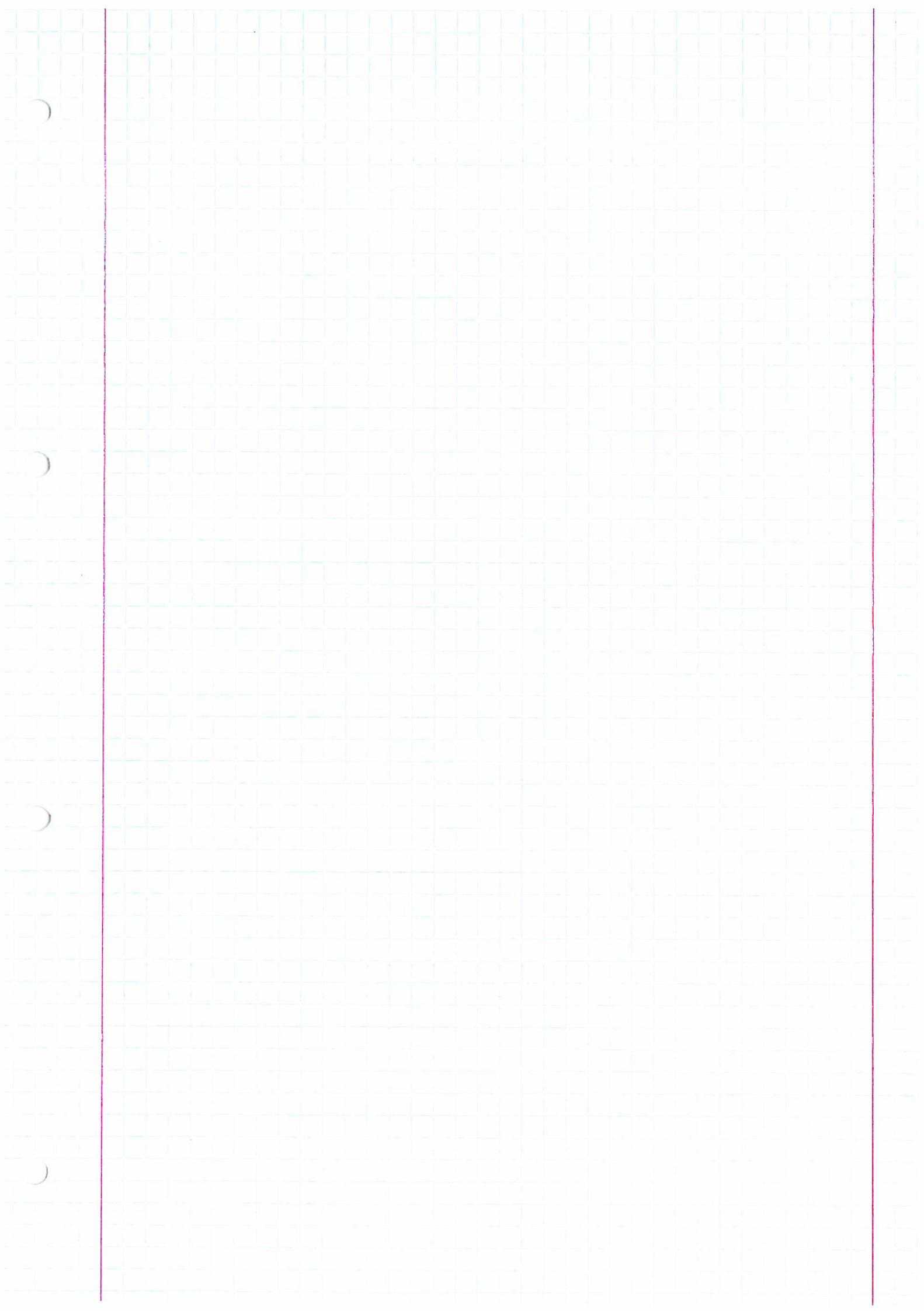
$$k = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4 \cdot s_5 \cdot s_6$$

$$A_1 = \frac{k}{(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)(s-s_5)(s-s_6)} \Big|_{s=s_1}$$

↓
util trabalho

usar matlab
↳ fatuo
dominio se z





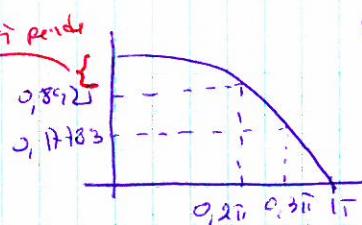
Matlab:

$$0,8925 - 0,2i \quad \leftarrow \text{especificação do filtro}$$

$$0,17783 - 0,3i$$

buttord → ordem do filtro butterworth → bivalores ω e ω_c
que calcula os sistemas

R_p (dB) → 0 à banda passante pendente



$$R_p = 20 \log(0,8925)$$

ω_s (dB) → frequência menor ω_s

$$\omega_s = 20 \log(0,17783)$$

vêm em factores de 10

$\omega_p \rightarrow$ diz respeito à banda passante

$$\omega_p = 0,2$$

$\omega_s \Rightarrow \dots \quad " \quad " \quad " \quad \text{negativo} \rightarrow$

$$\omega_s = 0,3$$

$$[N, \omega_n] = \text{buttord}(0.2, 0.3, 20 \log(0,8925), 20 \log(0,17783))$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \omega_p & \omega_s & R_p & \omega_s \end{matrix}$$

$$N=6 \quad \omega_n = 0,2329 \quad 0 \text{ devido ao fator de } \omega_n = 0,7$$

\uparrow
freq. de
corte digital

$$0,2329 \pi \approx 0,7$$

este é um pô de filtro analógico
para uma freq. de corte ω_n

\uparrow
no domínio
dos S

as suas aplicações o filtro

$$[B, A] = \text{butter}(N, \omega_n)$$

Nota:

se quisermos no domínio S $\Rightarrow [B, A] = \text{butter}(N, \omega_n, 's')$

\uparrow
butter \in pl freq.
no domínio S

$$Y(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,0007 + 0,0044z^{-1} + 0,0111z^{-2} + \dots}{1 - 3,1836 \cdot z^{-1} + \dots}$$

Síntese

$$u(t) = A_K e^{s_K t} \cdot u(t)$$

$\Leftrightarrow H(s) = \frac{A_K}{s - s_K} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{A_K}{j\omega - s_K}$

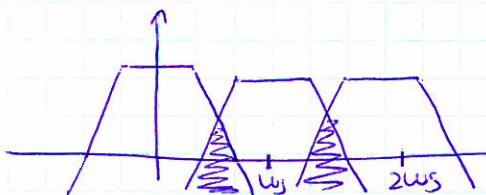
aplicando o filtro

$$u[n] = h_c(nT) \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = \frac{A_K T}{1 - e^{-s_K T} z^{-1}}$$

beando limitado

$$u_c(t) \xrightarrow{p(t)} u_p(t) = h_c(nT)$$

$$H_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c(\omega - k\omega_s)$$



~~para~~
pla se basean las técnicas
da análisis trigonométrico
también beando limitado la
aliasing.

Matlab

- 1. Det. buttord $\rightarrow N, \omega_n$
- 2. calc. filtro $\underbrace{[B, A]}_{H(z)} = \text{butter}(N, \omega_n)$

Todo de transformadas bilineares

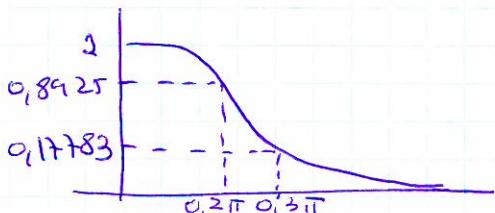
$$H(s) \rightarrow H(z)$$

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

aproximado de amostragem

~~no~~ este relop n existe $\Rightarrow \omega = \frac{\pi}{T} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
queremos n filtro sej c

pelo filtro
sabemos sempre
o n (número
conta)



as especificações do filtro atenuem-se:

$$0,8925 \leq |H_c(j\omega)| \leq 1$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{2}{T} - \tan \frac{0,2\pi}{2}$$

assim o filtro é um filtro
ao contrário de todos os outros

Hannanberg

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos \frac{2\pi k}{N} z^{-k}$$

Resposta: Atenuação passa banda

$$|H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\left(1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^{2N}\right) = \frac{1}{|H_c(j\omega)|^2}$$

$$\begin{cases} \left(1 + \left(\frac{2\tan(0,1\pi)}{\omega}\right)^{2N}\right) = \frac{1}{|H_c(j\omega)|^2} = \left(\frac{1}{0,8925}\right)^2 & \dots N=6 \\ \left(1 + \left(\frac{2\tan(0,15\pi)}{\omega}\right)^{2N}\right) = \left(\frac{1}{0,177783}\right) \end{cases}$$

trovando a eq. em função de $\frac{S}{z}$

Calcular os complexos plc fáceis!!

Se abrem os cálculos?

- 1º Det. N e ω_n
- 2º Aplicar destes resultados eq. do filtro; com $2N$ polos, escrever expressão em S
- 3º Desenvolver os cálculos, mas devido à dificuldade fazer com cálculos no Matlab
- 4º No entanto, expandir expressão em fracionários, mas neste basta substituir $p/S = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

Matlab

1) buttord - N, ω_n

autenticação → precisando do passo up
plano $S \rightarrow$ mas não é bem

2) calc. filtro ($h[n]$ em S)

→ B é a soma dos coeficientes em S

$$[B, A] = \text{buttord}(N, \omega_n, [S])$$

3) obtener $H(z)$ usando la fórmula bilineal

$\text{zilog}_10(0.17783)$

$$[N, w_n] = \text{butter} (w_p, w_s, \epsilon_p, \epsilon_s, 's')$$

↑ ↑ ↑ ↓
0.2 0.3 0.8925

Resultado: $N=6$
 $w_n = 0.2329$

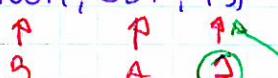
$$[B, A] = \text{Butter} (N, w_n, 's')$$

$$H(z) = \frac{0.1597 \times 10^{-3}}{1 + 0.894995 z^{-1} + 0.404912 z^{-2} + \dots + 0.000235 z^{-6}}$$

$$H(z) = H(s) \Big| s = \frac{z}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

en waflab usar la fórmula bilineal

$$[N \text{ num}, D \text{ den}] = \text{bilinear} (N \text{ num}, D \text{ den}, f_s)$$



$$\omega = \frac{\pi}{T} \tan\left(\frac{\Delta}{2}\right)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T} \tan\left(\frac{\Delta}{2}\right)$$

no drop. 18 usos
 $T=3$

Verificar se valores impares en filtro se verifican

frec. Z (num, den)

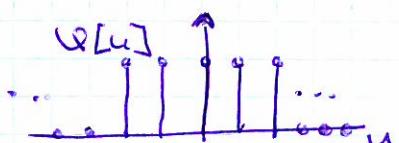
$\text{zilog}_{10}(0.17783)$ respuesta: _____

~~para~~ $\text{zilog}_{10}(0.8925)$ respuesta: _____

Examen teste 2010/2011

1.

a)
 $y[u] = v[u] \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)$



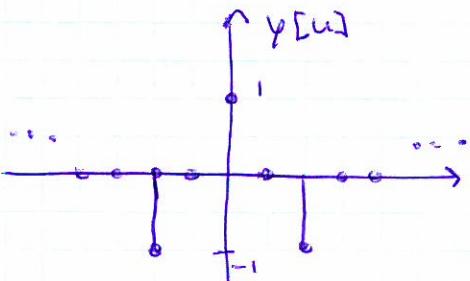
$$y[0] = v[0] \cdot 1 = v[0]$$

$$y[1] = v[1] \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y[2] = v[2] \cdot \cos(\pi) = -v[2]$$

$$y[-1] = v[-1] \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y[-2] = v[-2] \cdot \cos(-\pi) = -v[-2]$$



$$b) Y[n] = \delta[n] \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right) \longleftrightarrow Y(n) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ X(n) + (DTFT) \left(\cos\frac{2\pi}{4}n \right) \right\}$$

propriedade
da convolução

relação entre espelhos
de 2 sinalis sobrepostos
no tempo

$$x[n] = \cos(n_0 n) \longleftrightarrow \pi [\delta(n-n_0) + \delta(n+n_0)] = R(n)$$

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{u=-2}^2 (\delta[u]) e^{-jn u} && \text{cada } \delta[u]=1 \\ &= \sum_{u=-2}^2 e^{-jn u} && \text{cada } \sum_{n=0}^{N-1} R[n] = \frac{1-R^N}{1-R} \\ &= \sum_{u=-2}^2 (e^{-jn})^u \end{aligned}$$

$$\text{u.v. } u \rightarrow u+2 \Rightarrow u = u+2 \quad u = u-2$$

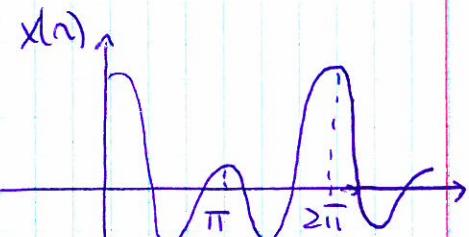
$$\begin{aligned} &= \sum_{u=0}^4 (e^{-jn})^{u-2} \\ &= e^{2jn} \sum_{u=0}^4 (e^{-jn})^u \\ &= e^{2jn} \cdot \frac{1 - e^{-jNn}}{1 - e^{-jn}} = e^{2jn} \cdot \frac{-j\frac{n}{2}}{e^{-j\frac{n}{2}} \left(e^{j\frac{n}{2}} - e^{-j\frac{n}{2}} \right)} \end{aligned}$$

metade desse

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{2jn} \left(e^{j\frac{n}{2}} - e^{-j\frac{n}{2}} \right)}{e^{j\frac{n}{2}} - e^{-j\frac{n}{2}}} \\ &= \frac{e^{j\frac{5n}{2}} - e^{-j\frac{3n}{2}}}{2j \sin\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2j \sin(n\pi/2)}{2j \sin(n\pi/2)}$$

e qd teríos 5 pts c 2 placas cada lado da unidade



pode-se pôr diretamente

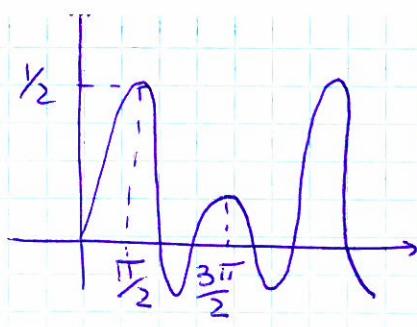
$$Y(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \cdot R(n-\phi) d\phi$$

faz propriedade
na cula

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(X(\phi) \cdot \pi [\delta(n-n_0-\phi) + \delta(n+n_0-\phi)] \right)$$

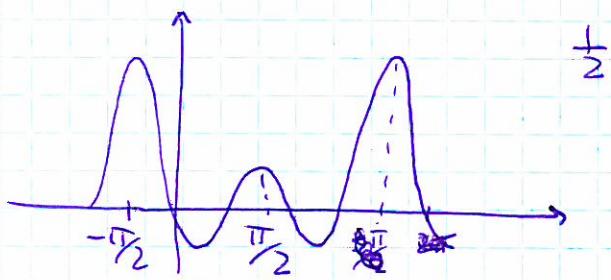
$$= \frac{1}{2} \cdot x(n-n_0) + \frac{1}{2} x(n+n_0)$$

faz a
convolução



$$\frac{1}{2} \times (n - n_0)$$

a função mantém-se
apenas à $\frac{\pi}{2}$ da frente

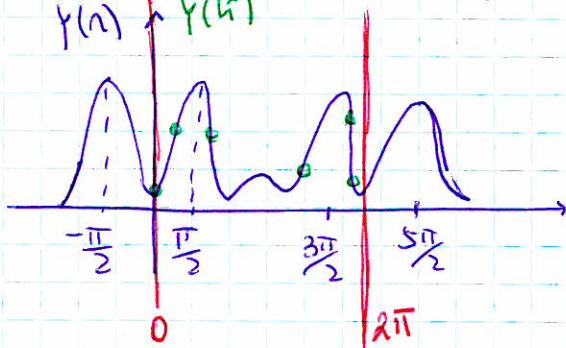


$$\frac{1}{2} \times (n + n_0)$$

Somando as 2 gráficas p^{te} a p^{te} p. temos Y(n)

c) Y(n) tem grande eixo gráfico

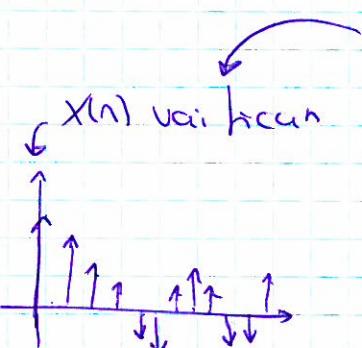
$$Y(n) \rightarrow Y(k)$$



a cota DTFI
avalia DFT

de 0 a 2π temos q colocar
6 p^{te} equidistantes

temos q gerar uma rep. no
domínio discreto o que
é [n] periodizando o sinal
(com período 6)



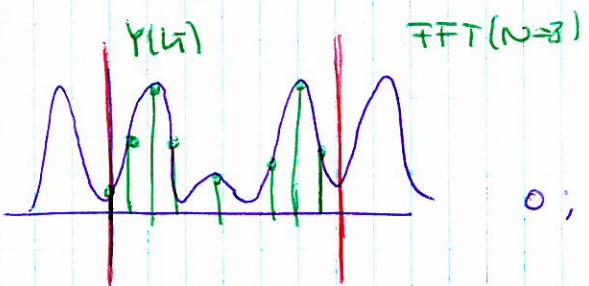
$$\text{os } p^{\text{te}} \text{ são em } k \cdot \frac{2\pi}{6} = k \frac{\pi}{3}$$

- 0
- $\frac{\pi}{3}$
- ~~$\frac{2\pi}{3}$~~
- π
- $\frac{4\pi}{3}$
- $\frac{5\pi}{3}$

} p^{te} onde a DTFI fica representada

d) FFT requieren que ω de $p \leq \bar{\omega} < \omega$ sea potencia de base 2

$$N = 2^k \geq 6 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow N = 8$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$0, \frac{2\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \pi, \frac{10\pi}{8}, \frac{12\pi}{8}, \frac{14\pi}{8}$$

2.

$$a) v(t) = \frac{\omega_1}{\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_1 t}{\pi}\right)$$

pla pede sen aplicado à entrada do sistema

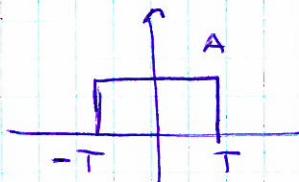
↳ a banda teve $\bar{\omega}$

sen limitada

↳ o espectro deste sinal é um "pulso" retangular → logo é limitado

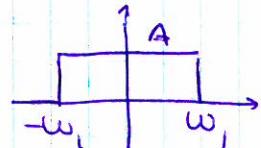
$$v(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t) \leftrightarrow 2\pi v(-\omega) \quad \text{e} \quad \frac{x(t)}{2\pi} \leftrightarrow v(-\omega)$$



$$\leftrightarrow 2AT \text{sinc}\left(\frac{\omega t}{\pi}\right)$$

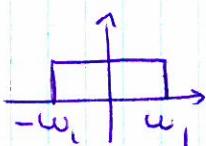
$$\frac{2\Delta\omega}{2\pi} \text{sinc}\left(t \cdot \frac{\omega_1}{\pi}\right)$$



$T \rightarrow$ largura do pulso no domínio do tempo

apd $A = 1$ transformação de $v(t)$

$$v(t) = \frac{\omega_1}{\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_1 t}{\pi}\right) \xleftrightarrow{T.F.} \begin{cases} A & \text{para } -\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



seu pô de pô é de banda limitada

↳ logo pede den amostrado a von $\omega_s \geq 2\omega_1$

NOTA:

se quiser se fazer de banda limitada basta sen aplicar um filtro passa baixa

↳ plasen de banda limitada a T.F.
à pede sen cálculo (à pede m pô oo)

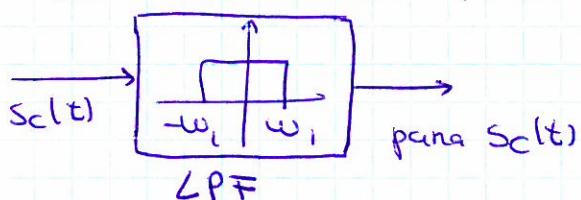
b) O critério de Nyquist tem à ser satisfeita

$$\omega_s > 2\omega_1 \rightarrow \omega_s \text{ é a velocidade angular}$$
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_S} > 2\omega_1 \quad \text{para uma cosseno da freq. angular}$$

$$T_S \leq \frac{\pi}{\omega_1}$$

Note:

que o caso de a respeito à aliasing autêntico ser negativo



c) $S_C(t) = \psi(t - 3T_0) + \psi(t + T_0)$

$$T_0 = ?$$

é dado que existe delay entre t e T_0

$$S[u] : S_C(uT_S) \xrightarrow{\text{período de amostragem}}$$

$$= \psi(uT_S - 3T_0) + \psi(uT_S + T_0)$$

$$S[u] = \psi\left[u - \frac{3T_0}{T_S}\right] + \psi\left[u + \frac{T_0}{T_S}\right]$$

caso é dado que $S[u] = \psi[u - 6] + \psi[u + 2]$

$$\frac{T_0}{T_S} = 2 \Rightarrow T_0 = 2T_S \quad \text{como } T_S \leq \frac{\pi}{\omega_1}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

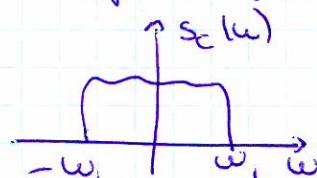
é o atraso considerado

d) $S_C(t) = \psi(t - 3T_0) + \psi(t + T_0)$

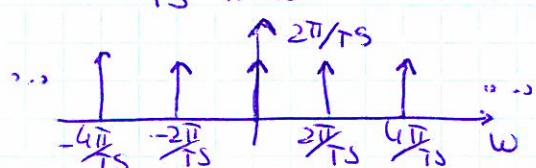
$$S_C(\omega) = X(\omega) e^{-j\omega 3T_0} + X(\omega) e^{j\omega T_0}$$
$$= X(\omega) \left[e^{-j\omega 3T_0} + e^{j\omega T_0} \right]$$

à Rep-C (Ressonância)

$\uparrow S_C(\omega)$



$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_S) \xleftrightarrow{T.F} P(\omega) = \frac{2\pi}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{k2\pi}{T_S})$$



$$S_p(t) = S_c(t) \cdot p(t) \longleftrightarrow S_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} [S_c(\omega) * p(\omega)]$$

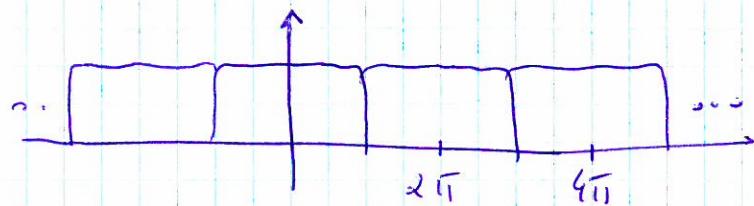
$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_c\left(\omega - \frac{n2\pi}{T}\right)$$

$$\frac{2\pi}{Ts} = \omega_1$$



Por espacos entre beudos $\Rightarrow \omega_B = 2\omega_1$

$$S(n) = S_p(\omega)|_{\omega=n\omega_1}$$



e)

$$\begin{aligned} s[n] &\xrightarrow{\quad} H_1(n) \\ &\xrightarrow{\quad} y[n] : \omega(t-T_0) \\ &= \omega[n-2] \\ &= \omega\left[n - \frac{Ts}{T_0}\right] \end{aligned}$$

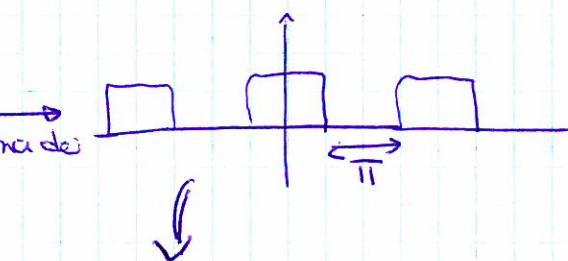
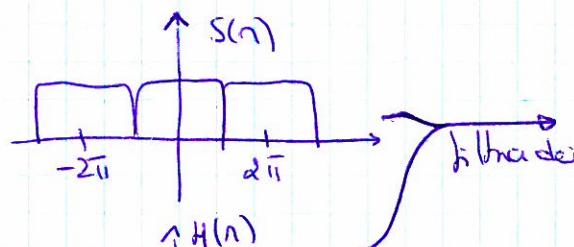
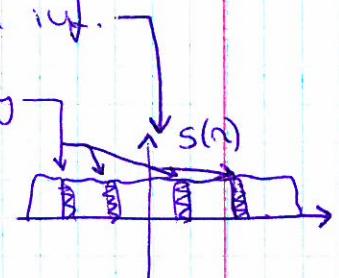
$$\begin{aligned} H_1(n) &= \frac{Y(n)}{S(n)} \\ &= \frac{x(n) e^{\frac{-j\omega n}{T_0}}}{x(n) e^{\frac{-j\omega n}{T_0}} + x(n+1) e^{\frac{-j\omega n}{T_0}}} \end{aligned}$$

f) O pode ser rep. c/ menor p $\xrightarrow{\text{teo}}$ sem q perca inf.

espectro q pode alongar se q media aliaturug angular q pende de inf. é impossivel

qlo diminuir a pend.

seja q tem q ser filtrado para baixo p um filtro de $\frac{\pi}{2}$



posso terem q jà q media aliaturug mas pendente inf. acima de $\frac{\pi}{2}$

$$3. \quad y[u] = 0,5y[u-1] + 2x[u] + 0,25x[u-1]$$

$$a) \quad Y(z)[1 - 0,5z^{-1}] = X(z)[2 + 0,25z^{-1}]$$

$$\overset{u}{\text{a.u}[u]} \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{2 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} + 0,25z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}$$

$$u[u] = 2 \cdot (0,5)^u u[u] + 0,25 (0,5)^{u-1} u[u-1]$$

$$b) \quad Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$= \frac{2 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{A}{1 - 0,5z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$A = \left. \frac{2 + 0,25z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \right|_{z^{-1}=2} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{15}{2}$$

$$B = \left. \frac{2 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}} \right|_{z^{-1}=3} = -\frac{11}{2}$$

$$y[u] = \frac{15}{2} (0,5)^u u[u] - \frac{11}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^u u[u]$$

$$c) \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{4} \cdot z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4} \cdot z^{-1})^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) + (1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) + (1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2(2 + 0,25 \cdot z^{-1})} = \frac{A}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{2 + 0,25z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{A(2 + 0,25z^{-1}) + B(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(2 + 0,25z^{-1}) + C(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2(2 + 0,25 \cdot z^{-1})}$$

$$\begin{cases} 2A + 2B + C = 1 \\ \frac{A}{4} - \frac{B}{4} - \frac{C}{2} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{B}{16} + \frac{C}{16} = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{5}{3} \\ C = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$b[u] = -(u+1) \left(\frac{1}{4}\right)^u u[u] + \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^u u[u] - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{8}\right)^u u[u]$$

$$\frac{c}{2+0,25z^{-1}} = \frac{\frac{c}{2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} \quad \text{pla corresponde a una trancat con hecha}$$

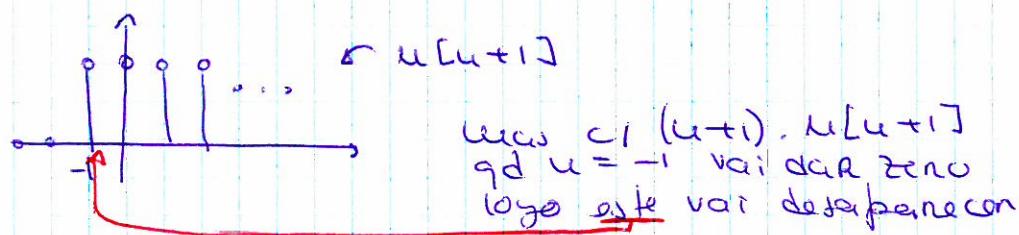
Nota

Se proponen $u+1$ que dizen q una trancat. tenho q multiplicar p/ z

$$(1+u) a^{u-1+1} u[u+1] \leftrightarrow \frac{z^{-1} \times z}{(1-az^{-1})^2}$$

pro multiplican p/ z
corresponde a adicuiten a func
una unida

$$\hookrightarrow (u+1) a^u u[u+1] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$$



$$(u+1) a^u u[u+1] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$$

Problema 8

Cuidadone un sinal de audio comencial digitalizado q
fui amostrado a 8kHz. Pretende-se compac tan a representante
deste sinal por um factor de 4. Projete um filtro adequadado
a este processo q apresenta as seguintes especificações:

- 1) banda de transis (B) 500Hz
- 2) ganho max da banda de rejei 0,001
- 3) " min " passante 0,9

use o metodo q achar mais conveniente. justifique

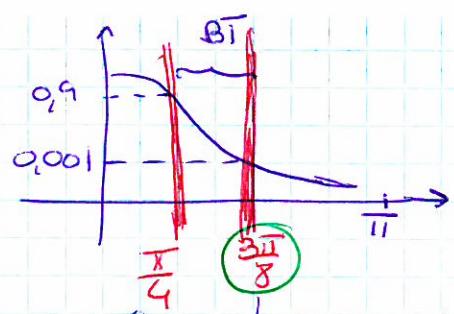
1º tipo de filtro se tratar?

↓
filtro passa baixo a $\frac{\pi}{4}$
(LPF)

$$8\pi Hz \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$8\pi Hz \rightarrow \psi$$

$$\omega = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$



topo da
banda de
transição

topo da banda
de rejeição

2º que método usar?

Usar-se o método da transformada bilinear (TB) p/ eler o efeito de atrasos causados/ ao método da invariância de resposta ao impulso (TDTI)

3º tipo de filtro

↳ Butterworth (se dermos este)

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_c}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{j\frac{\pi}{4}}{j\omega_c}\right)^2} = 0,9^2$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{j\frac{3\pi}{8}}{j\omega_c}\right)^2} = 0,001^2$$

$$\left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{j\frac{\pi}{4}}{j\omega_c}\right)^2} = 0,9^2 \right.$$

$$\left. \frac{1}{1 + \left(\frac{j\frac{3\pi}{8}}{j\omega_c}\right)^2} = 0,001^2 \right.$$

$$0,9 \leq |H(\omega)| \leq 1 \quad \text{para } |\omega| \leq \frac{\pi}{4}$$

$$|H(\omega)| \leq 0,001 \quad \text{e} \quad \frac{3\pi}{8} \leq |\omega| \leq \pi$$

pois p/ a frequêcia de corte

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{n\pi}{2}$$

$$0,9 \leq |H(\omega)| \leq 1 \quad \text{para } |\omega| \leq \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \leftarrow n = \frac{\pi}{4}$$

$$|H(\omega)| \leq 0,001 \quad \text{e} \quad \frac{2}{T} \tan\left(\frac{3\pi}{16}\right) \leq |\omega| < \infty$$

$$\leftarrow n = \frac{3\pi}{8}$$

Consideremos $T=1$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \left| \frac{z + \tan(\frac{\pi}{8})}{w_c} \right|^{2N} = \left| \frac{1}{0,9} \right|^2 \\ 1 + \left(\frac{z + \tan(\frac{3\pi}{16})}{w_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,001} \right)^2 \end{array} \right.$$

Dividimos essa eq.
pela outra e w_c
vai desaparecer

$$\frac{\left(\frac{1}{0,001} \right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{0,9} \right)^2 - 1} = \underbrace{\left(\frac{2 \tan(\frac{3\pi}{16})}{2 \tan(\frac{\pi}{8})} \right)^{2N}}_{\text{base}}$$

$$\log_b y = \frac{\log y}{\log b}$$

$$2N = \frac{\log \left(\frac{\left(\frac{1}{0,001} \right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{0,9} \right)^2 - 1} \right)}{\log \left(\frac{\tan \frac{3\pi}{16}}{\tan \frac{\pi}{8}} \right)}$$

$$N = 15,9623 = 16$$

agora substituimos w_c expressão pela linha w_c :

$$w_c = \frac{2 \tan(\frac{3\pi}{16})}{\left[\left(\frac{1}{0,001} \right)^2 - 1 \right]^{1/32}} = 0,8678$$

$$H(s) = \frac{h}{(s-s_1) \cdots (s-s_{16})}$$

$$s_{1,2} = w_c \left(\cos \left(\frac{17\pi}{32} \right) \pm j \sin \left(\frac{17\pi}{32} \right) \right)$$

$$s_{3,4} = w_c \left(\cos \left(\frac{19\pi}{32} \right) \pm j \sin \left(\frac{19\pi}{32} \right) \right)$$

⋮

$$s_{15,16} = w_c \left(\cos \left(\frac{31\pi}{32} \right) \pm j \sin \left(\frac{31\pi}{32} \right) \right)$$

$$h \in H(s) \Big|_{s=0} = 1 \Rightarrow h = s_1 \cdot s_2 \cdots s_{16}$$

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{z}{T}} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = 1$$

$$0,9 \leq |H(\omega)| \leq 1$$

$$|\omega| \leq \frac{\pi}{4}$$

$$|H(\omega)| \leq 0,001$$

$$\frac{3\pi}{8} \leq |\omega| \leq \pi$$

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$$

$$0,9 \leq |H(\omega)| \leq 1$$

$$|H(\omega)| \leq 0,001$$

$$|\omega| \leq \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\frac{2}{T} \tan\left(\frac{3\pi}{16}\right) \leq |\omega| \leq \infty$$

Resolver em matlab

$$[N, \omega_u] = \text{butbed}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, 20 \log_{10}(0,9), 20 \log_{10}(0,001)\right)$$

↑
orden
↑
freq.
de conte

↑
tempo de
banda
passante

↑
gaucho
min de
banda
passante

↑
gaucho
de banda
de rejeição

Resultado

$$N=16$$

$$\omega_u = 0,2606 \leftarrow \text{equivale a } 0,2606 \times \pi$$

$$2 \tan(\omega_u + \pi/2)$$

$$\text{resultado} = 0,8678$$

gerar o filtro em termos de s (transf. Laplace)



usar a função butter ($N, \omega_u, 's'$) → precisamos explicitamente ter o filtro em s para dps fazer a transd. bilinear

termos q colocar ω_u em rad/s

$$\omega_u = 0,8678$$

$$\hookrightarrow \bar{\omega} \text{ em freq de } \pi \rightarrow \omega_u = 0,2606$$

$$[B, A] = \text{butter}(N, 2 * \tan(\omega_u + \pi/2), 's')$$

$$H(s) = \frac{b}{(s-s_1) \dots (s-s_{16})} = \frac{0,1035}{s^{16} + 8,8536 s^{15} + \dots + 0,1035}$$

Aphican para bilinear

é preciso fng de amostragem p̄ teusos $\frac{z}{T}$

$$\Rightarrow S = \frac{z}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

[Numd, Dend] = bilinear (Num, Den, Ts)

↓
numerador
eus

↓
denominador
eus

[Numd, Dend] = bilinear (B, A, 1)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} H(z) = \frac{\alpha + 0,0003 \times 10^{-3} z^{-1} + 0,0115 \times 10^{-3} z^{-2} + \dots + \alpha z^{-16}}{1 - 7,6519 z^{-1} + 28,7137 z^{-2} + \dots + 0,002 z^{-16}}, \alpha \approx 0$$

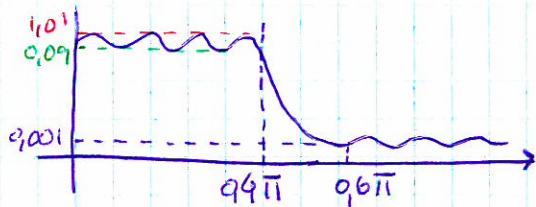
$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)}$$

Note

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{6}$$

$$y[u] = 7,6519 y[u-1] - 28,7137 y[u-2] + \dots - 0,0024 y[u+6] \\ + \alpha y[u] + 0,0003 \times 10^{-3} \cdot 4 y[u-1] + 0,0115 \times 10^{-3} y[u-2] + \dots + 0,1035 + \alpha y[u-16] \\ a y - c y = y$$

Exemplo 3 (map. 19)



filtro chebyshov dado por: $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{j\omega}{j\omega_c} \right)^2}$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{j\omega}{j\omega_c} \right)^2}$$

teusos q̄ fazeen $\omega = \frac{z}{T} \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{j\omega}{j\omega_c} \right)^2}$$

teusos q̄ linan 2 eq. plas os
2 telpos de beuds
la cumo de butterworth

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{j\omega}{0,4\pi} \right)^2} = (0,99)^2$$

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{j\omega}{0,6\pi} \right)^2} = (0,001)^2$$

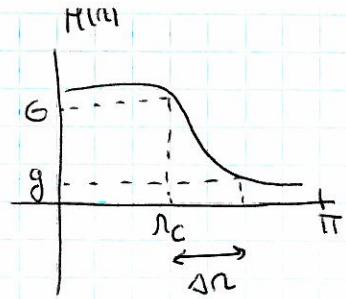
$$\frac{1}{1 + \epsilon^2} = (0,99)^2$$

fazeen us teusos c/ estes ducis

Síntese:

Butterworth

$$|H(n)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$



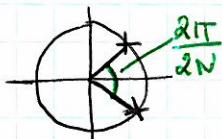
Passo:

1) Determinar os zeros e os polos do filtro (G, g) ω_c e N (butter)

2) 2.1 IRP (Involução da resposta a impulso) $n = \frac{w}{T}$

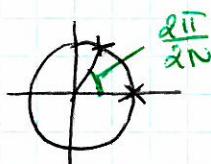
↳ Desenhar um círculo de raio ω_c com $2N$ pôlos igualmente espaçados no plano s

a) N par



raio w_c

b) N ímpar

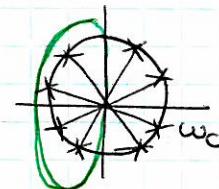


raio w_c

2.2. T-B (Transformação bilinear)

$$w = \frac{2}{T} \tan \frac{n}{2} \quad \text{--- diferente de 2.1}$$

pla os
2 métodos $\Rightarrow H(s) = \frac{k}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_N)}$



k tem o valor que o ganho de $H(s)$ é unitário

$$\hookrightarrow k = s_1 \times s_2 \times \dots \times s_N$$

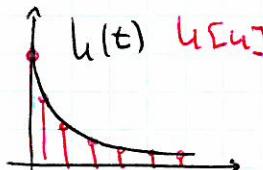
logarítmica
aproximando estes

3) obter $H(z)$ através de $H(s)$

3.1 IRP \rightarrow mais fácil de implementar mas com distorção

Expansão de Taylor para polinomios

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad \longleftrightarrow \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T}{1 - e^{s_k T} \cdot z^{-1}}$$



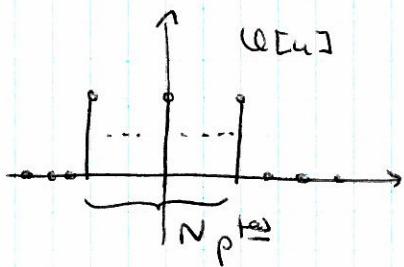
teve à ter decupina assim o sistema
ser estável (parte real +ω < 0)

