Integrais Duplos

- Revisão (curta) de integrais simples
- Integrais Duplos
  - Definição de integral duplo
  - Integrais duplos em regiões rectangulares: integrais iterados
  - Integrais duplos em regiões mais gerais
  - Integrais duplos com coordenadas polares
  - Usando transformações para calcular integrais duplos

Revisão de integrais simples

$$\text{Calcular } \int_a^b f(x)dx, \text{ onde } f:[a,b]\to\mathbb{R} \quad f \text{ é limitada.}$$

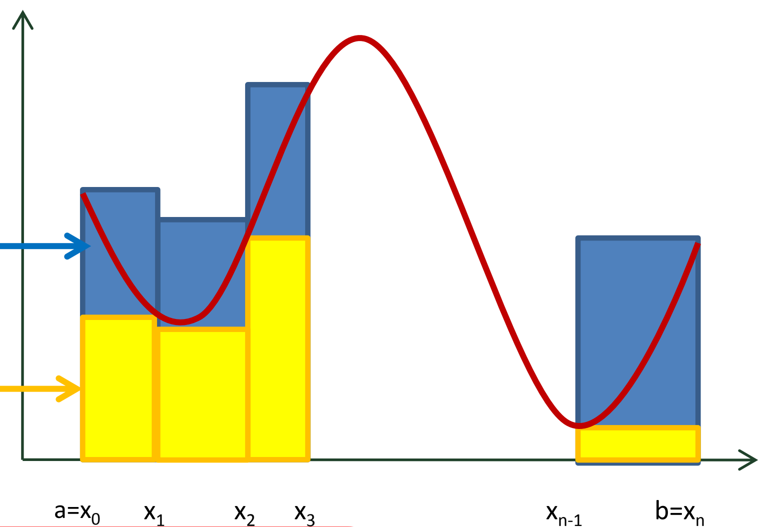
$$\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n:\ x_0=a,\ x_n=b,\ x_i<x_{i+1},\ i=0,\ldots,n-1\}$$

$$m_i=\inf\{f(x):\ x_{i-1}<x<x_i\},$$

$$M_i=\sup\{f(x):\ x_{i-1}<x<x_i\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_{\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_i-x_{i-1})$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_i-x_{i-1})$$



Definição

$$\text{Se } \overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx, \text{ então } f \text{ é integrável e}$$

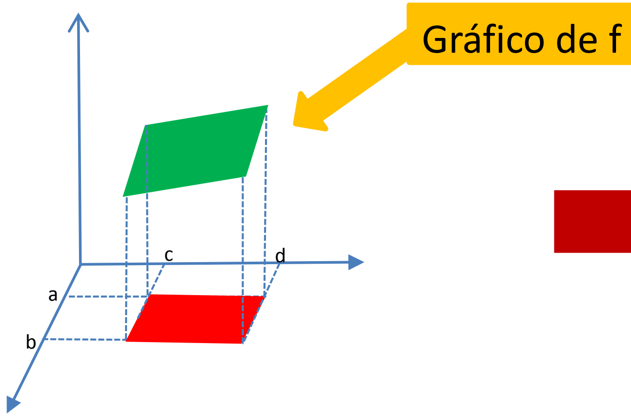
$$\int_a^b f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Integrais Duplos

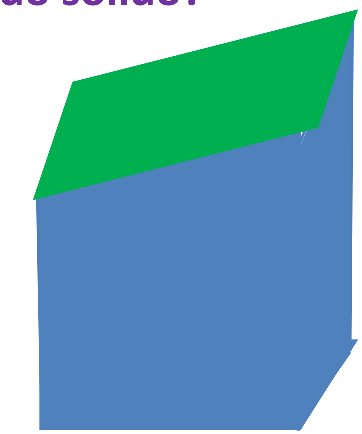
Não necessário mas dá jeito!!!

$$f : [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \geq 0, \quad f \text{ limitada.}$$

