Teste 2 PS

I

1- A largura de banda de um sinal é obtida através da análise do sinal no domínio dos ~~tempos~~ frequências

F

2- Os coeficientes da série de Fourier de um sinal periódico $x(t)$ medem a contribuição de cada exponencial complexa nas frequências múltiplas da frequência fundamental

V

3- Uma condição suficiente para a convergência da série de Fourier é que o sinal tenha energia finita num período.

V

4- A função $|X(f)|^2$ é chamada de densidade espectral de energia de $x(t)$, e fornece a informação da energia por unidade de frequência ao longo do espectro de $X(f)$

V

5- Um impulso unitário apresenta um conteúdo espectral com amplitude constante, presente em todas as frequências entre $-\infty$ e $+\infty$.

V

6- Ao multiplicar-se um sinal $x(t)$ por uma sinusóide de frequência f_0, o efeito causado em frequência é um deslocamento do espetro do sinal modulador $x(t)$ para as frequências $\pm f_0$

V

7 - A convolução no domínio do tempo transforma-se em multiplicação no domínio da frequência e vice-versa. (V)

8 - A propriedade de translação em frequência ou modulação complexa, mostra que um desfasamento no tempo está associado a um deslocamento de frequências do espetro. (V) problema 5

9 - Os efeitos da diferenciação ou integração de um sinal sobre o seu espetro são de, respetivamente, acentuar ou atenuar as variações no tempo. (V)

1. Determinar na forma de série exponencial de Fourier a função definida por $f(t) = e^{2t}$, no intervalo: $-1 < t < 1$ e com período $T_0 = 2$ (3.22)

$$C_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2t} e^{\frac{-jn2\pi t}{\cancel{2}}} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2t} e^{-jn\pi t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2t - jn\pi t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{t(2-jn\pi)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{t(2-jn\pi)}}{2-jn\pi}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(2-jn\pi)}}{2-jn\pi} - \frac{e^{-2+jn\pi}}{2-jn\pi}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(2-jn\pi)} - e^{(-2+jn\pi)}}{2-jn\pi}\right]$$

Recordar que:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn2\pi f_0 t} dt$$

(Equação de síntese)

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{t_i}^{t_f} x(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

(equação de análise)

$T_0 = 2$

$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$

Recordar:

$$\left(\frac{e^{at}}{a}\right)' = e^{at}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(2-jn\pi)} - e^{(-2+jn\pi)}}{2-jn\pi}\right]}_{C_n} \cdot e^{\frac{-jn2\pi t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{(2-jn\pi)} - e^{(-2+jn\pi)}}{2-jn\pi}\right] \cdot e^{\frac{-jn2\pi t}{2}}$$

$F(t) \rightarrow$ somatório de Fourier

2) 3.4 Use a equação da análise da série de Fourier para calcular os coeficientes a_k do sinal periódico contínuo, em que a frequência fundamental $\omega_0 = \pi$:

$$x(t) = \begin{cases} 1,5 & 0 \leq t < 1 \\ -1,5 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

$W_0 = \pi, \quad T_0 = \frac{1}{f_0} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2}$

$e^{jn\pi} = e^{-jn\pi} (-1)^n$ 3.22

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Leftrightarrow T = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 2$

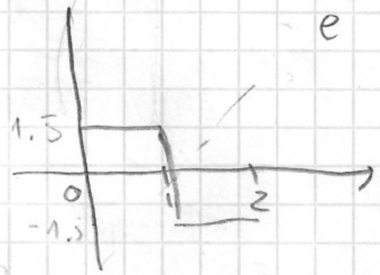
Recordar:

Eq. Análise:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_f} x(t) e^{-jn2\pi f_0 t}$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 1,5\,dt - \frac{1}{2}\int_1^2 1,5\,dt =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$



$$C_n = \frac{1}{2}\int_0^1 1,5\, e^{-\frac{jn2\pi t}{2}} - \frac{1}{2}\int_1^2 1,5\, e^{-\frac{jn2\pi t}{2}} =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 e^{-jn\pi t}\,dt - \frac{3}{4}\int_1^2 e^{-jn\pi t}\,dt$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{e^{-jn\pi t}}{-jn\pi}\right]_0^1 - \frac{3}{4}\left[\frac{e^{-jn\pi t}}{-jn\pi}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{e^{-jn\pi} - 1}{-jn\pi}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{e^{-2jn\pi} - e^{-jn\pi}}{-jn\pi}\right) =$$

$$= \frac{3}{4jn\pi}\left(-e^{-jn\pi}+1\right) + \frac{3}{4jn\pi}\left(e^{-2jn\pi} - e^{-jn\pi}\right) =$$

$$= \frac{3}{4jn\pi}\left(-e^{-jn\pi} + 1 + e^{-2jn\pi} - e^{-jn\pi}\right)$$

$$= \frac{3}{4jn\pi}\left(-2e^{-jn\pi} + 1 + e^{-2jn\pi}\right)$$

se tiver coisas antes do e^{π} fazer

$$= \frac{3}{4jn\pi}\left(-2e^{-jn\pi} + 1 + 1\right) =$$

Relembrar: Euler

$$e^{-jt} = \cos(-t) + j\sin(-t)$$
$$e^{jt} = \cos t + j\sin t$$

$$= \frac{3}{4jn\pi}\left(-2e^{-jn\pi} + 2\right) =$$

$$e^{-2jn\pi} = \cos(2n\pi) + j\sin(2n\pi)$$

$$\cos(2n\pi) - j\sin(-2n\pi) =$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$$= \frac{3}{2jn\pi}\left(-e^{-jn\pi} + 1\right) =$$

O Objetivo é ter (Formulário)

$$\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \Rightarrow \sin(x)$$

$$= \frac{3}{2jn\pi}\left(e^{\frac{jn\pi}{2}} - e^{-\frac{jn\pi}{2}}\right) e^{-\frac{jn\pi}{2}} =$$

Observa-se:

$$\left(-e^{-jn\pi} + 1\right) = \left(e^{\frac{jn\pi}{2}} - e^{-\frac{jn\pi}{2}}\right)e^{-\frac{jn\pi}{2}}$$

$$= -e^{-jn\pi}$$

$$= 1$$

$$= \frac{3}{n\pi}\left(\frac{e^{\frac{jn\pi}{2}} - e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{2j}\right) e^{-\frac{jn\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) e^{-\frac{jn\pi}{2}} =$$

$$= \boxed{\frac{3}{n\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot e^{-\frac{jn\pi}{2}}, \quad n \neq 0}$$

Relembrar que em vez de C_n podia-se a_k

3. Use a equação de síntese ou transformada inversa de Fourier para determinar os sinais $x(t)$, a partir da sua transformada:

a) $X_1(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) + \pi\,\delta(\omega - 4\pi) + \pi\,\delta(\omega + 4\pi)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\pi\,\delta(\omega) + \pi\,\delta(\omega-4\pi) + \pi\,\delta(\omega+4\pi)\right)e^{j\omega t}\,d\omega$$

(Recordar) - Formulário
Transformada inversa de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-4\pi)\,e^{j\omega t}\,d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+4\pi)\,e^{j\omega t}\,d\omega =$$

$$= \cancel{e^{j0t}} + \frac{1}{2}\cancel{(4\pi-4\pi)}\,e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}\cancel{(-4\pi+4\pi)}\,e^{-j4\pi t} =$$

Objetivo:

$$\delta(0) = 1$$

logo anular os diracs

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{4j\pi t} + \frac{1}{2}e^{-4j\pi t} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{4j\pi t} + e^{-4j\pi t}\right) =$$

$$= 1 + \frac{e^{4j\pi t} + e^{-4j\pi t}}{2} =$$

$$\boxed{x(t) = 1 + \cos(4\pi t)}$$

Objetivo: Formulário

$$\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \Rightarrow \cos x$$

ou

$$\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \Rightarrow \sin x$$

b)

$$X_2(j\omega) = \begin{cases} 2 & 0 \leq \omega \leq 2 \\ -2 & -2 < \omega < 0 \\ 0 & \cancel{|\omega| > 2} \end{cases}$$

n̄ conta pq é zero

Recordar (do formulário)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^2 2\, e^{j\omega t}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0} -2\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_0^2 e^{j\omega t}\, d\omega - \frac{1\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-2}^{0} e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^2 e^{j\omega t}\, d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{0} -e^{j\omega t} =$$