3.2. TG → melhor p̄t elita o algoritmo

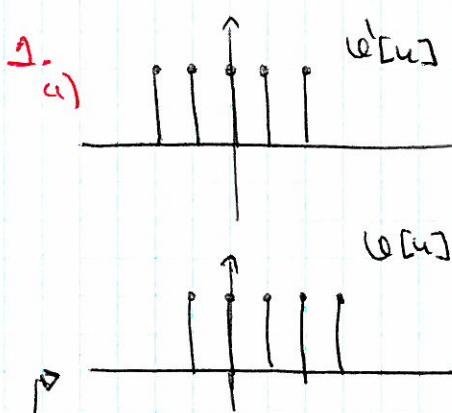
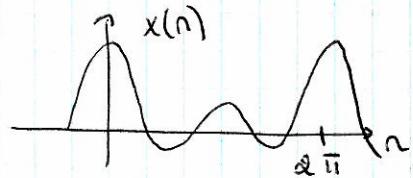
- ↳ no entanto a relação entre n e u deixa de ser linear
- ↳ dificulta a visualização do w
- ↳ temos que aplicar a unidade de projeto para calcular ω igual

$$H(z) = H(\omega) \quad | \quad s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

teste 1A - dolo



$$\longleftrightarrow x(n) = \sum_{u=-\frac{N_p}{2}+1}^{\frac{N_p}{2}} u[n] e^{-jn\omega} = \frac{\sin(N\pi/2)}{\sin(\pi/2)}$$

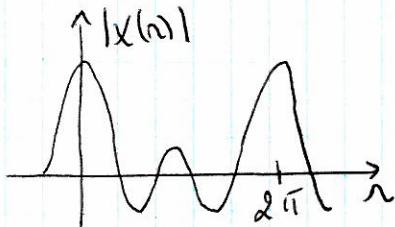


$$\longleftrightarrow x'(n) \quad x'(n) = \frac{\sin((5\pi/2)n)}{\sin(\pi/2)}$$

equivalente a $u'[n]$ mas deslocado uma unidade

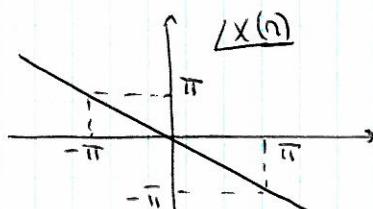
$$u[n] = u'[n-1] \xrightarrow{\text{DTFT}} x(n) = x'(n) \cdot e^{-jn} = \frac{\sin((5\pi/2)(n-1))}{\sin(\pi/2)} \cdot e^{-jn}$$

$$|x(n)| = x'(n)$$



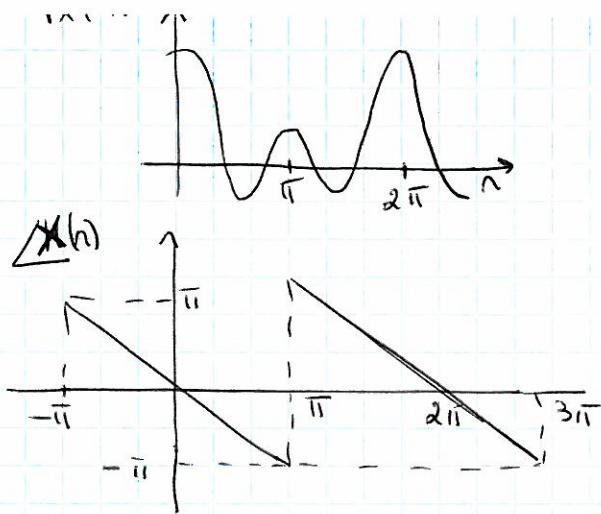
apenas termos finos por causa do e^{-jn}

$$\angle x(n) = -n$$

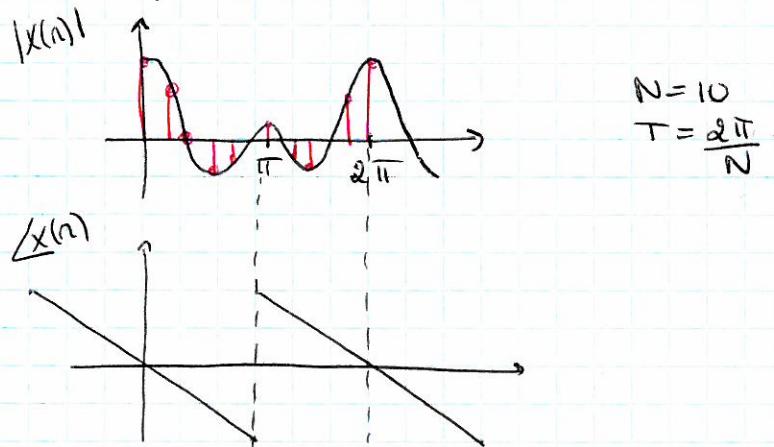


$$x(n) = |x(n)| \cdot e^{j\angle x(n)}$$

b) DFT



DFT → tentar q̄ periodizar o sinal → q̄ maior o período
 mais p̄ de tems
 10 p̄ tems
 ou p̄ igualmente espaço das
 em um intervalo do 2π
 melhor representação
 de sinal



c) $2^4 = 16 > 10$ pontos (os p̄ tems da FFT tem q̄ ser resultado
 de uma potência de base 2)
 (representar-se no gráfico de mesma forma q̄ a DFT)

NOTAS:

DFT $O(N^2)$ → p̄ calc. $Np^{\frac{N}{2}}$ $O \rightarrow$ openef
 FFT $O(N \log_2 N)$ → p̄ calc. $Np^{\frac{N}{2}}$
 u° de openef

2.

a) Recta de declive -3 → $\angle x(n) = -3n$

$$x(n) = \begin{cases} e^{-3n} \times 1 & , |n| \leq w \\ 0 & , |n| > w \end{cases}$$

$$\mathcal{G}[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{-j\omega u} d\omega \quad C/X(\omega) = 1$$

$$= \frac{\omega}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\pi} u\right)$$

$$\mathcal{G}[u] = \mathcal{G}[u-3] \Rightarrow X(n) = |x(n)|$$

$$x(n) = |x(n)| \cdot e^{-3jn}$$

$$\mathcal{G}[u] = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}(u-3)\right)$$

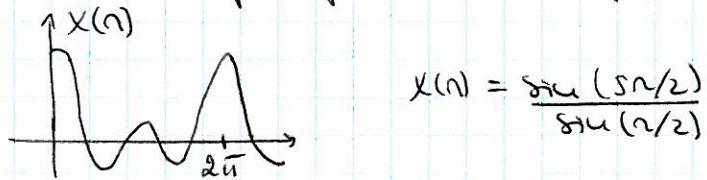
↑ rigidez
a fase do sinal
é calc. T.F
(considerando a
fase nula)

mas como
tem fase negativa,
o $\mathcal{G}[u]$ vai
contar a fase
à frio rigidez

5) Dualidade:

Um sinal \mathbf{A} passa se houver uma transformada \mathbf{B} ,
então um sinal \mathbf{B} tem uma transformada \mathbf{A}

A propriedade da dualidade só se verifica para sinais discretos
(o que é da propriedade da dualidade pois a T.F de um
sinal discreto é sempre periódico de período 2π caso por ex.:

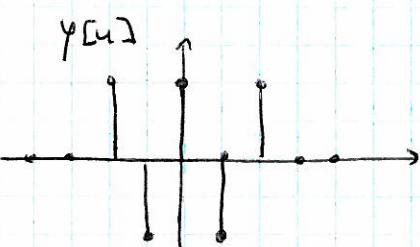
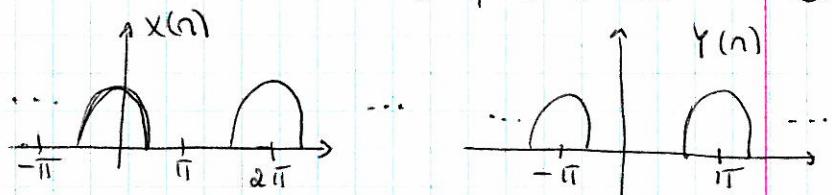


Logo vê-se temos um sinal desse tipo

$$\mathcal{G}[u] = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} u\right)$$

$$\text{c)} \quad y[n] = (-1)^n \mathcal{G}[u] \rightarrow Y(n) = x(n-\pi)$$

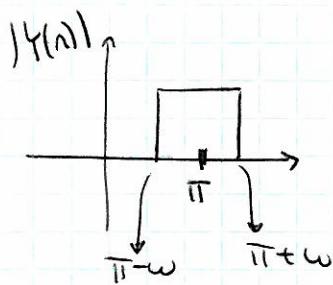
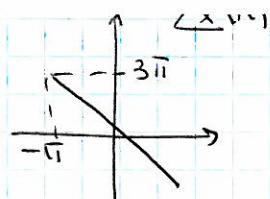
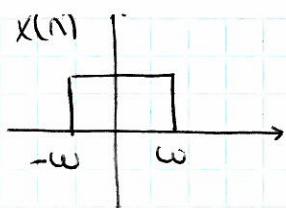
↑ função $x(n)$ centrada em π



$$x(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}[u] e^{-ju n}$$

$$x(n-\pi) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}[u] e^{-j(n-\pi)u}$$

$$\begin{aligned} Y(n) &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} y[h] e^{-jh n} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} (-1)^h \mathcal{G}[u] e^{-jh(n-\pi)} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} (-e^{j\pi})^h \mathcal{G}[u] e^{-j(n-\pi)u} \\ &\stackrel{\text{c.g.d.}}{=} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}[u] e^{-j(n-\pi)u} \end{aligned}$$



funcionamiento

Nota:
se invierte
 $y[n] = (-1)^n u[n-1]$
para alternar
fase

3.

$$y[n] = 0.5 y[n-1] + 2.0 u[n] + 0.25 u[n-1]$$

$$a) H(z) = \frac{2+0.25z^{-1}}{1+0.5z^{-1}} = 2 \cdot \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + 0.25 \cdot \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \cdot z^{-1}$$

$$u[n] = 2 \cdot (0.5)^n u[n] + 0.25 \cdot (0.5)^{n-1} u[n-1]$$

Exemplo:

$$v(t) = 1 + \delta(t) + \cos(\omega_0 t)$$

$$x(\omega) = 2\pi \delta(\omega) + 1 + \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Nota:

$$\textcircled{1} \quad x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\textcircled{2} \quad v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega) e^{j\omega t} dt$$

Substituir na \textcircled{1} em $v(t)$ p/ I \rightarrow ir se cadastrar resultados
var-se para a expressão \textcircled{2} e aplicar-se impulso ($\delta(\omega)$) e
multiplicar-se c/ $e^{j\omega t}$

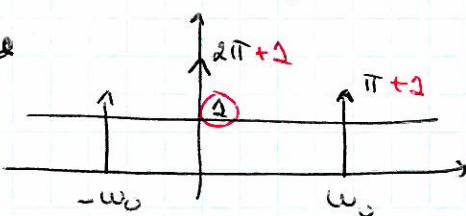
\rightarrow aplicar-se $\delta(\omega)$ sempre q/ queremos
 $x(\omega)$ onde $v(t)$ é \cos

$$\delta(\omega) = \omega$$

\hookrightarrow para todos ω

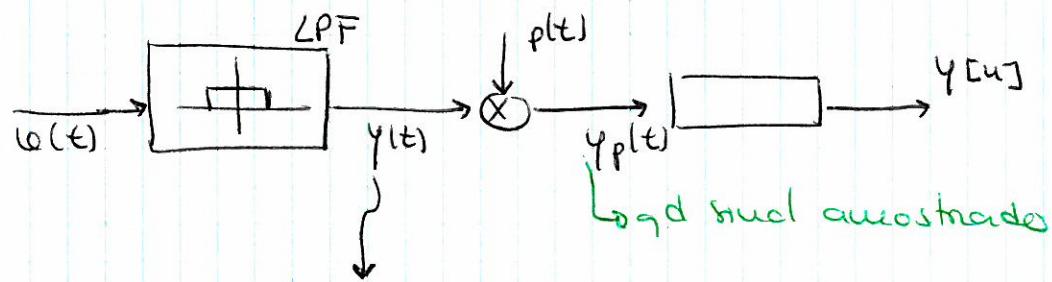
cossos excepto qd $\omega = 1$

Ex:

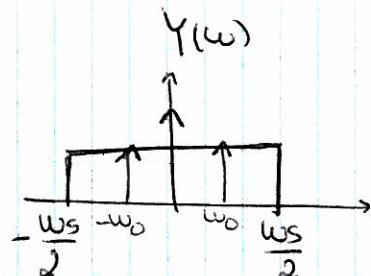


é a parte do anotar o que
deve aplicar um filtro passa
baixo p/ longe de banda e/
muito grande

$X(n) \rightarrow T$. F de um sinal discreto



Log da saud aerostrada



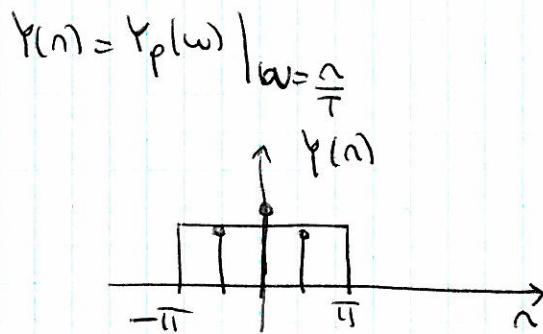
$$n_0 = w_0 T_s$$

→ Causa do efeito da amostragem
d'freq. de Nyquist

$$Y_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y\left(w - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

$\uparrow Y_p(w)$

São repetições do $Y(w)$
centralizadas em $\frac{2\pi}{T}$



Valores continuos a serem
periodizados de 2π em 2π ,
mas só rep. a res. est.



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos

- Método da invariância da resposta impulsional (ver aula 10 de P. S.)

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

$$h_t(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

\xleftarrow{z}

$$h_t[n] = h_t(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u[n] = \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n u[n]$$

Exemplo 1: Consideremos o projeto de um filtro digital a partir de um filtro de Butterworth pelo método da invariância da resposta impulsional. As especificações do filtro digital são:

$$0.8925 \leq |H(\Omega)| \leq 1; \quad 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi$$

Considerando $T=1$ as especificações do filtro analógico são?($w=Q\Omega T$)

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{0.2\pi}{w_c} \right)^2 N \\ 1 + \left(\frac{0.3\pi}{w_c} \right)^2 N \end{cases} = \left(\frac{1}{0.8925} \right)^2$$

$\xrightarrow{\text{Resolução}}$

$$\begin{cases} N = 5.8858 \\ w_c = 0.70474 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{Resolução}} \quad N = 6 \quad \xrightarrow{\text{Resolução}} \quad w_c = 0.7032$$

15

31/6/2012

Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI Universidade do Minho)



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos

- Método da transformação bilinear (ver a aula 10 de P. S.)

$$s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \quad \Omega = 2\arctan \frac{wT}{2} \quad w = \frac{2}{T} \tan(\Omega/2)$$

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{2\tan(0.15\pi)}{w_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.8925} \right)^2 \\ 1 + \left(\frac{2\tan(0.15\pi)}{w_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783} \right)^2 \end{cases}$$

Exemplo 2: Consideremos o filtro digital especificado anteriormente e sintetizemo-lo agora, do mesmo modo, a partir de um filtro de Butterworth mas usando método da transformação bilinear. As especificações do filtro digital são então as mesmas

$$\begin{aligned} 0.8925 &\leq |H(\Omega)| \leq 1; \quad 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi \\ |H(\Omega)| &\leq 0.17783; \quad 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi \\ |H_s(jw)| &\leq 0.17783; \quad \frac{2}{T} \tan \frac{0.3\pi}{2} \leq w \leq \infty \end{aligned}$$

As especificações do filtro analógico são agora

$$0.8925 \leq |H_s(jw)| \leq 1; \quad 0 \leq w \leq \frac{2}{T} \tan \frac{0.2\pi}{2}$$

$$|H_s(jw)| \leq 0.17783; \quad \frac{2}{T} \tan \frac{0.3\pi}{2} \leq w \leq \infty$$



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos

- Método da invariância da resposta impulsional (cont.)

$$H(s) = \frac{-0.183 \pm 0.679j}{j + 0.5640s + 0.4945}(s^2 + 0.995s + 1.3585s + 0.4945)$$

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1} - 2.1428z^{-1} + 1.455z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2} + 1 - 1.0691z^{-2} + 0.3699z^{-4} - 1 - 0.9972z^{-4} + 0.2507z^{-6}}$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

\xleftarrow{z}

$$h_t[n] = h_t(nT) = \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n u[n]$$

16

31/6/2012

Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI Universidade do Minho)



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos

- Considerando $T=1$

Dividir um pelo outro e

$$\log_b y = \frac{\log Y}{\log b}$$

$$N = \frac{\log \left(\frac{(1)^2 - 1}{(0.89)^2 - 1} \right)}{2 \log \left(\frac{\tan(0.15\pi)}{w_c} \right)} = 5.3046$$

$$w_c = 0.76622 \quad N = 6$$

$$H_o(s) = \frac{s^2 + 0.3996s + 0.5871}{(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)}$$

$$H(z) = \frac{0.00073781 + z^{-1}}{(1 - 1.2680z^{-1} + 0.7051z^{-2})(1 - 1.0106z^{-1} + 0.3383z^{-2})(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}$$

17

31/6/2012

Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI Universidade do Minho)

Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos

- Exemplo 3: Consideremos o projecto de um filtro digital cujas especificações são as seguintes:

$$|H(\omega)| \leq 1.01, \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.4\pi$$

$$|H(\omega)| \leq 0.001, \quad 0.6\pi \leq |\omega| \leq \pi$$

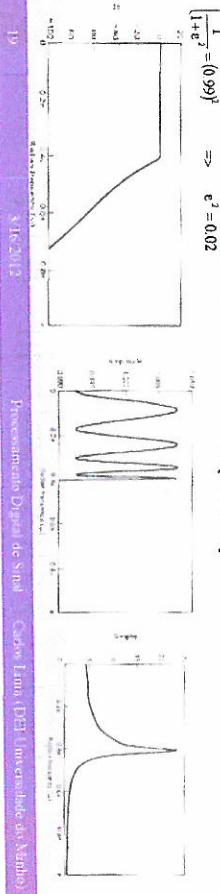
1) Aproximação de Butterworth

$$N = \frac{2 \log \frac{|H(\omega)|}{|H(\omega_c)|}}{\tan(0.3\pi)} = 13.85 \Rightarrow N = 14$$



2) Aproximação Chebyshev

$$\left| \frac{1 + e^{j\omega T_p^2}}{1 + e^j\omega} \right|^2 = \left(\frac{1}{0.001} \right)^2 \Rightarrow T_p^2(\alpha) = g^2 \Rightarrow N = \frac{\log(g)}{\log(g) + \sqrt{g^2 - 1}} = 4.15 = 7.54 \Rightarrow N = 8$$



19 31/6/2012 Processamento Digital de Sinal - Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos

Transformações de Freqüência em filtros passa-baixo (LPF)

$H(z) = H_p(z) \Big|_{z=1-e^{-j\omega}}$

- Se H_p é racional, causal e estável e pretendemos o mesmo para $H(z)$ então
 - $G(z^{-1})$ deve ser racional em z^{-1} .
 - O interior da circunferência de raio unitário no plano Z deve ser mapeada para o interior da circunferência de raio unitário no plano z .
 - O mesmo para a circunferência de raio unitário.
- Sejam θ e Ω os ângulos nos planos Z e z . Então pela última condição

$$|\alpha_z| < 1$$

$e^{-j\theta} = \left| G(e^{-j\Omega}) \right| e^{j\angle G(e^{-j\Omega})} \Rightarrow \left| G(e^{-j\Omega}) \right| = 1 \Rightarrow Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^M \frac{z^{-1} - \alpha_k^{-1}}{1 - \alpha_k z^{-1}}$

LPF \rightarrow LPF

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad \alpha = \frac{\sin(\theta - \Omega_p)/2}{\sin(\theta_p + \Omega_p)/2}$$

$$e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\theta - \alpha}}{1 - \alpha e^{-j\theta}} \quad \Omega = \arctan \left[\frac{(-\alpha^2) \sin \theta}{2 + (\Omega + \alpha^2) \cos \theta} \right]$$

Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos

3) Aproximação elíptica

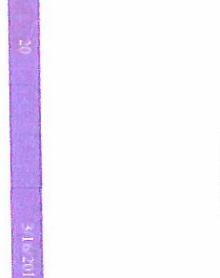
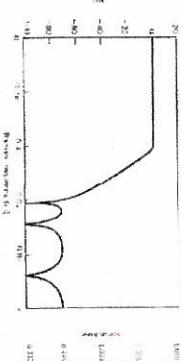
$$|H_p(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + e^{j\omega_p} U_p \left(\frac{j\omega_p}{\mu \nu_p} \right)} \quad N = \frac{K(k) K \left(\sqrt{1 - k^2} \right)}{K(k_p) K \left(\sqrt{1 - k_p^2} \right)} \quad K(x) = \frac{\pi \int_0^x \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}}}{\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}}} \quad k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad k_p = \sqrt{\frac{\varepsilon}{A^2 - 1}}$$

4) Aproximação de Butterworth

$$\frac{1}{1 + e^j\omega} = (0.99)^2 \Rightarrow e^j\omega = 0.02 \quad \text{Função elíptica (matlab)}$$



$N = 6$



20 31/6/2012 Processamento Digital de Sinal - Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)

Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos

Síntese de qualquer filtro a partir de um LPF

TABLE 11. TRANSFORMATIONS FROM ANALOG DIGITAL FILTER DESIGN TO ANALOG		
1. $\omega_p = 1/\Omega_p$	Transformação	Novo filtro Design z transform
$\omega_p \gg \omega_s$	$Z = \frac{z - 1 - j\omega_s}{z - 1 + j\omega_s}$	$\omega_p = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}$
$\omega_p \ll \omega_s$	$Z = \frac{z - 1 - j\omega_p}{z - 1 + j\omega_p}$	$\omega_p = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}$
$\omega_p \approx \omega_s$	$Z = \frac{z - 1 - j\omega_p}{z - 1 + j\omega_p}$	$\omega_p = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}$

$\omega_p = \text{desired cut-off frequency}$
 $\omega_s = \text{stop-band cut-off frequency}$

$\omega_p = \text{desired cut-off frequency}$
 $\omega_s = \text{stop-band cut-off frequency}$

$\omega_p = \text{desired cut-off frequency}$
 $\omega_s = \text{stop-band cut-off frequency}$

$\omega_p = \text{desired cut-off frequency}$
 $\omega_s = \text{stop-band cut-off frequency}$

$\omega_p = \text{desired cut-off frequency}$
 $\omega_s = \text{stop-band cut-off frequency}$

21 31/6/2012 Processamento Digital de Sinal - Carlos Lima (DEI - Universidade do Minho)



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



Síntese de filtros IIR a partir de filtros analógicos



-**Exemplo 4:** Consideremos o projecto do filtro digital cujas especificações são dadas nos exemplos 1 e 2. Confirme que o filtro digital Chebyshev tipo I sintetizado pelo método da transformação bilinear é dado por

$$H_p(z) = \frac{0.001856(z + z^{-1})}{(z - 1.5548z^{-1} + 0.6493z^{-2})(z - 1.4996z^{-1} + 0.8482z^{-2})}$$

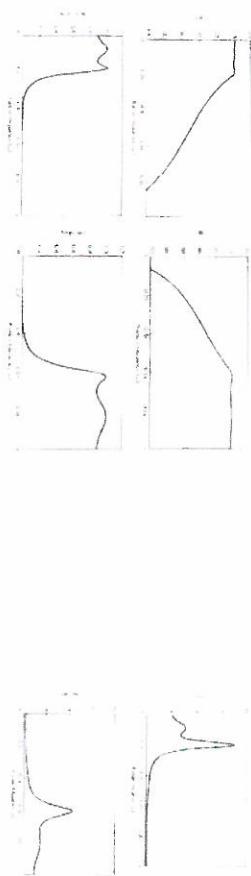
$$|H_p(\theta)| \leq 0.17783, \quad 0.3\pi \leq |\theta| \leq \pi$$

$$0.8925 \leq |H_p(\theta)| \leq 1, \quad 0 \leq |\theta| \leq 0.2\pi$$

Suponha que se pretende sintetizar um filtro passa-alto (HPF) a 0.6π

$$\alpha = \frac{\cos[(0.2\pi + 0.6\pi)/2]}{\cos[(0.2\pi - 0.6\pi)/2]} = -0.38197$$

$$H(z) = H_p(z) \frac{z^{1.5548} - 0.024245(z + z^{-1})}{z^{1.4996} - 0.024245(z + z^{-1})} = \frac{(z - 1.0415z^{-1} + 0.4019z^{-2})(z - 0.5661z^{-1} + 0.7657z^{-2})}{(z - 1.5548z^{-1} + 0.6493z^{-2})(z - 1.4996z^{-1} + 0.8482z^{-2})}$$



- TPC

- Execute em Matlab o exemplo 3 (transparência 19). Use a função para representar e resposta em frequência do sistema e verifique se o sistema cumpre ou não as especificações (ripple na banda passante e ganho na banda de rejeição)



Síntese de filtros FIR

Filtros IIR

- Vantagem
- Síntese a partir de filtros analógicos
- Desvantagem
- Distorção (fase não linear)

Filtros FIR (método das janelas)

- As descontinuidades no domínio das frequências implicam respostas impulsoriais de duração infinita e não causais. A ideia do método das janelas é truncar a resposta impulsional do sistema discreto.

$$h_d[n] \xrightarrow{\text{T.F.}} H_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\Omega n} \quad h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Truncando a resposta impulsional do filtro aos $(M+1)$ pontos

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} \quad h[n] = h_d[n]w[n] \quad H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W(\Omega - \theta) d\theta$$

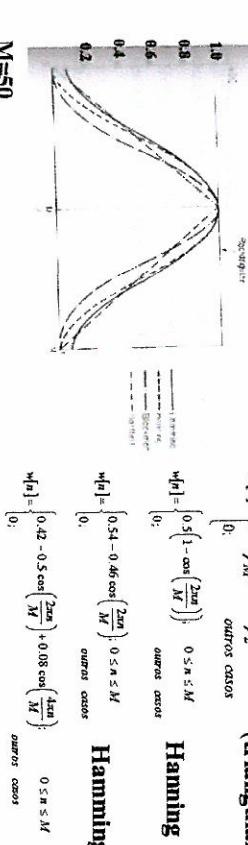
24



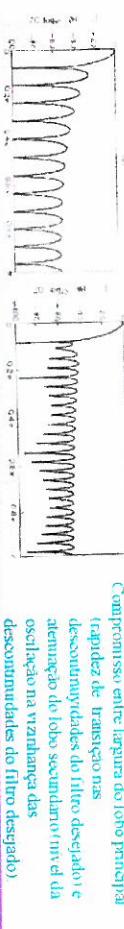
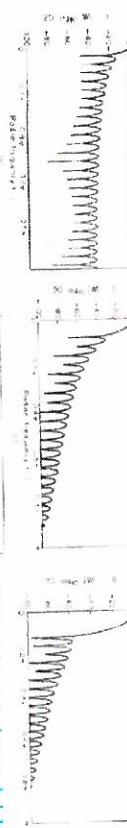
Síntese de filtros FIR



Outras Janelas



M=50



- Vejamos que da simetria das janelas em torno do seu ponto médio resulta sempre um filtro de fase linear dado que a T.F. da janela é uma função real e par:

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W(\Omega) = W(\Omega)e^{-j\Omega M/2}$$

$$h_d[M-n] = h_d[n] \quad \Rightarrow \quad H_d(\Omega) = H_d(\Omega)e^{-j\Omega M/2}$$

Função real

$$H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W(\Omega - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)e^{-j\Omega M/2}W(\Omega - \theta)e^{j(\Omega - \theta)M/2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W(\Omega - \theta) e^{-j\Omega M/2} d\theta$$

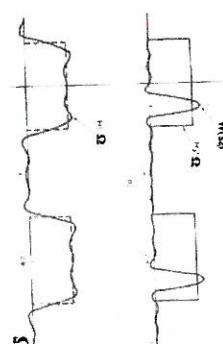
25



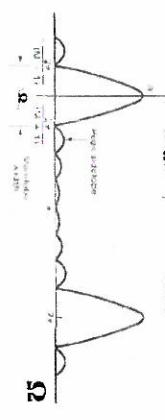
Síntese de filtros FIR

Janela rectangular

$$W(\Omega) = \sum_{n=0}^M e^{-jn\Omega} \approx \dots = e^{-j\Omega M/2} \frac{\sin\left[\frac{M+1}{2}\Omega\right]}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$



$$\Rightarrow H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W(\Omega - \theta) d\Omega$$



25



Síntese de filtros FIR



Comparação das características das janelas

Tabela 1.2 Comparação das características das janelas

Janela	Período de janela	Máximo valor da janela	Variação de fase	Resposta impulsional	Resposta em frequê- ncia
Rectangular	1	1	0	Infinita	Rectangular
Raised-Cos²	1	1	0	Infinita	Rectangular
Sinc	1	1	0	Infinita	Rectangular
Hamming	1	0.54	0	Infinita	Rectangular
Hanning	1	0.75	0	Infinita	Rectangular
Bartlett	1	1	0	Infinita	Rectangular

- Vejamos que da simetria das janelas em torno do seu ponto médio resulta sempre um filtro de fase linear dado que a T.F. da janela é uma função real e par:

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W(\Omega) = W(\Omega)e^{-j\Omega M/2}$$

$$h_d[M-n] = h_d[n] \quad \Rightarrow \quad H_d(\Omega) = H_d(\Omega)e^{-j\Omega M/2}$$

Função real

27



Síntese de filtros FIR

-Exemplo 5 : Consideremos o filtro passa-baixo de fase linear dado por:

$$H_p(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega M/2}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad h_p[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{-jn\Omega/2} e^{-j\Omega M/2} d\Omega = \frac{\sin\left(\left(n - \frac{M}{2}\right)\Omega_c\right)}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)}, \quad -\infty < n < +\infty$$

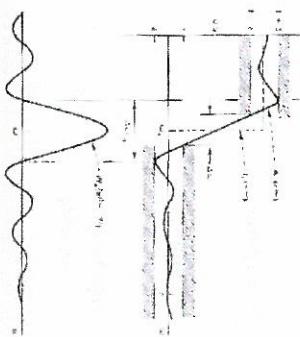
Mostra-se facilmente que $h_p[M-n] = h_p[n]$

Pelo que

$$h[n] = \frac{\sin\left(\left(n - \frac{M}{2}\right)\Omega_c\right)}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)} w[n]$$

Será sempre um sistema de fase linear.

A escolha da forma e duração da janela permite controlar as propriedades do filtro resultante. No entanto o método com base na tentativa e erro não é aceitável. Kaiser desenvolveu uma formulação mais simples.



3.22.2012 Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI/Universidade do Minho)



Síntese de filtros FIR

- Projeto pelo método da janela de Kaiser (cont.)

$$A = -20 \log \delta$$

$$\begin{cases} A > 50 \\ 21 \leq A \leq 50 \\ A < 21 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7) \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21) \\ 0.0 \end{cases}$$

$$M = \frac{A-8}{2.285\Delta\Omega} \quad \Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p \quad \Omega_c = \frac{\Omega_s + \Omega_p}{2}$$

-Exemplo 6 : Consideremos o filtro passa-baixo com banda de transição entre 0.4π e 0.6π , "apple"

na banda passante de -40 dB e na banda de rejeição de -60 dB.

- A síntese de filtros pelo método das janelas origina "ripples" iguais logo $A = 60dB$

$$\beta = 0.1102(60-8.7) = 5.65326$$

$$M = \frac{60-8}{2.285(0.2\pi)} = 36.22 \approx 37$$

$$h_p[\pi] = \begin{cases} \frac{\sin(\Omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} \left[I_0 \left[\beta \left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha} \right]^2 \right) \right] \right], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\Omega_c = 0.35\pi$$

$$\Omega_p = 0.5\pi \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta = 0.021$$

$$\text{Então } A = -20 \log(0.021) = 33.56 \quad \beta = 0.5842(33.56-21)^{0.4} + 0.07886(33.56-21) = 2.6 \quad M = \frac{33.56-8}{2.285(0.15\pi)} = 23.73 \approx 24$$



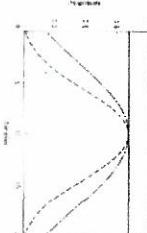
Síntese de filtros FIR

- Projeto pelo método da janela de Kaiser

- Na tentativa de resolver o compromisso entre largura do lobo principal e atenuação do lobo secundário kaiser descobriu que a janela

$$w[n] = \begin{cases} I_0 \left[\beta \left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha} \right]^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq n \leq M \\ I_0(\beta) & \text{outros casos} \end{cases}$$

- $I_0(\cdot)$ é uma função de Bessel modificada do 1º tipo e de ordem zero e $\alpha = M/2$. α e β (forma) permitem escolha de forma/largura da janela.



M=20

Se β é constante e M aumenta diminui a largura do lobo principal afectando pouco a amplitude dos lobos secundários.

$\beta=6$

3.22.2012 Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI/Universidade do Minho)



Síntese de filtros FIR

Exemplo 6 (cont.)

$$E_A(\alpha) = \begin{cases} 1 - A(\alpha), & 0 \leq \alpha \leq \Omega_c \\ 0 - A(\alpha), & \Omega_c \leq \alpha \leq \pi \end{cases}$$



Síntese de filtros FIR

-Exemplo 7 : Consideremos o filtro ideal passa-alto de fase linear dado por:

$$H_p(\Omega) = \begin{cases} 0, & |\Omega| < \Omega_c \\ e^{-j\Omega M/2}, & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad H_p(\Omega) = e^{-j\Omega M/2} - H_p(\Omega) \quad h_p[n] = \frac{\sin((n-M/2)\pi)}{\pi(n-M/2)} \quad -\infty < n < +\infty$$

Suponhamos que se pretende um filtro passa-alto com as seguintes especificações:

$$M=38$$

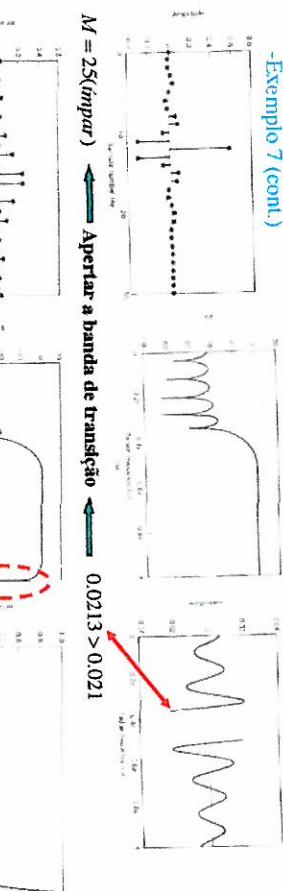
3.22.2012 Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI/Universidade do Minho)





Síntese de filtros FIR

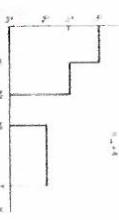
-Exemplo 7 (cont.)



Mímpar não é adequado para filtros hp e rejeita banda

-Generalizando para múltiplos hp e br

$$h_{\text{má}}[n] = \sum_{k=1}^{N_m} (G_k - G_{k+1}) \frac{\sin(\Omega_k(n - M/2))}{\pi(n - M/2)} \quad G_{M+1} = 0$$



$$\begin{aligned} h[n] &= \begin{cases} h_t[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} & \text{Minimiza } \varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(\Omega) - H(\Omega)|^2 d\Omega \end{aligned}$$

- Mas será este o filtro óptimo?

- Desvantagens do método das janelas
 - Não é possível controlo individual do ripple nas diferentes bandas
 - O erro é maior junto aos pontos de descontinuidade

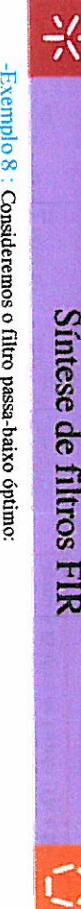
- Projectemos um filtro FIR a partir de um filtro de fase nula e em seguida inseriremos um atraso para o tornar causal.

$$h_t[n] = h_t[-n] \xrightarrow{\text{T.F.}} A_t(\Omega) = \sum_{n=-L}^L h_t[n] e^{-jn\Omega} = h_t[0] + \sum_{n=1}^L 2h_t[n] \cos(\Omega n) \quad L = \frac{M}{2} \quad \text{inteiro}$$

Função real, par e periódica



Síntese de filtros FIR



- Um sistema causal é obtido atrasando $h_e[n]$ de $L=M/2$ amostras. A resposta impulsional do sistema resultante é

$$h[n] = h_t\left[n - \frac{M}{2}\right] = h[M-n] \xrightarrow{\text{T.F.}} H(\Omega) = A_e(\Omega) e^{-j\Omega \frac{M}{2}}$$

- Algoritmo de Parks-McClellan

- O problema pode ser visto como um problema de aproximação polinomial

$$\cos(\Omega n) = T_n(\cos \Omega) \quad T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

- Definimos a seguinte função de erro (W) incorpora os erros de aproximação (δ 's)

$$E(\Omega) = W(\Omega) |H_d(\Omega) - A_e(\Omega)| \quad \xrightarrow{x = \cos \Omega} P(x) = \sum_{k=0}^l a_k x^k \quad a_k = f(h_t[n])$$

- Não existem restrições na banda de transição. $A_e(\Omega)$ pode tomar qq forma que seja necessária para se atingir a resposta desejada fora da banda de transição.



Síntese de filtros FIR

-Aproximações óptimas em filtros FIR

- Problema: Pretende-se projectar o melhor filtro (segundo algum critério de optimização) para um dado M .

- Prova-se, que no projecto pelo método das janelas, a janela rectangular é a que minimiza o erro médio quadrático, ou seja

$$\begin{aligned} h[n] &= \begin{cases} h_t[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} & \text{Minimiza } \varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(\Omega) - H(\Omega)|^2 d\Omega \end{aligned}$$

- Mas será este o filtro óptimo?

- Desvantagens do método das janelas
 - Não é possível controlo individual do ripple nas diferentes bandas
 - O erro é maior junto aos pontos de descontinuidade

- Projectemos um filtro FIR a partir de um filtro de fase nula e em seguida inseriremos um atraso para o tornar causal.

$$h_t[n] = h_t[-n] \xrightarrow{\text{T.F.}} A_t(\Omega) = \sum_{n=-L}^L h_t[n] e^{-jn\Omega} = h_t[0] + \sum_{n=1}^L 2h_t[n] \cos(\Omega n) \quad L = \frac{M}{2} \quad \text{inteiro}$$

Função real, par e periódica



- Exemplo 8 : Consideremos o filtro passa-baixo óptimo:

$$H_d(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_p \\ 0, & \Omega_p < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad W(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_p \\ 1, & \Omega_p < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

Se $K = \delta_1 \delta_2$ então com esta função "peso" $\geq \delta_1$ em ambas as bandas. Usando o critério minimax ou de tchebychev pretende-se encontrar $A_e(\Omega)$ que minimiza o valor máximo do erro

$$\min_{h_t[n]} \max_{|\Omega| \leq \Omega_p} |E(\Omega)|$$

Está-se à procura dos valores da resposta impulsional que minimizam δ .

Teorema das alternâncias: Seja F_p um subconjunto fechado consistindo da união disjunta de subconjuntos do eixo real x . Seja $P(x)$ o polinómio de ordem r

$$P(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$$

Seja $D_p(x)$ uma dada função de x desejada em F_p ; $W_p(x)$ uma função positiva contínua em F_p e $E_p(x)$ o erro pesado

$$E_p(x) = W_p(x) \|D_p(x) - P(x)\| \quad \|E\|_{x \in F_p} = \max_{x \in F_p} E_p(x)$$

A condição necessária e suficiente que faz com que $P(x)$ seja o único polinómio de ordem r que minimiza $\|E\|$ é que $E_p(x)$ exiba pelo menos $r+2$ alternâncias, isto é, é necessário que existir pelo menos $r+2$ valores x_i em F_p tal que $x_1 > x_2 > \dots > x_{r+2}$ e tal que $E_p(x_i) = E_p(x_{i+1}) = \pm \|E\|$ para $i=1, 2, \dots, r+1$.