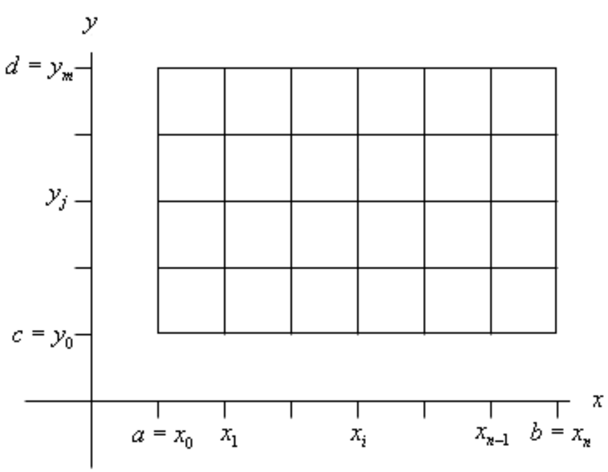
1. Desenhar o gráfico de f no rectângulo

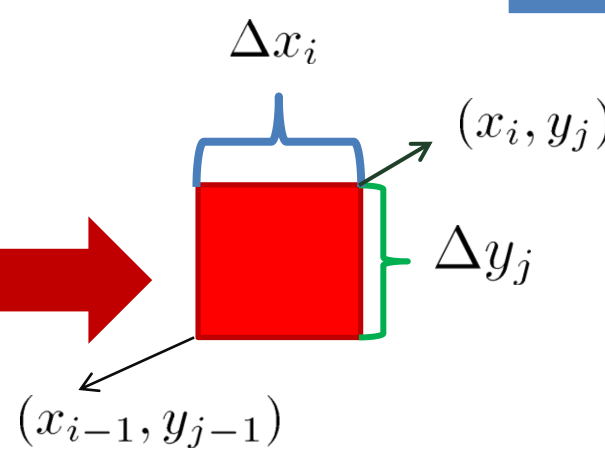


Qual o volume do sólido?

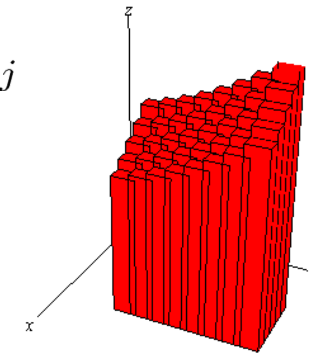


2. Divide [a,b] em n subintervalos e [c,d] em m subintervalos





- Considerar em cada um dos rectângulos $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j$



$$\begin{cases} m_{ij} = \inf\{f(x,y) : \ (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} \\ M_{ij} = \sup\{f(x,y) : \ (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} \end{cases}$$

- Criar as

  - Somas superiores: $\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}\overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{\Delta x_i}\overbrace{(y_j - y_{j-1})}^{\Delta y_i}$
  - Somas inferiores: $\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Partição de [a,b]x[c,d] $\rightarrow$ $\mathcal{P} = \{(x_0, y_0), (x_0, y_1), \ldots, (x_0, y_m), \ldots, (x_n, y_m)\}$

$$\boxed{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P})}$$

Porquê?

➢ Definir $S=[a,b]\times[c,d]$ e $\begin{cases} U=\{\mathcal{U}(f,\mathcal{P}):\ \mathcal{P} \text{ partição de } S\} \\ L=\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}):\ \mathcal{P} \text{ partição de } S\} \end{cases}$

E definir agora

$$\overline{\int_S} f = \inf\ U, \qquad \underline{\int_S} f = \sup\ L$$

$$\overline{\int_S} f \geq \underline{\int_S} f$$

POIS!!!

E agora...

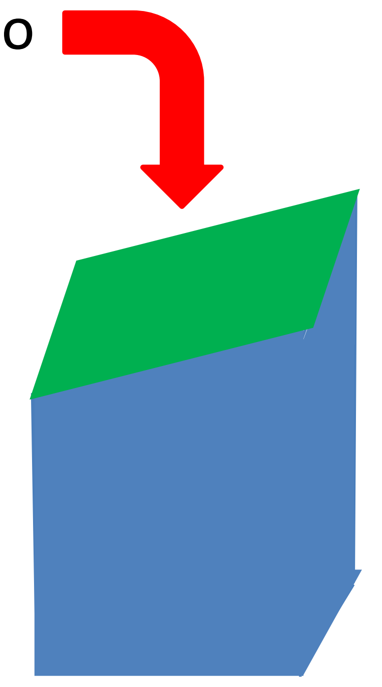
Definição

Se $$\overline{\int_S} f = \underline{\int_S} f,$$

então f é integrável e o integral $\int\int_S f(x,y)dxdy$ é esse seu valor.

