



Síntese de filtros FIR



- Filtros IIR
 - Vantagem
 - Síntese a partir de filtros analógicos
 - Desvantagem
 - Distorção (fase não linear)
- Filtros FIR (método das janelas)
 - As descontinuidades no domínio das frequências implicam respostas impulsionais de duração infinita e não causais. A ideia do método das janelas é truncar a resposta impulsional do sistema discreto.

$$h_d[n] \xleftarrow{\text{T. F.}} H_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d[n] e^{-j\Omega n} \quad h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Truncando a resposta impulsional do filtro aos $(M+1)$ pontos

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases} \quad h[n] = h_d[n]W[n] \quad H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W(\Omega - \theta) d\theta$$

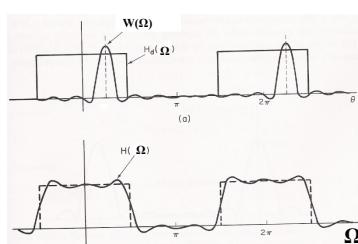
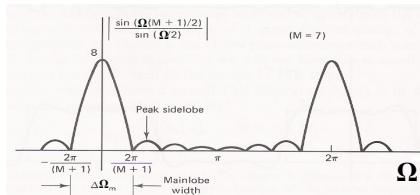


Síntese de filtros FIR



- Janela rectangular

$$W(\Omega) = \sum_{n=0}^M e^{-j\Omega n} = \dots = e^{-j\Omega M/2} \frac{\sin\left[\frac{M+1}{2}\Omega\right]}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$



$$\Leftrightarrow H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W(\Omega - \theta) d\theta$$

Síntese de filtros FIR

- Outras Janelas**

Rectangular

$M=50$

Window Type	Peak Sidelobe Attenuation (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

Bartlett (triangular)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M}; & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \frac{2n}{M}; & M/2 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases}$$

Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5(1 - \cos(\frac{2\pi n}{M})); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases}$$

Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{M}); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases}$$

Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{M}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{M}); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases}$$

Compromisso entre largura do lobo principal (rapidez de transição nas descontinuidades do filtro desejado) e atenuação do lobo secundário (nível da oscilação na vizinhança das descontinuidades do filtro desejado).

26 21/02/17 Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Síntese de filtros FIR

- Comparação das características das janelas**

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Window Type	Peak Sidelobe Attenuation (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

Vejamos que da simetria das janelas em torno do seu ponto médio resulta sempre um filtro de fase linear dado que a T. F. da janela é uma função real e par.

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases} \rightarrow W(\Omega) = W_e(\Omega) e^{-j\Omega M/2}$$

$$h_d[M-n] = h_d[n] \rightarrow H_d(\Omega) = H_e(\Omega) e^{-j\Omega M/2}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W(\Omega - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e(\theta) e^{-j\theta M/2} W_e(\Omega - \theta) e^{-j(\Omega-\theta)M/2} d\theta = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e(\theta) W_e(\Omega - \theta) d\theta}_{\text{Função real}} e^{-j\Omega M/2}$$

27 21/02/17 Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Síntese de filtros FIR

-Exemplo 5 : Consideremos o filtro passa-baixo de fase linear dado por:

$$H_{lp}(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega M/2}; & |\Omega| < \Omega_c \\ 0; & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_c}^{\Omega} e^{-j\Omega M/2} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\sin\left(\left(n - \frac{M}{2}\right)\Omega_c\right)}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)}, \quad -\infty < n < +\infty$$

Mostra-se facilmente que $h_d[M-n] = h_d[n]$

Pelo que

$$h[n] = \frac{\sin\left(\left(n - \frac{M}{2}\right)\Omega_c\right)}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)} w[n]$$

Será sempre um sistema de fase linear.

A escolha da forma e duração da janela permite controlar as propriedades do filtro resultante. No entanto o método com base na tentativa e erro não é aceitável. Kaiser desenvolveu uma formulação mais simples.

