Teste 1-17

1. Considere o sistema LTI discreto cuja resposta impulsional é:

$$h[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-2]$$

a) Determine a transformada z da resposta impulsional do sistema.

$$h[n] = (n-2+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right) u[n-2]$$

Objetivo: • Transformar de modo a ter o que está no $u[\dots]$

$$h_1[n] = (n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right) u[n-2]$$

$$h_2[n] = \cancel{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$

$$h_1[n] \Rightarrow n a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$$

ROC $|z| > |a$

$$h_2[n] \Rightarrow a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-a z^{-1}} \quad |z > a$$

Recordar

ROC → $|z| > |a$

$$n a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-a z^{-1}}$$

$$-a^n[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-a z^{-1}} \quad |z| < |a$$

ROC:

$-n a^n u[n-1] \quad z < a$

Pela propriedade linearidade e pela de deslocação no tempo temos que:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) =$$

$$= \boxed{\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2} z^{-1}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}} \right] z^{-2}}$$

$$\boxed{\text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}}$$

NÃO ESQUECER

$$x[n-n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z)$$

b) Faça o diagrama de pólos e zeros do sistema assinalando a respectiva ROC. Com base no diagrama refira-se à estabilidade do sistema.

$$H(z) = \left[\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\, \frac{1}{2} z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2} z^{-1}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}} \right] z^{-2} =$$

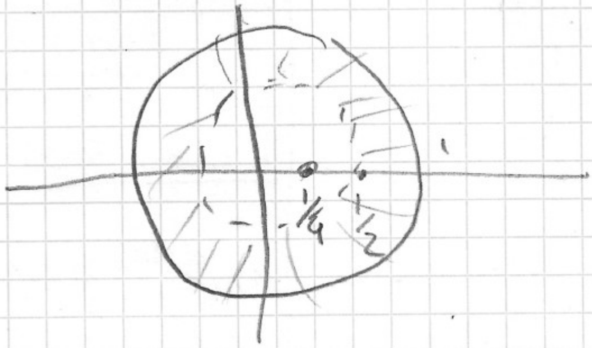
$$= \frac{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2} z^{-1}\right)^2} z^{-2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Logo: zero → $z = \frac{1}{4}$

polo duplo $z = \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{\times z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \right)^2$$



Todos os pontos estão no interior da circunferência de raio unitário logo o sistema é estável.

A ROC é para fora do ponto de módulo + elevado logo o sistema é causal.

ROC: $|z| > \frac{1}{2}$

c) Determine a equação de diferenças do sistema. Codifique em Matlab um programa que lhe permita determinar a saída do sistema supondo a entrada na variável (vector) x.

$$H(z) = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} z^{-2} = \frac{z^{-2}-\frac{1}{4}z^{-3}}{1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Então $Y(z)\left[1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right] = X(z)\left[z^{-2}-\frac{1}{4}z^{-3}\right]$

Fazendo a T-Z inversa de ambos os membros da equação:

RECORDAR!

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Propriedades (Z)

1. Linearidade

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z)$$

2. Deslocamento no tempo

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$$

3. Multiplicação por exponecia

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

4. Diferenciação $X(z)$

$$n\,x[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] + x[n-2] - \frac{1}{4} x[n-3] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y[n] = y[n-1] - \frac{1}{4} y[n-2] + x[n-2] - \frac{1}{4} x[n-3]$$

Em MATLAB: (sinal de entrada no vector x)

```
y(1:3) = 0;
for i = 4: length(x)
    y(i) = y(i-1) - 1/4*y(i-2) + x(i-2) -
           - 1/4*x(i-3);
end
```

→ Preenche y's de 1 a 3 com valor 0 (em MATLAB começa sempre em 1)

quando y(4), vai precisar do y(3) por isso

Tem que se verificar 1º $\boxed{i-3 \geq 1 \Rightarrow i = 4}$

d) Determine a resposta do sistema à entrada

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+1]$$

$$H(z) = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} z^{-2}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+1]$$

Objetivo: n+1

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} u[\underline{n+1}]$$

$$\xrightarrow{Z} X(z) = 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} z^{1}$$

$$\text{ROC}: |z| > \left|\frac{1}{4}\right|$$

<u>Saída: Y(z)</u>

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) =$$

$$= \frac{\cancel{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} z^{-2} \cdot 4 \frac{1}{\cancel{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}} z$$

$$Y(z) = \frac{4z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = 8 \cdot \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad |z| > \left|\frac{1}{2}\right|$$