Se a função f é integrável, então o volume do sólido

é dado pelo integral $$V = \int\int_S f(x,y)\overbrace{dxdy}^{dA}$$



Aqui é essencial o facto de f(x,y)>=0

Se f(x,y)=1 em S, então

$$\int\int_S 1dxdy = \text{Área de } S$$

Mas… e se….?????????????

Se f é integrável em S,

o seu integral escreve-se

$$\boxed{\int_S f = \int\int_S f(x,y)\,dA = \int\int_S f(x,y)\,dx\,dy}$$

Mas se...

f não for necessariamente não negativa?

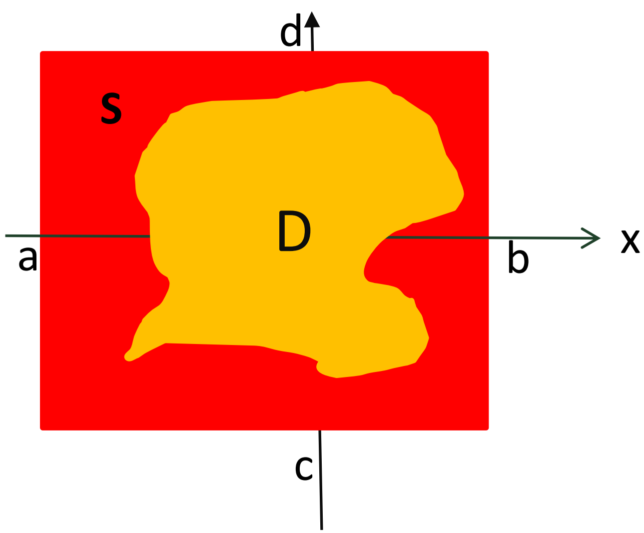
Toda esta construção é ainda ser utilizada. Nada muda!!!

A definição de integral é a mesma mas

O INTEGRAL JÁ NÃO É UM VOLUME.

NOTE BEM!!!

E se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ D é limitado mas não é um rectângulo?



Arranjamos um rectângulo [a,b]x[c,d] que contém D e definimos uma nova função:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) \notin D \end{cases}$$

Temos então

$$\int\int_D g(x,y)dxdy = \int\int_S f(x,y)dxdy$$

Teoremas

Já cá faltavam!!!

- Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D limitado e f contínua, então f é **integrável em** D.

- Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D limitado e f tem número finito de descontinuidades, então f é **integrável em** D.

Faz, faz!!!

Teorema de Fubini

Se f é contínua em $S = [a,b] \times [c,d]$, então

$$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$

Como calcular o integral !!!

$$\int_a^b \boxed{\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]} dx = \int_a^b \boxed{\left[\int_c^d f^x(y)dy\right]} dx = \int_a^b g(x)\, dx$$

Considero x fixo.

$$f^x(y) = f(x,y)$$

Resolvo integral simples em ordem a y.
O valor desse integral depende de x: é g(x).

Tenho que resolver integral simples em ordem a x.