Não esquecer a variável é o ω

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_0^2 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{-e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\pi j t}\left[e^{2jt} - 1\right] + \frac{1}{jt\pi}\left[-1 + e^{-2jt}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi j t}\left[e^{2jt} - 1 - 1 + e^{-2jt}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\pi j t}\left[e^{2jt} - 2 + e^{-2jt}\right]} =$$

pode ficar assim

mas se quiseres

$\cos(2t)$

Formulário

$$= \frac{2}{\pi j t}\left[\frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2}\right] - \frac{2}{\pi j t} =$$

$$= \left[\frac{2}{\pi j t}\cos(2t)\right] - \frac{2}{\pi j t} =$$

Ainda se podia simplificar

$$x(t) = \boxed{\frac{2}{\pi j t}\left(\cos(2t) - 1\right)}$$

4. Considere que $x(t)$ possui a transformada de Fourier $X(j\omega)$. Determine as transformadas de Fourier do sinais listados abaixo em termos de $X(j\omega)$. Consulte as propriedades da transformada de Fourier listadas na Tabela do formulário.

a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$

1º → $x(-t)$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$$

2º → $x(+1-t) \leftrightarrow e^{j\omega} X(-j\omega)$

→ $x(-1-t) \leftrightarrow e^{-j\omega} X(-j\omega)$

Não esquecer:

$x(-t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(-j\omega)$

~~$x(\ldots+1) \leftrightarrow e^{j\omega} X(\ldots$~~

~~$x(\ldots-1) \leftrightarrow e^{-j\omega} X($~~

$$\Rightarrow \boxed{e^{j\omega} X(-j\omega) + e^{-j\omega} X(-j\omega)}$$

$$= 2\left(\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}\right) X(-j\omega) \Rightarrow \boxed{X_1(j\omega) = 2\cos(\omega) X(-j\omega)}$$

Recordar: $\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

b) $x_2(t) = x(3t - 6)$

excepcionalmente no Fourier tem que ser assim

$$x\left(3\left(t - 2\right)\right) =$$

$$X(j\omega)\, e^{-j\omega 2}$$

$$\frac{1}{3} X\left(\frac{j\omega}{3}\right) \cdot e^{-2j\omega}$$

Recordar: (Formulário)

$F(t - t_0) = X(j\omega)\, e^{-j\ldots}$

$F(at) = \frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

c) $x_3(t) = x''(t-1)$

$x(t-1)\ X(j\omega)\, e^{-j\omega 1}$

$= (j\omega)^2 X(j\omega)\, e^{-j\omega} =$

$-1.\omega^2 X(j\omega)\, e^{-j\omega}$

$= \boxed{-\omega^2 X(j\omega)\, e^{-j\omega}}$

Recordar:
(formulário

$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = (j\omega)^n X(j\omega)$

$j^2 = -1$

5. - Seja $x(t)$ um sinal qualquer com Transformada de Fourier $X(j\omega)$. A propriedade de translação na frequência pode ser enunciada por:

$$e^{j\omega_0 t}\, x(t) \xrightarrow{FT} X(j(\omega - \omega_0))$$

Demonstre a propriedade enunciada acima aplicando um deslocamento em frequência na Equação de análise:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$X(j(\omega-\omega_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t}\, dt =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t)\, e^{j\omega_0 t}\right) \cdot e^{-j\omega t}$

logo
$x(t)\, e^{j\omega_0 t}$
é $f(t)$

Recordar
formulário
$e^{j\omega_0 t} x(t) = X(j(\omega-\omega_0))$

Cuidado que no formulário n tem j's

Recordar formulário:
$F(\omega) = \int f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$