Logo $y[n] = 8n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

(usado em a) $h_1[n]$)

e) Determine a entrada do sistema cuja saída é

$$y[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$H(z) = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \cdot z^{-2}$$

$$y[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$= (n-1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] =$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] =$$

$$Y(z) = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} z^{-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} z^{-1} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$|z| > \frac{1}{2}$$

$$= \left[\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right] z^{-1} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

(multiplicar pelo denominador)

$$\left[\frac{\cancel{\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}z^{-1}}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\right] z^{-1} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}z^{-1} - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{z^{-1} - 1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} ,$$

ROC: $|z| > \frac{1}{2}$

Pretende-se saber a entrada $x[n]$

Então $X(z) = \dfrac{Y(z)}{H(z)} = \dfrac{\dfrac{z^{-1}-1}{\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}}}{\dfrac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}} \cdot z^{-2}}$

$$X(z) = \frac{z^{-1} - 1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} z^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} z - \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} z^2$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} z - \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} z^2$$

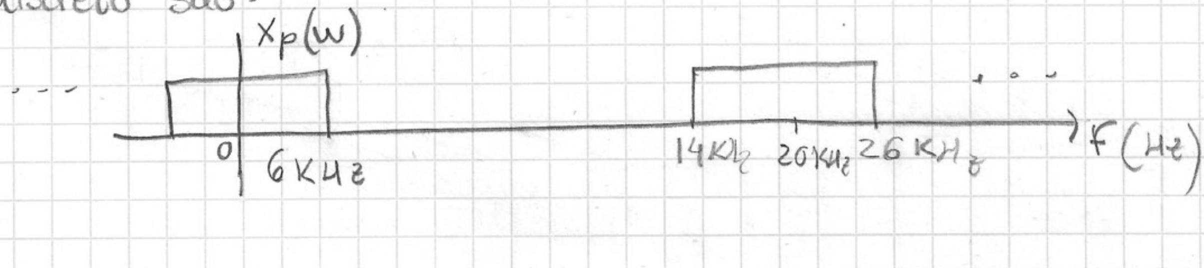
Logo,

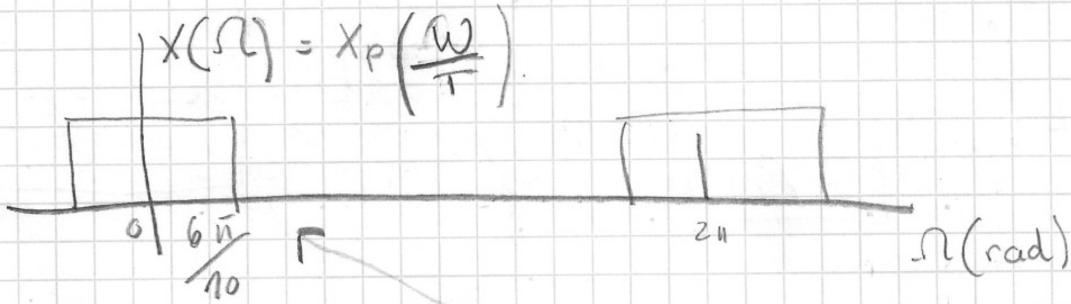
$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} u[n+1] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} u[n+2]$$

2. Considere que dispõe de um sinal de áudio filtrado passa-baixo a 6kHz e amostrado a 20kHz e pretende transfromá-lo em áudio comercial cuja largura de banda não ultrapassa os 4 kHz.

   a) Apresente em forma de diagrama de blocos um sistema capaz de efectuar o pretendido. Justifique a necessidade e função de cada bloco.

Trata-se de um processo de decimação que pode envolver combinação entre interpolação e decimação para obter factores de decimação não inteiros. O sinal precisa de ser filtrado passa baixo para ser retirada a banda entre 4 e 6 KHz.
As configurações espectrais dos sinais amostrado e discreto são:





À frequência de amostragem corresponde sempre a $\underline{\underline{2\pi}}$

20 kHz —— 2π

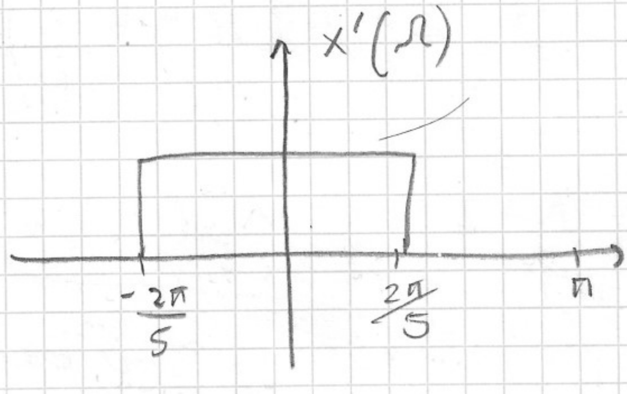
6 kHz —— x

$$x = \frac{12\pi}{20} = \frac{6\pi}{10}$$

6 kHz —— $\frac{6\pi}{10}$

4 kHz —— $\frac{2}{5}\pi$

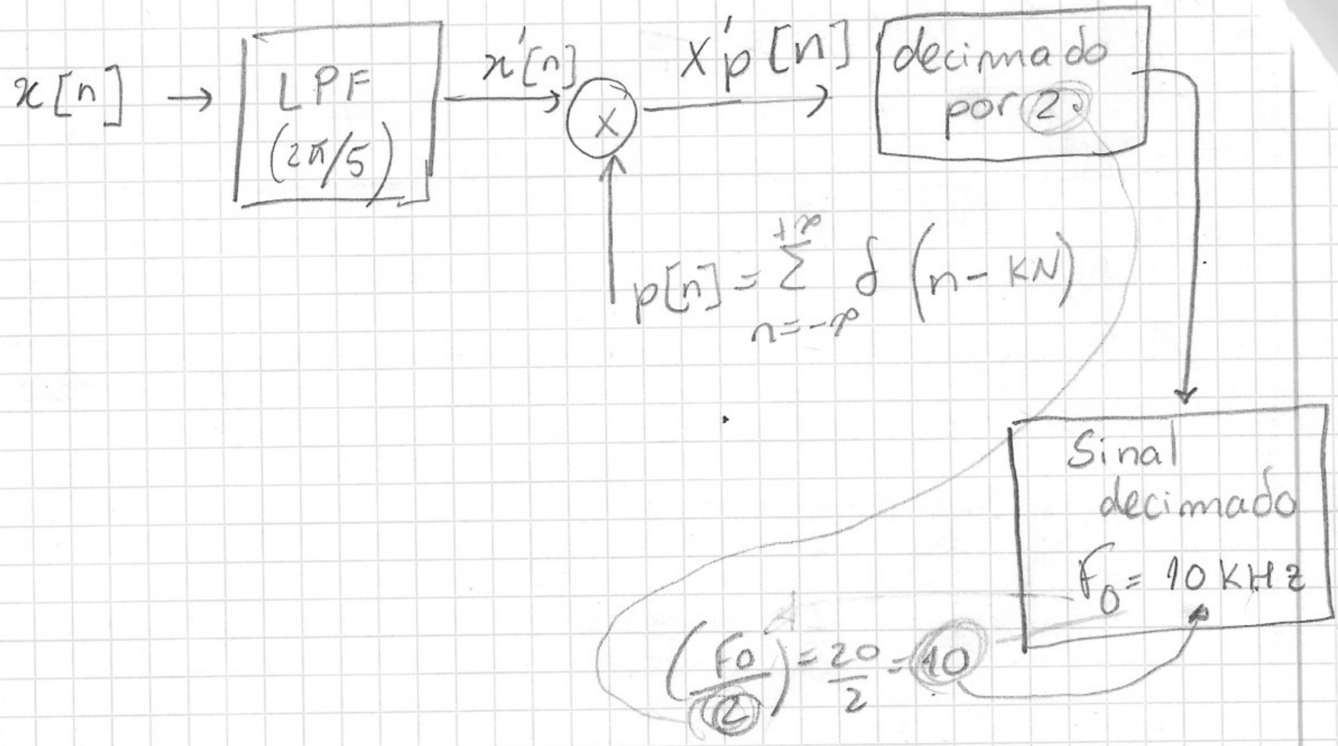
É preciso então um filtra a $\frac{2\pi}{5}$ para o sinal ser de 4 kHz. O espectro do sinal resultante será



Pelo que o espectro do sinal poderá alargar para o <u>dobro</u> que não ultrapassa π.

Podemos então decimá-lo por <u>N = 2</u>.