Síntese de filtros FIR

-Caso do filtro LP óptimo tipo I ($M+1$ é ímpar)

$$x = \cos \Omega$$

$$P(\cos \Omega) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos \Omega)^k$$

$$D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} 1 & \cos \Omega_p \leq \cos \Omega \leq 1 \\ 0 & -1 \leq \cos \Omega \leq \cos \Omega_s \end{cases}$$

$$W_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}; & \cos \Omega_p \leq \cos \Omega \leq 1 \\ 0; & -1 \leq \cos \Omega \leq \cos \Omega_s \end{cases}$$

$$E_p(x) = W_p(x) |D_p(x) - P(x)|$$

O teorema das alternâncias postula que o conjunto de coeficientes a_k representa o filtro que melhor

aproxima o filtro passa-baixo ideal com razão $\delta_0/\delta_1 = K$ e com banda passante e de rejeição em Ω_p e Ω_s , isto é, E_p iguala de modo alternativo, positiva e negativamente o seu valor máximo. Estamos perante uma aproximação "equiripple".

$$A_p(\Omega)$$

$$L=7$$



36

3/2/2012

Processamento Digital de Sinal

Carlos Lima (DEI) (Invenção da Música)



Síntese de filtros FIR

-Caso do filtro LP óptimo tipo I ($M+1$ é ímpar) (cont.)

O teorema das alternâncias postula que o filtro óptimo tem que ter um mínimo de $L+2$ alternâncias mas não exclui a possibilidade de ter mais. O número máximo é $L+3$ ("extraripple").

$$L=7$$

$$L=3$$

$$L=7$$

$$L=2$$

$$L=7$$

$$L=2$$

$$L=7$$



As propriedades dos filtros resultam do teorema das alternâncias

. O nº máx. possível de alternâncias do erro é $L+3$

. Ocorrem sempre alternâncias em Ω_p e Ω_s

. Todos os máximos e mínimos na banda passante e de rejeição correspondem a alternâncias, isto é o filtro será "equiripple" excepto possivelmente em $\Omega=0$ e $\Omega=\pi$.

O nº máx. possível de alternâncias é $L+3$?

O polinómio de grau L tem no máximo ($L-1$) extremos + 4 limites de banda = $L+3$ (máximo)

$$\frac{dP(\cos \Omega)}{d\Omega} = -\sin \Omega \left(\sum_{k=0}^L k a_k (\cos \Omega)^{k-1} \right) = -\sin \Omega \left(\sum_{k=0}^{L-1} (k+1)a_{k+1} (\cos \Omega)^k \right)$$

Zeros em $\Omega=0$ e $\Omega=\pi$ + ($L-1$) raízes na soma + limites de banda (Ω_p e Ω_s)

37

3/2/2012

Processamento Digital de Sinal

Carlos Lima (DEI) (Invenção da Música)



Síntese de filtros FIR

-Caso do filtro LP óptimo tipo II ($M+1$ é par => $M/2 \neq$ inteiro)

$$h[n] = h[M-n] \quad \xrightarrow{\text{T. E.}} \quad H(\Omega) = e^{-j\Omega \frac{M}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[n] \cos \left[\Omega \left(\frac{M}{2} - n \right) \right]$$

$$b[n] = 2h \left[\frac{M+1}{2} - n \right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2} \quad \xrightarrow{\text{T. E.}} \quad H(\Omega) = e^{-j\Omega \frac{M}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{M+1}{2}} b[n] \cos \left[\Omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$$

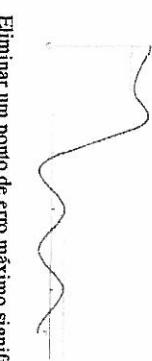
Para se poder aplicar o teorema das alternâncias o problema tem que ser identificado como sendo de approximação polinomial

$$\sum_{n=0}^{\frac{M+1}{2}} b[n] \cos \left[\Omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = \cos \frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^{\frac{M+1}{2}} \tilde{b}[n] \cos (\Omega n) \quad \xrightarrow{\text{T. E.}} \quad H(\Omega) = e^{-j\Omega \frac{M}{2}} \cos \frac{\Omega}{2} P(\cos \Omega)$$

Eliminar um ponto de erro máximo significa eliminar 2 alternâncias ficando-se com $L+1$ alternâncias do erro (no máximo) o que é insuficiente segundo o teorema para garantir o filtro óptimo.

Retirar Ω_s ou Ω_p significa retirar 2 alternâncias violando o teorema o que implica que o filtro não é óptimo.

O filtro será "equiripple" excepto possivelmente em $\Omega=0$ e $\Omega=\pi$?



$$H_p(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{1}{\cos \frac{\Omega}{2}}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_s \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

$$W_p(\Omega) = W_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{\Omega}{2}}{K}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_s \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

$$P(\cos \Omega) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos \Omega)^k$$



Síntese de filtros FIR

- O algoritmo de Parks-McClellan

$$W(\Omega_1)H_d(\Omega_i) - A_e(\Omega_i) = (-1)^{i+1}\delta; \quad i=1,2,\dots,L+2$$

Para $i=1$ temos
 $\left[\sum_{k=1}^L b_k \cos(\Omega_1) \right] = 0$

$$H_d(\Omega_1) = \frac{1}{W(\Omega_1)}\delta + 1a_0 + a_1 \cos \Omega_1 + a_2 (\cos \Omega_1)^2 + \dots + a_L (\cos \Omega_1)^L$$

O sistema completo fica

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^L & \frac{1}{W(\Omega_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^L & \frac{-1}{W(\Omega_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{L+2} & x_{L+2}^2 & x_{L+2}^3 & \dots & x_{L+2}^L & \frac{(-1)^{L+1}\delta}{W(\Omega_{L+2})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{L-1} \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(\Omega_1) \\ H_d(\Omega_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ H_d(\Omega_{L+2}) \end{bmatrix}$$

L+2 eq. e L+2 incógnitas

Se $A_e(\Omega)$ é determinado pelos a_k dados no sistema, com δ dado na eq. anterior então a função de erro é $\pm \delta$ às $L+2$ freq. Ω_i ou seja $A_e(\Omega)=1 \pm K\delta$ se $0 \leq \Omega_i \leq \Omega_p$ e $\pm \delta$ se $\Omega_q \leq \Omega_i \leq \Omega_r$. Pela interpolação de Lagrange obtem-se valores conhecidos (δ) $E(\Omega_i)$ ou equivalentemente $A_e(\Omega_i)$.

- $A_e(\Omega)$ óptimo pode ser encontrado através de um algoritmo iterativo. No entanto pode-se também usar a interpolação polinomial

$$M = \frac{-10 \log(\delta \Delta \Omega) - 13}{2,324 \Delta \Omega}$$

Fórmula obtida por Kaiser. Para o mesmo M o erro é cerca de 5 dB inferior ao caso do projeto pela janela de Kaiser.



Síntese de filtros FIR

- Parks e McClellan mostraram (através da aproximação polinomial) que

$$b_i = \prod_{k=1}^{L+2} \frac{1}{x_k - x_i}$$

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(\Omega_k)}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\Omega_k)}}$$

Como $A_e(\Omega)$ é um polinómio (trigonométrico) de grau L podemos interpolar através de $L+1$ dos $L+2$ $\pm \delta$ às $L+2$ freq. Ω_i ou seja $A_e(\Omega)=1 \pm K\delta$ se $0 \leq \Omega_i \leq \Omega_p$ e $\pm \delta$ se $\Omega_q \leq \Omega_i \leq \Omega_r$.

$$A_e(\Omega) = P(\cos \Omega) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)^{L+1} C_k}{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)^{-1}}$$

$$C_k = H_d(\Omega_k) - \frac{(-1)^{k+1}\delta}{W(\Omega_k)}$$

$$d_k = \prod_{i=1}^{L+1} \frac{1}{x_i - x_k} = b_i (x_k - x_{L+2})$$

A eq. anterior permite calcular $A_e(\Omega)$ e $E(\Omega)$ num conjunto denso de frequências na banda passante e na banda de rejeição. Se o erro é sempre inferior ou igual a δ então a aproximação é óptima, se não, é preciso encontrar um novo conjunto de frequências e repetir o processo. As frequências Ω são agora aquelas para as quais ocorrerão os $L+2$ picos mais elevados na curva de erro (método de Renz).

- Exemplo 9: Consideremos o filtro passa-baixo do exemplo 6 com banda de transição entre 0.4π e 0.6π , "ripple" na banda passante de -40 dB e na banda de rejeição de -60 dB.

O algoritmo de Parks-McClellan permite diferentes erros na banda passante e de rejeição.

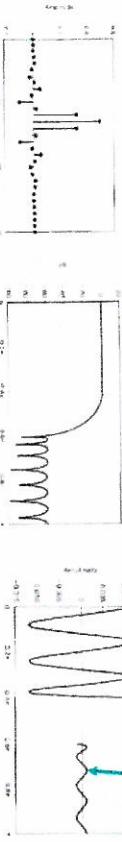
$$K = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 10 \quad M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2,324 \Delta \Omega} = 26$$

$$0.0116 > 0.01$$

$$0.00116 > 0.001$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$



Existem 7 alternâncias do erro na banda passante e 8 na banda de rejeição, o que prefaz um otal de 15 alternâncias do erro. M é par pelo que se trata de um filtro de tipo 1 com $L=M=13$. O nº de alternâncias é $L+2$ pelo que estamos perante o filtro óptimo para o erro dado e para os limites de banda de transição e rejeição dados. No entanto este filtro não cumpre as especificações mínimas do erro pelo que é necessário elevar $M \Rightarrow M=27$.

Passa-se para um filtro tipo II ($M=27$ ímpar) que já ultrapassa as especificações mas apresenta um zero em $z=1$.

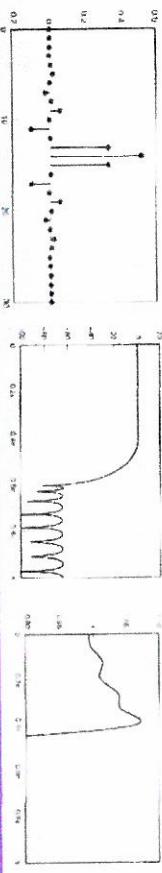
Este projeto pelo método da janela de Kaiser necessita $M=38$ (ver exemplo 6). Esta disparidade de valores justifica-se dado que pelo método das janelas o erro é igual em ambas as bandas enquanto o método de Parks-McClellan admite erros diferentes em bandas diferentes.



Síntese de filtros FIR

- Parks e McClellan mostraram (através da aproximação polinomial) que

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$



- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

$$H_d(\omega) = e^{-j\omega T} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2\pi}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_p \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)



-Exemplo 10: Consideremos a compensação do "Zero-Order Hold" (ver transparência 66 da disciplina de P.S.)

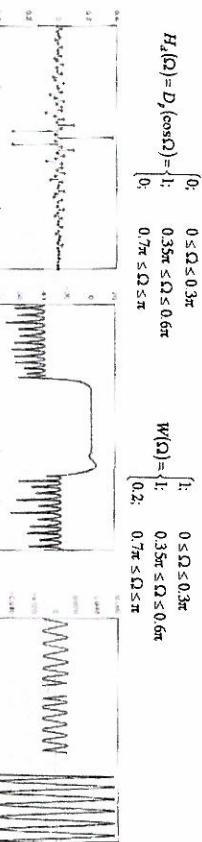


Síntese de filtros FIR



- Exercícios (TPC)

- Filtros passa-banda
 - Os BPF e BSF requerem aproximação do erro em 3 bandas. O projecto deste filtro requer a generalização da teoria discutida anteriormente para o caso da multibanda. Como o teorema das alternâncias não assume nenhum limite no nº de intervalos mantém-se que o nº mínimo de alternâncias é $L+2$. No entanto estes filtros multibanda podem ter mais que $L+3$ alternâncias. Outra diferença é que podem ocorrer extremos locais nas regiões de transição fora dos intervalos máximos de erro e a aproximação não precisa ser "equiripple".
 - Consideremos o seguinte exemplo:



M=74 => L=37 => verifica o teorema pois existem 13 alternâncias do erro em cada banda (39=L+2). Nas bandas de transição não se garante a monotonicidade do filtro pois o algoritmo de Parks-McClellan não impõe qualquer restrição nestas regiões



Síntese de filtros FIR



- Exercícios (TPC)
 - Refaça o exercício feito na aula, usando desta vez o método da janela de Kaiser.
 - Projecte, com a ajuda do Matlab, um filtro passa-baixo FIR com $\Omega_p = 0.2\pi$, $\Omega_s = 0.3\pi$, ripple na banda passante de -40 dB, ripple na banda de rejeição $R_s = -50dB$ e ganho máximo na banda de rejeição de 0,01. Em ambos os casos determine a resposta impulsional e a resposta em freq. dos filtros.

- 1) Usando o método das janelas.
- 2) Usando o algoritmo de Parks-McClellan

(Kap. 30)

Exercício 6

banda do tracérisp 0,4π e 0,6π
 Ripple na banda passante -40dB
 " " " Rejeip -60dB



Sintese de filtros pelo método das janelas originais epples iguais

$$\therefore A = 6 \text{od } B$$

$$\Delta R = 0,6\pi - 0,4\pi = 0,2\pi$$

$$\beta = 91102(60 - 8, 7) = 5,65326$$

$$n = \frac{A - 8}{2,285 \Delta Q} = \frac{60 - 8}{2,285 \times 9.2\pi} = 36,21 = 37$$

$$\alpha = \frac{37}{2} = 18,5$$

$$h[u] = \frac{\sin(\pi c(u - \pi/2))}{\pi(u - \pi/2)}, w[u]$$

--- \rightarrow h_d (ultimo passo benz)

(Dab. 3)

Exercice 7

nitro
ideal

$$H_{HP} = \begin{cases} 0 & |n| < n_c \\ e^{-j n \pi/2} & n_c < |n| < \pi \end{cases}$$



$$u_{hp} = \frac{\sin(\pi(u-\pi/2))}{\pi(u-\pi/2)} - \frac{\sin(\pi c(u-\pi/2))}{\pi(u-\pi/2)}$$

especial cap

$$n_s = 0.35\pi \quad n_p = 0.5\pi \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta = 0.021$$

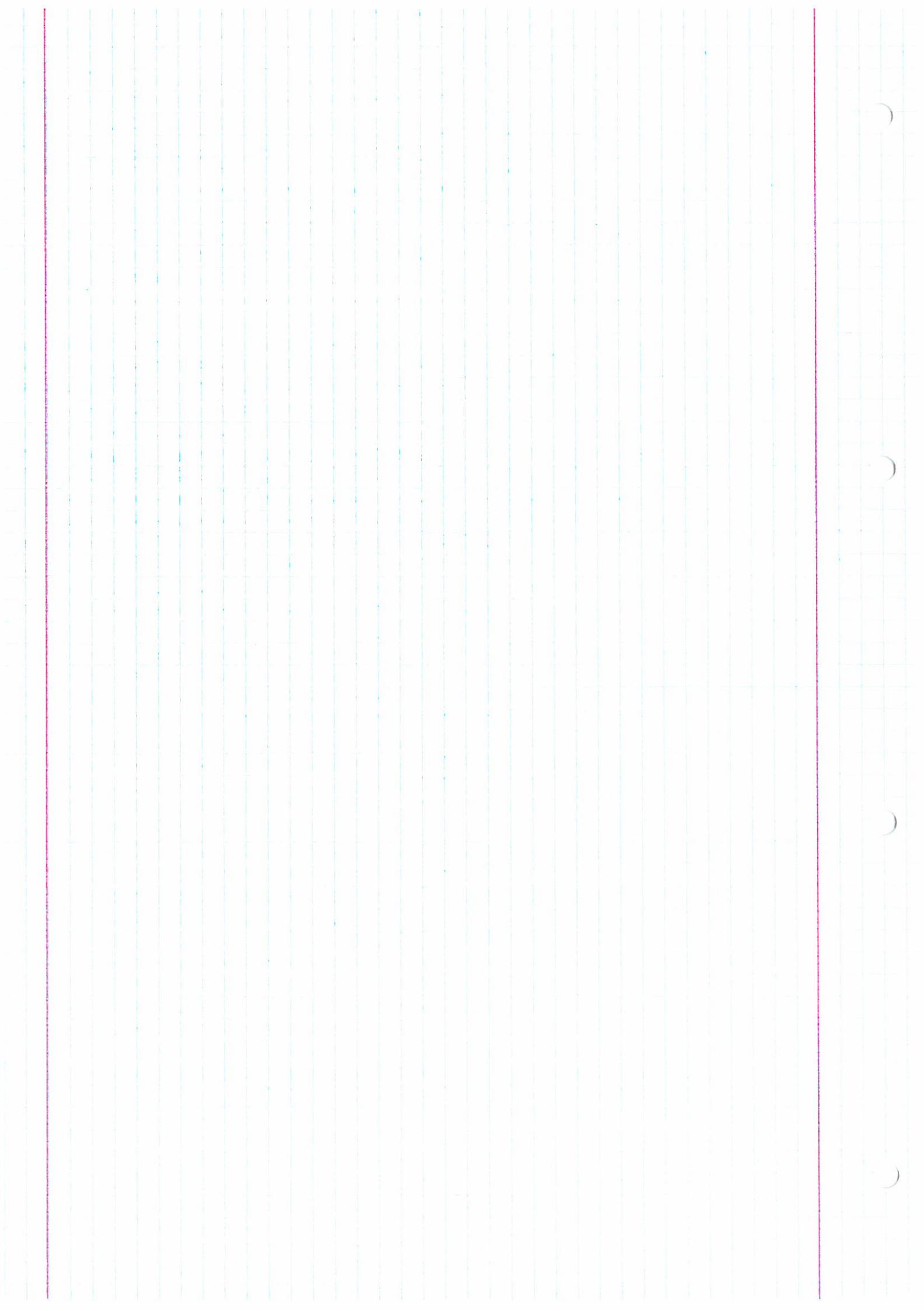
$$A = -20 \log_{10} 0,021 = 33,56 \text{ dB}$$

$$\Delta R = 0,5\pi - 0,35\pi = 0,15\pi$$

$$\cap = \frac{33,56 - 8}{2,285 \times 9,1511} = 23,73 = 24$$

$$\lambda = \frac{24}{2} = 12$$

$$\beta = 95842 \cdot (33,56 - 21)^{0,4} + 907886 \cdot (33,56 - 21) = 2,598 \approx 2,6$$



nesse este é o caso $H(z)$

para obter $H(w)$ vamos ter que usar o método bilinear

$$1 + e^{j\omega} \ln \left(\frac{z + \tau j(\omega, 0.3\pi)}{z - \tau j(\omega, 0.2\pi)} \right) = \left(\frac{1}{0.001} \right)^2$$

passo ① para o outro membro, obtém-se a exp. de calc.

$T_u^2(\omega) \rightarrow$ valores obtém $N=8 \Rightarrow$ em vez de $N=16$
caso filtro butterworth

é a
elíptica
é pior

mas entanto este controle
a frequência não linear

os fatores vão se modificar
pela seta das fases que dão os pesos
do filtro, dali haverá diferenças
no nível

Se houver um filtro $H(z)$ e seja um filtro passa baixo (LPF)
uma freq. de corte igual a $\frac{\pi}{4}$ ($n_c = \frac{\pi}{4}$)

se agirem pretender um filtro passa baixo (LPF) com $n_c = \frac{\pi}{2}$
é preciso fazer um filtro do tipo

Vai-se calcular:

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\pi n_c - \pi/2}{2}\right)}{\sin\left(-\left(\frac{\pi n_c - \pi/2}{2}\right)\right)} = \frac{\sin(-\pi/8)}{\sin(\pi/8)}$$

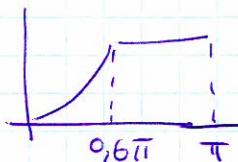
$$G(z) = H(z) \Big|_{z = z^{-1} - \alpha}$$

o teste tem que ser feito
depois a transição
(no próx. teste)

Exemplo 4 (Cap. 23)



→



MATLAB

$$[B, A] = \text{cheby1}(N, R, w_u) \quad \text{hpo 3}$$

$$[N, w_u] = \text{cheb1ord}(w_p, w_s, R_p, R_s) \quad \text{caso ou butterworth}$$

$$[N, \omega_u] = \text{cheb1ord}(0.4, 0.6, 20 \log(0.5\pi), 20 \log(0.01))$$

$$N=8$$

$\omega_u = 0.4 \rightarrow$ freq. no espaço W

cutf. a ordem 8 relativamente butterworth é de 14

As aplicações fazem exactly o filtro temos que usar a função cheby 1

$$[B, A] = \text{cheby1}(N, R, \omega_u, (S_1)) \rightarrow \text{para} \ L \text{ de precisão fator } Z$$

↓ Ripple ↓ $2 \pi \tan\left(\frac{\omega_u + p_1}{2}\right)$
 ↓ $\approx \log(0.02)$
 ↓ $1.01 - 0.09$

pla usar a função em Z temos agora que fazer a bilinear como no outro filtro

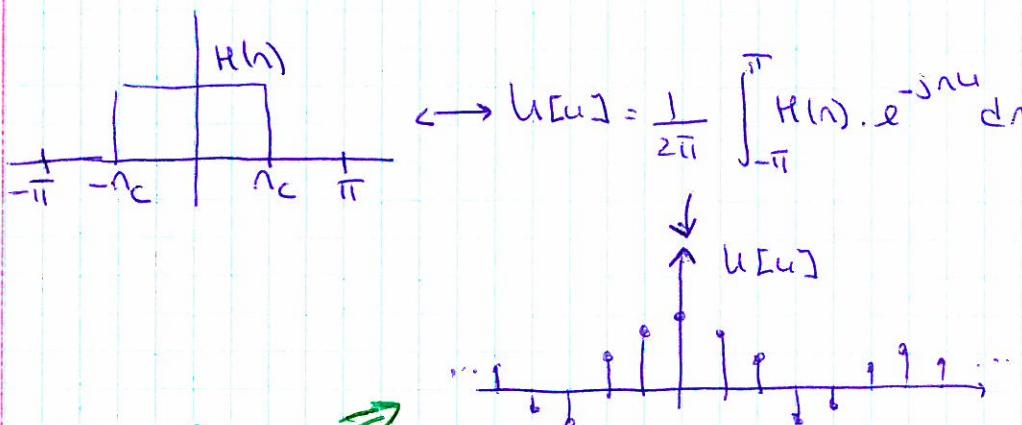
Notes

No matlab, pla função elliptic

$$[B, A] = \text{ellipheq}(n)$$

Filtros IIR

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots}{1 + b_1 z^{-1} + \dots} \Rightarrow y[n] = -b_1 y[n-1]$$



Problemas:

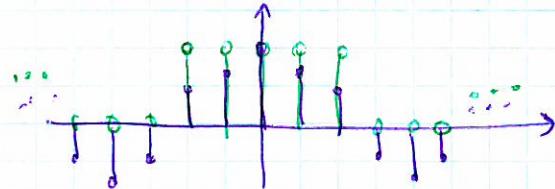
1) $u[n]$ tem duração infinita \rightarrow inutiliza o cálculo do sif sistema

2) " " Resposta plausível para $u[n] < 0 \rightarrow$ plausível o sistema é causal
 $(u[n] \neq 0 \text{ plausível} \wedge u[n] < 0)$



o sistema "adivinha" plausível valores de $u[n]$ para a saída de cálculo em $n=0$

pla 0 sinal ficar fixo, multiplicar o sinal pl sua "janela" de amplitude 1, passando apenas o q queremos



qto maior larga a janela
(mais pontos) menor per.
banda de transf.

pla i temos valores pla uco

desloca-se a janela

↳ ataszamos a janela → a transf. i se altera

$$w[u] \leftrightarrow w(n)$$

$$w[u - \frac{\pi}{2}] \leftrightarrow w(n) \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

onde π é a largura da janela
toda

→ Aqui vemos que recupre um bloco da banda passante
→ É garantida a form. de onda do sinal à entrada na saída

Vantagens filhos IIR → sintese a partir de filhos analógicos
Desvantagens " " → distorção (faz a linear)

$$h_d[u] \xrightarrow{T.F} H_d(n) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} h_d[u] e^{-jnu} \quad h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{jnu} d\omega$$

$$h_d[u] = \begin{cases} h_d[u]; & 0 \leq u \leq \pi \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) w(n-\omega) d\omega$$

• se poucos pontos na tabela → temos uma banda de transf grande
↳ no entanto cálculo mais rápido

janelas:

$$\rightarrow \text{Bartlett} \longrightarrow w[u] = \begin{cases} 2u/\pi & 0 \leq u \leq \pi/2 \\ 2 - 2u/\pi & \pi/2 \leq u \leq \pi \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Hamming} \longrightarrow w[u] = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi u}{\pi}\right) & 0 \leq u \leq \pi \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Hanning} \longrightarrow w[u] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi u}{\pi}\right) & 0 \leq u \leq \pi \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

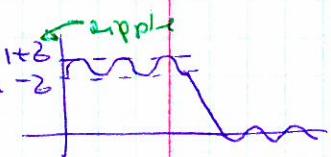
• Hamming dá menor peso às extensões da janela

• largura do lob principal é menor no batente

• Dados importantes para escolha → largura de banda do lob principal → corteamento de banda de transição
gaucho do lob secundário

(map. 27)

na 3^a coluna da tabela → ripple na banda passante



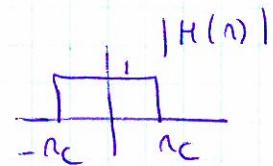
função da janela é uma função de fase nula

loco deslocado → faz c/ uma fase descrença linear

(map. 28) Exemplo 5

$$H(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq n_c \\ 0 & |n| > n_c \end{cases}$$

fórmula de gaucho 2



$$H_p(n) = \begin{cases} e^{-jn\frac{\pi}{2}} & |n| < n_c \\ 0 & n_c < |n| < \pi \end{cases}$$

$H_p(n)$ tem o mesmo modelo de $H(n)$ mas tem uma fase linear ($H(n)$ tem fase = 0)

$$h[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_p(n) \cdot e^{jnu} dn$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-n_c}^{n_c} e^{-jn\frac{\pi}{2}} e^{jnu} dn$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-n_c}^{n_c} e^{jn(u - \frac{\pi}{2})} dn$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{j(u - \frac{\pi}{2})} e^{jn(u - \frac{\pi}{2})} \Big|_{-n_c}^{n_c}$$

$$= \frac{1}{\pi 2j(u - \frac{\pi}{2})} \left[e^{jn_c(u - \pi/2)} - e^{-jn_c(u - \pi/2)} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi 2j(u - \frac{\pi}{2})} 2j \sin(n_c(u - \frac{\pi}{2}))$$

$$= \frac{\sin(n_c(u - \pi/2))}{\pi(u - \frac{\pi}{2})}$$

podemos traçar. com os fatores do tipo sinc

$$= \sin \left(\frac{\pi}{\pi} \frac{nc}{\pi} (u - \pi/2) \right) \cdot \frac{nc}{\pi}$$
$$= \frac{nc}{\pi} \cdot \sin \left(\frac{nc}{\pi} (u - \pi/2) \right)$$

Baixo da janela tem a haven c/ a longura do lob principal

↳ fator de cortejo da janela

temos q ter esse cortejo \rightarrow longura de janela
↳ ripple

↳ janela tem q respeitar estes dois crit.

↳ tem que q ser p/ teorema e erro

↳ uit trabalhos

↓
esse método da janela

$$w(u) = \begin{cases} I_0 \left[\beta \left(1 - \left[\frac{u-\alpha}{\alpha} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] & 0 \leq u \leq \pi \\ 0 & \text{para outras cases} \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq \pi$$

$\alpha \rightarrow$ tem a haven c/ o tamanho da janela \rightarrow controla longura
(metade do seu deslocamento / $\frac{\pi}{2}$) do lob principal

$\beta \rightarrow$ calcula a altura dos kbs secundários

qto menor π menor π^3 cálculos \rightarrow se encontra tem-se q cumprir requisitos

$\beta \rightarrow$ depende dos genhos \rightarrow das alturas dos lobos

$\pi \rightarrow$ " da altura do lob principal

$\Delta n \rightarrow$ largura da borda de transição

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A-98,7) & A > 50 \\ 0,5842(A-21)^{0,4} + 0,073886(A-21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0 & A < 21 \end{cases}$$

$$\Delta n = \frac{A-8}{2,285 \Delta n}$$

$$\Delta n = n_S - n_P$$

$$A = -20 \log \delta$$

↳ Ripple \rightarrow igual na borda de rotação e na passagem

$A < 21 \rightarrow$ janela retangular

$A = 21 \rightarrow$ janela quadrangular

Exemplo 6 (Brap. 30)

Como ripple é banda de rejeição e passante é o cortejado
 ↳ entrar temos q escalar o valor para freq. placa verificando os dois casos

$$\beta = 0,1102 (60 - 8,7) = 5,6$$

bandeira transist

$$94\pi \approx 0,6\pi$$

$$\Pi = \frac{60 - 8}{2,285(0,2\pi)} = 36,22 = 37$$

\uparrow
 n freq.
 em seu interior
 pq é a largura
 da janela

Ripple → banda passante
 -40dB
 ↳ banda rejeição
 -60dB

(Brap. 31)

1º imagem → função de localização

2º " → resp. em freq.

3º " → comportamento à freq.

ua banda de rejeição ou
 ⇒ critério é fai exatamente
 cumprido

↓
 a coragem a fazer deve

↓
 aumentar a largura
 de filtro

Exemplo 7 (Brap. 31)

filtro possui alto

$$h_{hp} = \frac{\sin(\pi(u - \pi/2))}{\pi(u - \pi/2)} - \frac{\sin(\pi_c(u - \pi/2))}{\pi(u - \pi/2)}$$

passa alto = para freq. - passa baixo

banda de transist é entre $0,35\pi$ e $0,5\pi$

curva $A < 50$ e a exp. $\beta \rightarrow 0,5842(A-2)^{0,4} + 0,07886(A-2)$

...

↑ cumprir ua banda de rejeição

↑ aumentar a ua largura do filtro $\Pi = 25$ (de 24 pra 25)

8. ↑ ilustra → aparece um decaimento abrubto em Π

↓ as altas freq. são attenuadas

$$\log \Pi = 26$$

grande limite de freq. do filtro

↳ Ripple de banda passante = Ripple da de rejeição

Exercício:

Considera-se que dispõe de um sinal audio digital a ser amostrado a 20 kHz e codificado em níveis inteiros de 16 bits.

Sepulta-se a pretende transmitir este sinal em tempo real para rede digital cujo débito máximo é de 160 bits/s ($R = 160 \text{ bps}$)

a) O sinal pode ser transmitido directamente ou necessita de alguma acção condicionamento às saídas da rede de transmissão? Justifique

b) Pretende-se implementar um filtro digital que permite o acção condicionamento do sinal à rede.

O filtro deve ter as seguintes características:

1) Fase linear

2) Ripple na banda passante $\leq -50 \text{ dB}$

3) Até (acumular) transientes na banda de rejeição (ModB)
 (p.e. d.t. janela)

4) B. transp. $\leq 500 \text{ Hz}$

a) Velocidade de transmissão requerida

$$R_s = 16 \text{ bits/amostra}$$

$\rightarrow 20 \text{ kHz amostras/segundo}$

$$R_b = R_s \cdot f_s = 16 \times 20 \text{ kHz} = 320 \text{ Kbps}$$

$R_b > R \Rightarrow R_b$ tem que ser dividido



replicar $\hat{=}$
 $f_s = 10 \text{ kHz amostras/s}$

ou amostrar por f_s

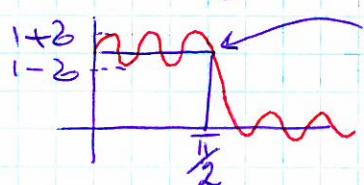
↓
 ideal p. j.
 à saída do
 ADC

pedidos alterna sr
 ADC tira filtro
 anti-aliasing

sempre
 a um
 devido
 a critico
 de amostragem

filtering digital
 digital a $\frac{\pi}{2}$ e
 decimam p. m. → antialiasing metade
 Rateia 2

para fase linear $\rightarrow FIR$

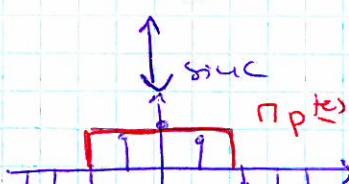


Ripple $\geq -50 \text{ dB} = A$

- ideal
 - real

Hann window ✓
 Blackman

Lembra



$\frac{\pi}{2}$ P(k) para corrigir

fechos à consultar a tabela e ver o ripple (medida) a -50 dB

corresponde à janela Hamming → tem-se a ver se cumpre os requisitos

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

Dado pela janela

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$H_d(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Filtros de
frequência
(janelas)
máximo

$$h_d[n] = \frac{\sin[\pi(n - \pi/2)]}{\pi(n - \pi/2)} = \frac{\sin[\pi/2 \cdot (n - \pi/2)]}{\pi(n - \pi/2)}$$

fixado $w[n]$ é uma janela de Hamming

da tabela $\frac{8\pi}{\pi} \leq (500 \text{ Hz}) \leftarrow \neq \text{especificação}$

geralmente existe entre 2π e 4π para 20%
banda principal e secundária.

$$\omega = \frac{\pi}{20}$$

$$\frac{8\pi}{\pi} \leq \frac{\pi}{20}$$

$$\pi > 160$$

$$h[n] = \frac{\sin(\pi/2(n - \pi/2))}{\pi(n - \pi/2)} \cdot [0,54 - 0,46 \cdot \cos(\frac{2\pi}{\pi} n)]$$

1º Calcular $h_d[n]$

2º Determinar a janela → através das especificações do filtro
geral da banda e janelas da banda de rejeição e largura de banda de transição

3º Multiplicando 1º e 2º de determinar $h[n]$

4º Verificar se $h[n]$ cumpre as especificações

NOTAS

óptimo filtro passa tudo $\omega_c = \pi \rightarrow$ pega a freq. acima de π
 " " " alto \rightarrow passa tudo - passa alto

MatLab

w_u
fcherno

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{função } [h_d] = \text{ideal_lp}(\omega_c, n) \\ \alpha = \pi/2 \\ u = [0 : 1 : \pi - 1] ; \\ u = u - \alpha + \epsilon \\ h_d = \sin(u) ./ (p_i * u) \end{array} \right.$$

$$w_u = \pi/2$$

$$n = 160$$

$$[h_d] = \text{ideal_lp}(\omega_u, n); \\ \text{plot}(h_d)$$



$$w = \text{hamming}(160);$$

$$h = h_d * w;$$

usar daí !!

$$\text{size}(h_d)$$

$$\text{ans} = 1 \quad 160$$

$$\text{size}(w)$$

$$\text{ans} = 160 \quad 1$$

$h = h_d \xrightarrow{\text{transposto}} \text{transposto} \rightarrow$ bla blabk linha x coluna

a gente põe menos alargp de alta freq.

$$\text{subplot}(2, 1, 1), \text{plot}(h_d) \\ \text{"", } [2, 1, 2], \text{plot } h$$



beleveu a resp. do filtro
ideal para baixo

\hookrightarrow já deslocado há direita

ϵ → valor ut p/ p
elten q valor seja
zero

$f_{req\ z}(B, A)$

↑
coefficiente a_n
coefficiente b_n

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}$$

mas apenas termos $h[n]$

precisamos de $H(z) \rightarrow h[n] = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n}$

FIR \rightarrow filtros a recorrentes

então:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots$$

$$\textcircled{5} \quad Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2} + \dots$$

Se $y[n] = \alpha y[n-1] + e[n]$

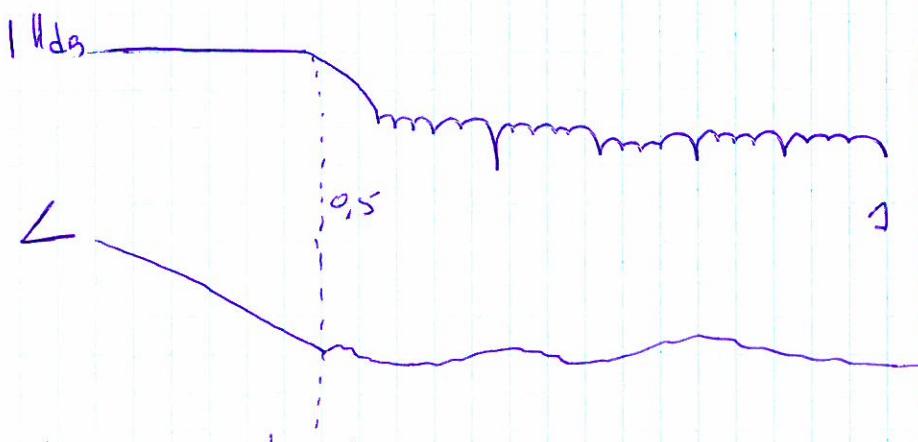
\hookrightarrow IIR
filtro recursivo

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1}$$

\hookrightarrow denominador dos filtros FIR
sempre 1

replica em
 $f_{req\ z}(h, z)$

pode usar matlab $f_{req\ z}(h, z)$ obtidas graficamente



mas em dB é consequente ver

$$[H, \omega] = f_{req\ z}(B, A, N, \text{'whole'})$$

$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ h & 1 & 1000 \end{matrix}$

$$H = H(1:500); \quad \text{se para dar até } n \text{ (é p/ o valor da banda)} \\ w = w(1:500); \quad \text{persistente a } 500 \text{ Hz})$$

$$mag = abs(H)$$

$$H_{dB} = 20 * log10(mag + eps) / max(mag)) \rightarrow \text{mag ter o mesmo}$$

menor que 1
(o max é zero dB)

$$\Delta \omega = 2 * \pi / 1000, \rightarrow \text{2i freq. em banda}$$

$$\omega_p = \pi / 2$$

$$Q_p = -\ln(1 - \ln(\text{max}(1; 1 + R_p)))$$

(7) $R_p = 0,9996 \rightarrow \text{ganho linear}$

$$20 \log_{10}(1 + R_p)$$

$$\text{ans} = -67,8000 \text{ dB} \rightarrow \text{cumprindo as especificações da curva}$$

Exercício (teste)

1. Faça uma comparação qualitativa (xeru x^o) relativamente a todos os outros métodos à curva, do uso do método da janela de Kaiser na filtragem digital.
2. Determine a resposta a impulso do filtro digital respeito ao seu ideal e à sua distância harmonica.
3. Considerando que se pretende um filtro passa-frequência pretendido a 16kHz ao qual se pretende remover parte das características do orador e se resultar um ganho das 100 a 150 Hz seja o orador for inacabado e cerca do dobro desse freq. para quedadas severas.

a) Considerando que se pretende um filtro passa-frequência pretendido a 16kHz ao qual se pretende remover parte das características do orador e se resultar um ganho das 100 a 150 Hz seja o orador for inacabado e cerca do dobro desse freq. para quedadas severas.

Pretende-se que implemente o filtro usando o método da janela de Kaiser.

1. Métodos conhecidos FIR → IIR (método da unif. de resp. a impulso) \hookrightarrow TB (" " transf. bilinear)

FIR (método das janelas) \rightarrow Kaiser
 ↓ Hamming
 ↓ Hamming
 X Parks - McClellan
 \hookrightarrow filtro ótimo (ainda varia) \rightarrow filtrar

Não podemos comparar diretamente os FIR e os FIR
 por serem completamente diferentes.

\Rightarrow Vantagens FIR:

1) se conhecem a resp. do sistema contínuo perfeitamente
 facilmente a resp. do sistema discreto

$$H(s) \rightarrow H(z)$$

\rightarrow vantagens no inicio dos filtros
 digitais (pois é mais fácil
 definir bem os sis. discretos)

2) filtros de ordem Θ menor

→ Vantagens FIR

1) tem sempre fase linear (à ultima o aspecto da saída)

Vantagens Kaiser

2) caract. principais da janela → ripple banda passante
↳ (analogia lobo principal)

as outras janelas são p/ tentativa e erro do cálculo
deste.

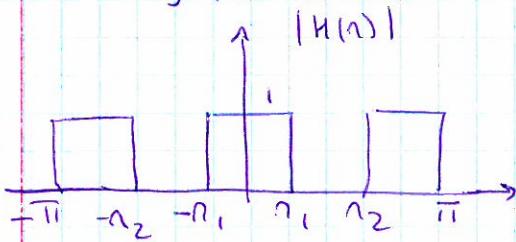
E' a única janela à custa da a largura de banda do
rejeição e a extensão do 2º lobo principal c/ métodos ≠
permitem a sua manipulação separada (as outras janelas
não distinguem)

Ripple na banda passante e no de rejeição é o mesmo.