28 21/02/17 Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Síntese de filtros FIR

- Projecto pelo método da janela de Kaiser
 - Na tentativa de resolver o compromisso entre largura do lobo principal e atenuação do lobo secundário kaiser descobriu que a janela

$$w[n] = \begin{cases} I_0\left[\beta\left(1 - \left(\frac{n-\alpha}{\alpha}\right)^2\right)\right]; & 0 \leq n \leq M \\ \frac{I_0(\beta)}{I_0(\beta)} & \text{outros casos} \end{cases}$$

- $I_0(\cdot)$ é uma função de Bessel modificada do 1º tipo e de ordem zero e $\alpha=M/2$. α e β (forma) permitem escolha separada de forma/largura da janela.

M=20 **Se β é constante e M aumenta diminui a largura do lobo principal afectando pouco a amplitude dos lobos secundários.**

β=6

29 21/02/17 Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Síntese de filtros FIR

- Projecto pelo método da janela de Kaiser (cont.)

$A = -20 \log \delta$

Empírico (kaiser)

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0.0, & A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{A-8}{2.285\Delta\Omega} \quad \Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p \quad \Omega_c = \frac{\Omega_s + \Omega_p}{2}$$

-Exemplo 6 : Consideremos o filtro passa-baixo com banda de transição entre 0.4π e 0.6π , "ripple" na banda passante de -40 dB e na banda de rejeição de -60 dB.

- A síntese de filtros pelo método das janelas origina "ripples" iguais logo $A = 60dB$

$$\beta = 0.1102(60-8.7) = 5.65326 \quad M = \frac{60-8}{2.285(0.2\pi)} = 36.22 \approx 37$$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin(\Omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} \frac{I_0\left[\beta\left(1-\left[\frac{n-\alpha}{\alpha}\right]^2\right)\right]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{M}{2} = 18.5$$

Síntese de filtros FIR

Exemplo 6 (cont.)

The figure shows two plots. The left plot is a stem plot of the windowed sinc function $h[n]$ versus Sample number (n). The right plot is a magnitude spectrum $|H_{hp}(\Omega)|$ versus Radian frequency (ω) in radians per sample. The plot shows a low-pass filter characteristic with a transition band between 0.4π and 0.6π .

-Exemplo 7 : Consideremos o filtro ideal passa-alto de fase linear dado por:

$$H_{hp}(\Omega) = \begin{cases} 0; & |\Omega| < \Omega_c \\ e^{-j\Omega M/2}; & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad H_{hp}(\Omega) = e^{-j\Omega M/2} - H_p(\Omega) \quad h_{hp}[n] = \frac{\sin\left(\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)\right)}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\left(n - \frac{M}{2}\right)\Omega_c\right)}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)}, \quad -\infty < n < +\infty$$

M=38

Suponhamos que se pretende um filtro passa-alto com as seguintes especificações:

$$\Omega_s = 0.35\pi \quad \Omega_p = 0.5\pi \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta = 0.021$$

Então

$$A = -20 \log(0.021) = 33.56 \quad \beta = 0.5842(33.56-21)^{0.4} + 0.07886(33.56-21) = 2.6 \quad M = \frac{33.56-8}{2.285(0.15\pi)} = 23.73 \approx 24$$

Síntese de filtros FIR

-Exemplo 7 (cont.)

$M = 25(\text{ímpar}) \leftarrow \text{Apertar a banda de transição} \leftarrow 0.0213 > 0.021$

-Generalizando para múltiplos bp e br

$$h_{mb}[n] = \sum_{k=1}^{N_{mb}} (G_k - G_{k+1}) \frac{\sin(\Omega_k(n - M/2))}{\pi(n - M/2)} \quad G_{N_{mb}+1} = 0$$

Síntese de filtros FIR

- Aproximações óptimas em filtros FIR**
 - Problema:** Pretende-se projectar o melhor filtro (segundo algum critério de optimização) para um dado M .
 - Prova-se, que no projecto pelo método das janelas, a janela rectangular é a que minimiza o erro médio quadrático, ou seja