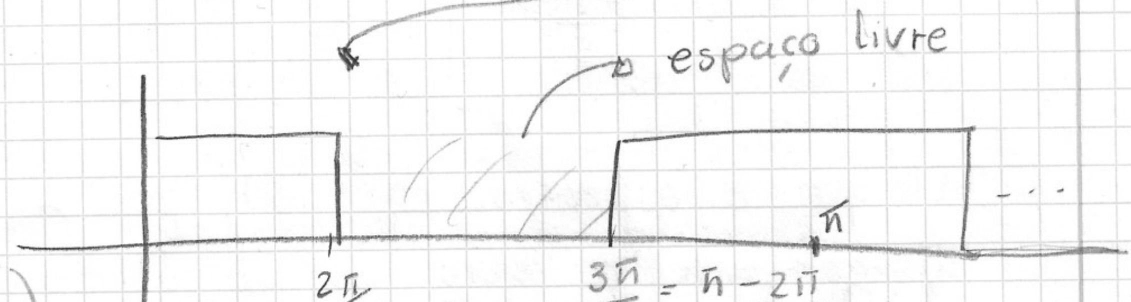
Então o diagrama de blocos do sistema será



Esta é uma solução mas não é a óptima. O sinal é de 4 KHz e está amostrado a 10 KHz, o que significa que há espaço livre em banda que pode ser ocupado

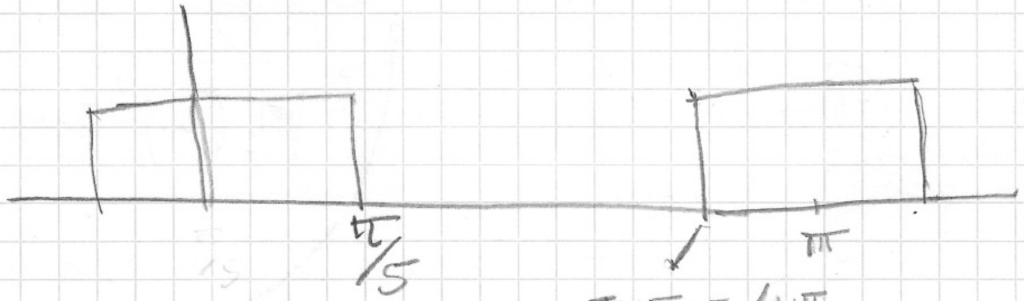
$$X'_p(\Omega) = \frac{1}{N} \overbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X'\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)}^{\text{réplicas}} \quad \text{com}$$

$N=2$ e $X'_p(\Omega)$ é



(Inverso da decimação)

Este espaço pode ser ocupado fazendo uma interpelação por um factor de 2 que leve a que o espectro do sinal seja



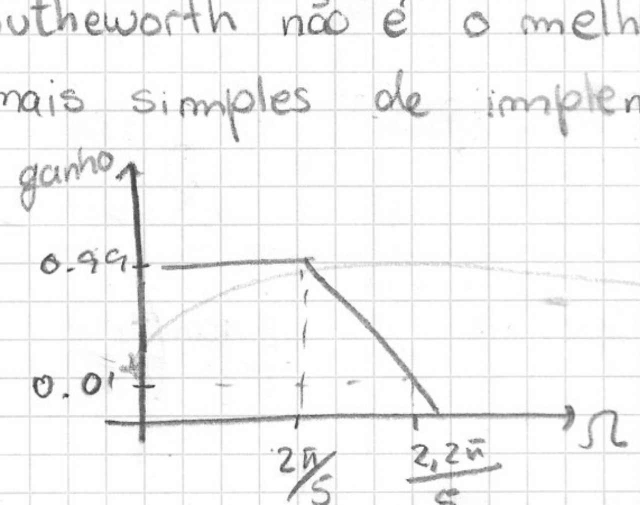
$\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$

Podendo agora ser Feita uma decimação por 5 que alarga o espectro 5 vezes ficando exactamente em π.

Esta solução garante a maior poupança.

b) Considere que o ouvido humano é pouco sensível a distorção de fase, um ganho mínimo na banda passante de 0.99 e ganho máximo unitário. Considere uma banda de transição de 10% da banda passante, um ganho máximo na banda de rejeição de -40 dB e estabeleça os passos necessários enunciando as equações correspondentes que permitam projetar o filtro requerido. Suponha o caso de um filtro de ordem par e o caso de um filtro de ordem ímpar e explique as diferenças em termos de projecto. Justifique todos os passos que efetuar.

Se a distorção de fase não é importante podemos ir para um filtro IIR onde o de Butheworth não é o melhor, mas é o mais simples de implementar.