Rsp prof:

↳ Elita o procedimento de tentativa e erro p/ ter
2 janelas livres ($\beta, \alpha = \pi/2$) onde cada um delas
corta de vez do filtro isolado cada um das 2 regiões
fundamentais de seu filtro, origina do lobo principal (α)
e q/ custa a seleção daí do filtro e a frequência de
banda de rejeição (proporional à ~~extensão~~ extensão do
1º lobo secundário e também ao ripple na banda passante)
q/ o custo é pelo parâmetro β .

2. Rejeite banda:



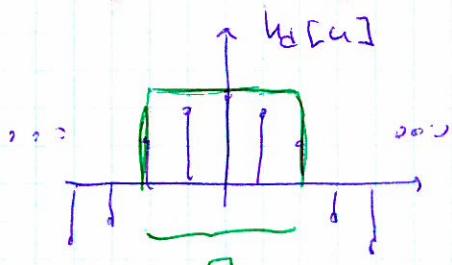
caso q/ cause distorção harmonica
logo o p/ de ter um filtro ideal

$$h[n] = ? + \int_{-\infty}^{\infty} h(n) e^{jnw} dn$$

$$H(n) = \begin{cases} e^{-jn\frac{\pi}{2}} & |n| < n_1 \\ 0 & n_1 < |n| < n_2 \\ e^{-jn\frac{\pi}{2}} & n_2 \leq |n| \leq \pi \end{cases}$$

Caso filtro ideal é o0 ter-se q/ truncar p/ q/ filtro
seja causal p/ sua q/ ter-se q/ seu deslocado p/ a direita

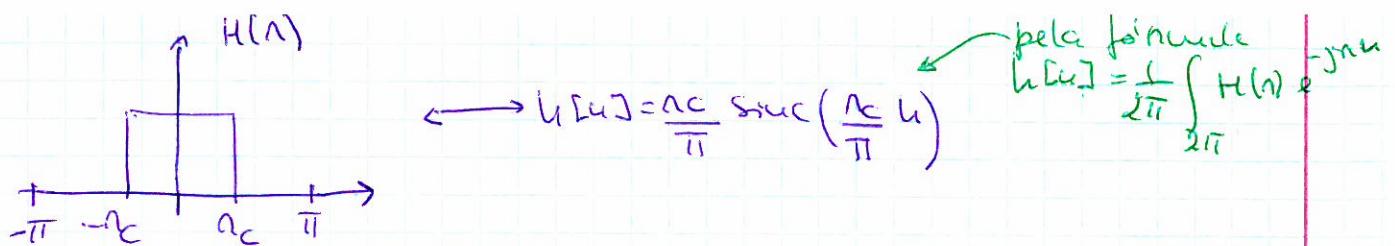
$$h_d[n].w[n] = h[n]$$



$h_d[n] \neq 0 \rightarrow$ truncar

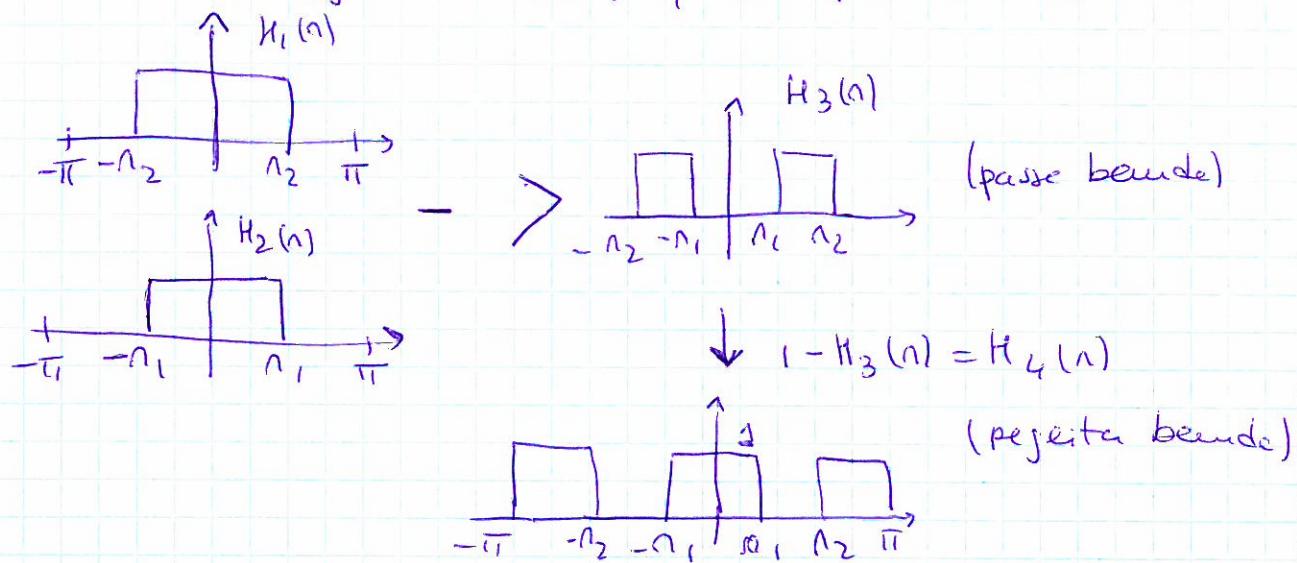
objeto p/ ser causal ter-se q/
deslocar p/ a direita

$$h[n] = h'[n - \frac{\pi}{2}] \rightarrow H(n) = |H(n)| e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$



A partir do H_1 e do H_2
 se os subtraímos ficam com uma passa banda

↳ para que rejeite banda faixa 3 - passa banda



$h_4[u] = ? \rightarrow$ temos que a conexão é de $h_1[u], h_2[u]$ e $h_3[u]$

$$h_1[u] = \frac{n_2}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{n_2}{\pi} u\right)$$

$$h_2[u] = \frac{n_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{n_1}{\pi} u\right)$$

$$h_3[u] = h_1[u] - h_2[u]$$

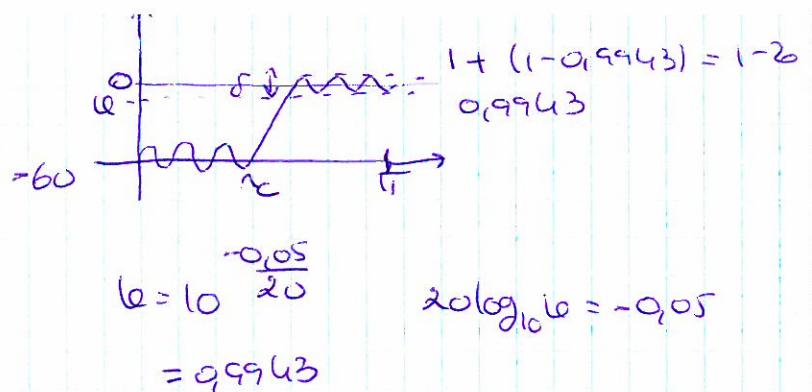
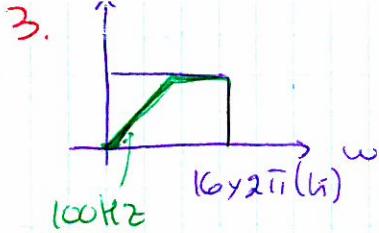
$$= \frac{n_2}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{n_2}{\pi} u\right) - \frac{n_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{n_1}{\pi} u\right)$$

$$H_4(n) = 1 - h_3(n)$$

$$\begin{aligned} h_4[u] &= \delta[u] - h_3[u] \\ &= \delta[u] - \frac{n_2}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{n_2}{\pi} u\right) + \frac{n_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{n_1}{\pi} u\right) \end{aligned}$$

Sistema causal (s/ dist. linearizada)

$$h_4[u] = \delta[u - n_2] - \frac{n_2}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{n_2}{\pi} (u - n_2)\right) + \frac{n_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{n_1}{\pi} (u - n_2)\right)$$



$$A = -20\log_{10}(1 - 0,9943) = 45 \text{ dB} \quad (\text{Hamming, backward, traços})$$

geralmente uma banda de respostas é de $-60 \text{ dB} \rightarrow$ sól tracôs

↳ Idem secundário tem $\approx 60 \text{ dB}$ abaixo do kbo principal

Notado tracôs

$$\alpha = \pi/2$$

$$\text{lopaamplitude} \left\{ \begin{array}{l} \Pi \\ \beta = 0,5842 (24)^{0,4} \end{array} \right. \rightarrow \text{pelo fórmula}$$

$$\eta = \frac{45 - 3}{2,285 \times \Omega R}$$

? → $n_c = 100H(z) \rightarrow n_c = \frac{n_s + n_p}{2}$

$$\Delta \rightarrow 2 \times 1\omega = 200H(z) \quad (\text{fórmula})$$

loja pra fer vir sistema
fórmico ($\tilde{\omega}$ tempos \leftrightarrow
fazem alternação no sistema
pra ordens maiores
ou menores) apenas
temos freq a partir de
 $100 + 200 = 300 \text{ Hz}$

$$16 \text{ kHz} = \pi$$

$$200 \text{ Hz} = \Delta \omega \approx$$

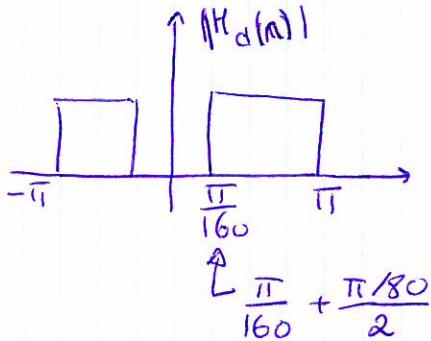
$$\Omega R = \frac{\pi}{80}$$

$$\eta = \frac{45 - 3}{2,285 \times \frac{\pi}{80}}$$

$$h[u] = h[u] \cdot w[u]$$

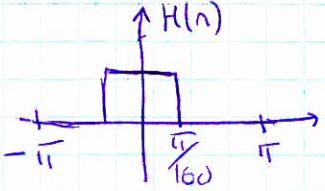
onda de tracôs

$$w[u] = \frac{I_0 \left[\beta \left(1 - \left[\frac{u - \alpha}{\alpha} \right]^2 \right)^{1/2} \right]}{I_0[\beta]}$$



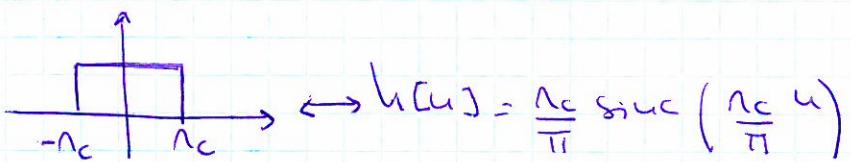
$$h_d[u] = \delta[u] - \frac{1}{160} \sin \left(\frac{1}{160} u \right)$$

$$h[n] = [\delta[n - \pi/2] + \frac{1}{160} \sin(\frac{1}{160}(n - \pi/2))] \cdot w[n]$$



$$H_d(n) = 1 - H'(n)$$

$$H_{LP}'(n) = \frac{1}{160} \sin\left(\frac{1}{160}n\right) \rightarrow h_{LP} = \delta[n] - h_{LP}[n]$$



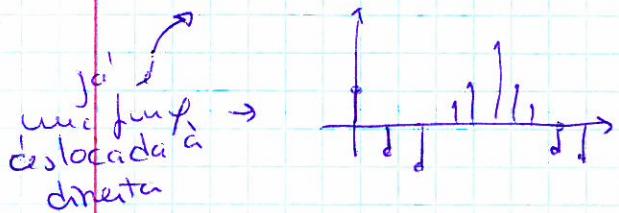
NATLAB:

function

(low pass)

$$[hd] = \text{ideal_lp}(w_c, n)$$

$\alpha = \pi/2;$
 $u = [0 : 1 : n-1];$
 $u = u - \alpha + \epsilon \text{ps};$
 $hd = \sin(w_c * u) / (\pi * u);$



high pass

$$[hd] = \text{ideal_hp}(w_c, n)$$

$\alpha = \pi/2$
 $u = [0 : 1 : n-1];$
 $u = u - \alpha + \epsilon \text{ps}$
 $hd = .$

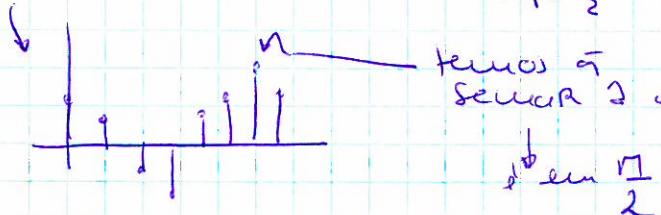
1) generar una func ideal-hp(w_c, n) $\rightarrow h_p[n]$

2) $h[n] = h_p[n] * \text{kaiser}(n, \beta)$

3) $\boxed{h[n] \neq (h[n], \beta)}$

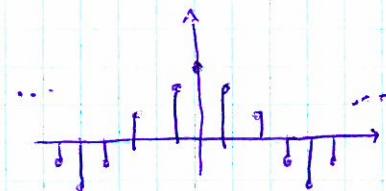
$$h[n] = \delta[n] - \frac{\pi c}{\pi} \sin\left(\frac{\pi c n}{\pi}\right) \text{ qd } \bar{n} \text{ deslocado}$$

qd deslocado no sinal do upl



sempre q' aqui (antes de deslocado)

Aproximação óptima em filtros FIR



$$h[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega u} d\omega$$

$$h_e[u]$$

existe um zero qd se aproxima
de $h_e[u]$ a $H_e(\omega) \rightarrow$ quer-se minimizar erro

$$\cos(2a) = ?$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cdot \cos b$$

$$\text{Se } a=b$$

$$\cos(2a) + 1 - 2\cos^2 a$$

$$H_e(n) = \sum_{u=-L}^L h[u] e^{-j\omega u}$$

$$= \sum_{u=-L}^{\bar{u}} h_e[u] e^{-j\omega u} + h_e[0] + \sum_{u=L+1}^L h_e[u] e^{-j\omega u}$$

$$= \sum_{u=1}^L \underbrace{h_e[u] e^{j\omega u}}_{\text{deveria}} + h_e[0] + \sum_{u=L+1}^L h_e[u] e^{-j\omega u}$$

seja $h_e[-u]$ zeros de $j\omega u$

$$= h_e[0] + \sum_{u=1}^L h_e[u] (e^{j\omega u} + e^{-j\omega u})$$

$$= h_e[0] + \sum_{u=1}^L 2 \operatorname{Re}[h_e[u] e^{j\omega u}] \quad \text{ign. termo qd det. coeficientes qd d'ac' menor erro}$$

um sistema causal é obtido através de $h_e[u] \Leftrightarrow$

$$L = \frac{\pi}{2} \text{ amostras}$$

$\rightarrow h_e$ foi deslocado $\frac{\pi}{2}$ unidades para direita
 $\rightarrow h_e$ tem fase linear

$$h[u] = h_e\left[u - \frac{\pi}{2}\right] = h[\pi - u] \Leftrightarrow h(n) = A_e(n) e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

Algoritmo de Parks - Remez

problema pode ser visto como um problema de cproximação polinomial

$$A_e(n) = h_e[0] + \sum_{k=1}^L 2h_e[k] \cdot \cos(kn)$$

$$A_e(n) = \sum_{k=0}^L a_k(\cos n)^k$$

temos q igualar estas duas expressões

$$k=0 \Rightarrow a_0 = h_e[0]$$

$$k=1 \Rightarrow a_1 = 2h_e[1]$$

:

junto de erro

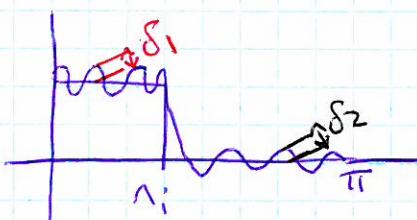
$$E(n) = w(n) \cdot \underbrace{[H_d(n) - A_e(n)]}_{\text{erro entre }} \xrightarrow{\text{rejeição}} \text{rejeição}$$

$A_e(n) \rightarrow$ resp. em freq. de filtro q scj foi truncado

$H_d(n) \rightarrow$ filtro ideal

$w(n) \rightarrow$ valor q se manipulan pra controlar erro

Exemplo 8 (Cap. 3.5)



1º Banda passante

$$E(n) = \frac{\int_2}{\int_1} [H_d(n) - A_e(n)] = \int_2$$

na banda passante é \int_1

2º Banda rejeição

$$E(n) = 1 \cdot (H_d(n) - A_e(n)) = \int_2$$

\int_1 um alternância \rightarrow tem q atingir o valor max

\int_2 duas ..

Qd queremos aproximar para un polinomio

↳ grau do polinomio $\rightarrow L$ é o grau

termos q contém o n° de alternâncias $\rightarrow L+2$ n° alternâncias
q termos $\Rightarrow n$

coefficientes

(Diap. 36)

Dp d o mante H

$$H(n) = 1 \rightarrow \cos n = 1$$

No slide temos q alternâncias p/ $L=7 \rightarrow L+2=9$ logo o possivel

(Diap. 37)

n° véus de alternâncias é $L+3$

a 1^o do lado esq. \rightarrow el igual à outra só difere seu amarrar no topo (ver)

e tbm se tem um bom polinomio p/ min em II

• todas as funç Rep. todas o mesmo erro e mínimo

• $L+2$ ou $L+3$ é o melhor polinomio p/ menor erro

↳ propriedade é fundamental p/ a minimizar o erro na beira de trunço

• Derrida de funç L da origem à derrida de funç veter
a função de grau $L-1$

$$\frac{dP(\cos(n))}{dn} = -\sin(n) \left(\sum_{k=0}^{L-1} h_k \cos(kn)^{L-1} \right)$$

(Diap. 38)

• Se tivermos extremos na beira de trunço é lá alternâncias

• A função nas limites da beira só passa nos extremos

• filtro tem q ser sempre equirreple p/ ser ótimo

No filtro sómos o erro e o SdB inferior ao trunço

↳ é o melhor

↳ para q na ordem dos 10 ...

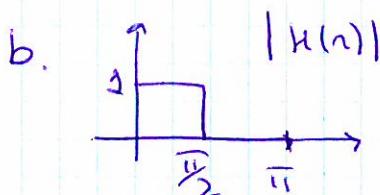
Z0100

PDS

Espace Especial II/12

1.

a. Si el filtrado de 4 kHz para 1 kHz . Es necesario tener filtros en $\frac{\pi}{2}$ (Reducción de la mitad de la intensidad del sonido) e dos más o tres. Necesario sacrificar la energía de banda pasante para conservar la potencia.



$$\textcircled{X} H(n) = \begin{cases} e^{-jn\pi/2} & ; |n| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \frac{\pi}{2} < |n| \leq \pi \end{cases}$$

Pla resolver este problema con las hipótesis: (pla calcular el filtro)

$$U[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(n)| e^{jnu} dn$$

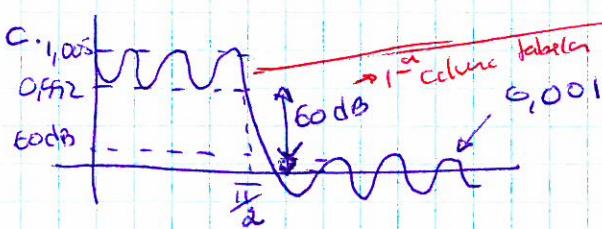
$$U[u] = U[u - \frac{\pi}{2}]$$

$$U'[u] = \frac{1}{\pi} \sin(u) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$U^2[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(n) e^{jnu} dn$$

atraso de $\frac{\pi}{2}$

atraso logarítmico



fase es linealmente en 1

logaritmo de 0.9995

puedes usar filtro chirp
que tiene ventanas regulares
más es necesario calcular
fases si puedes tener un
paso de banda pasante de 60 dB a excep de límite

suelos

$$A = -20 \log_{10} 3$$

$$A = -20 \log_{10}(0,005) = 46,02\text{ dB}$$

veo que ignoradas por tener
que usar el pico de banda
pasante (46 dB) y de banda

$$\Delta n = \frac{A - 3}{2,285 \Delta n} = \frac{60 - 3}{2,285 \cdot \frac{\pi}{2}} = 144, \dots = 145 \text{ de esp } (60\text{ dB})$$

$$\beta = 0,1102(60 - 8,7) =$$

$$W[u] = U[u], W[n] = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{u - \pi/2}{2}\right), \text{ substituimos a eq. de filtro}$$

①

d) Existem filtros de ordem maior que 2 → filtros com chaves

$$\text{Ques} \quad N = \frac{-10 \log(0.5_1 0.5_2)}{2,324 \Delta f} - 13$$

seus dizeres dão ditos à ripple na banda
de rejeição → passante tem 2% das

$$N = \frac{-10 \log(0.001 \times 0.001)}{2,324 \frac{\pi}{20}} - 13 = 128,7 \\ = 129$$

σ_1 e σ_2 são os de banda
passante e o círculo das
bandas de rejeição

Caso o ganho DC seja 1, o σ_2 para além de determinar o
ripple na banda de rejeição também determina a atenuação de banda.
e traçam. logo qd vai dito $\sigma_1 = \sigma_2$.

e) Filtros IIR → fase linear → é a distância de fase
entre ripple na banda passante → vantagem

II IIR → obtém-se filtros →
ordenem maior que 2 → possibilidade de
um tipo de ripple na banda passante → distância entre
(Butterworth, Chebychev) → na banda passante
→ mesma fórmula a partir de modelo analítico
→ fase linear → desvantagem

f) tem q ser Butterworth ou cheby cheio tipo 2

Portanto Butterworth → é um ripple na banda passante

$$\boxed{\begin{array}{l} \rightarrow IIR \\ \rightarrow TB \end{array}} \checkmark (\text{é tipo elíptica ou alternada})$$

out → 1)  $w_c = \frac{2}{\pi} \tan\left(\frac{\pi C}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ long de corte do sistema j.d
freq. critica

2) $H(s) = ?$

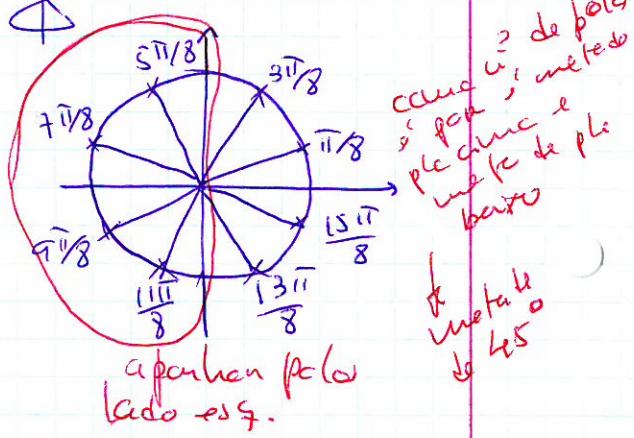
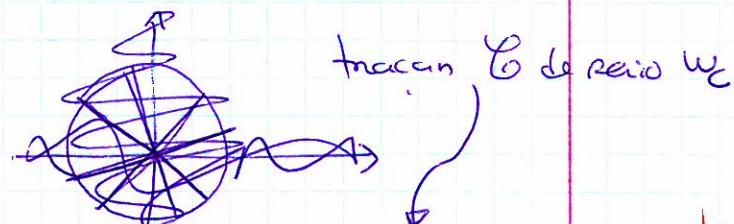
$$H(s) = \frac{k}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$$

é filtro de 4º ordenem

$$|\mathcal{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{jw_c}\right)^2} \xrightarrow{2N=8} \frac{360}{40} \xrightarrow{\frac{3}{45}}$$

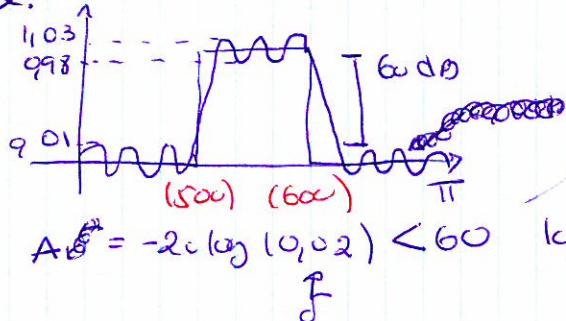
$$s_{1,2} = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \pm j \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right)$$

$$s_{3,4} = 2 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \pm j \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right)$$



$$3) H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{z}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

2.



la xia maior q 60 é ruído
é xia menor q 0.001

$$A \text{dB} = -20 \log(0,02) < 60 \text{ logo vamos fazei } A = 60 \text{ dB}$$

a) FIR, pq tem ripple na banda passante e rejeit

↳ IIR h(x) eliptico tbm tem ripple na banda passante e rejeit mas c/ distorção de fase

b) Ripple mínimo da 6dB logo é na menor frequêcia q cumprir esse nível excepto o baixar.

$$c) f_s = 1,54H(\pi) \rightarrow 2\pi \quad 500 \rightarrow 2\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} 2\pi - f_s \\ nC_1 - f_C \end{aligned}$$

$$nC_2 = 2\pi \cdot \frac{600}{1500} = \frac{12\pi}{15}$$

ficar

$$\Delta = \frac{A-8}{2,285 \Delta n} = \frac{52}{2,285 (12/15 - 2/15)\pi \times 10\%} = \frac{52}{2,285 \frac{2}{15} \pi} \quad (10\% \text{ de } 600-500)$$

$$\beta = 0,0102 (60-8,7) =$$

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

\downarrow
número passar
bande

(onde é este calculado)

$$\leftrightarrow h_d[n] = \frac{n}{11} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{11}\right)$$

$$\text{LPA} - \text{LPB} = \text{LPA}$$

só é para
deslocar

②

LP1

$$u_{lp_1}[u] = \frac{n_1}{\pi} \sin\left(\frac{n_1}{\pi} u\right) = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{2}{3} u\right)$$

$$u_{lp_2}[u] = \dots = \frac{12}{15} \sin\left(\frac{12}{15} u\right)$$

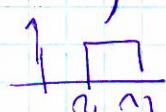
BP sequenciado

$$u_{bp} = u_{lp_2} - u_{lp_1} = \frac{12}{15} \sin\left(\frac{12}{15} u\right) - \frac{2}{3} \sin\left(\frac{2}{3} u\right)$$

O sinal é sequenciado e de forma linear

$$u_{bp}[u] = \left(\frac{12}{15} \sin\left[\frac{12}{15} \left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{2}{3} \sin\left[\frac{2}{3} \left(u - \frac{\pi}{2}\right)\right] \right) \times w(u)$$

plataforma causal
pk binários c1



TF Dif.
analog
+ TF

Ficha "Problema sobre filtros digitais"

1.

a) IIR \rightarrow Butterworth
chaby chav
Elétricos

qd kd quadratura
kd aliasing

Decimais de 2

\hookrightarrow dupla
periodo

\rightarrow IAI (aliasing)

\hookrightarrow TB (pno - cosseno-ray)
osnige

1) calc a ordem e a freq. de corte

2) $H(s) = ?$

Desejamos cosseno-ray de reio w_c



e posicionar 2 N polos igual, espaciais em $\pi/2$
e tocar os N à ficar do lado esquerdo
do plano s

também $N=2 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ pâ filtro de 2^o orden

plo genérico = 3

$$H(s) = \frac{h}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{0,2873}{s^2 + 0,758s + 0,2873}$$

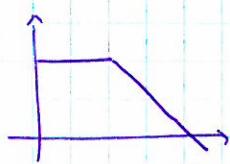
$$3) H(t) = H(s) \left|_{s=\frac{2}{t} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \right.$$

5) (capítulo 6 da WWD explica bem este fenômeno)

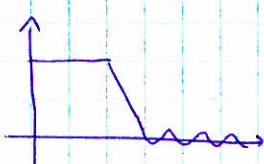
6) video pende mt qualidade de cosseno c/ a distorção
de fase

↳ logo jâ é conveniente os filtros IIR pâ ter desfase
"vamos usar" \Leftrightarrow FIR

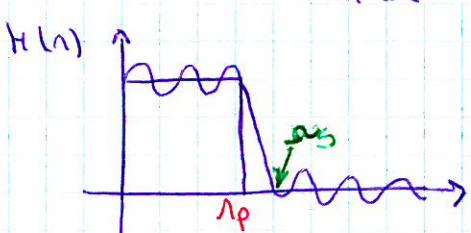
Se jâ queremos ter ripple na banda passante
 \hookrightarrow o que é quando o cosseno à distorção de fase



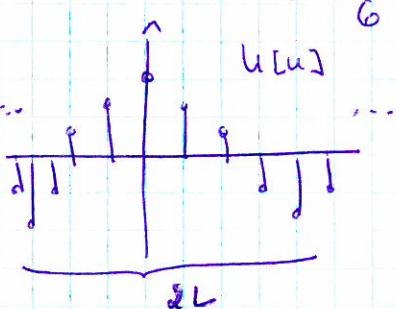
Pmelhor



24 kHz - II
4 kHz - IV



\Leftrightarrow



$(\omega = \frac{\pi}{6})$

$u[n]$

$\frac{2\pi}{L}$

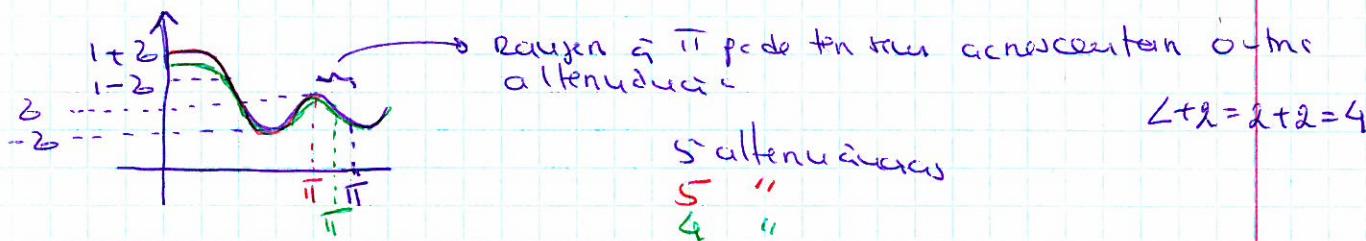
o origem das ondulações veio de
facto de o sinal ter jâ sido passado
por um janelo, ele teve jâ ser
cavado como um trin

$$Ae(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\cos(n))^k = h_e[\omega] + \sum_{R=1}^{\infty} z h_e[R]. \cos R.n$$

$w(n) \rightarrow$ p/a obtenidos Ripple's us dicas bairros
 $H_d(n) - A(n) \rightarrow$ ERRO

$$w(n_i) [R_d(n_i) - A_e(n_i)] = (-1)^{i+1} \delta$$

Agora temos q escolher os nros max e min qm dos oscilos
↳ p/ qm linear alternadas



Vamos a escuchar $c(4)$ attenuaciones

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ N_2 = \frac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow \text{os círculos do paralelo}$$

$$\begin{array}{l} \text{N}_3 = \pi/2 \\ \text{N}_4 = 2\pi/3 \end{array} \rightarrow \text{tensión fricción igual, espaciamos entre } N_p (= \frac{\pi}{8}) \text{ y } \pi$$

$$H_d(\lambda_1) = 1 \leftarrow \text{beide passant}$$

$$H_d(n_3) = 0 \leftarrow \quad " \quad \text{do reject}$$

meestal verschillende tijden en dus verschillende frequenties.

$$E(n_i) = \omega(n_i) [H_d(n_i) - A_e(n_i)] (-1)^{i+2}$$

$$b = \frac{b_1 + b_2}{b_1 - b_2 + b_3 - b_4}$$

$$h[u] \rightarrow y[u] = f(e[u])$$

$$y[u] = h[u] \oplus e[u]$$

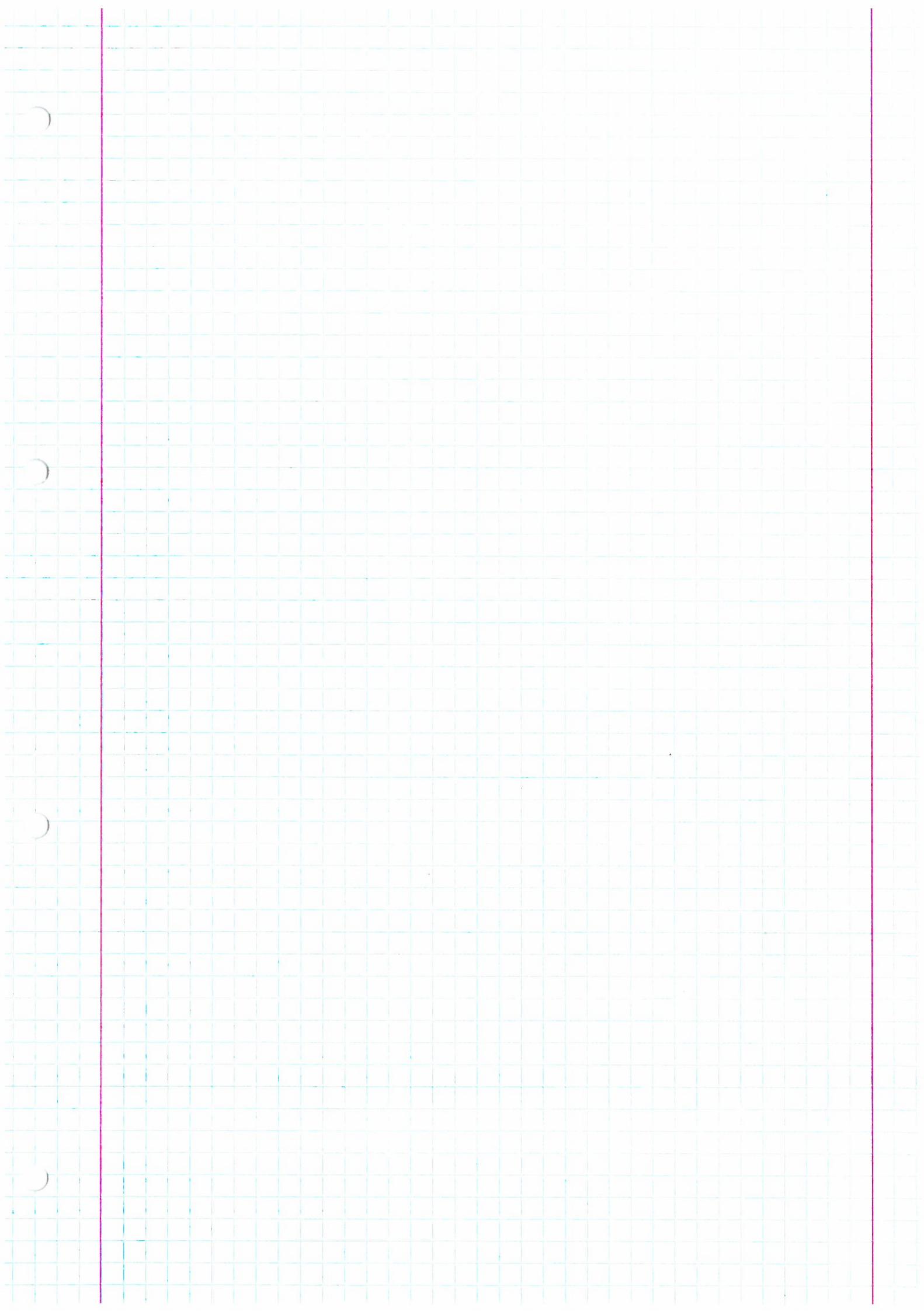
$$\begin{aligned} Y(n) &= h(n) \cdot x(n) \\ Y(z) &= h(z) \cdot X(z) \end{aligned}$$