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{Minimiza}} \quad \epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(\Omega) - H(\Omega)|^2 d\Omega$$

- Mas será este o filtro óptimo ?
- Desvantagens do método das janelas**
 - Não é possível controlo individual do ripple nas diferentes bandas
 - O erro é maior junto aos pontos de descontinuidade
- Projectemos um filtro FIR a partir de um filtro de fase nula e em seguida inserimos um atraso para o tornar causal.**

$$h_e[n] = h_e[-n] \quad \xleftarrow{\text{T.F.}} \quad A_e(\Omega) = \sum_{n=-L}^L h_e[n] e^{-j\Omega n} = h_e[0] + \sum_{n=1}^L 2h_e[n] \cos(\Omega n) \quad L = \frac{M}{2} \quad \text{inteiro}$$

Função real, par e periódica



Síntese de filtros FIR



- Um sistema causal é obtido atrasando $h_e[n]$ de $L=M/2$ amostras. A resposta impulsional do sistema resultante é

$$h[n] = h_e\left[n - \frac{M}{2}\right] = h[M-n] \quad \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \quad H(\Omega) = A_e(\Omega)e^{-j\Omega\frac{M}{2}}$$

– Algoritmo de Parks-McClellan

- O problema pode ser visto como um problema de aproximação polinomial

$$\cos(\Omega n) = T_n(\cos \Omega) \quad T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

$$A_e(\Omega) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos \Omega)^k \quad \xrightarrow{x = \cos \Omega} \quad P(x) = \sum_{k=0}^L a_k x^k \quad a_k = f(h_e[n])$$

- Definamos a seguinte função de erro (W incorpora os erros de aproximação (δ' 's))

$$E(\Omega) = W(\Omega)[H_d(\Omega) - A_e(\Omega)]$$

- Não existem restrições na banda de transição. $A_e(\Omega)$ pode tomar qq forma que seja necessária para se atingir a resposta desejada fora da banda de transição.



Síntese de filtros FIR



-Exemplo 8 : Consideremos o filtro passa-baixo óptimo:

$$H_d(\Omega) = \begin{cases} 1; & 0 \leq |\Omega| < \Omega_p \\ 0; & \Omega_s < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad W(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}; & 0 \leq |\Omega| < \Omega_p \\ 1; & \Omega_s < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

Se $K = \delta_1/\delta_2$ então com esta função “peso” $\delta = \delta_2$ em ambas as bandas. Usando o critério minimax ou de tchebychev pretende-se encontrar $A_e(\Omega)$ que minimiza o valor máximo do erro

$$\min_{\{h_e[n]\}_{0 \leq n \leq L}} = (\max_{\Omega \in F} |E(\Omega)|)$$

Está-se à procura dos valores da resposta impulsional que minimizam δ .

Teorema das alternâncias: Seja F_p um subconjunto fechado consistindo da união disjunta de subconjuntos do eixo real x . Seja $P(x)$ o polinómio de ordem r

$$P(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$$

Seja $D_p(x)$ uma dada função de x desejada em F_p ; $W_p(x)$ uma função positiva contínua em F_p e $E_p(x)$ o erro pesado

$$E_p(x) = W_p(x)[D_p(x) - P(x)] \quad \|E\| = \max_{x \in F_p} E_p(x)$$

A condição necessária e suficiente que faz com que $P(x)$ seja o único polinómio de ordem r que minimiza $\|E\|$ é que $E_p(x)$ exiba pelo menos $r+2$ alternâncias, isto é têm que existir pelo menos $r+2$ valores x_i em F_p tal que $x_1 < x_2 < \dots < x_{r+2}$ e tal que $E_p(x_i) = -E_p(x_{i+1}) = \pm \|E\|$ para $i=1,2,\dots,r+1$.