10%

$\Omega_p = \frac{2\pi}{5}$

$\Omega_s = \frac{2\pi}{5} \times 1{,}1$

$20\log_{10}|H(\Omega)| = -40 \Leftrightarrow$

$|H(\Omega)| = 10^{-2} = 0{,}01$

Recordar: filtro Butherworth

$$|H_c(w)^2| = \frac{1}{1+\left(\frac{jw}{jw_c}\right)^{2N}}$$

O método de síntese deve ser a transformação bileanear porque é um método que não provoca "aliasing"

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq 2\pi/5 \\ 0 & \frac{2{,}2\pi}{5} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$w = \frac{2}{T} \tan\left(\Omega/2\right)$$, usando $T = 1$ seg.

logo,

$$H_c(w) = \begin{cases} 1 & |w| \leq 2\tan(\pi/5) \\ 0 & 2\tan\left(\frac{1{,}1\pi}{5}\right) \leq |w| \leq +\infty \end{cases}$$

Na prática temos, chama-se ganho

Banda passante	$0{,}99 \leq \lvert H_c(w)\rvert \leq 1$	$0 \leq w \leq 2\tan(\pi/5)$
Banda de regeição	$\lvert H_c(w)\rvert \leq 0{,}01$	$2\tan\left(\frac{1{,}1\pi}{5}\right) \leq w \leq \infty$

As 2 equações para os limites de banda são:

$$\begin{cases} \underbrace{1 + \left(\dfrac{2\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}{w_c}\right)^{2N}}_{\text{inverso da fórmula (j's cortam)}} = \underbrace{\left(\dfrac{1}{0{,}99}\right)^2}_{\text{Inverso do ganho}} \Rightarrow \\ 1 + \left(\dfrac{2\tan\left(1{,}1\frac{\pi}{5}\right)}{w_c}\right)^{2N} = \left(\dfrac{1}{0.01}\right)^2 \end{cases}$$

$$\left(\dfrac{\cancel{2}\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cancel{2}\tan\left(1.1\frac{\pi}{5}\right)}\right)^{2N} = \dfrac{\left(\frac{1}{0.99}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{0.01}\right)^2 - 1}$$

(Equação do tipo $a^b = c$ por isso $b = \log_a c$)

e sabe-se que $\log_a c = \dfrac{\log_{10} c}{\log_{10} a}$,

então

$$N = \dfrac{\log_{10}\left[\dfrac{\left(\frac{1}{0.99}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{0.01}\right)^2 - 1}\right]}{2 \log_{10}\left(\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\tan\left(1.1\frac{\pi}{5}\right)}\right)}$$

Dá um valor ñ inteiro, o resultado é o acima

$= 50{,}47 \simeq 5$

(No teste ñ é necessário calcular, mas sim explicar)

Depois de determinar o N, vamos a umas das expressões do sistema determinar w_c.

• Se quer que a melhoria (ou sintonizando) fique na banda de rejeição (linha de baixo), então substitui o N obtido nessa banda de rejeição, e na banda passante usa-se o N requerido (no enunciado ou assim), e assim depois resolvendo as equações, descobre-se o w_c para cada um deles.

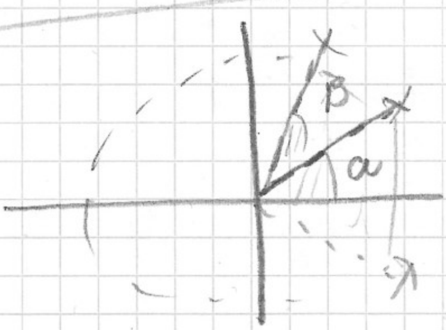
Com o N obtido vamos a uma das equações do sistema substituir o N e obter o w_c. Sintonizando o filtro na banda passante temos

$$\left(\frac{2\tan(\pi/5)}{w_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.99}\right)^2 - 1 \quad \text{e N conhecido}$$

então $$\frac{2\tan(\pi/5)}{w_c} = \sqrt[2N]{\left(\frac{1}{0.99}\right)^2 - 1} \Leftrightarrow$$

logo, $$w_c = \frac{2\tan(\pi/5)}{2N\sqrt{\left(\frac{1}{0.99}\right)^2 - 1}}$$

O passo seguinte é representar sobre a circunferência de raio w_c, 2N pólos angularmente equidistantes. Se N é par todos os pólos são complexos conjugados

