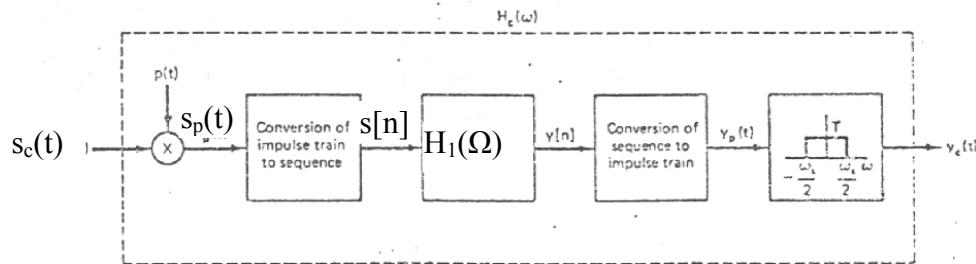


1. Considere o sistema de processamento discreto de sinais contínuos mostrado na figura seguinte com o qual se pretende recuperar o sinal  $x(t)$  que se apresenta à entrada do sistema degradado da forma  $s_c(t) = x(t - T_0) + x(t + T_0)$ ;



- a) Considere  $x(t) = 1 + 2\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$ . O sinal  $s_c(t)$  pode ser, em sua opinião, directamente aplicado à entrada do sistema? Se a sua resposta for negativa represente em termos de diagrama de blocos um sistema que permita a adaptação de  $s_c(t)$  ao sistema de processamento digital de sinais contínuos.
  - b) Determine o período de amostragem máximo para o qual  $x(t)$  ou uma sua versão modificada possa ser completamente recuperado à saída do sistema. Justifique.
  - c) Considere o sinal  $s_c(t)$  amostrado à frequência de Nyquist e determine o atraso do eco para o qual  $s[n] = x[n-1] + x[n+1]$ .
  - d) Represente os espectros dos sinais  $s_c(t)$ ,  $p(t)$ ,  $s_p(t)$  e  $s[n]$ . Justifique convenientemente os cálculos que efectuar e comente adequadamente as suas representações gráficas.
  - e) Projecte o filtro  $H1(\Omega)$  que permita recuperar a versão mais aproximada possível de  $x(t)$  a menos da fase. Pretende-se que  $y_c(t) = x(t - 4T_0)$ .
2. Considere que dispõe de um sinal de áudio digital amostrado a 8kHz e pretende transmiti-lo numa rede digital com largura de banda de apenas 2kHz.
- a) Justifique a necessidade de um filtro passa baixo para efectuar o pretendido. Explicite justificando dos tipos de filtros que estudou qual o mais adequado.
  - b) Diga o que entende por um filtro IIR, classifique-o quanto à recursividade, apresente um exemplo o mais simples possível em termos de equação diferenças e apresente as suas vantagens relativamente aos filtros FIR.
  - c) Considere o método da invariância da resposta a impulso. Diga em que é que este método é usado, qual o seu fundamento e mostre ainda que se o sistema contínuo é estável o sistema discreto também o é. Justifique.
  - d) Considere o filtro adequado à aplicação com ganho mínimo na banda passante de 0.92 e ganho máximo unitário. Considere uma banda de transição de 10% da banda passante, um ganho máximo na banda de rejeição de -40 dB e projete o filtro requerido. Justifique todos os passos que efetuar.

- e) Apresente um programa comentado que sintetize o filtro em Matlab.
- f) Explique como procederia para verificar o filtro. Apresente um programa em Matlab que permita efectuar essa verificação. Justifique.
- g) Deduza, justificando todos os passos que efectuar, a resposta impulsional do filtro passa alto FIR desejado que não causa distorção harmónica.
- h) Considere os requisitos do filtro apresentados em d), suponha o filtro equiripple e diga quais as janelas que permitem a implementação do filtro. De todas qual a mais adequada à síntese do filtro. Justifique.
- <clima@dei.uminho.pt>
- i) Usando o método que achar mais adequado sintetize um filtro FIR que permita servir a corrente aplicação. Justifique todos os passos que efectuar.
- j) Qual a ordem do filtro de ordem mais baixa que permite efectuar o pretendido. Justifique.
- k) Apresente um programa comentado em Matlab que permita efectuar o pretendido na alínea j).
- l) Apresente um código comentado em Matlab que lhe permita fazer a verificação do filtro. Explique quais as principais características que devem ser verificadas.