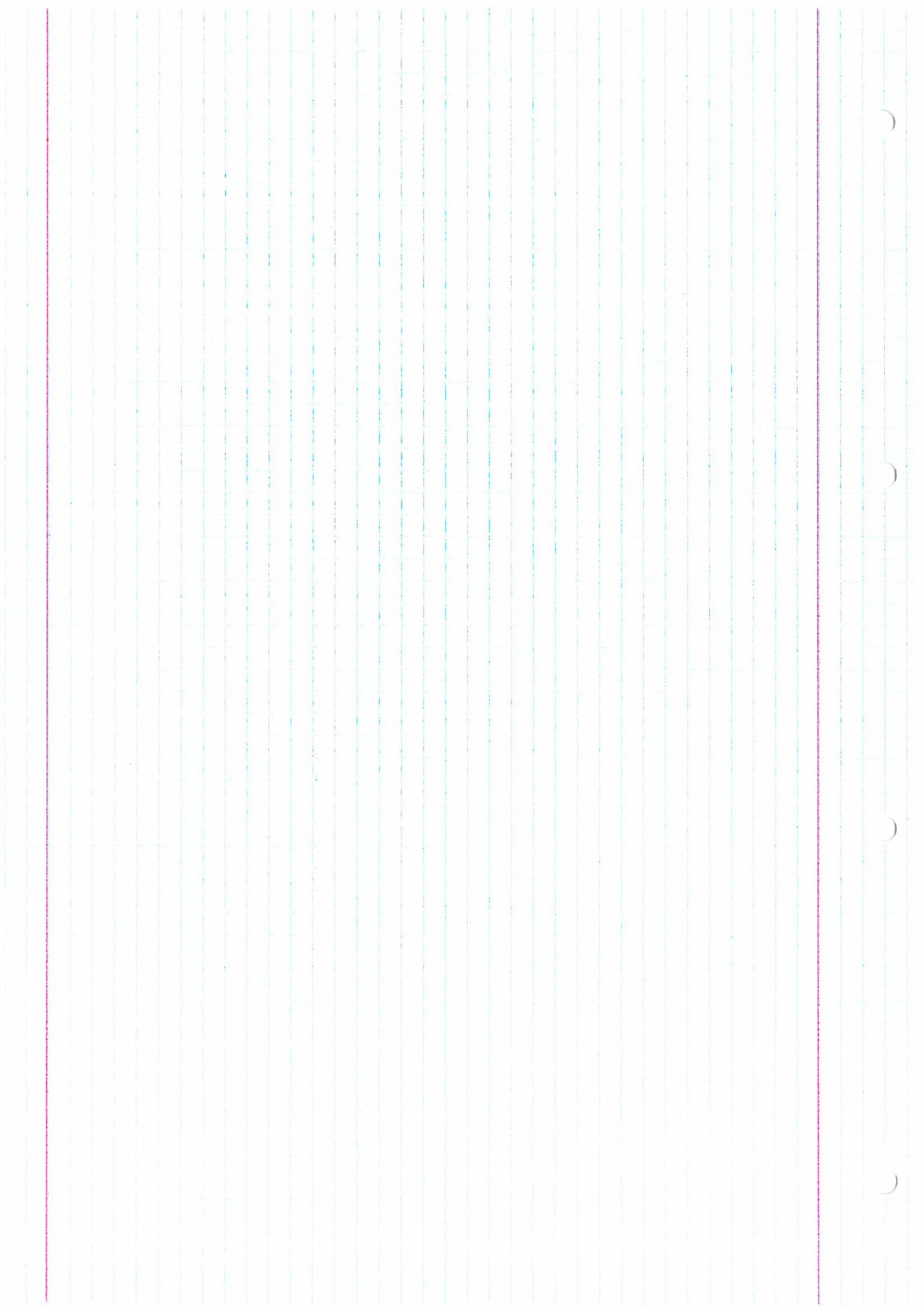
$$H(z) = \frac{\chi(t)}{z - \omega} = \sum_{u=\omega}^{\infty} h[u] z^{-u}$$

$$\frac{Y(t)}{V(t)} = h[0] + h[1].z^{-1} + h[2].z^{-2} + h[3].z^{-3} + h[4].z^{-4}$$

$$Y(z) = h[0]x(z) + h[1]z^{-1}x(z) + \dots + h[4]z^{-4}x(z)$$

$$y[u] = h[0] \cdot e[u] + h[1] \cdot e[u-1] + \dots + h[n] \cdot e[u-n]$$





TPC

1) $x[n] = \{3, 2, -1, 0, 0, 1, 0, 2\}$

$$x[n] \in \{3e^{j0}, 2e^{j90}, 1e^{j180}, 0e^{j270}, 0e^{j360}, 1e^{j270}, 2e^{j0}\}$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, N=8, k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$X(k) = \frac{1}{8} \left(3e^{j0} + 2e^{j90} - 1e^{-j180} + 0e^{-j270} + 0e^{-j360} + 1e^{j270} + 2e^{j0} \right)$$

$$+ 0 + 2e^{-j90} \right) =$$

$$= \frac{1}{8} (3 + 2e^{j90} - e^{j180} + e^{-j180} + -e^{j270} +)$$

$$= \frac{1}{8} (3 + 2e^{-j90} - e^{j90} + e^{j90} + 2e^{-j90}) =$$

$$= \frac{1}{8} (3 + 2e^{-j90} - e^{j90} - e^{j90} - 2e^{-j90})$$

$$= \frac{1}{8} (3 + 2e^{-j90} - e^{j90} + e^{j90} + 2e^{-j90}) =$$

$$= \frac{1}{8} \left[3 + 4 \left(\frac{e^{j90} + e^{-j90}}{2} \right) - e^{j90} - e^{-j90} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left[3 + 4 \cos(90^\circ) - e^{j90} - e^{-j90} \right]$$

$$X(0) = \frac{1}{8} [3 + 4 \cos(0) - e^{j90} - e^{-j90}] = \frac{1}{8} [3 + 4] = \frac{7}{8}$$

$$X(1) = \frac{1}{8} \left[3 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - e^{j90} - e^{-j90} \right] =$$

$$= \frac{1}{8} \left[3 + 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - e^{j90} - e^{-j90} \right] =$$

$$= \frac{1}{8} \left[3 + 2\sqrt{2} - (-j) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left[3 + \left(2 - \frac{1}{2} \right)\sqrt{2} + j\left(1 + \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left[3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} + j\left(\frac{3}{2} \right) \right] = \frac{1}{8} \left[3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} + j\frac{3}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{8} \left[\sqrt{9 + 9\sqrt{2} + \frac{9}{4}} + j\sqrt{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{4}} \right] = \frac{1}{8} \left[\sqrt{15 + 10\sqrt{2}} + j\sqrt{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
x(2) &= \frac{1}{8} [z + 4 \cos(\frac{\pi}{2}) - e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\frac{5\pi}{4}}] = \\
&= \frac{1}{8} [3 + 0 - (-1) + e^{-j\frac{\pi}{2}}] = \frac{1}{8} [4 + e^{-j\frac{\pi}{2}}] \\
\frac{1}{8}[4-j] &= \frac{1}{8}\sqrt{16+1}e^{j\arctan\left(\frac{-1}{4}\right)} = \frac{1}{8}\sqrt{17}e^{j\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{17}}{8}e^{j\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{17}}{8}e^{j\arctan\left(\frac{1}{4}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(3) &= \frac{1}{8} [z + 4 \cos(\frac{3}{4}\pi) - e^{-j\frac{3}{4}\pi} + e^{-j\frac{15}{4}\pi}] = \\
&= \frac{1}{8} [z + 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - e^{-j\frac{3}{4}\pi} + e^{-j\frac{15}{4}\pi}] = \\
&= \frac{1}{8} [z - 2\sqrt{2} - j + (\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})] = \\
&= \frac{1}{8} [z - 2\sqrt{2} + j(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)] = \\
&= \frac{1}{8}\sqrt{(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)^2}e^{j\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}}\right)} = \\
&= \frac{1}{8}\sqrt{9 - 15\sqrt{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1}e^{j\arctan\left(\frac{1}{3}\right)} = \\
&= \frac{1}{8}\sqrt{15 - 10\sqrt{2}}e^{j\arctan\left(\frac{1}{3}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(4) &= \frac{1}{8} [z + 4 \cos(\pi) - e^{-j\pi} + e^{j5\pi}] = \\
&= \frac{1}{8} [z + 4 - 1 - 1] = -\frac{z}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(5) &= \frac{1}{8} [z + 4 \cos(\frac{5}{4}\pi) - e^{-j\frac{5}{4}\pi} + e^{-j\frac{19}{4}\pi}] = \\
&= \frac{1}{8} [z + 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - e^{-j\frac{5}{4}\pi} + e^{-j\frac{19}{4}\pi}] = \\
&= \frac{1}{8} [z - 2\sqrt{2} - j - (\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})] = \\
&= \frac{1}{8} [z - 2\sqrt{2} - j(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)] = \frac{1}{8}\sqrt{17 - 4\sqrt{2}}e^{j\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$x(6) = \frac{1}{8} [3 + 4 \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j\frac{15\pi}{2}}] =$$

$$= \frac{1}{8} [3 + 0 - e^{j\frac{3\pi}{2}} + e^{j\frac{15\pi}{2}}] = \frac{3}{8} [3 - (-1) + j] =$$

$$= \frac{1}{8} [1 + j] = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{j\arctan(\frac{1}{1})}$$

$$x(7) = \frac{1}{8} [3 + 4 \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) - e^{-j\frac{7\pi}{4}} + e^{-j\frac{25\pi}{4}}] =$$

$$= \frac{1}{8} [3 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} - e^{j\frac{7\pi}{4}} + e^{-j\frac{7\pi}{4}}] =$$

$$= \frac{1}{8} [3 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} - j\sqrt{1 - \frac{7^2}{16}}] = \frac{1}{8} [3 + \frac{5\sqrt{2}}{2} - j(\frac{15}{2})] =$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{15 + 10\sqrt{2}} e^{j\arctan(\frac{1}{3})}$$

$$x[m] = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{jk\frac{\pi}{4}m} + \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{\pi}{4}m} =$$

$$= x(0) + x(1) e^{j\frac{\pi}{4}m} + x(2) e^{j\frac{2\pi}{4}m} + x(3) e^{j\frac{3\pi}{4}m} +$$

$$+ x(4) e^{j\frac{4\pi}{4}m} + x(5) e^{j\frac{5\pi}{4}m} + x(6) e^{j\frac{6\pi}{4}m} + x(7) e^{j\frac{7\pi}{4}m} =$$

$$= x(0) + x(1) e^{j\frac{\pi}{4}m} + x(2) e^{j\frac{2\pi}{4}m} + x(3) e^{j\frac{3\pi}{4}m} + x(4) e^{j\frac{4\pi}{4}m} +$$

$$+ x(5) e^{j(\frac{5\pi}{4} + 2\pi)m} + x(6) e^{j(\frac{6\pi}{4} + 2\pi)m} + x(7) e^{j(\frac{7\pi}{4} + 2\pi)m} =$$

$$= x(0) + x(1) e^{j\frac{\pi}{4}m} + x(2) e^{j\frac{2\pi}{4}m} + x(3) e^{j\frac{3\pi}{4}m} +$$

$$+ (-1)^m x(4) + x(5) e^{-j\frac{3\pi}{4}m} + x(6) e^{-j\frac{2\pi}{4}m} + x(7) e^{-j\frac{\pi}{4}m} =$$

$$|X(k)| = |x(N-k)| \quad \underline{x(k)} = -\underline{x(N-k)}$$

$$= x(0) + |x(1)| \left[e^{j(\frac{\pi}{4}m + \underline{x(1)})} + e^{-j(\frac{\pi}{4}m + \underline{x(1)})} \right] +$$

$$+ |x(2)| \left[e^{j(\frac{2\pi}{4}m + \underline{x(2)})} + e^{-j(\frac{2\pi}{4}m + \underline{x(2)})} \right] +$$

$$+ |x(3)| \left[e^{j(\frac{3\pi}{4}m + \underline{x(3)})} + e^{-j(\frac{3\pi}{4}m + \underline{x(3)})} \right] +$$

$$+ (-1)^m x(4) = x(0) + \frac{|x(1)|}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}m + \underline{x(1)}\right) +$$

$$+ \frac{|x(2)|}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}m + \underline{x(2)}\right) + \frac{|x(3)|}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}m + \underline{x(3)}\right) +$$

$$+ (-1)^m x(4)$$

$$X(k) = G(k) + w_N^k H(k) = G(k) + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} H(k) \quad (+ \text{é múltiplo de } \\ \text{conforme } 2^4 \text{ é total})$$

$$X(0) = 2 + e^0 S = 2 + 5 = 7$$

$$X(1) = \sqrt{10} e^{j\arctan(\frac{1}{3})} + e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{5} e^{j\arctan(2)} =$$

$$= \sqrt{10} e^{j\arctan(\frac{1}{3})} + \sqrt{5} e^{j[\arctan(2) - \frac{\pi}{4}]} =$$

$$= 3 + j + (-j2) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3 + j + \frac{\sqrt{2}}{2} + j \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \mid 2 =$$

$$= 3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} + j \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{15 + 10\sqrt{2}} e^{j\arctan(\frac{1}{3})}$$

$$X(2) = 4 + e^{-j\frac{\pi}{2}} S = 4 + e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot 4 - j = \sqrt{17} e^{-j\arctan(\frac{1}{4})}$$

$$X(2) = \sqrt{10} e^{-j\arctan(\frac{1}{3})} + e^{-j\frac{3\pi}{4}} \sqrt{5} e^{-j\arctan(2)} =$$

$$= \sqrt{10} e^{-j\arctan(\frac{1}{3})} + \sqrt{5} e^{-j[\arctan(2) - \frac{3\pi}{4}]} =$$

$$= 3 - j + (1 - j2) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} - j \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) =$$

$$= \sqrt{15 - 10\sqrt{2}} e^{-j\arctan(\frac{1}{3})}$$

$$X(4) = 2 + e^{-j\pi} S = 2 - 5 = -3$$

$$X(3) = \sqrt{10} e^{j\arctan(\frac{1}{3})} + e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{5} e^{j\arctan(2)} =$$

$$= \sqrt{10} e^{j\arctan(\frac{1}{3})} + \sqrt{5} e^{j[\arctan(2) + \frac{\pi}{4}]} =$$

$$= 3 + j + (1 + j2) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} - j \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) =$$

$$= \sqrt{15 - 10\sqrt{2}} e^{j\arctan(\frac{1}{3})}$$

$$X(6) = 4 + e^{-j\frac{3\pi}{2}} S = 4 + j = \sqrt{17} e^{j\arctan(\frac{1}{4})}$$

$$X(7) = \sqrt{10} e^{-j\arctan(\frac{1}{3})} + e^{-j\frac{3\pi}{2}} \sqrt{5} e^{j\arctan(2)} =$$

$$= \sqrt{10} e^{-j\arctan(\frac{1}{3})} + \sqrt{5} e^{-j[\arctan(2) + \frac{3\pi}{2}]} =$$

$$= 3 - j + (1 - j2) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} - j \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= \sqrt{15 + 10\sqrt{2}} e^{-j\arctan(\frac{1}{3})}$$

Então, para os cálculos de valores que temos 1) zero a $\frac{1}{N}$ a multiplicar devido a diferença nas fórmulas do slide 1, e 2) da 4ª unidade sendo necessário multiplicar por $\frac{1}{N}$ (o resultado é 1/m)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (\text{da } 0 \text{ a } N-1 \text{ que em } 1)$$

No total foram realizados 24 multiplicações complexas e somas de logaritmos como queríamos provar

$$2) x(k) = g(k) + w_N^k h(k)$$

$$w_N^k = e^{j \frac{2\pi k}{N}} = e^{jk\frac{\pi}{2}} \quad w_{\frac{N}{2}}^k = e^{jk\frac{\pi}{2}} = e^{jk\frac{\pi}{2}}$$

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[2n] w_N^{nk} = \sum_{n=0}^{3} x[2n] w_N^{nk} =$$

$$= 3w_0^{nk} + 1w_{\frac{1}{2}}^{nk} + 0 + 0 = 3 + e^{-jk\frac{\pi}{2}} \quad (\text{1 multiplicado complexo})$$

$$h(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[2n+1] w_N^{nk} = 2w_0^{nk} + 0 + 1w_{\frac{1}{2}}^{nk} + 2w_1^{nk}$$

$$= 2 + e^{-jk\frac{\pi}{2}} + 2e^{-jk\frac{3\pi}{2}} \quad (\text{1 multiplicado complexo, 1 total})$$

$$x(k) = 3 + e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}}(2 + e^{-jk\frac{\pi}{2}} + 2e^{-jk\frac{3\pi}{2}}) =$$

$$= 3 - e^{jk\frac{\pi}{2}} + 2e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-jk\frac{5\pi}{2}} \quad (\text{multiplicado total})$$

$$g(0) = 3 - 1 = 2$$

$$g(1) = 3 - e^{-j\frac{\pi}{2}} = 3 + j = \sqrt{10} e^{j \arctan(\frac{1}{3})}$$

$$g(2) = 3 - e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 3 + 1 = 4$$

$$g(3) = 3 - e^{-j\frac{5\pi}{2}} = 3 - j = \sqrt{10} e^{j \arctan(-\frac{1}{3})}$$

$$g(4) = 3 - e^{-j\frac{7\pi}{2}} = 3 + 1 = 2 = g(0)$$

$$g(5) = 3 - e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 3 + j = \sqrt{10} e^{j \arctan(\frac{1}{3})} = g(1)$$

$$g(6) = 3 - e^{-j\frac{11\pi}{2}} = 3 - j = \sqrt{10} e^{j \arctan(-\frac{1}{3})} = g(3)$$

$$g(7) = 3 - e^{-j\frac{13\pi}{2}} = 3 + 1 = 4 = g(2)$$

$$g(k) = g(k+4) \rightarrow \text{periodo 4} = \frac{1}{2} \quad (\text{so tanto período 4 complexo, 1/2 total})$$

$$h(0) = 2 + e^0 + 2e^0 = 2 + 1 + 1 = 5$$

$$h(1) = 2 + e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 2 - 1 + 2 = 3 + j = \sqrt{10} e^{j \arctan(\frac{1}{3})}$$

$$h(2) = 2 + e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{5\pi}{2}} = 2 + 1 - 2 = 1$$

$$h(3) = 2 + e^{-j\frac{5\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{7\pi}{2}} = 2 - 1 - j = 1 - j = \sqrt{2} e^{j \arctan(-\frac{1}{2})}$$

$$h(4) = 2 + e^{-j\frac{7\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 2 + e^0 + 2e^0 = 5 - 4j$$

período de período 4 tal como g(k))

(4/4 operações complexas, 16 total)

Tanto Vicente a 62029

TPC (5^a slide 65)

② $x[n] = (-1)^n$

$$x[n] = (-1)^n$$

$$X(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \pi)$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

$$(-1)^n x[n] \longleftrightarrow X(\omega - \pi)$$

$$(-1)^{n+1} \longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega + \pi)$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$Y(n) = X(n)H(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \pi) \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} =$$

$$= 2\pi \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi}} \delta(\omega - \pi) =$$

$$\delta(\omega - \pi) = 0 \text{ A } \cancel{\frac{1}{2} \neq \infty} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(-1)} \delta(\omega - \pi) = 2\pi \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \delta(\omega - \pi) =$$

$$= \frac{2}{3} 2\pi \delta(\omega - \pi)$$

$$(-1)^n \longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \pi)$$

$$a x[n] \longleftrightarrow a X(\omega)$$

logo

$$\frac{2}{3} (-1)^n \longleftrightarrow \frac{2}{3} [2\pi \delta(\omega - \pi)]$$

$$y[n] = \frac{2}{3} (-1)^n$$

Processamento Digital de Sinal - FFT em Matlab

Considere o sinal $v(t) = A \cos(500\pi t)$.

- a) Determine os coeficientes da série de Fourier de $v(t)$.
- b) Determine a transformada de Fourier de $v(t)$.
- c) Determine e represente a transformada de Fourier do sinal

$$() = ; \quad <1250 \quad 0; \quad >1250$$

- d) Pretende-se gerar no Matlab o sinal $x[n]$ que é uma versão amostrada de $x(t)$. Determine o tempo máximo entre amostras que não provoca aliasing.
- e) Determine o período de $x[n]$ (N) para uma frequência de amostragem 5 vezes superior à frequência de Nyquist. Considere $A=1$ e gere $x[n]$ no Matlab.
- f) Determine a DFT de $x[n]$ usando o algoritmo da FFT.
- g) Repita a alínea anterior para $x[n]$ 2 e 10 vezes mais longo. Compare os resultados e tire conclusões relativamente ao observado.
- h) Considere o sinal gerado na alínea e). Adicione a este sinal um outro sinal obtido de modo semelhante mas assumindo uma frequência de amostragem 2 vezes superior à frequência de Nyquist. Determine a FFT do sinal obtido.
- i) Altere o sinal gerado na alínea anterior para o caso em que ambos os sinais tenham frequências semelhantes (p. e. $N1=10$ e $N2=8$, com $n=-20:1:20$). Some os sinais e determine a respectiva FFT. Aumente para o dobro e para 10 vezes mais a duração dos sinais e recalcule a FFT. Que conclusões tira acerca do resultado?

REVIEW: V(t) = A cos(500πt)

$$V(t) = A \cos(500\pi t)$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

a) $\cos(500\pi t) \leftrightarrow a_1 = a_{-1} = \frac{A}{2}$ $a_k = 0 \forall k \neq \pm 1$

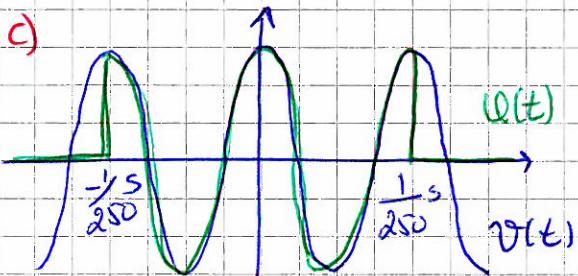
$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$= A \left[\frac{e^{j500\pi t} + e^{-j500\pi t}}{2} \right]$$

b) T.F $\rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} j\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$ $\omega_0 = 500\pi \approx a_1, \text{No a}_1, \text{Unicos f}\phi$
 $= 2j\pi a_{-1} \delta(\omega + \omega_0) + 2j\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0)$

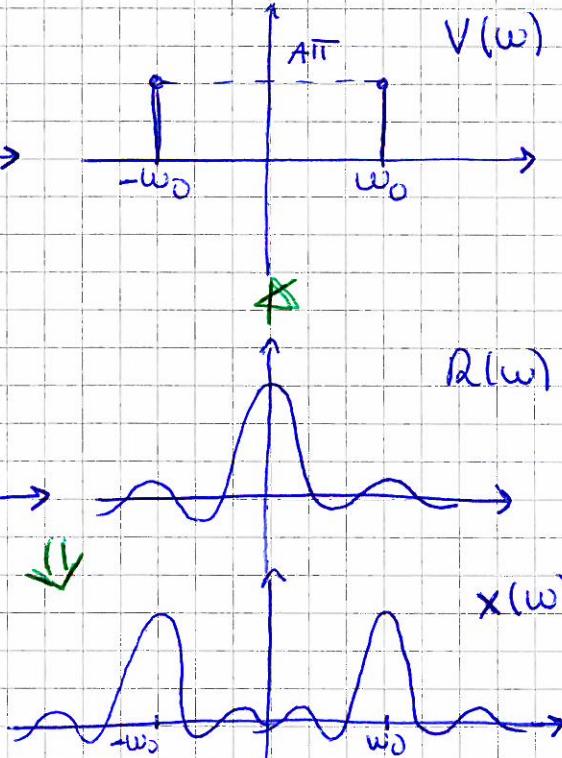
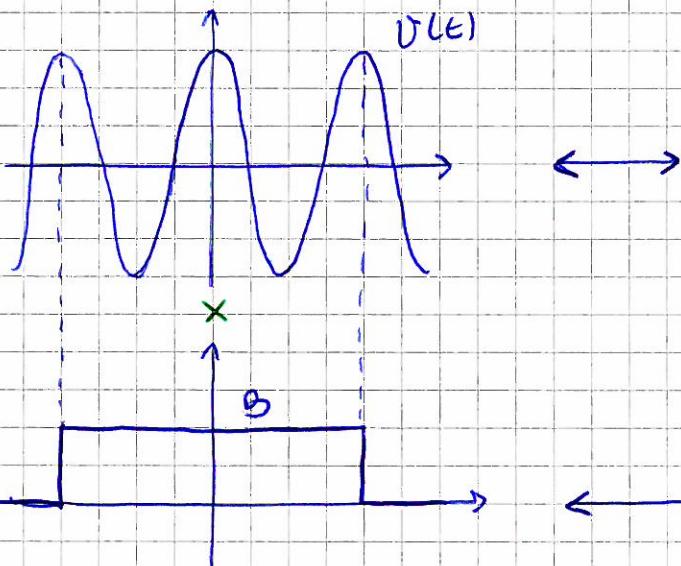
$$\cos(500\pi t) \longleftrightarrow A\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\frac{1}{2\pi} \downarrow \quad \cos(500\pi t) \longleftrightarrow \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad f_0 = 250 \text{ Hz}$$



$$500\pi t \Big|_{t=\frac{1}{250}} = 2\pi \quad \text{un periodo}$$

$$v(t) = V(t) \cdot R(t)$$



$$X(\omega) = [V(\omega) * R(\omega)] \frac{1}{2\pi}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\phi) \sqrt{(\omega - \phi)} d\phi \right]$$

$$R(\omega) = 25 \sin\left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)$$

$$C/T = \frac{1}{2\pi}$$

$$= \frac{A B T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\phi T}{\pi}\right) \left[A \pi [\delta(\omega - \omega_0 - \phi) + \delta(\omega + \omega_0 - \phi)] \right] d\phi$$

ignora-se $\omega - \omega_0 - \phi = 0$
 $\phi = \omega - \omega_0$

Subst. $\omega - \omega_0$

$$= A \pi \cdot B T \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{\pi}\right) + \text{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{\pi}\right)$$

d) $\int_S = 2f_T = 2 \cdot 250 \text{ Hz} = 500 \text{ Hz}$

↳ freq. de amostragem

$$T_S = \frac{1}{f_S} = \frac{1}{500} = 2 \text{ ms}$$

C. interpolação suave permite restringir o cos e é uma
onda triangular.

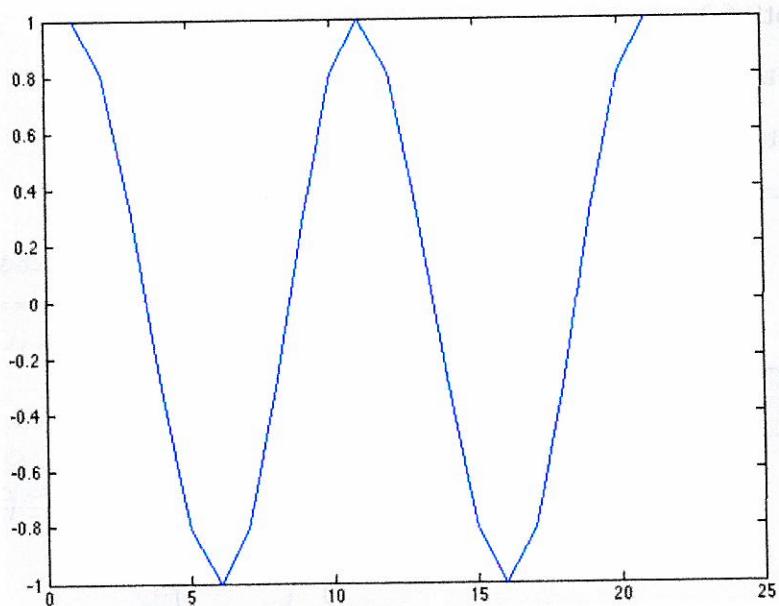
Nós podemos inspecionar chejamos mais rapidamente a
onda onde percebemos que a onda cos

2) $N = \frac{T}{T_S} = \frac{10T_S}{T_S} = 10$ para freq. amostragem é 10x
superior a f_0

- Note:
- função recebe a faixa \rightarrow wav second
 - reproduz som no matlab \rightarrow sound

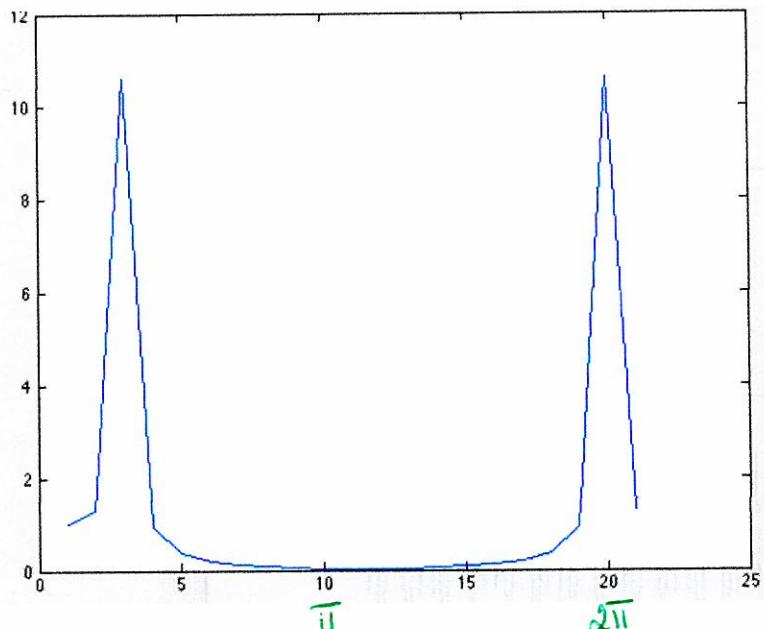
e)

de -10 de 0 em 0m até 10
 ↓ ↓ → isso mostra os cálculos efetuados
 $\gg n = -10:1:10;$
 $\gg x = \cos((2\pi/10)*n);$
 $\gg plot(x)$ → mostra gráfico



f)

calcula todos os p^{tos} → FFT(X, N)
 $\gg fx = fft(x)$, → só calcula N pontos
 → só parte real e magnitude → vetor X
 $\gg nfx = abs(fx);$ → mostra
 → mostra gráficos separado
 → módulo e fase → chama algoritmo
 $\gg figure$ → Rátmido
 $\gg plot(nfx)$



g)

max. freq. do sinal → $\frac{f_s}{2}$ → quanto $> f_s$ mais próx.
 $\gg n1 = -20:1:20;$ → 2x mais curto → este p^{to} perto de 10.
 $\gg n2 = -100:1:100;$ → 100x mais longo
 $\gg x1 = \cos((2\pi/10)*n1);$

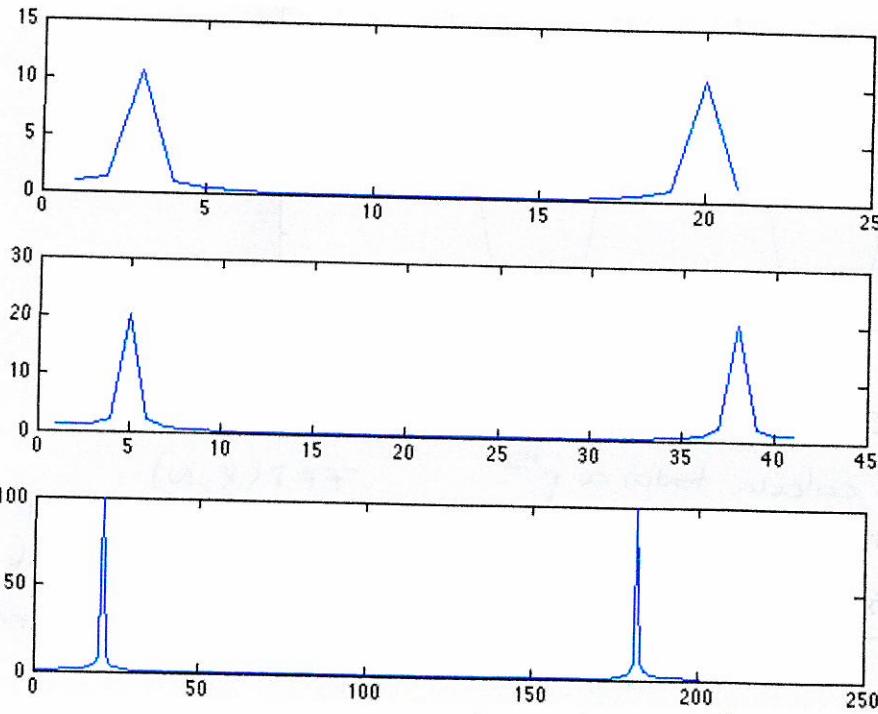
É apenas uma sinusoide

```

>> x2=cos((2*pi/10)*n2);
>> nfx1=abs(fft(x1));
>> nfx2=abs(fft(x2));
    uº (núcleo)   uº (cabeza)
    uº (cuello)   indice de límite
>> subplot(3,1,1),plot(nfx)
    indice de límite
>> subplot(3,1,2),plot(nfx1)
>> subplot(3,1,3),plot(nfx2)

```

les le caso que he hecho
comparan 3 figura



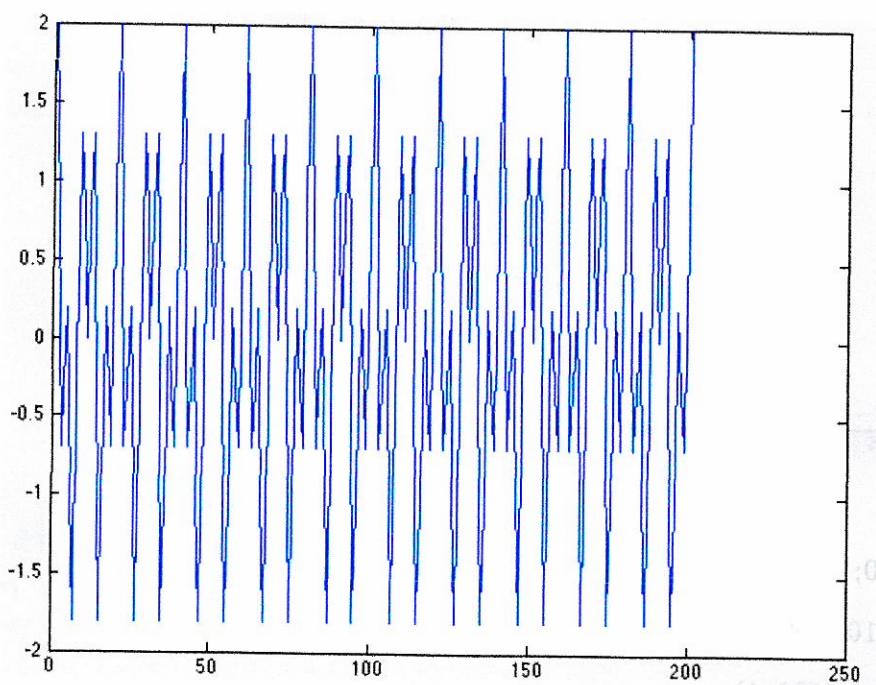
A medida q. π te
aumente uº p
disminuir a func
↓
a func tiene
plazo un
impulso

ii) $x_{10} = x_2 + \cos((2\pi/4)*n_2)$

taxa de alteraciones = $2f_0 = 4$

generar
x1 nucleo
fermos
de cos

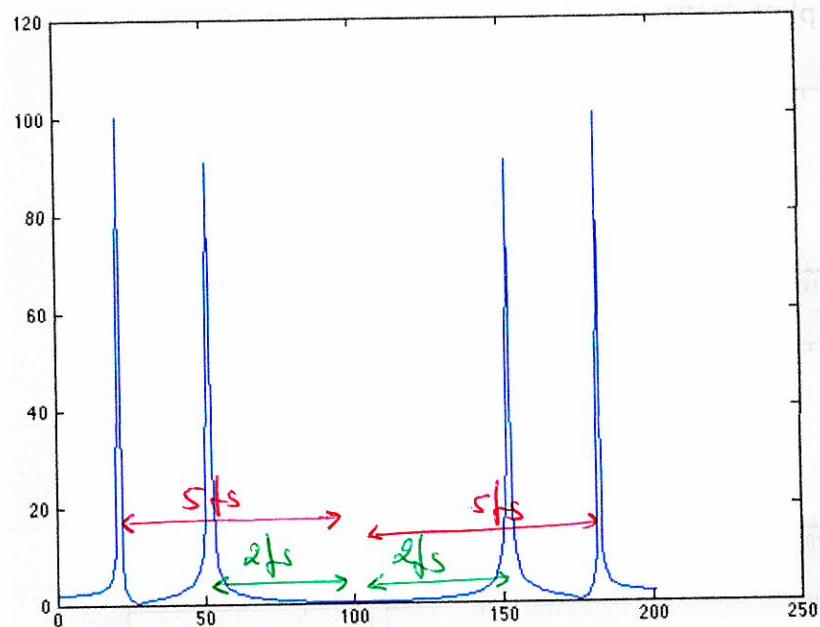
>> figure
>> plot(x10)



```
>> nfx10=abs(fft(x10));
```

```
>> figure
```

```
>> plot(nfx10)
```



?)

```
>> x11=x1+cos((2*pi/8)*n1);
```

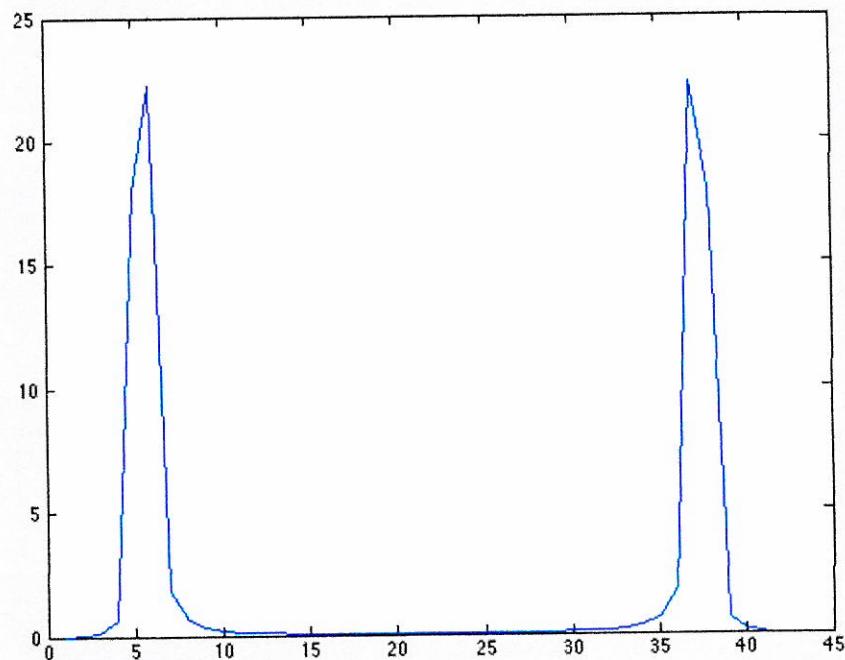
```
>> nfx11=abs(fft(x11));
```

```
>> figure
```

```
>> plot(nfx11)
```

?)