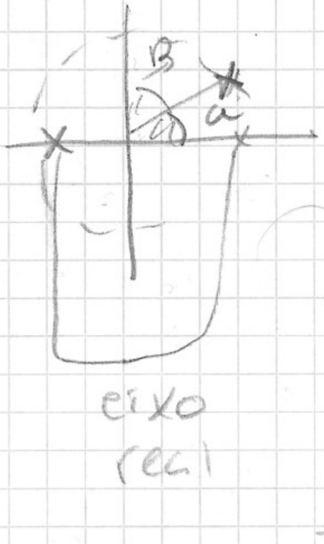


$$a = \frac{2\pi}{2N} \quad e$$

$$\beta = \frac{2\pi}{2N} + \frac{2\pi}{N}$$

e assim por diante

Se N é ímpar num pólo está sobre o eixo real



$$a = \frac{2\pi}{N}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{N} + \frac{2\pi}{N} = \frac{4\pi}{N}$$

O passo seguinte é compor $H(s)$ com os pólos que se encontram do lado esquerdo do plano-s (sistema estável)

$$H(s) = \frac{K}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_N)}$$

K deve ser calculado de modo a que o ganho DC ($s=0$) seja unitário.

$$K = \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \cdots \Delta_N$$

A transformação de $H(s)$ em $H(z)$ faz-se usando a transformação bilinear

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

com $T = 1$ seg

c) Apresente um programa comentado que sintetize o filtro em Matlab.

Em MATLAB temos que:

1. resolver o sistema para calcular N e w_c

2. Sintetizar o filtro analógico H(s)

3. Determinar H(z) pela transformação bilinear

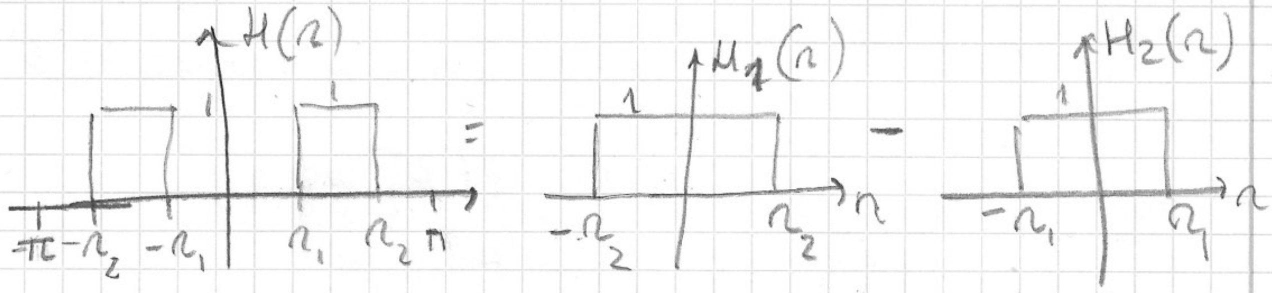
```
>> [N wc] = buttord(2*tan(pi/5),
                    2*tan(1.1*pi/5),
                    -20 log(0.99),
                    -20 log(0.01));

>> [B, A] = butter(N, wc, 's');

>> [N, D] = bilinear(B, A, 1);
```

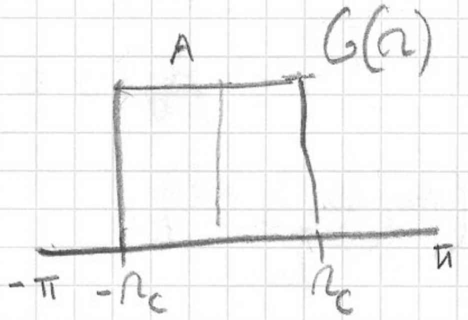
d) Deduza, justificando todos os passos que efectuar, a resposta impulsional do filtro passa banda FIR desejado que não causa distorção harmónica.

Um Filtro passa banda pode escrever-se como uma combinação de filtros passa-baixo.



Então, pela propriedade da linearidade da DTFT $h[n] = h_1[n] - h_2[n]$

A DTFT de um filtro passa-baixo é



Definição:

$$g[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

RECORDAR:

$$\boxed{\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}}$$

$$g[n] = \frac{A}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{A}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\left[e^{j\Omega n}\right]_{-\Omega_c}^{\Omega_c} =$$