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Window Type	Peak Sidelobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window $\beta$	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

$$|H_c(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{jw}{jw_c}\right)^{2N}}$$

$$M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324 \Delta \Omega}$$

$$A_e(\Omega) = P(\cos \Omega) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)^{-1}}{\sum_{k=1}^{L+1} d_k (x - x_k)}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7); & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21); & 21 \leq A \leq 50 \\ 0.0; & A < 21 \end{cases}$$

$$w[n] = \begin{cases} I_0 \left[ \beta \left( 1 - \left[ \frac{n-\alpha}{\alpha} \right]^2 \right)^{1/2} \right]; & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(\Omega_k)}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\Omega_k)}}$$

O que é preciso para estes  $x[n]$  serem iguais?

O que a expressão de LRC tem a mais selo nulo para que possam ser iguais

(5)  $p(0) = 2 \text{ e } \varphi(1) = 1$

(a)  $a_1 = ?$

$$\varphi(1) = a_1 p(0) = a_1 = \frac{\varphi(1)}{p(0)} = \frac{1}{2}$$

(b)  $\varphi(2) = a_1 \varphi(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

(c)  $\varphi(2) = a_1 \varphi(1) + a_2 \varphi(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \overset{a_2=0}{a_2} \varphi(0) = \frac{1}{2}$

A)

$$MROC (1^{\text{a}} \text{ ordem}) = \varnothing x_n(0) - \sum_{k=1}^N a_k \varnothing x_n(k)$$

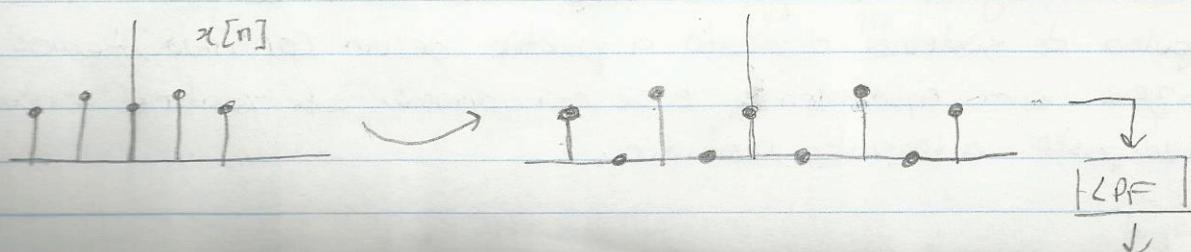
$$= 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{2}$$

$$MROC (2^{\text{a}} \text{ ordem}) = \underbrace{\varnothing x_n(0) - a_1 \varnothing x_n(1)}_{\text{igual ao outro}} - a_2 \varnothing x_n(2)$$

Aula 20-06-2013

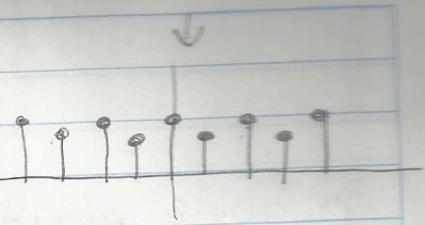
RECURSO 2012/2013

d.  $B_X = 1 \text{ kHz}$   $\xrightarrow{2K4B}$ , interpolação por um fator de 2



(a) É preciso um filtro passa-baixo.

Serve para fazer um "alisamento" do sinal  $x_2[n]$ . Repor a suavidade do sinal depois de serem colocados os zeros entre as amostras.



O filtro mais adequado é um filtro que não tenha distinção de amplitude (Butterworth?).