• temos 2 impulsos pr os impulso estaticos
mt proximos doi 2 e a janela junta os
4 temos q aumentam o pto em
vet de -20 a 20 → temos q vetar
-100 a 100 onde a
resolução tam sej
maioris



genet 8e
plot 40 p

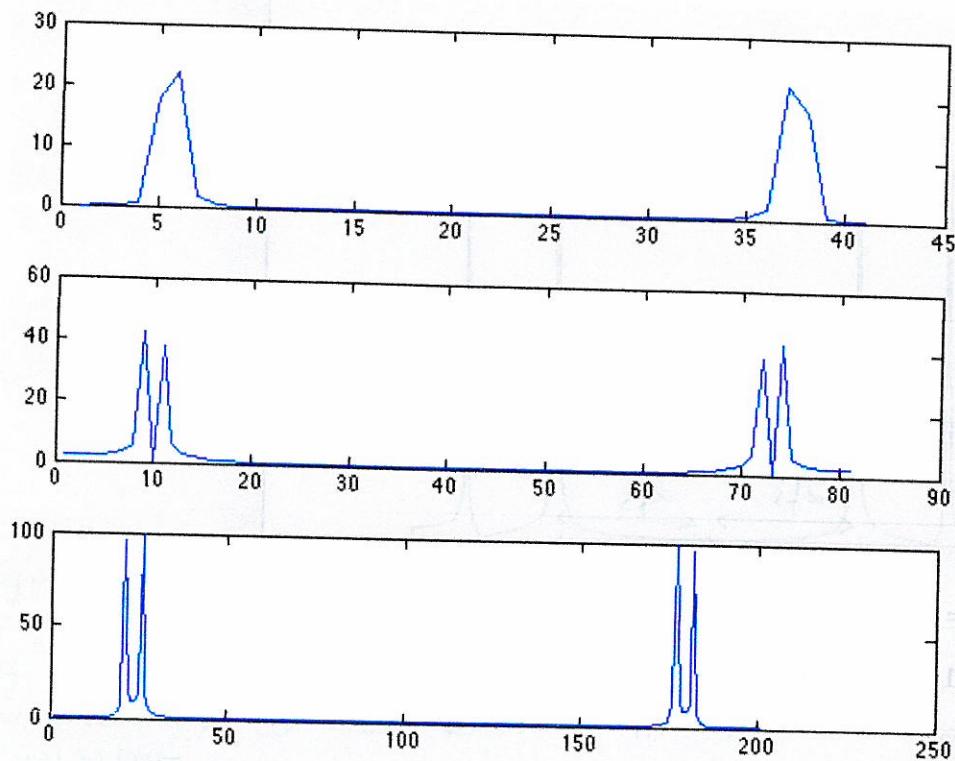
```
>> n40=-40:1:40;
```

```
>> x12 = cos((2*pi/10)*n40) +cos((2*pi/8)*n40);
```

```
>> x13 = x2 +cos((2*pi/8)*n2);
```

```
>> nfx12=abs(fft(x12));
```

```
>> nfx13=abs(fft(x13));  
>> subplot(3,1,1), plot(nfx11)  
>> subplot(3,1,2), plot(nfx12)  
>> subplot(3,1,3), plot(nfx13)
```



Exercício 1

$$\text{Def. Z } \Rightarrow \mathcal{D}[u] = \left(\frac{1}{2}\right)^u u[u] - 6\left(\frac{1}{5}\right)^u u[-u-1]$$

$$X(z) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}[u] \cdot z^{-u}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^u u[u] - 6\left(\frac{1}{5}\right)^u u[-u-1] \right] \cdot z^{-u}$$

$$= \sum_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^u u[u] \cdot z^{-u} - \sum_{u=0}^{+\infty} 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^u u[-u-1] \cdot z^{-u}$$

caso $u[u] = 1 \text{ se } u > 0$
 $u[-u-1] = 1 \text{ se } u \leq -1$

então $X(z) = \sum_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^u \cdot z^{-u} - \sum_{u=0}^{+\infty} 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^u \cdot z^{-u}$

$$\sum_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^u \cdot z^{-u} = \sum_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right)^u$$

caso $\sum_{u=0}^N R^u = \frac{1-R^{N+1}}{1-R} \text{ se } R < 1$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right)} , \left| \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \right| < 1$$

$$= \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \left| \frac{1}{2} \right| < |z|$$

$$-6 \sum_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^u \cdot z^{-u} \quad \text{u.v.: } u \rightarrow k : k = -u$$

$$= -6 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{-k} \cdot z^k$$

$$= -6 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{-k} \cdot z^k + 6 \quad \text{pois se acrescentar um termo } (-6 \cdot z^0)$$

$$= 6 \left(1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot z} \right)$$

$$= \frac{6z}{z - \frac{1}{5}}$$

Exercício 2

$$X(z) = \frac{4 - \frac{3}{5}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{4 - \frac{3}{5}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$A = X(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{4 - \frac{3}{5} \times 2}{1 - \frac{1}{4} \times 2} = \frac{4 - \frac{6}{5}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{14}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{14}{5}$$

$$B = X(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=4} = \frac{4 - \frac{3}{5} \times 4}{1 - \frac{1}{2} \times 4} = \frac{4 - \frac{12}{5}}{1 - 2} = -\frac{8}{5}$$

$$X(z) = \frac{14}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad \text{com } \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$$

$$\text{e com } a^u u[n] \iff \frac{z}{z-a} \quad |z| > a$$

$$-a^u u[-n-1] \iff \frac{z}{z-a} \quad |z| < a$$

$$\text{então } x[n] = -\frac{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^u u[n] - \frac{14}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^u u[-n-1]$$

Ex. transf Z e Z⁻¹

$$1. \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow H(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}}$$

$$(b)[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow X(n) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-jn}}$$

~~Resposta~~

$$Y(n) = H(n) \cdot X(n)$$

$$Y(n) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-jn}\right)\left(1 - \frac{3}{4}e^{-jn}\right)} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}} + \frac{B}{1 - \frac{3}{4}e^{-jn}}$$

$$A = \left. \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-jn}} \right|_{e^{-jn}=2} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}} = -2$$

$$B = \left. \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}} \right|_{e^{-jn}=\frac{4}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

$$Y(n) = \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}} + \frac{3}{1 - \frac{3}{4}e^{-jn}}$$

$$y[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

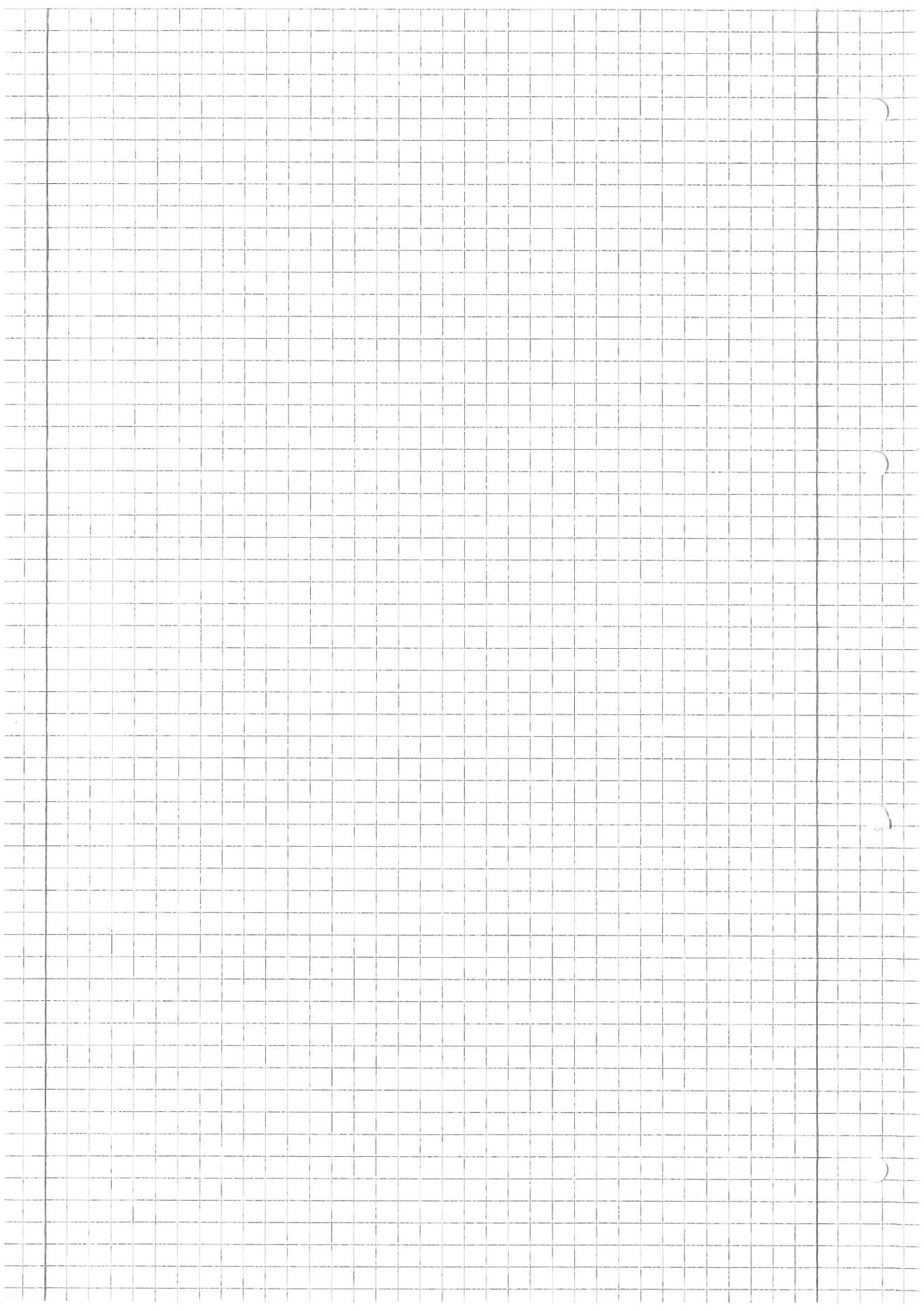
$$2. \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow H(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}}$$

$$(b)[n] = (-1)^n = (e^{j\pi})^n \Rightarrow X(n) = \delta(n+\pi), 2\pi$$

$$Y(n) = X(n) \cdot H(n)$$

$$= \delta(n+\pi) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}}, 2\pi \quad \delta(n+\pi) \text{ vale zero quando } n = \pi$$

$$Y[n] = \frac{1 \cdot 2\pi}{1 - \frac{1}{2}(-1)} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3}$$



Exercício 2

$$u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n] \Rightarrow H(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega n}}$$

$$v[n] = (-1)^n \Rightarrow X(n) = 2\pi \delta(n-\pi)$$

pois $1 \longleftrightarrow 2\pi \delta(n)$

$$(-1)^n v[n] \longleftrightarrow X(n-\pi)$$

$$(-1)^n \cdot 1 \longleftrightarrow 2\pi \delta(n-\pi)$$

$$Y(n) = x(n) \cdot H(n)$$

$$= 2\pi \delta(n-\pi) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jn}}$$

$$= 2\pi \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(-1)} \cdot \delta(n-\pi)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \delta(n-\pi)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2\pi \delta(n-\pi)$$

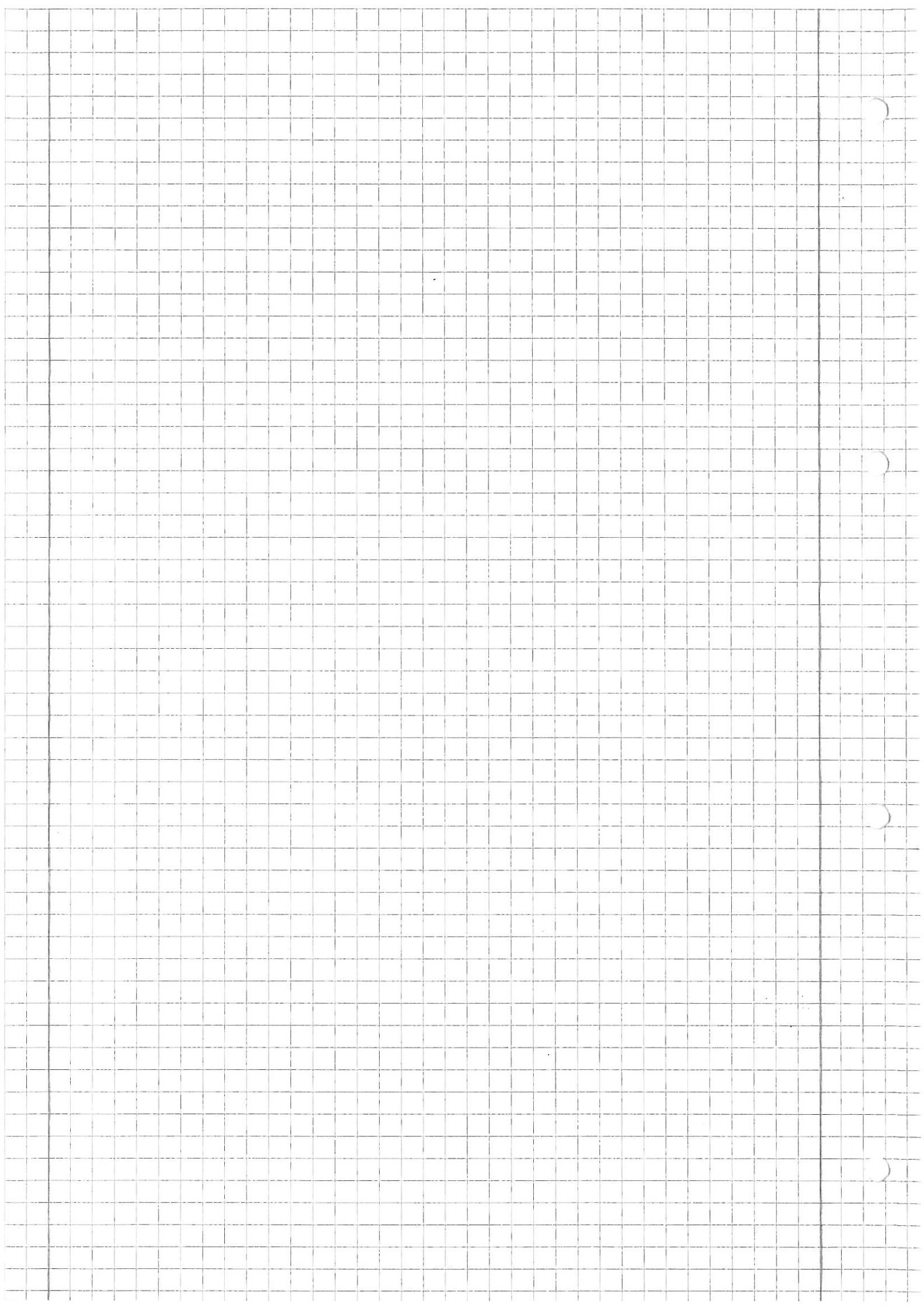
como

$$(-1)^n \longleftrightarrow 2\pi \delta(n-\pi)$$

$$a v[n] \longleftrightarrow a \cdot x(n)$$

então

$$y[n] = \frac{2}{3} (-1)^n \longleftrightarrow Y(n) = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \delta(n-\pi)$$



Convolution

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$y[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k] h[n-k]$$

$$\Phi(n) = X(n) \cdot H(n)$$

$$S_p(t) = S_C(t) \cdot p(t) \longleftrightarrow S_p(\omega) = \frac{1}{2} [S_C(\omega) * P(\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_C(\omega) \cdot P(\omega - \omega) d\omega = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_C\left(\omega - \frac{n2\pi}{T}\right)$$

DFT

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} n k}$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} n k}$$

DFT - N^2

FFT - $N \log_2 N$

$$f_s \geq 2f_n \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_n$$

$$x_d(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_p(nN) e^{-j\omega_n n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_p(n) e^{-j\omega_n \frac{n}{N}} = x_p \Big|_{\frac{n}{N}}$$

$$x(n) = \sum_{u=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} u[n] \cdot e^{-j\omega_u n} = \frac{\sin(N\omega_u/2)}{\sin(\omega_u/2)}$$

$$x(n) = |x(n)| \cdot e^{j\angle x(n)}$$

$$u[n] = \frac{w}{\pi} \sin\left(\frac{w}{\pi} n\right) \longrightarrow u(t) = 2AT \sin\left(\frac{wt}{\pi}\right)$$

$$\frac{2A \sin(wt)}{2\pi} \leftrightarrow \frac{A}{\omega_1} \text{ at } \omega_1$$



$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} z^{-u} \cdot u[n], z^{-u} = (R \cdot e^{j\omega u})^{-u}$$

$$a^u u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$

$$-a^u u[-u-1] \xrightarrow{z} \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$

$$-u[-u-1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| < 1$$

$$u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

$$u \cdot u[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$\text{Butterworth} \xrightarrow{z} |H(j\frac{\omega}{\omega_0})|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{j\omega}{\omega_0})^{2N}}$$

$$h(t) = A_h e^{\frac{s_h t}{T}} u(t) \xleftrightarrow{z} H(s) = \frac{A_h}{s - s_h} \rightarrow H(j\omega) = \frac{A_h}{j\omega - s_h}$$

$$h[n] = h_c(nT) \xleftrightarrow{z} H(z) = \frac{A_h T}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}}$$

$$u^+ u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{z} 1$$

$$(u \cdot a^u u[n]) \xleftrightarrow{z} \frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$$

$$\begin{cases} \omega = \frac{z}{T} + j\omega_0 \left(\frac{z}{2} \right) \\ H(z) = H(s)|_{s=\frac{z}{T}} = \frac{z}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \end{cases}$$

T.B.

continuos
 periódicos

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
 $\mathcal{U}[u] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$
 $a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j k \omega_0 t} dt$

$n = \omega T$
 $x(n) = \sum_{w=-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}[u] e^{-j n w}$
 $\mathcal{U}[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(n) e^{jn w} dn$

$\mathcal{U}[u] = \mathcal{U}(uT)$
 $\bullet k n_0 = n \quad n_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$\bullet \sum_{k=0}^N e^k = \frac{1 - R^{N+1}}{1 - R} \quad \frac{1}{1 - R} \text{ se } |R| < 1$

$\bullet \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad \frac{\sin(\pi u)}{\pi} = \text{sinc}(u)$

$\bullet \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

\bullet continuo e periódico ($T \neq T_0$)

$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0}$

$x'(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_n \delta(u - k n_0)$
 $a_k = \frac{\omega_0}{2\pi} x(k n_0)$
 $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(n - k n_0)$
 $a_k = \frac{1}{N} F(k n_0)$

$\bullet \sum_k a_k e^{jk n_0 u} \longleftrightarrow \sum_k 2\pi a_k \delta(u - k n_0)$

$\bullet p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \rightarrow P(u) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(u - k \frac{2\pi}{T})$

$\bullet a^u u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-jn}}$, $|a| < 1$

$\bullet \cos(\omega_p t) \rightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)]$

$\bullet u \cdot \mathcal{U}[u] \longleftrightarrow j \frac{dX(n)}{dn} \quad j^2 = -1 \Rightarrow -j = \frac{1}{j}$

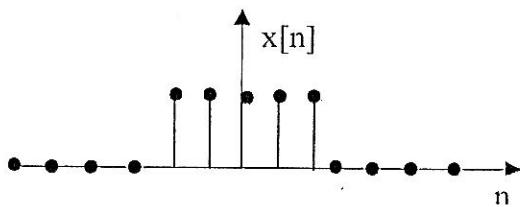
$\bullet (u+i) a^u u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1 - a e^{-jn})^2}$

$\bullet (e^{j\pi})^u \cdot 1 \Rightarrow \delta(n - \bar{n}) \cdot 2\pi \rightarrow (-1)^u \cdot \mathcal{U}[u] \rightarrow X(n - \bar{n})$

Processamento Digital de Sinal

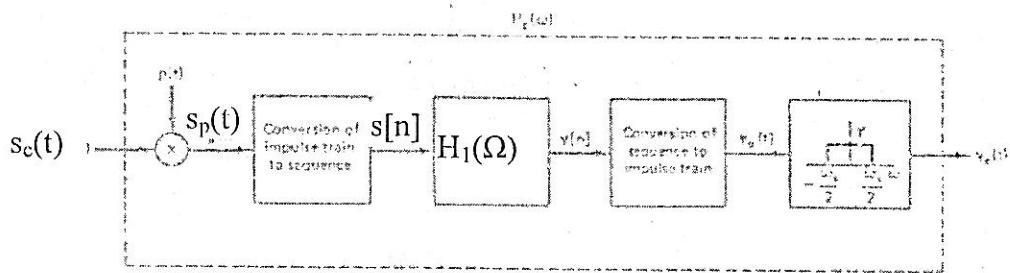
Miniteste 1 2012/2013

1. Considere o sinal $y[n] = x[n-5]$ onde $x[n]$ está representado na figura seguinte:



- a) Represente graficamente $y[n]$ bem como o módulo e a fase de $Y(\Omega)$. Justifique.
 c) Diga o que entende por DFT e explique as motivações do seu aparecimento. Represente a DFT de 9 pontos do sinal $y[n]$. Justifique.
 d) Diga o que entende por FFT e represente a FFT de mais de 9 pontos do sinal $y[n]$. Justifique.

2. Considere o sistema de processamento discreto de sinais contínuos mostrado na figura seguinte com o qual se pretende recuperar o sinal $x(t)$ que se apresenta à entrada do sistema degradado da forma $s_c(t) = x(t - T_0) + x(t + T_0)$;



- a) Considere $x(t) = 1 + 2\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$. O sinal $s_c(t)$ pode ser, em sua opinião, directamente aplicado à entrada do sistema? Se a sua resposta for negativa represente em termos de diagrama de blocos um sistema que permita a adaptação de $s_c(t)$ ao sistema de processamento digital de sinais contínuos.
 b) Determine o período de amostragem máximo para o qual $x(t)$ ou uma sua versão modificada possa ser completamente recuperado à saída do sistema. Justifique.
 c) Considere o sinal $s_c(t)$ amostrado à frequência de Nyquist e determine o atraso do eco para o qual $s[n] = x[n-1] + x[n+1]$.
 d) Represente os espectros dos sinais $s_c(t)$, $p(t)$, $s_p(t)$ e $s[n]$. Justifique convenientemente os cálculos que efectuar e comente adequadamente as suas representações gráficas.
 e) Projecte o filtro $H_1(\Omega)$ que permita recuperar a versão mais aproximada possível de $x(t)$ a menos da fase. Pretende-se que $y_c(t) = x(t - 4T_0)$.

- f) Imagine que na situação da alínea c) fazia uma decimação por um factor de 2 em $s[n]$. Na sua opinião perdia alguma informação do sinal. Se sim como procederia para minimizar ou anular essa perda. Justifique convenientemente a sua resposta.
3. Considere o sistema LTI digital caracterizado pela seguinte equação de diferenças $y[n] = 0.25y[n-1] + x[n] + 0.5x[n-1]$. Utilize a Transformada-Z e:
- Determine a resposta impulsional do sistema.
 - Determine a resposta do sistema à entrada

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

- c) Determine a entrada do sistema cuja saída é

$$y[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

5)

Um sistema LTI digital é definido por $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$. No seu ponto de vista, pode dizer se é um sistema causal ou não? Justifique.

O sistema LTI definido por $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$ é causal. O motivo é que a saída depende apenas de valores da saída e da entrada no passado, ou seja, não depende de valores futuros da saída ou da entrada.

O sistema LTI definido por $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$ é causal.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

O sistema LTI definido por $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$ é causal.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$



1 Signals, Systems and other supporting functions

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

$$x(t) = x(t+T), T \in \mathbb{R}$$

$$x[n] = x[n+N], N \in \mathbb{Z}$$

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[n]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$x(t-t_0)\delta(t) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$A_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} \left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{du^{\sigma_i - k}} [(v - \rho_i)^{\sigma_i} G(v)] \right]_{v=\rho_i} \quad B_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} (-\rho_i)^{\sigma_i - k} \left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{du^{\sigma_i - k}} [(1 - \rho_i^{-1}v)^{\sigma_i} G(v)] \right]_{v=\rho_i}$$

2 LIT Systems

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

Lit-Convолос

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

*sinal
contínuo*

3 CFS — Continuous Fourier Series

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$Ax(t) + By(t) \xrightarrow{CFS} Aa_k + Bb_k$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{CFS} a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

$$e^{-j\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{CFS} a_{l-k}$$

$$x(-t) \xrightarrow{CFS} a_{-k}$$

$$x^*(t) \xrightarrow{CFS} a_{-k}$$

$$x^*(-t) \xrightarrow{CFS} a_k^*$$

$$x(t)y(t) \xrightarrow{CFS} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{CFS} jk\omega_0 a_k$$

$$x_i(t) \xrightarrow{CFS} j \operatorname{imag}\{a_k\}$$

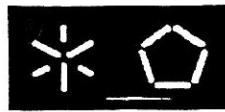
$$x_p(t) \xrightarrow{CFS} \operatorname{real}\{a_k\}$$

$$\operatorname{real}\{x(t)\} \xrightarrow{CFS} a_{kp} = \frac{1}{2}[a_k + a_{-k}^*]$$

$$j \operatorname{imag}\{x(t)\} \xrightarrow{CFS} a_{ki} = \frac{1}{2}[a_k - a_{-k}^*]$$

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \xrightarrow{CFS} \frac{1}{jk\omega_0} a_k$$

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$



Sinal periódico: $x(t) = x(t + T)$ onde, $x(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq T_1 \\ 0 & , |t| > T_1 \end{cases}$ \xrightarrow{CFS} $a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$

4 DFS — Discrete Fourier Series

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\Omega_0 n} & a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \\
 Ax[n] + By[n] &\xrightarrow{DFS} Aa_k + Bb_k & x[n - n_0] &\xrightarrow{DFS} a_k e^{-jk\Omega_0 n_0} \\
 x[n] e^{jn\Omega_0 l} &\xrightarrow{DFS} a_{k-l} & x^*[n] &\xrightarrow{DFS} a_{-k}^* \\
 x[-n] &\xrightarrow{DFS} a_{-k} & x[n]y[n] &\xrightarrow{DFS} \sum_{l=-N}^N a_l b_{l-k} \\
 \sum_{r=-N}^N x[r]y[n-r] &\xrightarrow{DFS} Na_k b_k & x[n] &\xrightarrow{DFS} (1 - e^{-jk\Omega_0})a_k \\
 \sum_{k=-\infty}^n x[n] &\xrightarrow{DFS} \frac{1}{(1 - e^{-jk\Omega_0})} a_k & \text{real}\{x[n]\} &\xrightarrow{DFS} a_{kp} = \frac{1}{2}[a_k + a_{-k}^*] \\
 j\text{imag}\{x[n]\} &\xrightarrow{DFS} a_{ki} = \frac{1}{2}[a_k - a_{-k}^*] & x_p[n] &\xrightarrow{DFS} \text{real}\{a_k\} \\
 x_i[n] &\xrightarrow{DFS} j\text{imag}\{a_k\} & \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 &= \sum_{k=-N}^N |a_k|^2
 \end{aligned}$$

5 CTFT — Continuous-time Fourier Transform

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega & X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\
 Ax(t) + By(t) &\xrightarrow{CTFT} AX(j\omega) + BY(j\omega) & x(t - t_0) &\xrightarrow{CTFT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \\
 x^*(t) &\xrightarrow{CTFT} X^*(-j\omega) & x(t) \in \mathbb{R} &\xrightarrow{CTFT} X(-j\omega) = X^*(j\omega) \\
 \text{par}\{x(t)\} &\xrightarrow{CTFT} \text{real}\{X(j\omega)\} & \text{impar}\{x(t)\} &\xrightarrow{CTFT} j\text{imag}\{X(j\omega)\} \\
 \frac{d}{dt} x(t) &\xrightarrow{CTFT} j\omega X(j\omega) & \int_{-\infty}^t x(t) dt &\xrightarrow{CTFT} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(j\omega) \\
 x(\alpha t) &\xrightarrow{CTFT} \frac{1}{|\alpha|} X(\frac{j\omega}{\alpha}) & x(-t) &\xrightarrow{CTFT} X(-j\omega) \\
 X(t) &\xrightarrow{CTFT} 2\pi x(-j\omega) & tx(t) &\xrightarrow{CTFT} j \frac{d}{d\omega} X(j\omega) \\
 x(t)y(t) &\xrightarrow{CTFT} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega) & x(t) * y(t) &\xrightarrow{CTFT} X(j\omega)Y(j\omega)
 \end{aligned}$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau) \rightarrow p(\omega) = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{n\omega_0}{\tau})$$

$$\cos(\omega_p t) \rightarrow \frac{1}{2} [\delta(t - t_p) + \delta(t + t_p)]$$

versão: 0.9 - 12.04.2011

Carlos A. Silva

$$(-1)^n \cdot \omega[n] \rightarrow x(n - \bar{n})$$

$$(\omega^{j\bar{n}})^n \cdot \omega \Rightarrow \delta(n - \bar{n}) \cdot 2\pi$$



6 CTFT — Pares de Transformadas

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 t} &\xrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) & e^{j\omega_0 t} &\xrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \\
 \cos(\omega_0 t) &\xrightarrow{\text{CTFT}} \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] & \sin(\omega_0 t) &\xrightarrow{\text{CTFT}} \frac{1}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \\
 x(t) = 1 &\xrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi \delta(\omega) & \delta(t) &\xrightarrow{\text{CTFT}} 1 \\
 u(t) &\xrightarrow{\text{CTFT}} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) &\xrightarrow{\text{CTFT}} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \\
 \frac{\sin(Wt)}{\pi t} &\xrightarrow{\text{CTFT}} X(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq W \\ 0 & , |\omega| > W \end{cases} & \delta(t - t_0) &\xrightarrow{\text{CTFT}} e^{-j\omega t_0} \\
 e^{-\alpha t} u(t), \quad \Re\{\alpha\} > 0 &\xrightarrow{\text{CTFT}} \frac{1}{\alpha + j\omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 te^{-\alpha t} u(t), \quad \Re\{\alpha\} > 0 &\xrightarrow{\text{CTFT}} \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2} \\
 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t), \quad \Re\{\alpha\} > 0 &\xrightarrow{\text{CTFT}} \frac{1}{(\alpha + j\omega)^n}
 \end{aligned}$$

Sinal periódico: $x(t) = x(t + T)$ onde, $x(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq T_1 \\ 0 & , |t| > T_1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{cases} 1 & , |t| \leq T_1 \\ 0 & , |t| > T_1 \end{cases} &\xrightarrow{\text{CTFT}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0) \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

7 DTFT — Discrete-time Fourier Transform

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega & X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \\
 Ax[n] + By[n] &\xrightarrow{\text{DTFT}} AX(\Omega) + BY(\Omega) & x[n - n_0] &\xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \\
 x^*[n] &\xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(-\Omega) & x[-x] &\xrightarrow{\text{DTFT}} X(-\Omega) \\
 x[n] - x[n-1] &\xrightarrow{\text{DTFT}} (1 - e^{j\Omega}) X(\Omega) & \sum_{k=-\infty}^n x[k] &\xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - e^{j\Omega}} X(j\omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \\
 nx[n] &\xrightarrow{\text{DTFT}} j \frac{d}{d\Omega} X(\Omega) \\
 x[n]y[n] &\xrightarrow{\text{DTFT}} \underbrace{\frac{1}{2\pi} X(\Omega) * Y(\Omega)}_{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\varphi) \cdot Y(\Omega - \varphi) d\varphi} & x[n] * y[n] &\xrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega)Y(\Omega)
 \end{aligned}$$

$\textcircled{W} \Rightarrow \frac{1}{T} \sum_{\tilde{n}=-\omega}^{\omega} S_c\left(\omega - \frac{\tilde{n}2\pi}{T}\right)$



8 DTFT — Pares de Transformadas

$$u[n] = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} n\right) \xrightarrow{DTFT} u(t) = 2A \operatorname{Tsinc}\left(\frac{\omega t}{\pi}\right)$$

$$\frac{2\pi}{T} > 2\omega_0$$

$$x[n] = \sum_{n=-N}^N a_k e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{DTFT} X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$\xrightarrow{DTFT} \frac{2A\omega_0}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(t - \frac{\omega_0}{\pi}\right) \xrightarrow{\text{Graph}} \frac{A}{\omega_0}$$

$$e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{DTFT} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)$$

$$\cos(\Omega_0 n) \xrightarrow{DTFT} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)]$$

$$\sin(\Omega_0 n) \xrightarrow{DTFT} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)]$$

$$x[n] = 1 \xrightarrow{DTFT} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - 2\pi l)$$

$$\delta[n] \xrightarrow{DTFT} 1$$

$$u[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{1 - e^{j\Omega}} + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\Omega - 2\pi l)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - nN] \xrightarrow{DTFT} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{T})$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} \xrightarrow{DTFT} X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| \leq W \\ 0, & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\delta[n - n_0] \xrightarrow{DTFT} e^{-j\Omega n_0}$$

$$\alpha^n u[n], |\alpha| < 1 \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

$$(n+1)\alpha^n u[n], |\alpha| < 1 \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})^2}$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} \alpha^r u[n], |\alpha| < 1 \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})^r}$$

$$x(n) = \sum_{m=-\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} u[m] \cdot e^{-j\Omega m} = \frac{\sin(\lfloor n/2 \rfloor)}{\sin(\lfloor n/2 \rfloor)}$$

9 Z — Z-Transform

$$X(z) = |x(n)| \cdot z^{\lfloor \frac{1}{2}x(n) \rfloor}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}, \quad ROC : R$$

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xrightarrow{Z} \alpha X_1(z) + \beta X_2(z), \quad ROC : (R_1 \cap R_2)$$

$$x[n - n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z), \quad ROC : R \pm \{z = 0\}$$

$$z_0^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC : |z_0| \cdot R$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{Z} X(e^{-j\omega_0} z), \quad ROC : R$$

$$x[-n] \xrightarrow{Z} X(z^{-1}), \quad ROC : R^{-1}$$

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases} \xrightarrow{Z} X(z^k), \quad ROC : R^{1/k}$$



12 Filtro FIR

Janela retangular

$$w[n] = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq n \leq M \\ 0 & , \quad \text{outro } n \end{cases}$$

Janela Barlett

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M} & , \quad 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \frac{2n}{M} & , \quad M/2 < n \leq M \\ 0 & , \quad \text{outro } n \end{cases}$$

Janela Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M) & , \quad 0 \leq n \leq M \\ 0 & , \quad \text{outro } n \end{cases}$$

Janela Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M) & , \quad 0 \leq n \leq M \\ 0 & , \quad \text{outro } n \end{cases}$$

Janela de Kaiser

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2})}{I_0(\beta)} & , \quad 0 \leq n \leq M \\ 0 & , \quad \text{outro } n \end{cases}$$

onde $\alpha = M/2$

$A = -20 \log(\delta)$, onde δ é a atenuação do filtro

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7) & , \quad A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21) & , \quad 21 \leq A \leq 50 \\ 0.0 & , \quad A < 21 \end{cases}$$

$$\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p$$

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\Omega}$$

Resposta impulsional do filtro ideal

$$h[n] = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}$$

)

13 DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

onde $W_N = e^{-j2\pi/N}$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

Gu Heaworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_0}\right)^{2N}}$$

DFT $\rightarrow \frac{2\pi}{N} k$
 FFT $\rightarrow \frac{2\pi}{N} k$ ($\frac{f}{f_s}$)



$$\begin{aligned}
 x^*[n] &\xrightarrow{z} X^*(z^*) , \quad ROC : R \\
 x_1[n] * x_2[n] &\xrightarrow{z} X_1(z) \cdot X_2(z) , \quad ROC : (R_1 \cap R_2) \\
 x[n] - x[n-1] &\xrightarrow{z} (1 - z^{-1}) X(z) , \quad ROC : (R \cap |z| > 0) \\
 \sum_{k=-\infty}^n x[k] &\xrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z) , \quad ROC : (R \cap |z| > 1) \\
 nx[n] &\xrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} , \quad ROC : R
 \end{aligned}$$

10 Z — Pares de Transformadas

$$\begin{aligned}
 \delta[n] &\xrightarrow{z} 1 , \quad \forall z \\
 u[n] &\xrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} , \quad |z| > 1 \\
 -u[-n-1] &\xrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} , \quad |z| < 1 \\
 \alpha^n u[n] &\xrightarrow{z} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} , \quad |z| > |\alpha| \\
 -\alpha^n u[-n-1] &\xrightarrow{z} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} , \quad |z| < |\alpha|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u, a^u M[u] &\longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \\
 u, a^{u-1} u[u] &\longleftrightarrow \frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}
 \end{aligned}$$

11 Filtro IIR

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N-1} b_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{N-1} a_k x[n-k] \quad s_k = \omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}, \quad k = 0, \dots, 2N-1$$

$$\begin{aligned}
 H_s(s) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{s - s_k} \quad \rightarrow H(j\omega) = \frac{A \bar{z}}{j\omega - s_k} \\
 H(z) &= H(s) \Bigg| s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \\
 \omega &= \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \quad \Bigg[\text{?} \text{?} \text{?}
 \end{aligned}$$

$$H_b(s) H_b(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$U[u] = U_C(u) = H_z(z) = T \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$z = \frac{2 + sT}{2 - sT}$$

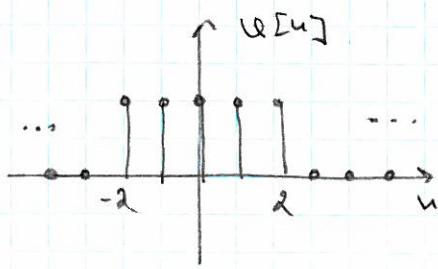
$$\Omega = 2 \arctg \frac{\omega T}{2}$$

$$|H_b(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

Nuisteste 2010/2011

1.

$$y[u] = \varphi[u] \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4}u\right)$$



-b)

$$x(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \varphi[u] e^{-juu}$$

$$= \sum_{u=-2}^{\infty} e^{-juu}$$

$$= \sum_{m=0}^q (e^{-j\pi(m-2)})$$

$$= e^{j\pi} \sum_{m=0}^q (e^{-jn})^m$$

$$= e^{j\pi} \cdot \frac{1 - e^{-jn}}{1 - e^{-j\pi}}$$

$$= e^{j\pi} \cdot \frac{-j\frac{\pi}{2} (e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}})}{e^{j\frac{\pi}{2}} (e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}})}$$

$$= \frac{e^{j\pi}}{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{-j\frac{\pi}{2}}{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \frac{2j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$

$$\varphi[u] = \cos\left(\frac{2\pi}{4}u\right)$$

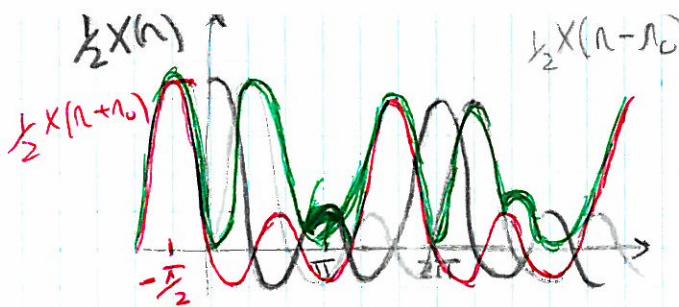
$$\varphi(n) = \pi [\delta(n-n_0) + \delta(n+n_0)]$$

$$Y(n) = \frac{1}{2\pi} X(n) * \varphi(n)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\varphi) \cdot \varphi(n-\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} [x(0) \cdot \pi (\delta(n-n_0-\varphi) + \delta(n+n_0-\varphi))]$$

$$= \frac{1}{2} (x(n-n_0) + x(n+n_0))$$



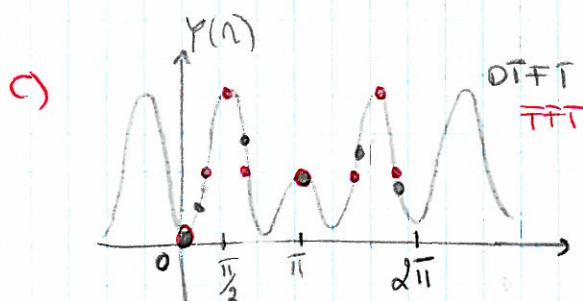
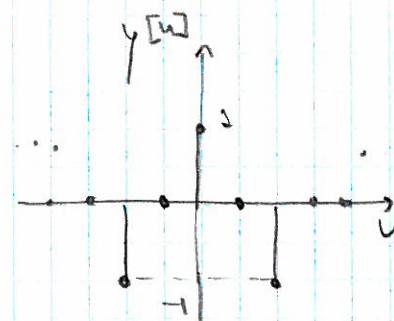
$Y(n)$ é a soma p^o ap^o de ambas as funçõ^{es}, a fase só muda, para u variar, haverá componentes negativas

a) $y[n] = \psi[n] \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4} n\right)$

$$y[0] = 1 \quad y[-1] = 0$$

$$y[1] = 0 \quad y[-2] = -1$$

$$y[2] = -1$$



DFT \rightarrow 6 pontos

$$\frac{2\pi k}{6} \Rightarrow \begin{aligned} k=0 &\rightarrow 0 \\ k=1 &\rightarrow 2\pi/6 = \pi/3 \\ k=2 &\rightarrow 4\pi/6 = 2\pi/3 \\ k=3 &\rightarrow \pi \\ k=4 &\rightarrow 8\pi/6 = 4\pi/3 \\ k=5 &\rightarrow 10\pi/6 = 5\pi/3 \end{aligned}$$

d) $2^3 = 8 > 6$

$$\frac{2\pi k}{8} = \frac{\pi}{4} k \rightarrow 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}$$

2.

$$s_c(t) = \psi(t - 3T_0) + \psi(t + T_0)$$

a)

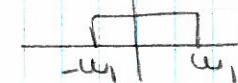
$$2AT \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$

$$\frac{2 \cdot A \omega_1}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_1 t}{\pi}\right) \longrightarrow$$

$$S(u)$$

para sc(t) podem ser direta, aplicado à entrada tem q ter banda limitada

caso $\psi(t) = \frac{\omega_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_1 t}{\pi}\right)$ entao



logo tem banda limitada, podendo ser aplicado diretamente à entrada

b) Para que seja feita a decifragem necessária é necessário que a frequência de amostragem seja maior ou igual à do sinal ou menor da freq. do sinal:

$$\omega_s \geq 2\omega_1$$

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_1$$

$$T_s \leq \frac{\pi}{\omega_1}$$

$$\text{período de amostragem máximo} = \frac{\pi}{\omega_1}$$

c) $s[n] = 10[u-6] + 10[u+2]$

$$s_c(t) = 10(t - 3T_0) + 10(t + T_0)$$

$$\begin{aligned} s[n] &= s_c(nT_s) = 10(uT_s - 3T_0) + 10(uT_s + T_0) \\ &= 10\left(u - \frac{3T_0}{T_s}\right) + 10\left(u + \frac{T_0}{T_s}\right) \end{aligned}$$

$$-3\frac{T_0}{T_s} = -6$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_1} \rightarrow \text{o atraso caiendo}$$

d) $s_c(t) = 10(t - 3T_0) + 10(t + T_0)$
 $s_c(\omega) = X(\omega) e^{-j3T_0\omega} e^{jT_0\omega}$

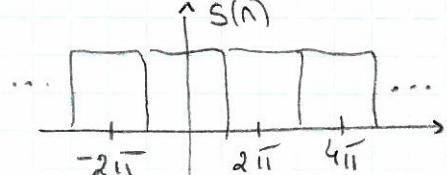
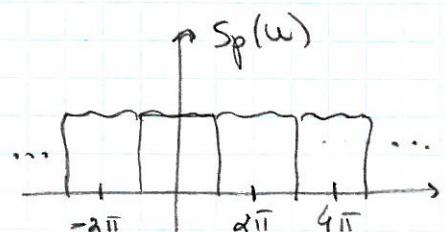
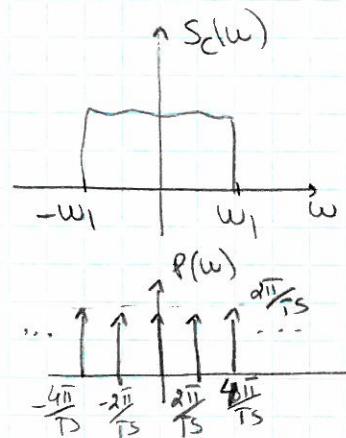
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

$$s_p(t) = s_c(t) \cdot p(t)$$

$$\begin{aligned} S_p(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [s_c(\omega) * P(\omega)] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_c\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) \end{aligned}$$

$$s(n) = s_p(\omega) \Big|_{\omega = nT_s}$$



$$2) H(n) = \frac{Y(n)}{X(n)}$$

$$Y_c(t) = \psi(t - T_0) \xrightarrow{-2j\pi} \psi[u] = \psi(uT) = \psi(uTs - T_0) = \psi[u - \frac{T_0}{Ts}]$$