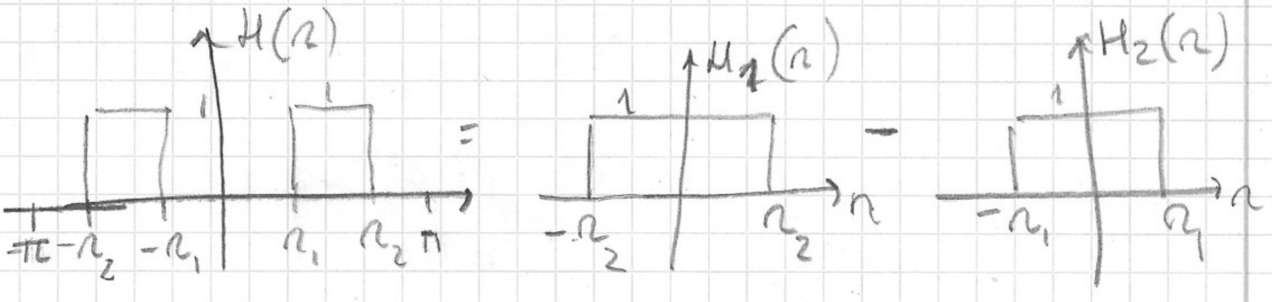
$$= \frac{A}{2\pi jn}\left[e^{j\Omega_c n} - e^{-j\Omega_c n}\right] = \frac{A}{\cancel{2}\pi \cancel{j}n}\,\cancel{2}\cancel{j}\sin(\Omega_c n)$$

RECORDAR

$$= \frac{A}{\pi}\cdot\frac{\sin(\Omega_c n)}{n} =$$

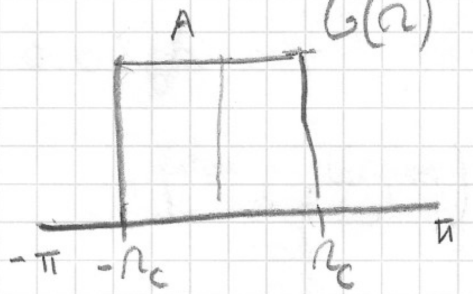
d) Deduza, justificando todos os passos que efectuar, a resposta impulsional do filtro passa banda FIR desejado que não causa distorção harmónica.

Um Filtro passa banda pode escrever-se como uma combinação de Filtros passa-baixo.



Então, pela propriedade da linearidade da DTFT $h[n] = h_1[n] - h_2[n]$

A DTFT de um filtro passa-baixo é



Definição:

$$g[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

RECORDAR:

$$\boxed{\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}}$$

$$g[n] = \frac{A}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{A}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\Big[e^{j\Omega n}\Big]_{-\Omega_c}^{\Omega_c} =$$

$$= \frac{A}{2\pi jn}\left[e^{j\Omega_c n} - e^{-j\Omega_c n}\right] = \frac{A}{\cancel{2}\pi \cancel{j} n}\,\cancel{2}\cancel{j}\sin(\Omega_c n)$$

RECORDAR

$$= \frac{A}{\pi}\cdot\frac{\sin(\Omega_c n)}{n} = \cancel{\Omega_c}$$

multiplica e divide

$$= A \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin(\Omega_c n)}{\Omega_c n} =$$

$\pi x = \Omega_c n \Rightarrow x =$

$$= A \frac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_c n}{\pi}\right)$$

RECORDAR:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

RECORDAR:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \operatorname{sinc}(x)$$

Então,

é o mais largo

é mais estreito

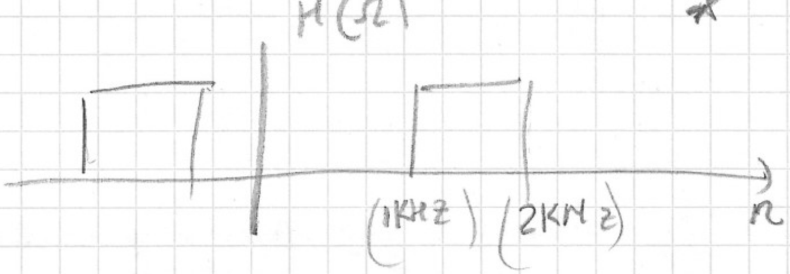
$$h[n] = \frac{\Omega_2}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_2 n}{\pi}\right) - \frac{\Omega_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_1 n}{\pi}\right)$$

O filtro que não causa distorção harmónica é o deslocado $M/2$ para a direita, sendo M a largura do filtro