(b) IIR  $\rightarrow$  Infinite Impulse Response

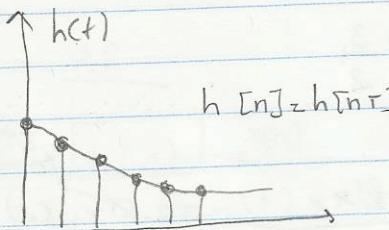
$$H(s) = \frac{k}{s - sk} \xrightarrow{\text{IIR}} H(z) = \frac{kT}{1 - e^{skT} z^{-1}}$$

$$\text{es } y(z) = e^{skT} y(z) z^{-1} + kT x(z)$$

$$\text{IDFT} \quad y[n] = e^{skT} y[n-1] + kT x[n] \leftarrow \text{Recursividade}$$

$$h[n] = e^{skT} h[n-1] + kT \delta[n]$$

$$h(t) = e^{skt} u(t)$$



Vantagens relativamente aos filtros FIR, há 3:

1. Filtro é obtido por filtros analógicos

2. Normalmente o filtro FIR obtém ordens mais baixas

3. Conseguem eliminar completamente o ripple da banda passante.

(c) Este método é usado na síntese de filtros IIR, a partir de filtros analógicos. O fundamento é obter a resposta a impulso de sistema discreto a partir de um contínuo, temos de fazer um equivalente e se coincidirem, este acontece atrasando a resposta a impulso contínuo.

Um sistema contínuo estável se e só se pólos com parte real negativa

$$s_k = \alpha_k + j\omega_k$$

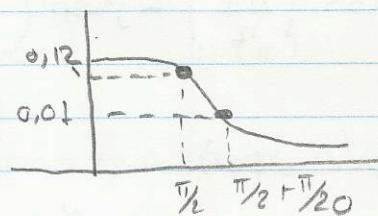
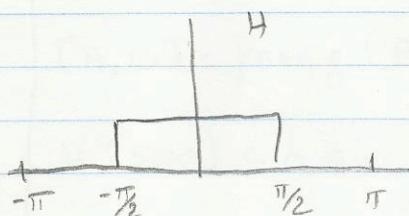
Um sistema discreto é estável sse pólos  $|z_k| < 1$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - e^{sT} z^{-1}} \quad \text{polo em } z_T = e^{+sT} = e^{+\alpha_k T}$$

$$|z_k| = |e^{+\alpha_k T}| < 1$$

$$|AB| = |A| |B|$$

(d)



$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

1º passo: determinar o N e  $\omega_c$

$$\begin{cases} (0,92)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\pi/2}{j\omega_c}\right)^{2N}} \\ (0,01)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j(\pi/2 + \pi/20)}{j\omega_c}\right)^{2N}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{j\pi/2}{j\omega_c}\right)^{2N} = \frac{1}{(0,92)^2} - 1 \\ \left(\frac{j(\pi/2 + \pi/20)}{j\omega_c}\right)^{2N} = \frac{1}{(0,01)^2} - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

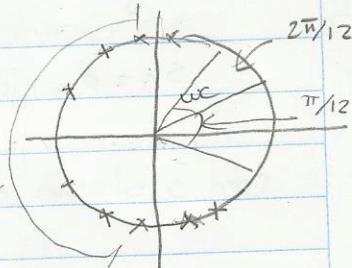
$$\Rightarrow \left(\frac{j\pi/2}{j(\pi/2 + \pi/20)}\right)^{2N} = \frac{\left(\frac{1}{0,92}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{0,01}\right)^2 - 1} \quad \text{c)} \quad \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{20}{11\pi}\right)^2 = \log N (\kappa) \quad (3)$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\frac{\log k}{\log n} = \left(\frac{10}{11}\right)^2 \Leftrightarrow \log N = \log(k) \cdot \frac{1}{\left(\frac{10}{11}\right)^2} \quad \text{e} \quad N = (k)^{\frac{1}{\left(\frac{10}{11}\right)^2}}$$

1º passo: Determinar  $H(s)$  → determinar os polos

→ Dividir a circunferência em 12 partes ( $N=6$ )



3º passo: Apanhar apenas os polos da parte esquerda do plano s

$$s_{1,2} = w_c \left( \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \pm j \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$$

$$s_{3,4} = w_c \left( \cos\left(\frac{4\pi}{12}\right) \pm j \sin\left(\frac{4\pi}{12}\right) \right)$$

$$H(s) = \frac{k}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_6)}$$

$$s_{5,6} = w_c \left( \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) \pm j \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right)$$