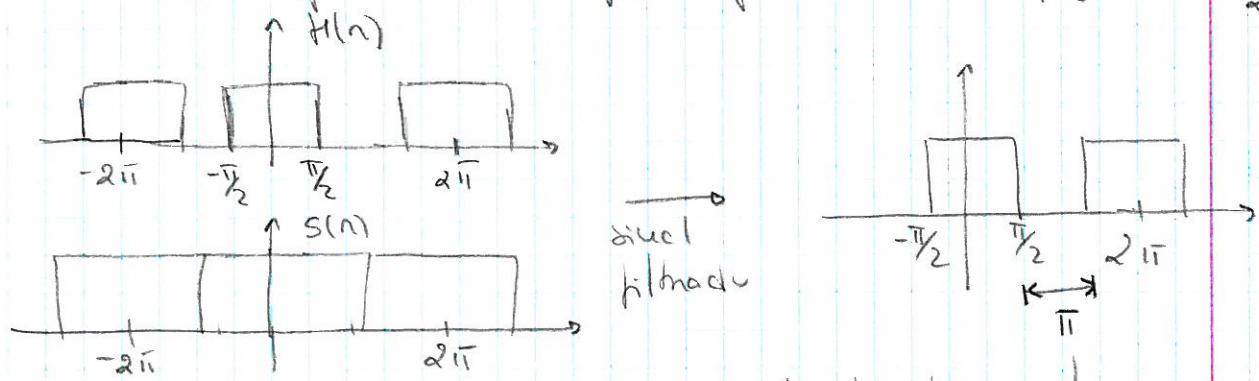
$$Y(n) = X(n) e^{-2j\pi n}$$

$$S[u] = \psi[u-6] + \psi[u+2]$$

$$S(n) = X(n) e^{-6j\pi n} + X(n) e^{-2j\pi n}$$

$$H_i(n) = \frac{X(n) e^{-2j\pi n}}{X(n) (e^{-6j\pi n} + e^{-2j\pi n})}$$

4) Como a frequência de corte traseira é igual à freqü. de Nyquist, não existe banda despendida, logo só se faltam mais dois nyq. factor 2, vai haver pente de referências.
Nas mal férias de curtar esse pente, apenas de cima utilizam, aplicando um filtro passa baixo q. f. corte em $\frac{\pi}{2}$



pendendo-se referência
apenas acima de $\frac{\pi}{2}$

3. $y[n] = 0,5y[n-1] + 2\psi[n] + 0,25\psi[n-1]$

a) $H(z)(1 - 0,5z^{-1}) = X(z)(2 + 0,25z^{-1})$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} + 0,25z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}$$

$$h[n] = 2 \cdot (0,5)^n u[n] + 0,25 \cdot (0,5)^{n-1} u[n-1]$$

$$b) \quad Y[u] = \left(\frac{1}{3}\right)^4 u[u]$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{2 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{A}{1 - 0,5z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$A = \left. \frac{2 + 0,25z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \right|_{z^{-1}=2} = \frac{2,75}{\frac{1}{3}} = \frac{15}{2}$$

$$B = \left. \frac{2 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}} \right|_{z^{-1}=3} = \frac{2,75}{-0,5} = -\frac{11}{2}$$

$$Y[u] = \frac{15}{2} \cdot (0,5)^u u[u] - \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^u u[u]$$

c)

$$Y[u] = u \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^u u[u] + \left(\frac{1}{2}\right)^u u[u]$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{4} \cdot z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{\left[\left(\frac{1}{4} \cdot z^{-1}\right)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) + \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2\right] \cdot (1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2 (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) (2 + 0,25z^{-1})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) + (1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2 (2 + 0,25z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2} + \frac{C}{2 + 0,25z^{-1}}$$

$$\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} + 1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2} = A \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) (2 + 0,25z^{-1}) + B \left(2 + 0,25z^{-1}\right) + C \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}z^{-1} + 1 - \frac{1}{16}z^{-2} = A \left(2 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{16}z^{-2}\right) + B \left(2 + \frac{1}{4}z^{-1}\right) + C \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2}\right)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{16}A + \frac{1}{16}C = -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B - \frac{1}{2}C = -\frac{1}{4} \\ 2A + 2B + C = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 1 + A \\ B = A + 2C - 1 \\ 2B = 1 - 1 - A + 2A \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ B = 3A + 1 \\ B = \frac{A}{2} - \end{cases} \begin{cases} C = 6/5 \\ B = 8/5 \\ A = 1/5 \end{cases}$$

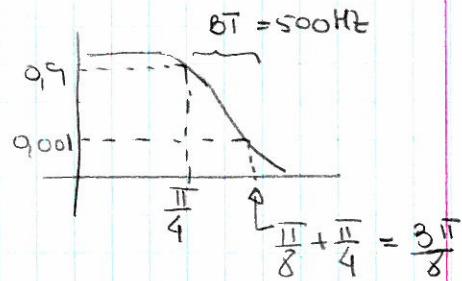
Pedra bruta (feita na cula e segue a este teste)

$$f_s = 8 \text{ kHz}$$

compactam por fator de 4

$$\begin{array}{l} 8K \\ 500 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} 2\pi \\ \omega \end{array}$$

$$\omega = \frac{1K\pi}{8K} = \frac{\pi}{8}$$



Filtro passa baixo a $\frac{\pi}{4}$

usam método da tensão f. bilinear pois evita o aliasing, equivalente a 0 método da transformada de respostas dos impulsos

$$\text{Filtro Butterworth} \Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 + \left(\frac{j\pi/4}{j\omega_c}\right)^{2N}} = 0.9^2 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{j3\pi/8}{j\omega_c}\right)^{2N}} = 0.001^2 \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} |H(n)| \leq 1 \text{ para } |n| \leq \frac{\pi}{4} \\ |H(n)| \geq 0.001 \text{ para } \frac{3\pi}{8} \leq |n| \leq \pi \end{array}$$

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0.9 \leq |H(\omega)| \leq 1 \text{ para } |\omega| \leq \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$|H(\omega)| \leq 0.001 \Leftrightarrow \frac{2}{T} \tan\left(\frac{3\pi}{16}\right) \leq |\omega| < \omega_b$$

considerando T=1

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\frac{2 \tan(\pi/8)}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.9}\right)^2 \\ 1 + \left(\frac{2 \tan(3\pi/16)}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.001}\right)^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{obtém} \rightarrow \text{tamanhos} N \\ \rightarrow \text{substitui} \rightarrow " \omega_c \end{array}$$

$$\begin{array}{l} N=16 \\ \omega_c=98678 \end{array}$$

$$H(s) = \frac{k}{(s-s_1) \dots (s-s_{16})}$$

$$s_{1,2} = \omega_c \left(\cos\left(\frac{17\pi}{32}\right) \pm j \sin\left(\frac{17\pi}{32}\right) \right)$$

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$k = s_1 \times s_2 \times \dots \times s_{16}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} R^n = \frac{1-R^{n+1}}{1-R} \quad \text{se } |R| < 1$$

$$\bullet \sin(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$$

$$\frac{\sin(\pi u)}{\pi} = \sin(u)$$

$$\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} = \cos(\omega)$$

continuo

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega t}$$

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{+\infty} v(t) e^{-jn\omega t} dt$$

S.F.

$$v[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N} n}$$

periódicos

$v[n] = v(n')$

periódicos

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$n = \omega T$$

$$\bar{n} n_0 = n$$

$$n_0 = \frac{2\pi}{T}$$

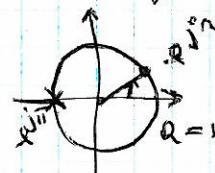
$$w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$v[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{jn\omega} d\omega$$

$$\bullet p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \rightarrow P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{n2\pi}{T})$$



$$\bullet e^{jnw} = e^{j\bar{n}w_0} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$$



$$\bullet a_n v[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - a e^{-jn\omega}}, |a| < 1$$

signal continuo e periódico (T.F.)

$$X'(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_n \delta(w - \bar{n}w_0)$$

$$a_n = \frac{w_0}{2\pi} X(j\bar{n}w_0)$$

$$\frac{w_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0}$$

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(n - \bar{k}n_0)$$

$$a_k = \frac{1}{N} F(kn_0)$$

$$\bullet \sum_n a_n e^{jn\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_n 2\pi a_n \delta(n - \bar{n}n_0)$$

• DFT

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(k) \neq 0 \text{ or } a_k$$

$$v[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\begin{array}{c} \text{DFT} \\ \text{FFT} \end{array} \longrightarrow N^2 \text{ operations} \quad N \cdot \log_2 N \text{ operations}$$

$$\bullet \cos(\omega_p t) \longrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f-f_p) + \delta(f+f_p)]$$



$$\bullet v[n] \longleftrightarrow j \frac{dX(n)}{dn}$$

$$j^2 = -1 \Rightarrow -j = \frac{1}{j}$$

$$\bullet \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |v[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{+N} |v[n]|^2 = \sum_{n=-N}^{+N} |a_n|^2$$

• convolution

$$y(t) = v(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$y[n] = v[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k] h[n-k]$$

$$Y(n) = X(n) \cdot H(n)$$

$$S_p(t) = S_C(t) \cdot P(t) \Leftrightarrow S_p(\omega) = \frac{1}{2} [S_C(\omega)]^2$$

$$\begin{aligned} S_p(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_C(\phi) \cdot P(\omega - \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_C\left(\omega - \frac{n2\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

$$\bullet (n+1)^\alpha v[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-\alpha e^{-jn})^2}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{N-1} a_n y[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k v[n-k]$$

$$(e^{j\pi})^n \Rightarrow \delta(n \mp k) \cdot 2\pi \Rightarrow (-1)^n v[n] \rightarrow x(n-k)$$

$$\Rightarrow 2\pi \delta(n)$$

$$\bullet f_s \geq 2f_n \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_n \text{ (assuming } \omega)$$

$$\bullet X_p(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_p(n) e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_p[n] e^{-jn\frac{\pi}{N}} = X_p \Big|_{\frac{n}{N}}$$

- causal filtro

$$[B, A] = Butter(N, \omega_n)$$

N orden do filtro
 $0 < \omega_n < 1$

- freq z (B, A) \rightarrow Diagramas de blocos

- aplicar filtro

$$y = filter(B, A, x) \quad \text{aplicar filtro}$$

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} z^{-u} \cdot b[u], \quad z^{-u} = (re^{j\omega})^{-u}$$

$$\begin{array}{c} u \\ a^u u[u] \\ \downarrow z \\ \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ = \frac{z}{z - a} \end{array}, \quad |a \cdot z^{-1}| < 1 \quad (|z| > |a|)$$

$$\begin{array}{c} u \\ -a^u u[-u-1] \\ \downarrow z \\ \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ = \frac{z}{z - a} \end{array}, \quad |z| < |a|$$

$$u \cdot b[u] \longleftrightarrow -z \frac{dx(t)}{dz}$$

$$u \cdot a^u u[u] \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

$$a^{u-1} \cdot u[u-1] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \cdot z^{-1}$$

- filtro butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{2N}}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{IRI}} h(t) = A_h e^{\frac{S_h t}{T}} u(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} H(s) = \frac{A_h}{s - S_h} \rightarrow H(j\omega) = \frac{A_h}{j\omega - S_h} \\ h[u] = h_c(u) \xrightarrow{\text{Z}} H(z) = \frac{A_h T}{1 - e^{\frac{S_h T}{T}} \cdot z^{-1}} \end{array}$$

- T.B.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

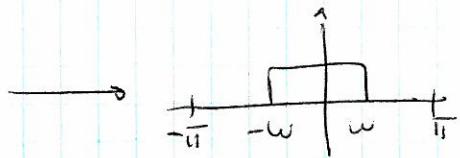
$$H(z) = H(s) \Big| s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\omega = \omega_0$$

$$x(n) = \sum_{u=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} b[u] e^{-j\omega u} = \frac{\sin(N\pi/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$x(n) = |x(n)| \cdot e^{j \angle x(n)}$$

$$b[u] = \frac{\omega}{\pi} \sin(\frac{\omega}{\pi} u)$$



Processamento Digital de Sinal
MIECOM Exame de Recurso 2011/2012

1. Considere um transmultiplexer digital TDM para FDM com 2 canais áudio comercial de 4 KHz de largura de banda amostrados à frequência de Nyquist. Suponha que a rede FDM dispõe de uma largura de banda que permite acomodar apenas 1 KHz de cada canal.

 - Quais as operações a efectuar sobre os sinais de modo a reduzir para metade a sua largura de banda efectiva? Justifique.
 - Determine a resposta a impulso do filtro ideal que não causa distorção harmónica e permite efectuar o pretendido. Justifique convenientemente todos os passos que efectuar.
 - Suponha que pretende que o filtro seja FIR e apresente um ganho na banda passante superior a 0.995 e inferior a 1.005 e uma atenuação na banda de rejeição de 40 dB. Implemente este filtro usando o método que achar mais conveniente. Justifique a sua opção.
 - Explique o que é um filtro IIR. Apresente a transformada-z da resposta a impulso de um destes filtros à sua escolha. Justifique.
 - Apresente as vantagens e desvantagens de 2 filtros IIR (um relativamente ao outro) que tenha estudado. Justifique.
 - Apresente e comente as vantagens e desvantagens dos filtros IIR relativamente aos filtros FIR. Justifique.
 - Refaça a alínea c) admitindo que não se aceita ripple na banda passante mas tolera-se distorção harmónica. Neste caso quais os métodos adequados? Justifique. Suponha um filtro de 3^a ordem e enumere todos os passos necessários à sua implementação.

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Window Type	Peak Sidelobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
	20 log ₁₀ δ (dB)		of Equivalent Kaiser Window		
Rectangular	-13	$4\pi/(M + 1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

2. Considere um sinal discreto $s[n]$ de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo multiplicativo por um sinal ruído branco $e[n]$ de média m_e e desvio padrão σ_e .

a. Determine a média e a variância do processo $x[n] = s[n] \cdot e[n]$ admitindo que os processos são não correlados.

- b. Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência de $x[n]$ em função dos parâmetros conhecidos dos processos $s[n]$ e $e[n]$.
- c. Considere que $s[n]$ é um sinal sinusoidal com fase aleatória e uniformemente distribuída em $[0, 2\pi]$ ou seja $s[n]=A\cos(\omega_0n+\phi)$. Mostre que nestas circunstâncias, se os processos são não correlados então

$$= 22\cos(0 \cdot [-2 + 2])$$

- d. Determine e esboce justificando, no contexto da alínea c) a densidade espectral de potência do processo $x[n]$.

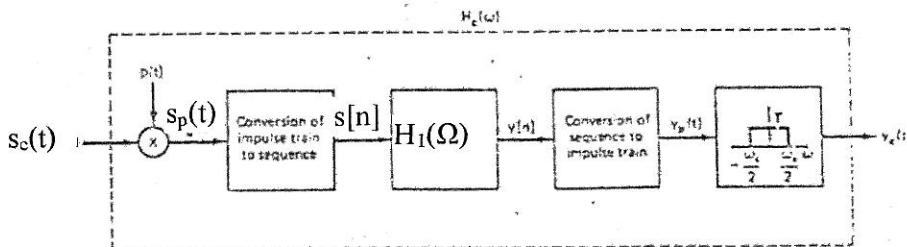
3. Considere um sinal discreto aleatório $x[n]$ e a estimativa da sequência de autocorrelação dada por:

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x^*(n+m)$$

- a. Escreva a expressão da outra estimativa da sequência de autocorrelação que estudou. Determine a polarização de cada uma delas e diga quais as vantagens e desvantagens de uma relativamente à outra. Justifique.
- b. Enuncie e justifique o método de Bartlett para a estimação da densidade espectral de potência. Mostre que este método diminui a resolução espectral. Justifique.
- 4. Suponha o caso da detecção da direcção de fontes radiantes ou puras superfícies reflectoras através de um agregado linear e uniforme de sensores.
 - a. Uma das desvantagens da DSFT é o aparecimento de direcções de chegada que não existem. Explique convenientemente este fenómeno.
 - b. Um dos algoritmos de DoA mais usado é o MUSIC. Descreva convenientemente o algoritmo. Justifique todas as suas afirmações.
 - c. Suponha um sistema de comunicações móveis onde o sinal chega à antena receptora degradado por 1 eco. Suponha que o ângulo de chegada do sinal directo é θ sendo os ângulos de chegada da reflexão θ_1 relativamente à perpendicular ao eixo do agregado. Desenhe o diagrama de blocos com o nº mínimo de elementos espaçados de $\lambda/8$ e escreva neste caso um conjunto de equações lineares que lhe permitam determinar as amplitudes dos sinais provenientes de cada elemento do agregado necessárias para garantir a aniquilação da réplica. Justifique os cálculos que efectuar.
 - d. Que alterações efectuaria no agregado se pretendesse servir 2 utilizadores em vez de um só admitindo que o 2º utilizador apresenta também um caminho alternativo (eco). Justifique.

Processamento Digital de Sinal
MIECOM Época Especial 2009/2010

1. Considere o sistema de processamento discreto de sinais contínuos mostrado na figura seguinte com o qual se pretende recuperar o sinal $x(t)$ que se apresenta à entrada do sistema degradado da forma $s_c(t) = x(t) + x(t - 3T_0) + x(t + 3T_0)$;



a) Considere $x(t) = \begin{cases} \frac{w_1}{2\pi} \sin c^2\left(\frac{w_1 t}{4\pi}\right); & |t| < \frac{\pi}{2w_1} \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases}$

O sinal $sc(t)$ pode ser, em sua opinião, directamente aplicado à entrada do sistema? Se a sua resposta for negativa represente em termos de diagrama de blocos um sistema que permita a adaptação de $sc(t)$ ao sistema de processamento digital de sinais contínuos. Justifique a sua resposta.

- b) Determine o período de amostragem máximo para o qual $x(t)$ ou uma sua versão modificada possa ser completamente recuperado à saída do sistema. Justifique.

c) Considere o sinal $sc(t)$ amostrado à frequência de Nyquist e determine o atraso do eco para o qual $s[n] = x[n] + x[n-1] + x[n+1]$. Considere que a frequência de amostragem é de 1KHz.

d) Represente os espectros dos sinais $sc(t)$, $p(t)$, $sp(t)$ e $s[n]$. Justifique convenientemente os cálculos que efectuar e comente adequadamente as suas representações gráficas.

e) Suponha que o amostrador ideal por trem de impulsos representado na figura era substituído pelo amostrador de ordem zero (sample and hold). Projecte nestas condições o filtro $H_1(\Omega)$ que permita recuperar $x(t)$ a menos da fase. Pretende-se que $yc(t) = x(t - 6T_0)$.

f) Use a transformada-z para se referir à estabilidade e causalidade do filtro H_1 .

g) Imagine que na situação da alínea c) fazia uma decimação por um factor de 2 em $s[n]$. Na sua opinião perdia alguma informação sobre o sinal. Se sim como procederia para minimizar ou anular essa perda. Justifique convenientemente a sua resposta, baseando-a numa representação gráfica adequada.

2) Considere um transmultiplexer digital TDM para FDM com 2 canais áudio comercial de 4 KHz de largura de banda amostrados à frequência de Nyquist. Suponha que a rede FDM dispõe de uma largura de banda que permite acomodar apenas 1 KHz de cada canal.

- a. Quais as operações a efectuar sobre os sinais de modo a reduzir para metade a sua largura de banda efectiva? Justifique.
- b. Determine a resposta a impulso do filtro ideal que não causa distorção harmónica e permite efectuar o pretendido. Justifique convenientemente todos os passos que efectuar.
- c. Suponha que pretende que o filtro seja FIR e apresente um ganho na banda passante superior a 0.995 e inferior a 1.005 e uma atenuação na banda de rejeição de 60 dB. Implemente este filtro usando o método que achar mais conveniente. Justifique a sua opção.
- d. Apresente e comente as vantagens e desvantagens dos filtros IIR relativamente aos filtros FIR. Justifique.
- e. Refaça a alínea c) admitindo que não se aceita ripple na banda passante mas tolera-se distorção harmónica. Neste caso quais os métodos adequados? Justifique. Suponha um filtro de 3^a ordem e enumere todos os passos necessários à sua implementação.

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Window Type	Peak Sidelobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC \equiv |z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC \equiv |z| < |a|$$

$$na^n u[n] \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

$$x_p(t) = p(t)x(t) \leftrightarrow X_p(w) = \frac{1}{2\pi} [P(w)^* X(w)] \quad M = \frac{A-8}{2.285\Delta\Omega}$$

$$X_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(w - kw_s)$$

$$w[n] = \begin{cases} I_0 \left[\beta \left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \frac{I_0(\beta)}{I_0(\beta)}; \\ 0; \end{cases} \quad 0 \leq n \leq M$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7) \\ 0.5842(A-21)^3 + 0.07886(A-21) \\ 0.0; \end{cases} \quad \begin{cases} A > 50 \\ 21 \leq A \leq 50 \\ A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324\Delta\Omega}$$

Exercício de RECURSO 2009/2010

1.

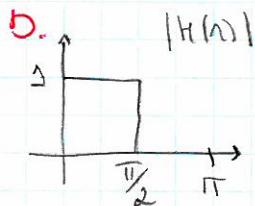
Largura de banda 4kHz (fundo Nyquist)

" " " 1kHz (instável)

a. O sinal de 4kHz tem que ser filtrado para reduzir pela metade a largura de banda.

É necessário fazer filtragem a $\frac{\pi}{2}$ (para reduzir para metade a largura do sinal) e decimar o sinal (que traz os valores a zero, resultantes da aplicação do filtro).

Necessário sacrificar a largura de banda da comunicação ser possível.



pode-se ir p/ 2 bfp (fundo) p/ a calcular o filtro

$$1^{\circ} \quad h[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(n) \cdot e^{jnu} dn \quad (\text{atraso d ps})$$

$$h[u] = \frac{1}{\pi} \sin(\frac{\pi u}{2}) = \frac{1}{2} \sin(\frac{u}{2})$$

$$h[u] = h\left[u - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2^{\circ} \quad H(n) = \begin{cases} e^{-jn\pi/2} & |n| \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq |n| \leq \pi \end{cases}$$

$$h[u] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(n) e^{jnu} dn \quad (\text{atraso logo u})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-jn\pi/2} \cdot e^{jnu} dn$$

...

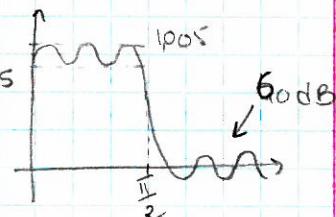
c. ganho banda passante $> 0,995 \pm 1,005$
atenuação "resposta" 40dB

$$A = -20 \log 0,995 = 46 \text{ dB}$$

$$\therefore A = 60 \text{ dB}$$

Como $A > 50$ tem que se usar o método Kaiser

$$\pi = \frac{A - 8}{2,285 \text{ dB}} = \frac{60 - 8}{2,285 \left(\frac{\pi}{2} \times 10\% \right)} = 144,88 = 145$$



$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 72,5$$

$$\beta = 0,1102 (60 - 72,5) = 7,857$$

podemos ver que o filtro é cheio, tem
medidas reais, mas só necessita mais cálculos.

$$u[u] = h_d[u] \cdot w[u]$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{u - \pi/2}{2}\right) \cdot \frac{I_0\left[7,857 \left(1 - \left[\frac{u - 72,5}{72,5}\right]^2\right)^{1/2}\right]}{I_0(7,857)}$$

d. Enquanto que os filtros FIR têm um distorção de fase linear e há ripple na banda passante, os filtros IIR obtém os filtros de ordem mais baixa, possibilidade de ter ripple na banda passante (e isso distorção de amplitude entre a banda passante) (Butterworth, chebychev), sei que a partir de um certo critério, no entanto a fase é linear.

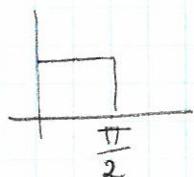
2. Filtros IIR ou Butterworth ou chebychev tipo 2

Mais usual butterworth (não tem ripple na banda passante)

$\rightarrow IIR$

$\rightarrow TB$ ✓ (livre de clicking)

1º Determinar freq. de corte



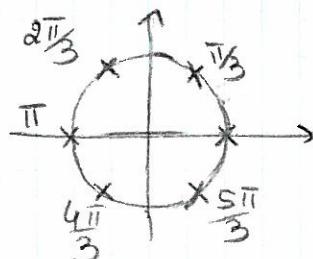
$$\omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\pi c}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

freq. de corte do sistema juntamente com o

2º Determinar $H(s)$

$$H(s) = \frac{b}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} \rightarrow \text{é um filtro de } 3^{\text{a}} \text{ ordem.}$$

trazar circunferência de raio ω_c
marcar 2N polos igualmente espaçados



$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$$

se os polos forem
para o interior do
plano e existir
uma barra

Pegar só os polos do
lado esq. para existir sistema causal

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_c}\right)^{2N=6}}$$

$$s_{1,2} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad s_3 = 2\cos\pi$$

o Determinar $H(z)$

$$H(z) = H(s) \quad | \quad s = \frac{z}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

* f. Existem filtros de ordens mais baixa \rightarrow filtros ótimos

$$n = \frac{-10 \log (\delta_1 \delta_2)}{2,324 \Delta Q} - B$$

qd nos dit q ripple na banda
passante é de rejeição tem q ser 0's

$$n = \frac{-10 \log (0,001 \times 0,001) - B}{2,324 \cdot \frac{\pi}{20}} = 128,7 = 129$$

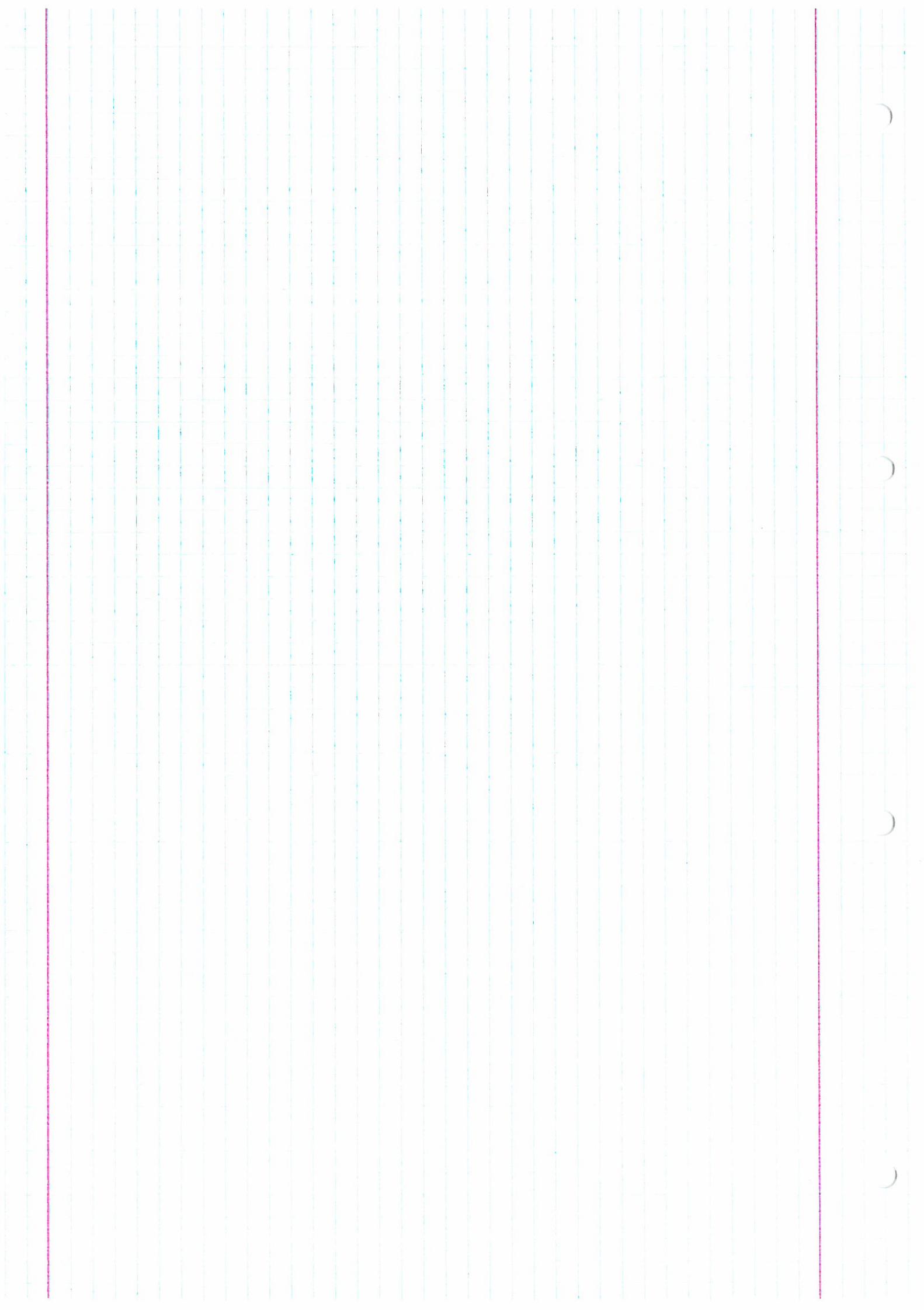
caso o ganho OC d 1, o δ_2 para além de determinar o
ripple na banda de rejeição tem determinar a largura da banda
de transição. logo qd nos ditos $\delta_1 = \delta_2$.

* g. Butterworth tem ripple na banda passante

Chebychev 1 tem ripple " " " de rejeição

elítico " " " em cima das bandas

cum chebychev conseguem filtros de menor ordem qd
butter e cum elítico ainda menor



Processamento Digital de Sinal
MIECOM Época especial 2011/2012

- 1) Considere um transmultiplexer digital TDM para FDM com 2 canais áudio comercial de 4 KHz de largura de banda amostrados à frequência de Nyquist. Suponha que a rede FDM dispõe de uma largura de banda que permite acomodar apenas 1 KHz de cada canal.

 - Em sua opinião a limitação de largura de banda disponível inviabiliza a comunicação sem sacrificar a largura de banda da mensagem? Justifique. Se a sua resposta for negativa diga quais as operações a efectuar sobre os sinais de modo a reduzir para metade a sua largura de banda efectiva? Justifique.
 - Determine a resposta a impulso do filtro ideal que não causa distorção harmónica e permite efectuar o pretendido. Justifique convenientemente todos os passos que efectuar.
 - Suponha que pretende que o filtro seja FIR e apresente um ganho na banda passante superior a 0.992 e inferior a 1.005 e uma atenuação na banda de rejeição de 60 dB. Implemente este filtro usando o método que achar mais conveniente. Justifique a sua opção.
 - Para as condições descritas na alínea anterior determina a ordem do filtro de ordem mais baixa que permite efectuar o pretendido. Justifique a diferença encontrada.
 - Apresente e comente as vantagens e desvantagens dos filtros IIR relativamente aos filtros FIR. Justifique.
 - Refaça a alínea c) admitindo que não se aceita ripple na banda passante mas tolera-se distorção harmónica. Neste caso quais os métodos adequados? Justifique. Suponha um filtro de 4^a ordem e enumere todos os passos necessários à sua implementação.

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Window Type	Peak Sidelobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M + 1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

2. Considere um sinal discreto $s[n]$ de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo multiplicativo por um sinal ruído branco $e[n]$ de média m_e e desvio padrão σ_e .

- a. Determine a média e a variância do processo $x[n]=s[n].e[n]$ admitindo que os processos são não correlados.
- b. Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência de $x[n]$ em função dos parâmetros conhecidos dos processos $s[n]$ e $e[n]$.
- c. Considere que $s[n]$ é um sinal sinusoidal com fase aleatória e uniformemente distribuída em $[0, 2\pi]$ ou seja $s[n]=\text{Acos}(w_0n+\phi)$. Mostre que nestas circunstâncias, se os processos são não correlados então

$$= 22\cos 0 \cdot [2 + 2]$$

- d. Determine e esboce justificando, no contexto da alínea c) a densidade espectral de potência do processo $x[n]$.

3. Considere um sinal discreto aleatório $x[n]$ e a estimativa da sequência de autocorrelação dada por:

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x^*(n+m)$$

- a. Sabendo que quando $N \gg |m|$ a variância deste estimador é dada por

$$\text{var}[C_{xx}(m)] = \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\phi_{xx}^2(r) + \phi_{xx}(r-m) + \phi_{xx}(r+m)]$$

como o classifica relativamente à consistência? Justifique.

- b. Mostre que o valor médio do periodograma é dado por:

$$E[I_N(\Omega)] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}(m) e^{-j\Omega m}$$

- c. Mostre que o valor médio do periodograma está relacionado com a densidade espectral de potência por

$$E[I_N(\Omega)] = P_{xx}(\Omega) * \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Omega N}{2}\right)}{\sin\frac{\Omega}{2}} \right)^2$$

- d. Enuncie e justifique o método de Bartlett para a estimação da densidade espectral de potência. Mostre que este método diminui a resolução espectral. Proponha uma alteração ao método que não apresente esta desvantagem. Em sua opinião este aumento de resolução espectral é efetivo? Justifique.

4. Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

ao qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula.

- a) Explique o que entende por um sinal ruído branco. Caracterize-o em termos de densidade espectral de potência e sequência de autocorrelação. Justifique.
- b) Dos métodos de estimativa espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espectral de potência do processo de saída? Justifique.
- c) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

$$\varphi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_{xx}(|m-k|)$$

- d) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 5 pontos $\{-1, -1, 1, 0, 1\}$. Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $-4 \leq m \leq 4$.
 - e) Determine o erro do preditor.
 - f) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $m > 4$ e $m < -7$.
 - g) Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.
5. Suponha o caso da detecção da direcção de fontes radiantes ou puras superfícies reflectoras através de um agregado linear e uniforme de sensores.

- a. Diga o que entende por DSFT. Compare qualitativamente este método com o método da decomposição da matriz correlação espacial dos dados em valores singulares (SVD) para a detecção da direcção de chegada? Justifique.
- b. Um dos algoritmos de DoA mais usado é o MUSIC. Descreva convenientemente o algoritmo. Justifique todas as suas afirmações.
- c. Suponha um sistema de comunicações móveis onde o sinal chega à antena receptora degradado por 1 eco oriundo da direcção θ_1 relativamente à perpendicular ao eixo do agregado. Desenhe o diagrama de blocos com o nº mínimo de elementos e um espaçamento adequado e escreva neste caso um conjunto de equações lineares que lhe permitam determinar as amplitudes dos sinais provenientes de cada elemento do agregado necessárias para garantir a aniquilação da réplica. Justifique os cálculos que efectuar.
Que alterações efectuaria no agregado se as condições externas se alterassem de modo a que aparecesse mais uma reflexão oriunda de uma direcção θ_2 . Justifique.

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC = |z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC = |z| < |a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

$$x_p(t) = p(t)x(t) \xleftrightarrow{\text{T. F.}} X_p(w) = \frac{1}{2\pi} [P(w)^* X(w)] \quad M = \frac{A-8}{2.285\Delta\Omega}$$

$$X_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(w - kw_s) \quad w[n] = \begin{cases} I_0 \left[\beta \left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha} \right]^2 \right)^{\frac{J_2}{2}} \right] \\ \frac{I_0(\beta)}{I_0(\beta)}; \\ 0; \end{cases} \quad 0 \leq n \leq M$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7) \\ 0.5842(A-21)^4 + 0.07886(A-21) \\ 0.0; \end{cases} \quad \begin{cases} A > 50 \\ 21 \leq A \leq 50 \\ A < 21 \end{cases} \quad M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324\Delta\Omega}$$

Teste Fase Especial 2011/2012

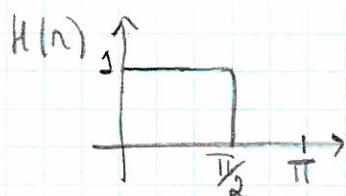
1.

4kHz largura de banda

a. Para se dimensionar para metade a largura de banda efetiva, é necessário aplicar um filtro passa baixa, com frequência de corte em $\frac{\pi}{2}$ (para reduzir o efeito de aliasing para metade), fatorando-se depois a decimagem (para refinar os valores inteiros do sinal, resultantes da aplicação do filtro).

Poderendo-se concluir que se tem que sacrificam a largura de banda para efetuar a convolução.

b.

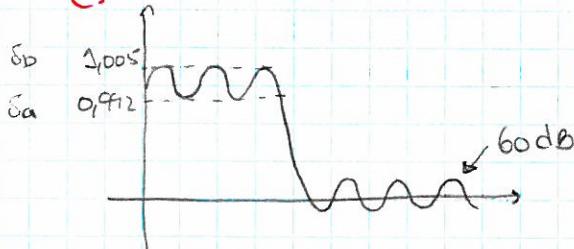


$$\begin{aligned}
 h[u] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(n) e^{jnu} dn \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N_c}^{N_c} e^{jnu} dn \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{ju} [e^{jN_cu}]_{-N_c}^{N_c} \\
 &= \frac{1}{2\pi ju} (e^{jN_cu} - e^{-jN_cu}) \\
 &= \frac{1}{\pi u} \sin(N_c u) \\
 &= \frac{N_c}{\pi} \frac{\sin(\pi \cdot \frac{N_c}{\pi} u)}{\pi \cdot \frac{N_c}{\pi} u} \\
 &= \frac{N_c}{\pi} \cdot \sin(\frac{N_c}{\pi} u)
 \end{aligned}$$

$$h[u] = h[u - \frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{N_c}{\pi} \cdot \sin(\frac{N_c}{\pi} (u - \pi/2)) = \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2} (u - \pi/2))$$

c.



ganho na banda passante é de 6dB quando centrado em 5 kHz dezena. Para se tratar como centrado tem-se a considerar $\delta = 0,005$, que apesar de inferior a $\delta_0 = 0,008$ filtro continua a acarregar ruídos.

$$A = -20 \log(0,005) = 46 \text{ dB} \quad \text{cavalo menor que } 60 \text{ dB}$$

• ; $A = 60 \text{ dB}$, porque tem que ganhar 6dB o binário

$$n = \frac{A - 8}{2,285 \Delta n} = \frac{60 - 8}{2,285 \times \frac{\pi}{20}} = 145$$

$$\Delta R = \frac{\pi}{2} \times 10\% = \frac{\pi}{20}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 72,5$$

$$\beta = 0,1102(60 - 8,7) = 5,65$$

$$h[u] = h_d[u] \cdot w[u]$$

$$= \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2} (u - \gamma_2) \right) \cdot \frac{I_0 \left[\frac{5,65}{72,5} \left(1 - \left(\frac{u - 72,5}{72,5} \right)^2 \right)^{1/2} \right]}{I_0(5,65)}$$

- d)** Os filtros de ordem mais baixa são os filtros óticos. como no problema vê-se a exigência que o ripple da banda de rejeição e o da passante têm que ser diferentes:

$$n = \frac{-10 \log (0,001 \times 0,001)}{2,324 \times \frac{\pi}{20}} - 13 = 129$$

$$A = -20 \log 2 = 60$$

$$5 \cdot 2 = 0,001$$

2) Filtros FIR:

- não tem distorção de fase (fase linear) ← vantagem
- tem ripple na banda passante ← desvantagem

Filtros IIR:

- seguem modelos de filtros analógicos ← vantagem
- conseguem não ter ripple na banda passante ← vantagem
- conseguem ter filtros de menor ordem
- Tem distorção de fase (fase não linear) ← desvantagem

- f)** filtro com ripple na banda passante → filtro IIR do tipo Butterworth ou chebychev tipo II.
No entanto mais usual é Butterworth, pelo método IRI ou T.B, este último por elita o algoritmo.
Para implementar filtro de 4º ordenem:

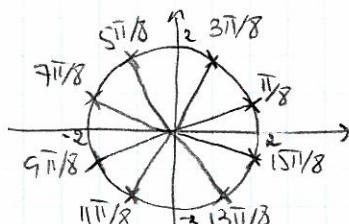
1º Determinar w_c :

$$w_c = \frac{2}{T} \tan \left(\frac{n}{2} \right) = 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2$$

2º Determinar $H(s)$

$$H(s) = \frac{b}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)} \text{ pois é um filtro de } 4^{\circ} \text{ ordenem}$$

Desenhara circunferência do plano complexo e traçaria os polos ($4 \times 2 = 8$) igualmente espaciados



$$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}; \frac{13\pi}{8}; \frac{15\pi}{8}$$

Aplicando apenas os polos do plano negativo.