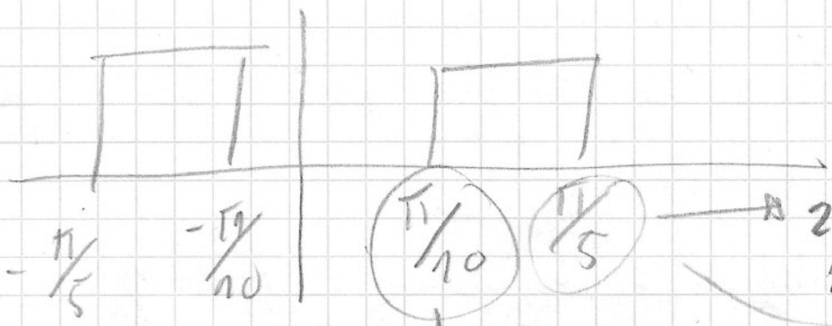
$$\underbrace{h_d[n] = \frac{\Omega_2}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_2}{\pi}\left(n - \frac{M}{2}\right)\right) - \frac{\Omega_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_1}{\pi}\left(n - \frac{M}{2}\right)\right)}_{\text{resposta impulsional do filtro desejado}}$$

e) Usando o método que achar mais adequado e os requisitos básicos descritos em b) sintetize um filtro FIR que retenha no sinal apenas as componentes de frequência entre 1 e 2 kHz. Justifique todos os passos que efctuar. Codifique e comente o seu filtro em Matlab.

Pretende-se um filtro FIR que faça isto o mais vulgar é usar a janela de kaiser pelo que usa-se esta



Considerando o sinal amostrado a 20KHz (o original)



$20KHz - 2\pi$

$2KHz - \Omega$

$\Omega = \pi/5$

$\Omega = \pi/5 \div 2$

Como o ganho na banda passante não pode ser inferior a 0.99:

$0,99 = 1 - \delta \Rightarrow \delta = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow 40dB$

Supondo $\Delta\Omega = 10\%$ de banda passante $\rightarrow \pi/10$

toma $\Delta.\Omega = \pi/100 \longrightarrow \frac{\pi}{10} \times 0.1$

$$B = 0,5842\,(\underset{A}{40}-21)^{0.4} + 0,07886\,(40-21)$$

$\boxed{\text{VER FORMULÁRIO}}$

$$M = \frac{40-8}{2.285\,\pi/100}$$

Com estes parâmetros determinamos a janela e o filtro e a multiplicação de janela pelo filtro ideal calculado na alínea d)

Em MATLAB:

```
beta = 0.5842 *(40-21)^0.4 + 0.07886 *
                                    (40-21)
M= (40-8) / (2.285 *π/100);
w= kaiser (M, beta); % obtenção da janela
hd= ideal_lp (pi/5, M)-ideal_lp(pi/10, M);
                               % filtro desejado
h= hd * w; % filtro
```

f) Conhece algum método mais eficiente de cálculo de um filtro FIR? Se sim diga em que se baseia e determine a ordem deste filtro de ordem mais baixa que permite executar o filtro.

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Window Type	Peak Sidelobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20\log_{10}\delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	−13	$4\pi/(M+1)$	−21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	−25	$8\pi/M$	−25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	−31	$8\pi/M$	−44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	−41	$8\pi/M$	−53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	−57	$12\pi/M$	−74	7.04	$9.19\pi/M$

$$M=\frac{-10\log(\delta_1\delta_2)-13}{2.324\Delta\Omega}$$

$$M=\frac{A-8}{2.285\Delta\Omega}$$

$$|H_c(w)|^2=\frac{1}{1+\left(\dfrac{jw}{jw_c}\right)^{2N}}$$

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad w=\frac{2}{T}\tan(\Omega/2)$$

$$\beta=\begin{cases}0.1102(A-8.7); & A>50\\ 0.5842(A-21)^{0.4}+0.07886(A-21); & 21\le A\le 50\\ 0.0; & A<21\end{cases}$$

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{I_0\left[\beta\left(1-\left[\dfrac{n-\alpha}{\alpha}\right]^2\right)^{1/2}\right]}{I_0(\beta)}; & 0\le n\le M\\ 0; & outros\ casos\end{cases}$$

$$w[n]=\begin{cases}0.42-0.5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right)+0.08\cos\left(\dfrac{4\pi n}{M}\right); & 0\le n\le M\\ 0; & outros\ casos\end{cases}$$

Sim. O algoritmo de Parks-McClellan ou de aproximação do filtro desejado por uma função polinomial.

$$M=\frac{-10\log(\delta_1\delta_2)-13}{2.324\,\Delta\Omega} \qquad \delta_1=\delta_2=0.01 \qquad \Delta\Omega=\pi/100$$