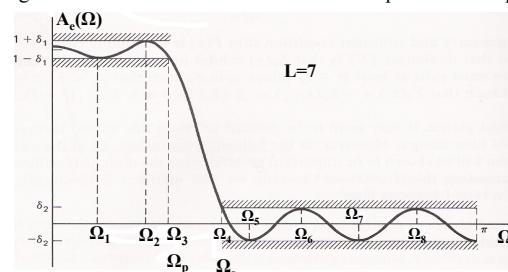
Síntese de filtros FIR



-Caso do filtro LP óptimo tipo I (M+1 é ímpar)

$$\begin{aligned} x &= \cos \Omega & P(\cos \Omega) &= \sum_{k=0}^L a_k (\cos \Omega)^k & D_p(\cos \Omega) &= \begin{cases} 1; & \cos \Omega_p \leq \cos \Omega \leq 1 \\ 0; & -1 \leq \cos \Omega \leq \cos \Omega_s \end{cases} \\ W_p(\cos \Omega) &= \begin{cases} \frac{1}{K}; & \cos \Omega_p \leq \cos \Omega \leq 1 \\ 0; & -1 \leq \cos \Omega \leq \cos \Omega_s \end{cases} & E_p(x) &= W_p(x)[D_p(x) - P(x)] \end{aligned}$$

O teorema das alternâncias postula que o conjunto de coeficientes a_k representa o filtro que melhor aproxima o filtro passa-baixo ideal com razão $\delta_1/\delta_2=K$ e com banda passante e de rejeição em Ω_p e Ω_s se $E_p(\cos \Omega)$ exibir pelo menos $L+2$ alternâncias em F_p , isto é E_p iguala de modo alternativo, positiva e negativamente o seu valor máximo. Estamos perante uma aproximação “equiripple”.



36

21/02/17

Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

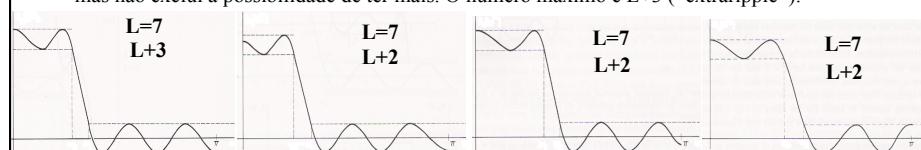


Síntese de filtros FIR



-Caso do filtro LP óptimo tipo I (M+1 é ímpar) (cont.)

O teorema das alternâncias postula que o filtro óptimo tem que ter um mínimo de $L+2$ alternâncias mas não exclui a possibilidade de ter mais. O número máximo é $L+3$ (“extraripple”).



As propriedades dos filtros resultam do teorema das alternâncias

- . O nº máx. possível de alternâncias do erro é $L+3$
- . Ocorrem sempre alternâncias em Ω_p e Ω_s
- . Todos os máximos e mínimos na banda passante e de rejeição correspondem a alternâncias, isto é o filtro será “equiripple” excepto possivelmente em $\Omega=0$ e $\Omega=\pi$.

O nº máx. possível de alternâncias é $L+3$?

O polinómio de grau L tem no máximo ($L-1$) extremos + 4 limites de banda = $L+3$ (máximo)

$$\frac{dP(\cos \Omega)}{d\Omega} = -\sin \Omega \left(\sum_{k=0}^L k a_k (\cos \Omega)^{k-1} \right) = -\sin \Omega \left(\sum_{k=0}^{L-1} (k+1) a_{k+1} (\cos \Omega)^k \right)$$

Zeros em $\Omega=0$ e $\Omega=\pi$ + ($L-1$) raízes na soma + limites de banda (Ω_s e Ω_p)

37

21/02/17

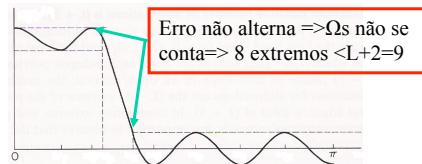
Processamento Digital de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Síntese de filtros FIR