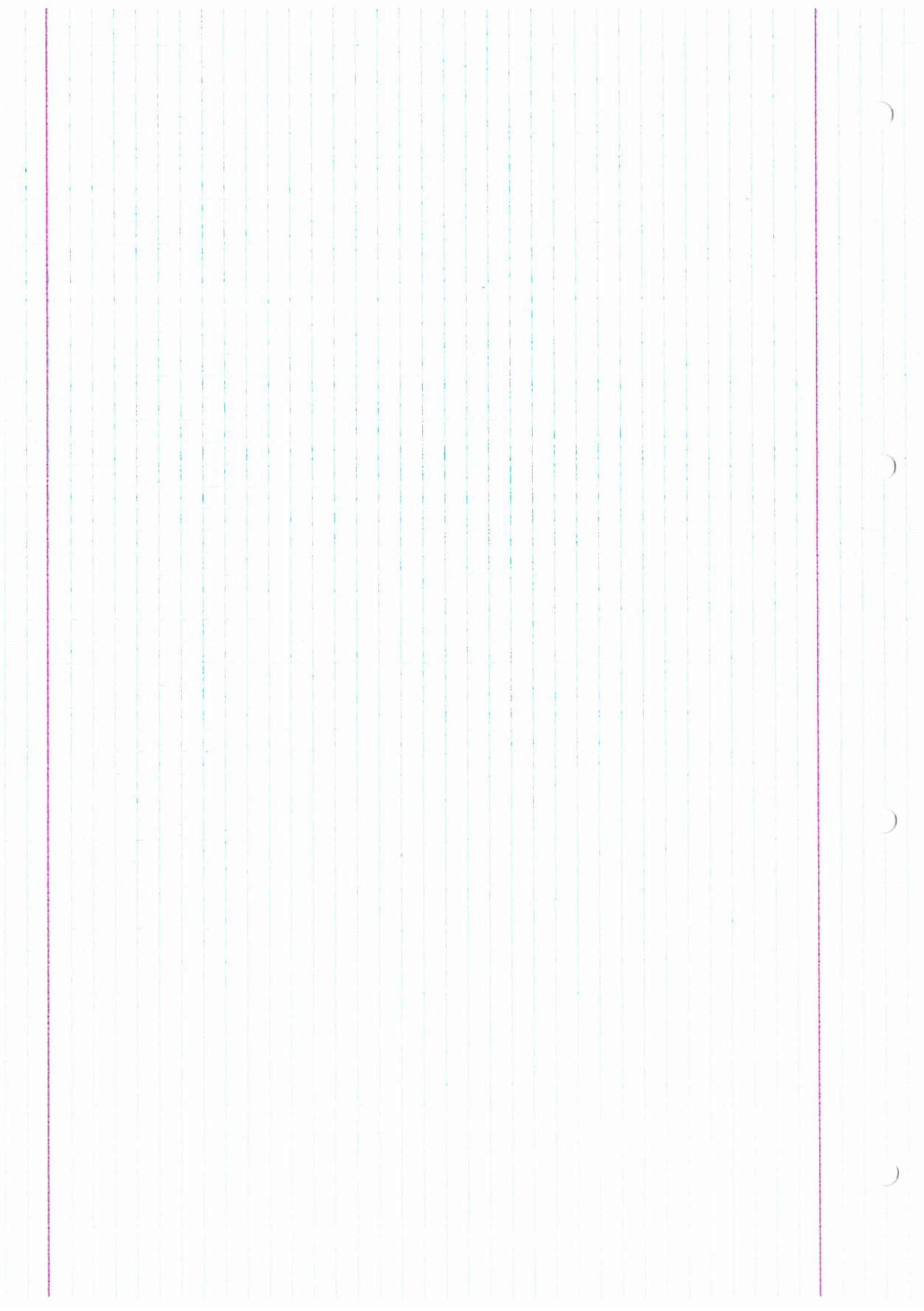
$$s_1, 2 = \alpha \left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \pm j \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right) = -0,1 + j1,848$$

$$s_{3,4} = 2 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \pm j \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right) = -1,85 \pm j0,765$$

princípio da multiplicação de vetores

3º determinar $H(z)$

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=2 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

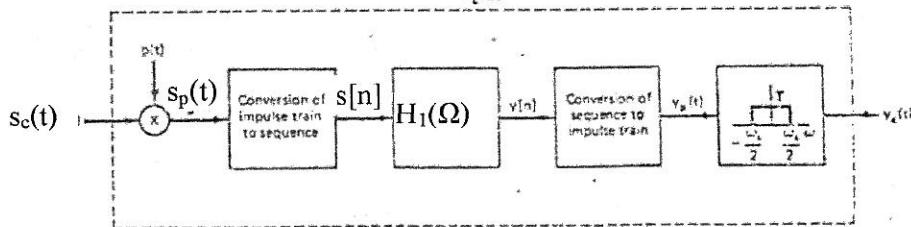


Processamento Digital de Sinal

MIEC teste 3 2007/2008

1. Considere o sistema de processamento discreto de sinais contínuos mostrado na figura seguinte com o qual se pretende implementar um cancelador de ecos. O sinal $x(t)$ apresenta-se à entrada do sistema contaminado por um eco com sucessivas réplicas tal que

$$s_c(t) = \sum_{k=1}^M x(t - kT_0) \quad \text{e} \quad x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 2ms \\ 0 & |t| > 2ms \end{cases}$$



- a) O sinal $sc(t)$ pode ser, em sua opinião, directamente aplicado à entrada do sistema? Se a sua resposta for negativa represente em termos de diagrama de blocos um sistema que permita a adaptação de $sc(t)$ ao sistema de processamento digital de sinais contínuos.
- b) Determine o período de amostragem máximo para o qual $x(t)$ ou uma sua versão modificada possa ser completamente recuperado à saída do sistema. Justifique.
- c) Considere o sinal $sc(t)$ amostrado a uma frequência dupla da de Nyquist. Considere $M=2$ e determine o atraso do eco para o qual $s[n]=x[n-8]+x[n-4]$.
- d) Represente os espectros dos sinais $sc(t)$, $p(t)$, $sp(t)$ e $s[n]$. Justifique convenientemente os cálculos que efectuar e comente adequadamente as suas representações gráficas.
- e) Determine a resposta impulsional do filtro $H_1(\Omega)$ que permite recuperar $x(t)$ pelo sistema apresentado.
- f) Determine a transformada-z da resposta impulsional do filtro. Faça o diagrama de zeros e pólos e refira-se à estabilidade e causalidade do filtro. Justifique as suas afirmações
- g) Imagine que na situação da alínea b) fazia uma decimação por um factor de 3 em $s[n]$. Na sua opinião perdia alguma informação do sinal. Se sim como procederia para minimizar ou anular essa perda. Justifique convenientemente a sua resposta.

- ② Pretende-se sintetizar um filtro digital passa banda que apresente as seguintes características mínimas:

- a. O ganho na banda passante deve ser inferior a 1.03 e superior a 0.98
- b. O ganho na banda de rejeição deve ser inferior a 0.01
- c. Atenuação mínima de -60 dB na banda de rejeição

- Descreva sucintamente os tipos de filtros digitais que conhece. Qual é o mais adequado para a aplicação em causa? Justifique.
- Considere o método das janelas como método de síntese de filtros digitais tipo FIR. Para a aplicação em causa que tipos de janelas podem satisfazer os requisitos do filtro em causa? Justifique.
- Usando o tipo de janela que achar mais conveniente projecte o filtro requerido admitindo que se pretende filtrar entre 500 e 600 Hz um sinal amostrado a 1,5 KHz. Justifique o tipo de janela usado.

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

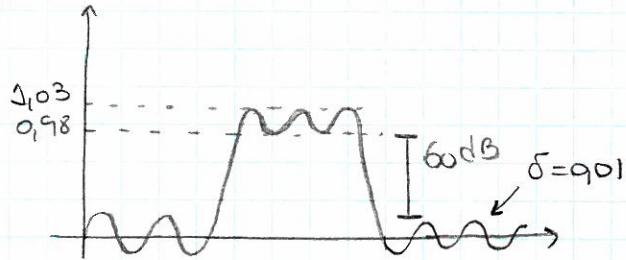
Window Type	Peak Sidelobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M + 1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

- Considere um sinal discreto sinusoidal de amplitude A e fase aleatória uniformemente distribuída em $[0, 2\pi]$ contaminado por ruído branco aditivo de média nula, variância σ^2 e não correlado com o sinal.
 - Mostre que a média da soma é a soma das médias.
 - Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência do sinal contaminado.
 - Repita a alínea anterior para o caso de ruído multiplicativo e com as mesmas características.
- Considere as duas estimativas da sequência de autocorrelação que estudou.
 - Determine e defina a polarização de cada uma delas.
 - Enuncie e justifique o método de Bartlett de estimativa da densidade espectral de potência.
 - Considere um processo autorregressivo de ordem 3 do qual conhece apenas 20 amostras. Determine um conjunto de equações que lhe permitam extrapolar a sequência de autocorrelação para $m > 20$. Justifique

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC \equiv |z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC \equiv |z| < |a|$$

2.

a) Filtros FIR \rightarrow fase linear

→ Ripple na banda passante e rejeit

Filtros IIR \rightarrow fase não linear

- consegue-se não ter ripple na banda passante
- baseado-se em uso de los osciláticos
- consegue-se menor ordem do filtro

se é o filtro elíptico, é q se consegue ter ripple na banda passante e rejeit, no entanto fase não linear.

Sendo os filtros FIR os mais adequados.

b) ganho na banda rejeit $< 0,01$, tendo q ten atenuac mínima

$$-60 \text{ dB} \rightarrow \delta = 0,001$$

$$A = -20 \log(0,03) = -30,46 < 60$$

$$\therefore A = 60$$

para uma atenuac de -60 dB se a janela de Kaiser se tornar este tipo de atenuac.

c) banda passante $500 - 600 \text{ Hz}$

$$f = 1,5 \text{ kHz}$$

$$\Delta f = 1,513 - 1,094 = 0,419$$

$$n = \frac{A - 8}{2,285 \Delta n} = \frac{60 - 8}{2,285 \times 0,419} = 54,3 = 55$$

$$\beta = 0,1102 (60 - 8,7) = 5,65$$

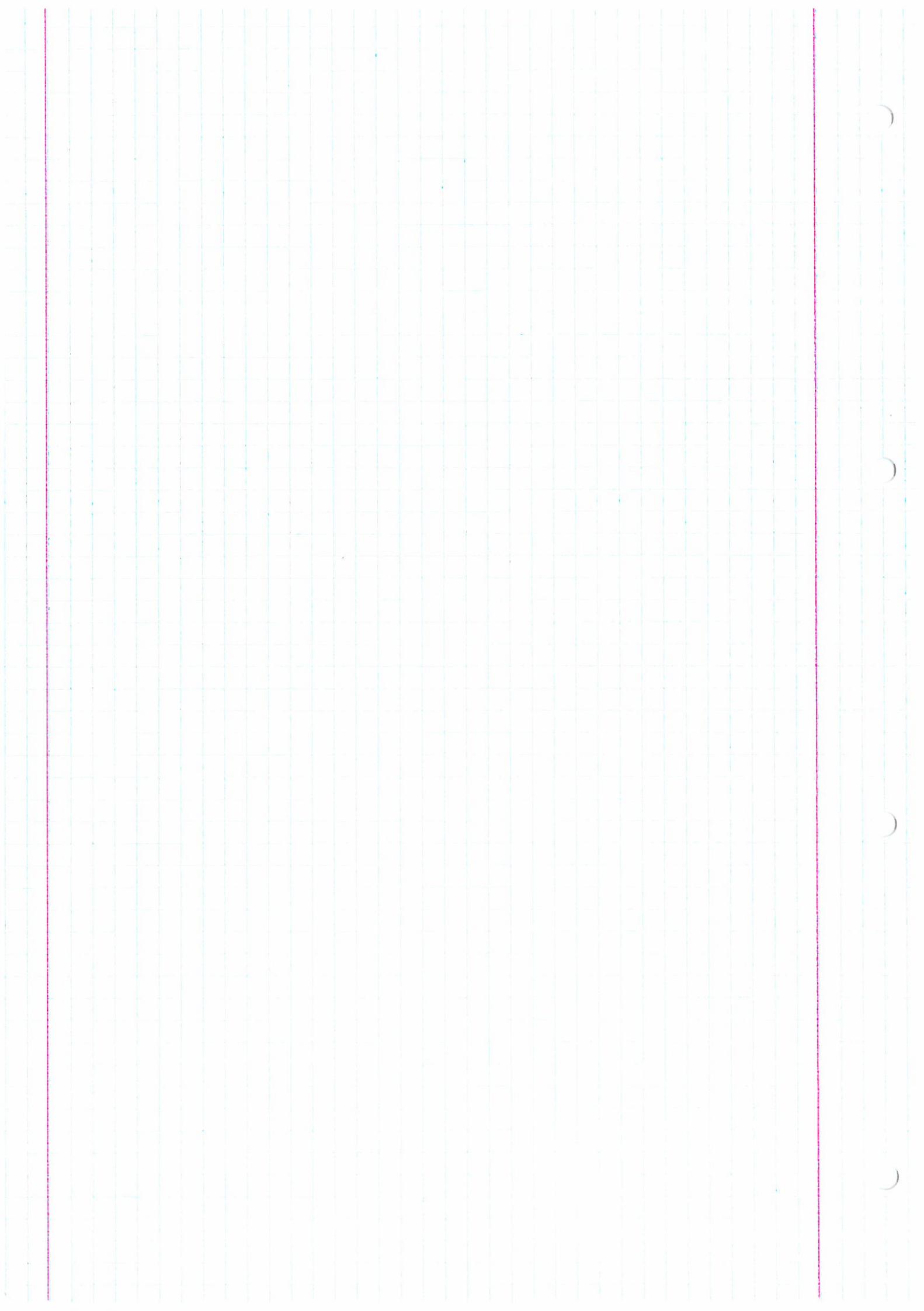
$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 27,5$$

$$h(u) = h_d(u) \cdot w(u)$$

$$h_d(u) = \frac{4}{5} \sin\left(\frac{6}{5}(u - 27,5)\right) - \frac{2}{3} \sin\left(\frac{2}{3}(u - 27,5)\right)$$



$$h_{dp}(u) = \frac{n_c}{\pi} \sin\left(\frac{n_c}{\pi}(u - \pi/2)\right)$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{x(z)}{y(z)} = x(z) / (b_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$$

Processamento Digital de Sinal

Teste 2

2012-2013

1. Considere que dispõe de um sinal de áudio digital amostrado a 8kHz e pretende aplicá-lo a um microfone com largura de banda de apenas 1kHz.

~~TB~~ ~~transformação bilinear~~ à resposta impulsional

- ~~TB~~ ~~transformação bilinear~~ Quais os métodos de síntese de filtros IIR que estudou? Explique os fundamentos e as vantagens/desvantagens de cada um deles.

(b) Considere o método da transformação bilinear. Mostre que se o sistema contínuo é estável o sistema discreto também o é. Justifique.

(c) Diga se é possível compactar a representação deste sinal e em caso afirmativo por que fator sem que haja perda de informação na reprodução do áudio com o referido microfone. Justifique.

(d) Considere o filtro adequado à aplicação com ganho mínimo na banda passante de 0.707 e ganho máximo unitário. Considere uma banda de transição de 10% da banda passante, um ganho máximo na banda de rejeição de -30 dB e projete o filtro requerido. Justifique todos os passos que efectuar.

→ Apresente um programa comentado que sintetize o filtro em Matlab.

→ Explique como procederia para verificar o filtro. Apresente um programa em Matlab que permita efectuar essa verificação. Justifique.

(g) Diga o que entende por um filtro FIR, classifique-o quanto à recursividade, apresente um exemplo o mais simples possível em termos de equação diferenças e apresente as suas vantagens relativamente aos filtros IIR.

(h) Deduza, justificando todos os passos que efectuar, a resposta impulsional do filtro FIR desejado que não causa distorção harmónica.

(j) Explique, recorrendo ao formalismo matemático adequado e justificando por que é que um filtro FIR apresenta sempre fasce linear. Que implicações tem este facto ao nível da integridade de um sinal.

(j) Considere os requisitos do filtro apresentados em (d), suponha o filtro equiripple e diga qual a janela mais adequada à síntese do filtro. Justifique.

(k) Usando o método que achar mais adequado sintetize um filtro FIR que permita servir a corrente aplicação. Justifique todos os passos que efectuar.

\checkmark Qual a ordem do filtro de ordm mais baixa que permite efectuar o pretendido.
Justifique.

\rightarrow m) Apresente um programa comentado em Matlab que permita efectuar o pretendido na alínea j).

\checkmark Apresente um código comentado em Matlab que lhe permita fazer a verificação do filtro. Explique quais as principais características que devem ser verificadas.

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Window Type	Peak Sidelobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.57\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

$$|H_c(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{jw}{jw_c}\right)^2}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7); & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21); & 21 \leq A \leq 50 \\ 0.0; & A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324 \Delta \Omega}$$

$$w[n] = \begin{cases} I_0 \left[\beta \left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]; & 0 \leq n \leq M \\ \frac{I_0(\beta)}{I_0(\beta)}; & outros casos \\ 0; & outros casos \end{cases}$$

$$A_c(\Omega) = P(\cos \Omega) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)^{-1}}{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)}$$

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & outros casos \end{cases}$$

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(\Omega_k)}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\Omega_k)}}$$

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & outros casos \end{cases}$$

$$M = \frac{A-8}{2.285 \Delta \Omega}$$

$$d_k = \prod_{i=1, i \neq k}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_i} = b_k (x_k - x_{L+2}) \quad C_k = H_d(\Omega_k) - \frac{(-1)^{k+1} c}{W(\Omega_k)}$$

$$b_k = \prod_{i=1}^{L+2} \frac{1}{x_k - x_i}$$

$$w_c = \omega_c \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2N})$$

$$[B, A] = \text{butter}(z, w_c, 's')$$

$$[B_{\text{IIR}}, D_{\text{IIR}}] = \text{bilinear}(B, A, z)$$

$$\text{freq. z}(B_{\text{IIR}}, D_{\text{IIR}})$$

11 Filtro IIR

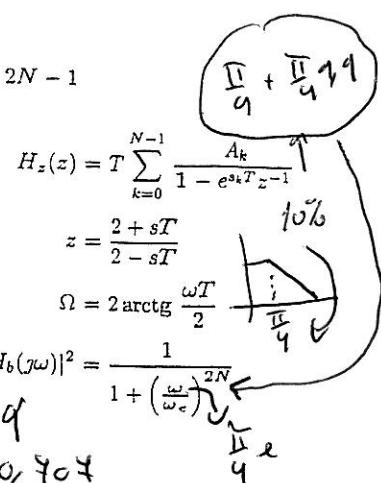
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N-1} b_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{N-1} a_k x[n-k] \quad s_k = \omega_c e^{j \frac{\pi}{2N} (2k+N+1)}, \quad k = 0, \dots, 2N-1$$

$$H_b(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{s - s_k}$$

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2}$$

$$H_b(s)H_b(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$



12 Filtro FIR

$$\left(\frac{\pi/\omega}{w_c}\right)^{2N} = 2$$

$$\left(\frac{\pi/\omega + \pi/\omega \Delta\omega}{w_c}\right)^{2N} = 0,032$$

$$w_c = \frac{\pi}{4}$$

$$(1,1)^{2N} = 0,032$$

Janela retangular

$$w[n] = \begin{cases} 1 & , 0 \leq n \leq M \\ 0 & , \text{outro } n \end{cases}$$

$$0,032$$

$$10\%$$

$$A \Theta 30 = -20 \log(6)$$

Janela Bartlett

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M} & , 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \frac{2n}{M} & , M/2 < n \leq M \\ 0 & , \text{outro } n \end{cases}$$

Janela Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M) & , 0 \leq n \leq M \\ 0 & , \text{outro } n \end{cases}$$

Janela Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M) & , 0 \leq n \leq M \\ 0 & , \text{outro } n \end{cases}$$

Janela de Kaiser

$$w[n] = \begin{cases} \frac{J_0(\beta(1 - [(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}}{J_0(\beta)} & , 0 \leq n \leq M \\ 0 & , \text{outro } n \end{cases}$$

$$\text{onde } \alpha = M/2$$

$$A = -20 \log(\delta), \quad \text{onde } \delta \text{ é a atenuação do filtro}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7) & , A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21) & , 21 \leq A \leq 50 \\ 0.0 & , A < 21 \end{cases}$$

$$\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p$$

$$M = \frac{A - 8}{2.285 \Delta\Omega}$$

Resposta impulsional do filtro ideal

$$h[n] = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}$$

$$M = -20 \log(d_1 d_2) - 13$$

$$d_1 = 2.132 \cdot 10^{-12}$$

$$\left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{w_c}\right)^{2N}} = 0,032 \right. \quad \left. \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{w_c}\right)^{2N} = 1 \right.$$

$$\left. \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \Delta\Omega}{w_c}\right)^{2N} = 0,032 \right. \quad \left. \Rightarrow \right.$$

$$\text{cqui hca } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \times 0,1$$

Filtro ótimo

$$A_e(n) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos n)^k$$

$$w(n_i) [H_d(n_i) - A_e(n_i)] = (-1)^{i+1} \delta$$

$$w_p(\cos n) = \begin{cases} + & \cos n_p \leq \cos n \leq 1 \\ - & -1 \leq \cos n < \cos n_s \end{cases} \quad \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

$$H_d(n_i) = \frac{1}{w(n_i)} \delta + a_0 + a_1 \cos(n_i) + a_2 (\cos(n_i))^2$$

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(n_k)}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{w(n_k)}}$$

$$b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{\nu_k - \nu_i}$$

$$\nu_i = \cos n_i$$

$$A_e(n) = P(\cos n) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (\nu - \nu_k)^{-1} c_k}{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (\nu - \nu_k)^{-1}}$$

$$c_k = H_d(n_k) - \frac{(-1)^{k+1} \delta}{w(n_k)}$$

$$d_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{\nu_k - \nu_i} = b_k (\nu_k - \nu_{L+2})$$

$$A_e(n) = \sum_{u=2}^L h_e[u] e^{-ju\nu} = h_e[0] + \sum_{u=1}^L 2h_e[u] \cos(ju\nu) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos n)^k$$

$$h_e[0] = a_0$$

$$h_e[1] = \frac{a_1}{2} \dots$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC = |z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC = |z| < |a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

$$x_p(t) = p(t)x(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} X_p(w) = \frac{1}{2\pi} [P(w)^* X(w)] \quad M = \frac{A-8}{2.285\Delta\Omega}$$

$$X_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(w - kw_s) \quad w[n] = \begin{cases} I_0 \left[\beta \left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right], & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7) & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^4 + 0.07886(A-21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0.0; & A < 21 \end{cases} \quad M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324\Delta\Omega}$$

$$\alpha = \frac{\eta}{2}$$

$$\Delta n = n_S - n_P$$

$$\Delta_C = \frac{n_S + n_P}{2}$$

$$u(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \hat{u}(n) e^{jn} dn$$

$$\frac{n_C}{\pi} \sin \left(\frac{n_C u}{\pi} \right)$$

Problema sobre filtros digitais

Suponha que dispõe de um sinal de fala de boa qualidade em formato digital resultado da amostragem a 48 KHz de um sinal contínuo previamente filtrado a 24 kHz. Suponha que pretende aplicar este sinal a um altifalante modesto de largura de banda 4 KHz (qualidade semelhante à existente na rede telefónica analógica). Uma vez que vai usar uma largura de banda muito limitada suponha que pretende compactar a representação do sinal de fala, o que pode ser feito por decimação mas obriga a uma filtragem do tipo passa baixo. Sabe-se que o ouvido humano é pouco sensível a variações de fase mas muito sensível a variações de amplitude.

- Pretende-se que projecte para o efeito um filtro digital de 2^a ordem que tenha o melhor desempenho possível no âmbito do problema.
- Suponha exactamente o mesmo problema em que o sinal agora em jogo é um sinal de vídeo onde os KHz agora são MHz e se sabe que a qualidade da imagem é seriamente afectada por distorções de fase. Resolva a alínea a) mas agora adaptada a este caso.

Resolução:

- Como a distorção de fase não é importante para a aplicação em causa e a distorção de amplitude é muito importante o filtro mais adequado é um Butterworth ou Chebyshev tipo II, no entanto este último apresenta “equiripple” na banda de rejeição o que pode ser importante pois o sinal remanescente na banda de rejeição vai causar aliasing no processo de decimação. Apesar de para a mesma ordem o filtro de chebyshev apresentar um maior decaimento que o filtro de Butterworth este último parece ser mais adequado ao problema em causa. Finalmente como o processo da decimação é sensível ao aliasing o método da transformação bilinear será o mais indicado para o problema. Temos então

$$\Omega_c = \frac{4}{24} \pi = \frac{\pi}{6}$$

Como o método da transformação bilinear requer compensação do modelo analógico podemos então calcular a freq. angular de corte como

$$w = \frac{2}{T} \tan(\Omega/2) \Rightarrow w_c = 2 \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0,536$$

Como se trata de um filtro de segunda ordem os 2 pólos estão situados sobre a circunferência de raio w_c e a distâncias angulares de $3\pi/4$ e $5\pi/4$ (ver acetato 18). Os pólos são então:

$$p_{1,2} = w_c \left[\cos(3\pi/4) \pm j \sin(3\pi/4) \right] = 0,379 \pm j0,379$$

Como

$$(s - p_1)(s - p_2) = s^2 - s(p_1 + p_2) + p_1 p_2 = s^2 + 0,7580s + 0,2873$$

Se pretendemos ganho DC unitário então a função de transferência do filtro analógico será

$$H_e(s) = \frac{0,2873}{s^2 + 0,7580s + 0,2873}$$

A função de transferência do filtro digital será

$$H(z) = H_e(s) \Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0,2873}{s^2 + 0,7580s + 0,2873} = \frac{0,2873 + 0,5746z^{-1} + 0,2873z^{-2}}{5,8033 - 7,4254z^{-1} + 2,7713z^{-2}}$$

Ou normalizando para o $y[n]$ (dividir tudo por 5,8033) obtém-se

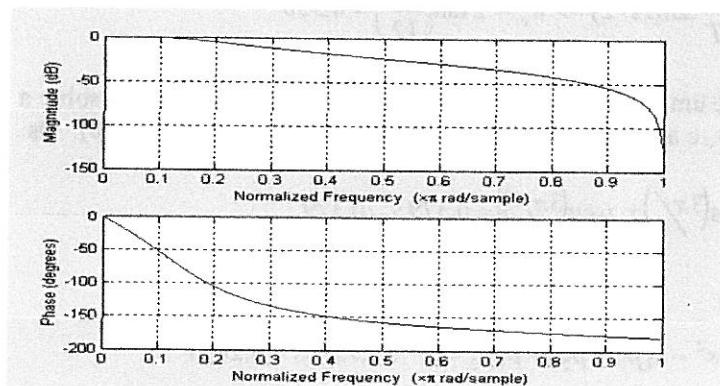
$$H(z) = \frac{0.0495 + 0.0990z^{-1} + 0.0495z^{-2}}{1.0000 - 1.2795z^{-1} + 0.4775z^{-2}}$$

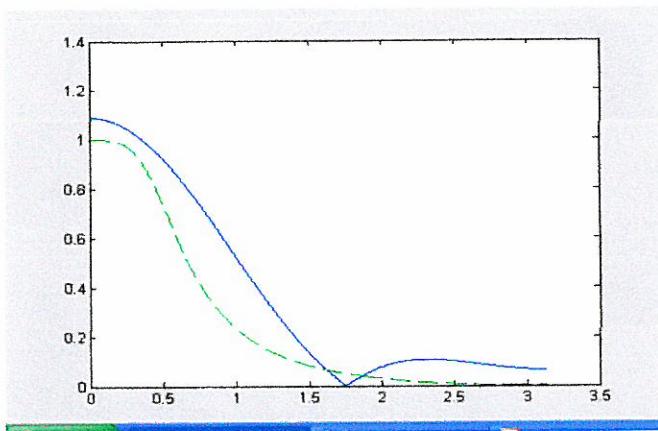
ou em termos de equação diferenças tem-se

$$y[n] = 1.2795y[n-1] - 0.4775y[n-2] + 0.0495x[n] + 0.0990x[n-1] + 0.0495x[n-2]$$

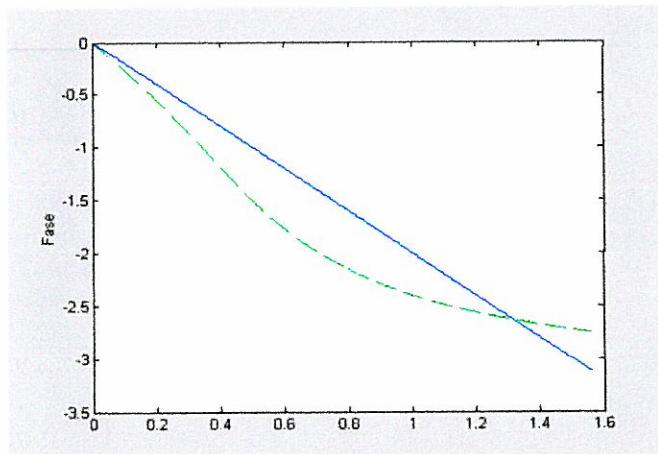
O projecto deste filtro pode ser feito em Matlab como segue

```
>> wc=2*tan(pi/12)
wc =
    0.5359
>> [B,A]=butter(2,wc,'s')
B =
    0      0    0.2872
A =
    1.0000  0.7579  0.2872
>> [Numd, Dend]=bilinear(B,A,1)
Numd =
    0.0495  0.0990  0.0495
Dend =
    1.0000 -1.2796  0.4776
>> freqz(Numd,Dend)
```





bomba a verde
butterworth
loca/ distancia de fase



Ignorando a capacidade de cálculo necessária à implementação dos filtros a vantagem óbvia do filtro FIR é que apresenta fase linear enquanto o filtro IIR distorce em termos de fase.

für alle $y = \text{hitzen}(w, u)$

for $i = \text{length}(u) : j = \text{length}(u)$

$y[i] = u[0] \vee i + u_1 \vee (i-1) + \dots + u[u] \vee [i-u]$

end

frag 2 (von menüaden, wten leiden, wten , p⁷⁰³, 'white')
für transf. b.T. 1000 ato' $\frac{ato'}{d+1}$
 \downarrow p [; ;]

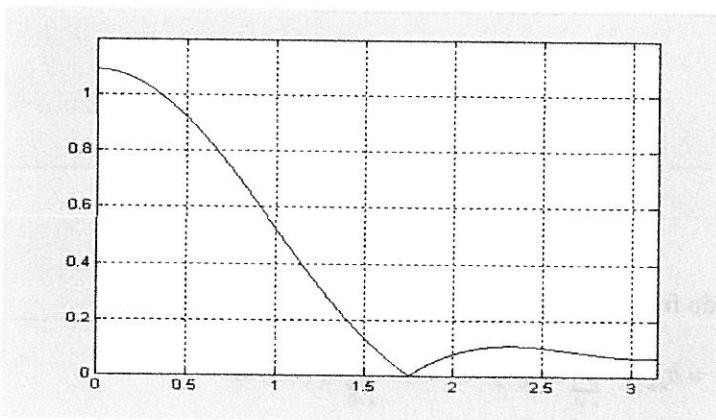
$$\begin{cases} h_e[0] = a_0 = 0.1057 \\ h_e[1] = \frac{a_{23}}{2} = 0.2889 \\ h_e[2] = \dots = 0.3029 \end{cases}$$

A resposta impulsional do filtro final será a resposta calculada anteriormente simétrica relativamente à origem e deslocada à direita de $M/2=2$.

$$\begin{cases} h[0] = 0.1057 \\ h[1] = 0.2889 \\ h[2] = 0.3029 \\ h[3] = 0.2889 \\ h[4] = 0.1057 \end{cases}$$

Este problema pode ser resolvido em Matlab com apenas 5 instruções:

```
>> wei=[1 1];
>> f=[0 1/6 0.5 2/3];
>> m=[1 1 0 0];
>> h=remez(4,f,m,wei)
h =
    0.1057  0.2887  0.3028  0.2887  0.1057
>> [H,W]=freqz(h,[1],1000,'whole');
>> mag=abs(H(1:1:501));
>> delta_w=2*pi/1000;
>> plot(0:delta_w:delta_w*500,mag)
>> axis([0 pi 0 1.2])
>> grid
```



Podemos a título de exemplo comparar as características dos filtros desenvolvidos

O passo seguinte é calcular o polinómio óptimo dado pela seguinte equação

$$A_e(\Omega) = P(\cos \Omega) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)^{-1} C_k}{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)^{-1}}$$

$$C_k = H_d(\Omega_k) - \frac{(-1)^{k+1} \delta}{W(\Omega_k)}$$

$$d_k = \prod_{i=1, i \neq k}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_i} = b_k (x_k - x_{L+2})$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 - \delta = 1.0915 \\ C_2 = 1 + \delta = 0.9085 \\ C_3 = -\delta = 0.0915 \\ C_4 = \delta = -0.0915 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = b_1 (x_1 - x_4) = 4.9751 \cdot (1.5) = 7.4627 \\ d_2 = b_2 (x_2 - x_4) = -6.3085 \cdot (0.866 + 0.5) = -8.6174 \\ d_3 = \dots = 1.1547 \end{cases}$$

Dispomos agora de todos os dados para calcular o polinómio óptimo que aproxima o filtro passa baixo ideal por um sistema de 2ª ordem.

$$P(\cos \Omega) = \frac{\sum_{k=1}^3 d_k (x - x_k)^{-1} C_k}{\sum_{k=1}^3 d_k (x - x_k)^{-1}} = \frac{\left[\frac{7.4627}{(x-1)} \right] 1.0915 + \left[\frac{-8.6174}{(x-0.866)} \right] 0.9085 + \left[\frac{1.1547}{(x)} \right] 0.0915}{\frac{7.4627}{x-1} - \frac{8.6174}{x-0.866} + \frac{1.1547}{x}}$$

Reduzindo as expressões do numerador e denominador da equação anterior ao mesmo denominador obtém-se

$$P(x = \cos \Omega) = \frac{0.4223 x^2 + 0.5777 x + 0.1057}{1}$$

Ou seja

$$\begin{cases} a_0 = 0.1057 \\ a_1 = 0.5777 \\ a_2 = 0.4223 \end{cases}$$

A resposta impulsional do filtro não causal pode agora ser obtida de

$$A_e(\Omega) = \sum_{n=-L}^L h_e[n] e^{-j\Omega n} = h_e[0] + \sum_{n=1}^L 2h_e[n] \cos(\Omega n) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos \Omega)^k$$

Pelo que

$$\begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \Omega_p = \frac{\pi}{6} \\ \Omega_3 = \frac{\pi}{2} \\ \Omega_4 = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} H_d(\Omega_1) = 1 \\ H_d(\Omega_2) = 1 \\ H_d(\Omega_3) = 0 \\ H_d(\Omega_4) = 0 \end{cases}$$

$H_d(\Omega_i)$ são os valores desejados da resposta em frequência do filtro. Vamos então escrever a equação do sistema de acordo com a equação (1)

$$\begin{cases} H_d(\Omega_1) = \frac{1}{W(\Omega_1)}\delta + a_0 + a_1 \cos(\Omega_1) + a_2 (\cos(\Omega_1))^2 \\ H_d(\Omega_2) = \frac{1}{W(\Omega_2)}\delta + a_0 + a_1 \cos(\Omega_2) + a_2 (\cos(\Omega_2))^2 \\ H_d(\Omega_3) = \frac{1}{W(\Omega_3)}\delta + a_0 + a_1 \cos(\Omega_3) + a_2 (\cos(\Omega_3))^2 \\ H_d(\Omega_4) = \frac{1}{W(\Omega_4)}\delta + a_0 + a_1 \cos(\Omega_4) + a_2 (\cos(\Omega_4))^2 \end{cases}$$

O sistema acima descrito é constituído por 4 equações e contém 4 incógnitas (δ e os a_k 's) pelo que tem uma solução única. A solução pode ser obtida por minimização iterativa do erro. No entanto a interpolação polinomial é mais eficiente. Começa-se por calcular δ através de

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(\Omega_k)}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\Omega_k)}} \quad b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{x_k - x_i}$$

Onde $x_i = \cos \Omega_i$.

$$\begin{cases} x_1 = \cos \Omega_1 = 1 \\ x_2 = \cos \Omega_2 = 0.866 \\ x_3 = \cos \Omega_3 = 0 \\ x_4 = \cos \Omega_4 = -0.5 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{1}{1-0.866} \frac{1}{1-0} \frac{1}{1-(-0.5)} = 4.9751 \\ b_2 = \frac{1}{0.866-1} \frac{1}{0.866-0} \frac{1}{0.866-(-0.5)} = -6.3085 \\ b_3 = \dots = 2.3095 \\ b_4 = \dots = -0.9761 \end{cases}$$

Pelo que o erro óptimo será

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^4 b_k H_d(\Omega_k)}{\sum_{k=1}^4 \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\Omega_k)}} = \frac{b_1 + b_2 + 0 + 0}{Kb_1 - Kb_2 + b_3 - b_4} = -0.0915$$

- b) No caso de uma imagem a sensibilidade à fase é muito significativa pelo que temos que ir para o caso dos filtros FIR devido à característica de fase linear. Temos que optar entre o método das janelas e o método óptimo (algoritmo de McClellan). O método óptimo tem 2 vantagens importantes:

- 1) Permite “ripple” diferente na banda de transição e na banda de rejeição
- 2) Minimiza a capacidade de cálculo necessária à obtenção do sinal de saída do filtro, pois para o mesmo desempenho a largura do filtro é a mínima possível, ou seja a convolução do sinal de entrada com a resposta impulsional do filtro tem o menor número possível de somas e multiplicações.

O filtro óptimo centrado na origem será do tipo

$$A_e(\Omega) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos \Omega)^k$$

Sendo um filtro de 2ª ordem temos L=2 (polinómio do 2º grau). A função a optimizar será

$$W(\Omega_i)[H_d(\Omega_i) - A_e(\Omega_i)] = (-1)^{i+1} \delta; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (L+2=4) \quad (1)$$

A função de erro pode permitir o mesmo ripple em ambas as bandas ou seja

$$W_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}; & \cos \Omega_p \leq \cos \Omega \leq 1 \\ 1; & -1 \leq \cos \Omega \leq \cos \Omega_s \end{cases}$$

Com K=δ₁/δ₂. Para facilidade de cálculos vamos supôr δ₁=δ₂, ou seja K=1.

Vamos agora dividir o eixo Ω num número de pontos que garanta pelo menos L+2=4 alternâncias do erro, sabendo que as frequências de topo de banda (Ωp e Ωs) são pontos de alternância do erro. Como se pretende uma freq. de corte (Ωp= π/6) muito menor que π/2 espera-se mais alternâncias do erro acima de Ωs que abaixo de Ωp. O mínimo valor de alternâncias abaixo de Ωp ocorre se em Ωp existir a segunda alternância, ou seja se A(Ω) for uma função monotónica decrescente desde Ω=0 até Ω=Ωp. Mesmo assim em Ωs existirá a 3ª alternância, haverá mais uma a inverter a função e já só poderá existir mais uma que deverá aparecer antes de π pois o espaço em Ω é muito maior para a direita de Ωp que para a esquerda. Claro que neste caso Ωs será grande pois forçámos uma ordem pequena (2) para o filtro ou seja esperamos uma largura de banda de transição significativa. Podemos então considerar os Ωi tal que as condições acima sejam mais ou menos satisfeitas o que leva a menos iterações no algoritmo até se atingirem os valores óptimos. Consideremos então por exemplo (note que esperamos uma largura de banda de transição grande pelo que suspeitamos que possa ser por exemplo o dobro da banda passante (Ω3) e como estamos em π/2 ainda nos resta mais π/2 e só podemos ter mais uma alternância do erro então ela estará antes de π, daí o valor de (Ω4)).