4º passo: Compor  $H(s)$

$$\boxed{IRI} \quad \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s-s_k} \longleftrightarrow \sum_{k=1}^N \frac{A_k T}{1-e^{j\omega_k T} z^{-1}}$$

$$H(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_6}{s-s_6}$$

Se quisermos usar o método de transformação bilinear, fazemos:

$$\underline{T.B} \quad H(z) = H(s) \quad \boxed{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

(c) ordem do filtro e frequência de corte

1º Determinar a ordem e a frequência de corte

$$[N, \omega_c] = \text{butord}(0.5, 1/20, 20 \log_{10}(0.92), 20 \log(0.01))$$

$[B, A] = \text{butter}(N, \omega_c, '0')$ ; isto faz o método de invariância de resposta ao impulso (IRI)

$$[B, A_1] = \text{bilinear}(B, A) ; TB$$

$\Rightarrow$  Se fizemos o que está a lápis ficamos com IRI, se fizermos o que está a lápis + caixa ficamos com a transformada bilinear ( $TB$ )

(f)

$\text{freqz}(B, A)$ ; isto dá-nos o gráfico  $20 \log_{10} H(\omega)$

comandos básicos  
 $[H, \omega] = \text{freqz}(B, A, 1000)$ ;  $H(\omega)$

$H(500) < 0.92$ ; temos que aumentar o  $N$

$H(550) > 0.01$ ; temos que aumentar o  $N$  também

$\Rightarrow$  function  $N = \text{verify}(B, A, w_1, w_2, G_1, G_2)$

comentários

\*  $N \geq 1$ ; alterar  $N$

\*  $w_1, w_2$  são freqüências

de  $\pi$

\*  $G_1$  e  $G_2$ , são os ganhos

$(0, 12; 0, 01)$

1 - banda passante 2 - rejeição

$$[H, \omega] = \text{freqz}(B, A, 1000)$$

$$\text{if } H(w_1 * 1000) < G_2 \text{ } | \text{ } H(w_2 * 1000) > G_1$$

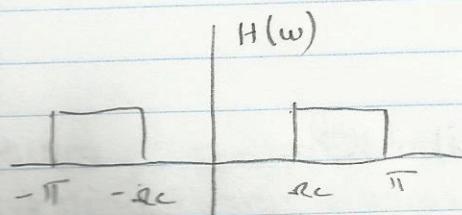
$N = 1$ ;

end

end

1 - banda passante 2 - rejeição

(g)