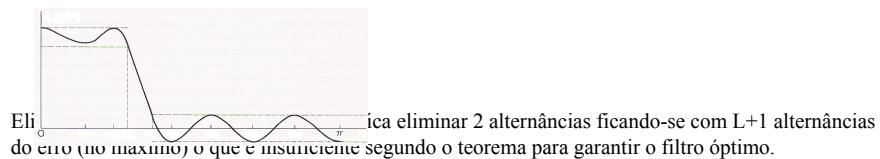


Ocorrem sempre alternâncias em Ω_s e Ω_p ?



Retirar Ω_s ou Ω_p significa retirar 2 alternâncias violando o teorema o que implica que o filtro não é óptimo.

O filtro será “equiripple” excepto possivelmente em $\Omega=0$ e $\Omega=\pi$?



Síntese de filtros FIR



-Caso do filtro LP óptimo tipo II ($M+1$ é par $\Rightarrow M/2 \neq$ inteiro)

$$\begin{aligned} h[n] = h[M-n] &\quad \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \quad H(\Omega) = e^{-j\Omega\frac{M}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[n] \cos\left[\Omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right] \\ b[n] = 2h\left[\frac{M+1}{2}-n\right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2} &\quad \xrightarrow{} \quad H(\Omega) = e^{-j\Omega\frac{M}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{M+1}{2}} b[n] \cos\left[\Omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Para se poder aplicar o teorema das alternâncias o problema tem que ser identificado como sendo de aproximação polinomial

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\frac{M+1}{2}} b[n] \cos\left[\Omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] &= \cos\frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} b[n] \cos(\Omega n) \quad \xrightarrow{} \quad H(\Omega) = e^{-j\Omega\frac{M}{2}} \cos\frac{\Omega}{2} P(\cos\Omega) \\ H_d(\Omega) = D_p(\cos\Omega) &= \begin{cases} \frac{1}{\cos\frac{\Omega}{2}}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0, & \Omega_s \leq \Omega \leq \pi \end{cases} \quad W(\Omega) = W_p(\cos\Omega) = \begin{cases} \cos\frac{\Omega}{2}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ \cos\frac{\Omega}{2}, & \Omega_s \leq \Omega \leq \pi \end{cases} \\ P(\cos\Omega) &= \sum_{k=0}^l a_k (\cos\Omega)^k \end{aligned}$$



Síntese de filtros FIR



- O algoritmo de Parks-McClellan

$$W(\Omega_i) [H_d(\Omega_i) - A_e(\Omega_i)] = (-1)^{i+1} \delta; \quad i = 1, 2, \dots, L+2 \quad A_e(\Omega) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos \Omega)^k$$

Para $i=1$ temos

$$W(\Omega_1) \left[H_d(\Omega_1) - \sum_{k=0}^L a_k (\cos \Omega_1)^k \right] = \delta$$

$$H_d(\Omega_1) = \frac{1}{W(\Omega_1)} \delta + 1a_0 + a_1 \cos \Omega_1 + a_2 (\cos \Omega_1)^2 + \dots + a_L (\cos \Omega_1)^L$$

O sistema completo fica

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^L & \frac{1}{W(\Omega_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^L & \frac{-1}{W(\Omega_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{L+2} & x_{L+2}^2 & x_{L+2}^3 & \dots & x_{L+2}^L & \frac{(-1)^{L+2}}{W(\Omega_{L+2})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{L-1} \\ a_L \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(\Omega_1) \\ H_d(\Omega_2) \\ \dots \\ \dots \\ H_d(\Omega_{L+2}) \end{bmatrix}$$

L+2 eq. e L+2 incógnitas

- $A_e(\Omega)$ óptimo pode ser encontrado através de um algoritmo iterativo . No entanto pode-se também usar a interpolação polinomial



Síntese de filtros FIR



- Parks e McClellan mostraram (através da aproximação polinomial) que

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(\Omega_k)}{\sum_{k=1}^{L+2} b_k (-1)^{k+1}} \quad b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{x_k - x_i}$$

Se $A_e(\Omega)$ é determinado pelos a_k dados no sistema, com δ dado na eq. anterior então a função de erro é $\pm \delta$ às $L+2$ freq. Ω_i ou seja $A_e(\Omega) = 1 \pm K\delta$ se $0 \leq \Omega_i \leq \Omega_p$ e $\pm \delta$ se $\Omega_s \leq \Omega_i \leq \pi$.