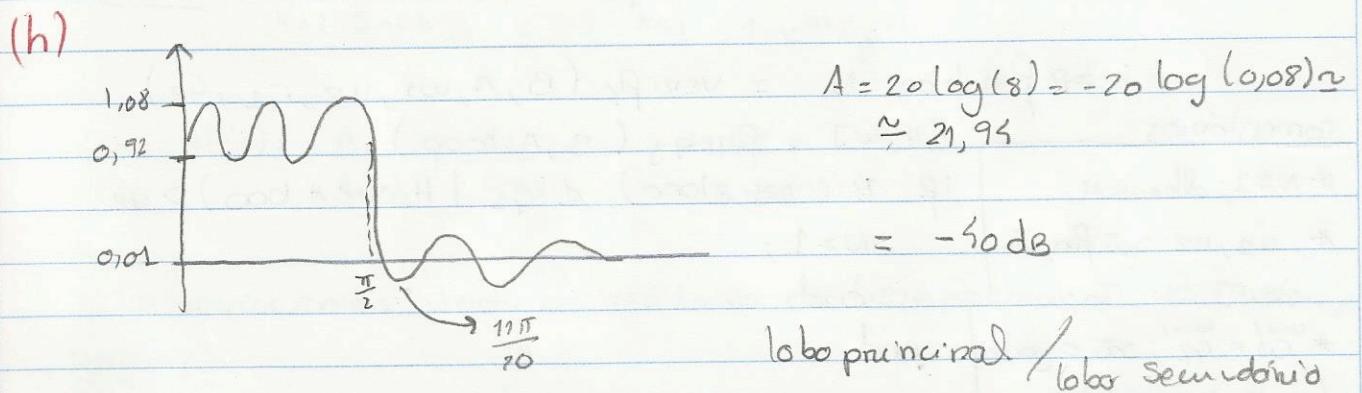
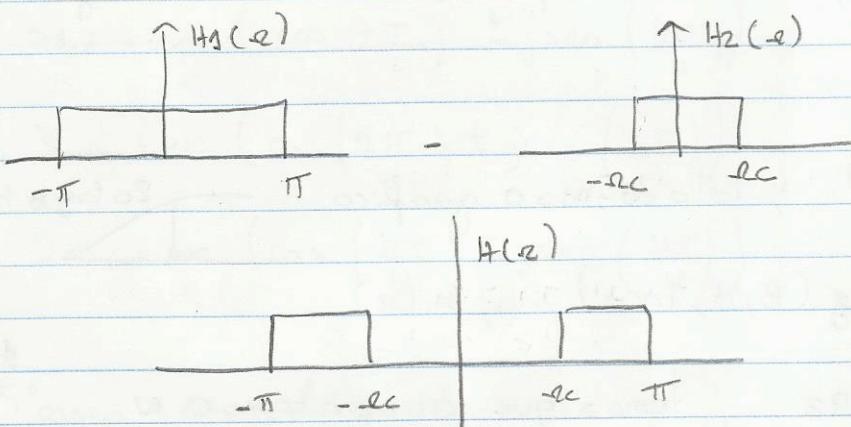
$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} & |\omega| > \omega_c \\ 0 & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\begin{aligned}
 h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} e^{jn\omega} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(n-\pi/2)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j(n-\pi/2)} e^{j\omega(n-\pi/2)} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j(n-\pi/2)} j \sin[\omega_c(n-\pi/2)] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}(n-\pi/2)\right]
 \end{aligned}$$

$$H(\omega) = H_1(\omega) - H_2(\omega)$$

$$h[n] = h_1[n] - h_2[n] = \operatorname{sinc}(n-\pi/2) - \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}(n-\pi/2)\right)$$



Hamming Blackman, Kaiser  $\rightarrow R, B$

R

$$\frac{5\pi}{10} \leq \frac{\pi}{20} \Rightarrow M \geq 160$$

$$(i) R = \frac{\pi}{2,285 \Delta \omega} = \frac{21,95 - 8}{2,285 \times \frac{\pi}{20}}$$

B

(i)

(j)

(k) 1º determinar  $h_{1[n]}$

$\Rightarrow h = \text{ideal } l_p (z_c, r_e)$

$\Rightarrow H = \dots$

$r_e, \beta$

$\Rightarrow$

janela de Kaiser

$\rightarrow r_e =$

← veloc alinea i)

$\geq \beta$

$\rightarrow W = \text{kaiser}$

$\rightarrow h = h_d * w$

$$\max(H(1,500)) < |p_3|$$

$$\min(H(1,500)) > 0,92$$

function  $h = my \leftarrow \text{filter}(w_c, M, \beta)$

$h_d = \text{ideal } l_p (w_c, M)$

$w = \text{Kaiser}(r_e, \beta)$

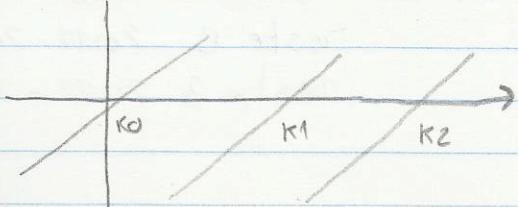
$h = h_d * w;$

end

TESTE 2 2011-2012

1.

(a)



parâmetros  $\rightarrow$  aqueles que caracterizam cada distribuição

$\hookrightarrow$  aqueles q caracterizam as relações entre as variáveis aleatórias

(b) se um processo for estacionário os parâmetros que caracterizam as variáveis aleatórias que os compõem são constantes no tempo, ou seja, são iguais a todos (cumpre o regime fix).

Os parâmetros q caracterizam as relações entre as