Como $A_e(\Omega)$ é um polinómio (trigonométrico) de grau L podemos interpolá-lo através de $L+1$ dos $L+2$ valores conhecidos (δ) $E(\Omega_i)$ ou equivalentemente $A_e(\Omega_i)$. Pela interpolação de Lagrange obtém-se

$$A_e(\Omega) = P(\cos \Omega) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)^{-1} C_k}{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)^{-1}} \quad C_k = H_d(\Omega_k) - \frac{(-1)^{k+1} \delta}{W(\Omega_k)} \quad d_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_i} = b_k (x_k - x_{L+2})$$

A eq. anterior permite calcular $A_e(\Omega)$ e $E(\Omega)$ num conjunto denso de frequências na banda passante e na banda de rejeição. Se o erro é sempre inferior ou igual a δ então a aproximação é óptima, se não, é preciso encontrar um novo conjunto de frequências e repetir o processo. As frequências Ω_i são agora aquelas para as quais ocorreram os $L+2$ picos mais elevados na curva de erro (método de Remez).

$$M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324 \Delta \Omega}$$

Fórmula obtida por Kaiser. Para o mesmo M o erro é cerca de 5 dB inferior ao caso do projecto pela janela de Kaiser.

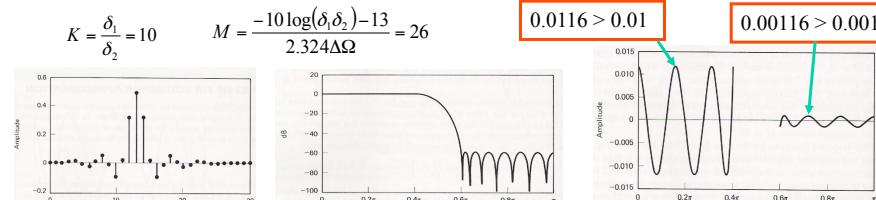


Síntese de filtros FIR



-Exemplo 9: Consideremos o filtro passa-baixo do exemplo 6 com banda de transição entre 0.4π e 0.6π , “ripple” na banda passante de -40 dB e na banda de rejeição de -60 dB.

O algoritmo de Parks-McClellan permite diferentes erros na banda passante e de rejeição.



Existem 7 alternâncias de erro na banda passante e 8 na banda de rejeição, o que faz um otal de 15 alternâncias do erro. M é par pelo que se trata de um filtro de tipo I com $L=M/2=13$. O nº de alternâncias é $L+2$ pelo que estamos perante o filtro óptimo para o erro dado e para os limites de banda de transição e rejeição dados. No entanto este filtro não cumpre as especificações mínimas do erro pelo que é necessário elevar $M \Rightarrow M=27$.

Passa-se para um filtro tipo II ($M=27$ ímpar) que já ultrapassa as especificações mas apresenta um zero em $z=-1$.

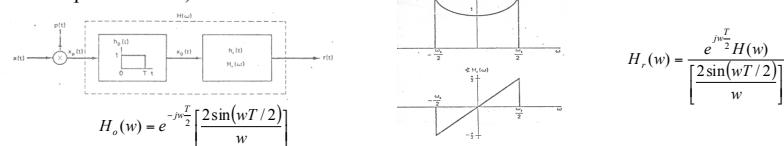
Este projecto pelo método da janela de Kaiser necessita $M=38$ (ver exemplo 6). Esta disparidade de valores justifica-se dado que pelo método das janelas o erro é igual em ambas as bandas enquanto o método de Parks-McClellan admite erros diferentes em bandas diferentes.



Síntese de filtros FIR

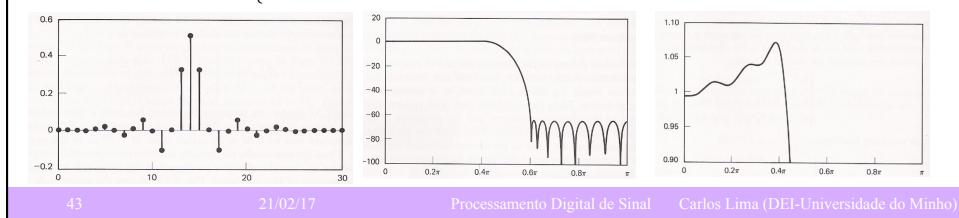


-Exemplo 10: Consideremos a compensação do “Zero-Order Hold” (ver transparência 66 da disciplina de P. S.)



Sintetizando o filtro pelo método de Parks-McClellan e usando as especificações do filtro do exemplo 9 obtemos $M=28$ (a diferença é que agora o ganho na banda passante não é constante)

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2}; & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ \frac{\sin \frac{\Omega}{2}}{\frac{\Omega}{2}}; & \Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_s \\ 0; & \Omega_s \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$





Síntese de filtros FIR



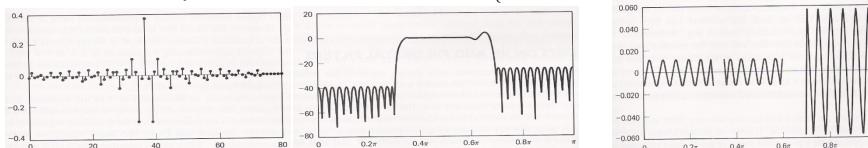
- **Filtros passa-banda**

- Os BPF e BSF requerem aproximação do erro em 3 bandas. O projecto deste filtro requer a generalização da teoria discutida anteriormente para o caso da multibanda. Como o teorema das alternâncias não assume nenhum limite no nº de intervalos mantém-se que o nº mínimo de alternâncias é $L+2$. No entanto estes filtros multibanda podem ter mais que $L+3$ alternâncias. Outra diferença é que podem ocorrer extremos locais nas regiões de transição fora dos intervalos máximos do erro e a aproximação não precisa ser “equiripple”.

- Consideremos o seguinte exemplo:

$$H_d(\Omega) = D_p(\cos \Omega) = \begin{cases} 0; & 0 \leq \Omega \leq 0.3\pi \\ 1; & 0.35\pi \leq \Omega \leq 0.6\pi \\ 0; & 0.7\pi \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

$$W(\Omega) = \begin{cases} 1; & 0 \leq \Omega \leq 0.3\pi \\ 1; & 0.35\pi \leq \Omega \leq 0.6\pi \\ 0.2; & 0.7\pi \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$



M=74 => L=37 => verifica o teorema pois existem 13 alternâncias do erro em cada banda (39=L+2). Nas bandas de transição não se garante a monotonicidade do filtro pois o algoritmo de Parks-McClellan não impõe qualquer restrição nestas regiões



Síntese de filtros FIR



- **Exercícios (TPC)**

- Refaça o exercício feito na aula, usando desta vez o método da janela de Kaiser.
- Projecte, com a ajuda do Matlab, um filtro passa-baixo FIR com $\Omega_p = 0.2\pi$, $\Omega_s = 0.3\pi$, ripple na banda passante de -40 dB, ripple na banda de rejeição $R_s = -50$ dB e ganho máximo na banda de rejeição de 0,01. Em ambos os casos determine a resposta impulsional e a resposta em freq. dos filtros.

- 1) Usando o metodo das janelas.
- 2)Usando o algoritmo de Parks-McClellan