Lembrar que

$$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f^x(y)dx\right] dy$$

Exemplo

- $f(x,y) = x^3y^2, \quad S = [0,1]\times[1,2]$

$$\int\int_S x^3y^2 \; dxdy = \int_1^2 \left[\int_0^1 x^3y^2dx\right] dy$$

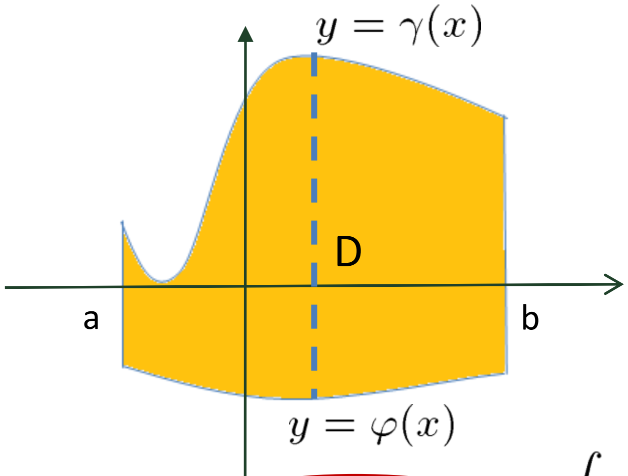
$$= \int_1^2 \left[\frac{x^4}{4}\; y^2\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_1^2 \frac{y^2}{4}\; dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{12}\right]_{y=1}^{y=2} = \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

Fazer

Calcular agora

$$\int_0^1\int_1^2 x^3y^2dydx$$



$$D = \{(x,y): \; a \le x \le b, \; \varphi(x) \le y \le \gamma(x)\}$$

f contínua e limitada no interior de D

$$\text{Como calcular } \int\int_D f(x,y)dxdy \text{ ?}$$

Para x=const., y varia entre $\varphi(x)$ e $\gamma(x)$.

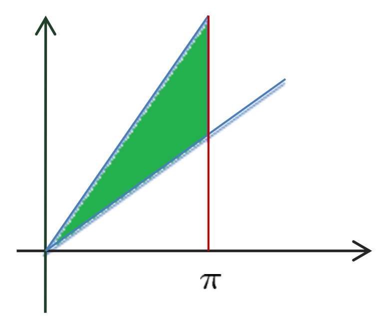
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \boxed{\int_{\varphi(x)}^{\gamma(x)} f(x,y)dy}\, dx$$

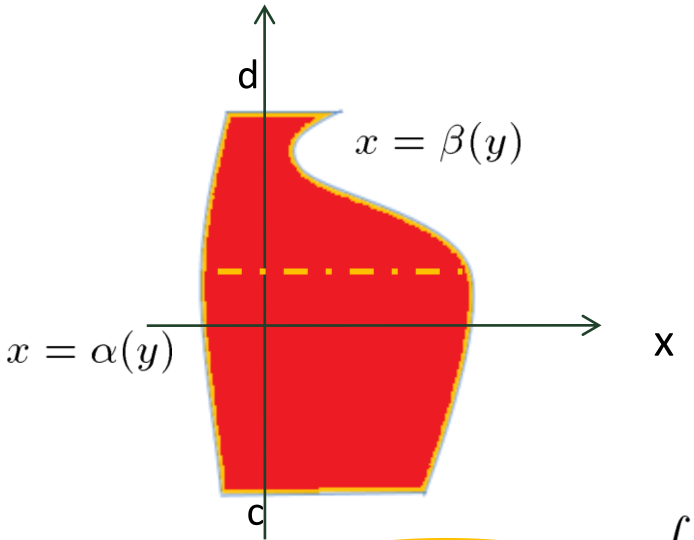
Após integrar, é uma função de **x**.

Exemplo: $f(x,y) = \sin(x+2y), \; D = \{(x,y): \; x \in [0,\pi], \; x \le y \le 2x\}$

$$\int_0^\pi \int_x^{2x} 2\sin(x+2y)dy\; dx$$

$$= \int_0^\pi [-\cos(x+2y)]_{y=x}^{y=2x} \; dx = \int_0^\pi (\cos(3x) - \cos(5x))dx = \ldots$$





$$D = \{(x,y) :\ c \leq y \leq d,\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$

f contínua e limitada no interior de D

$$\text{Como calcular } \int\int_D f(x,y)dxdy\ ?$$

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \boxed{\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx}\ dy$$

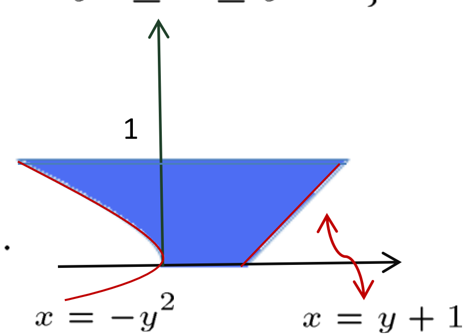
Após integrar,
é uma função de **y**.

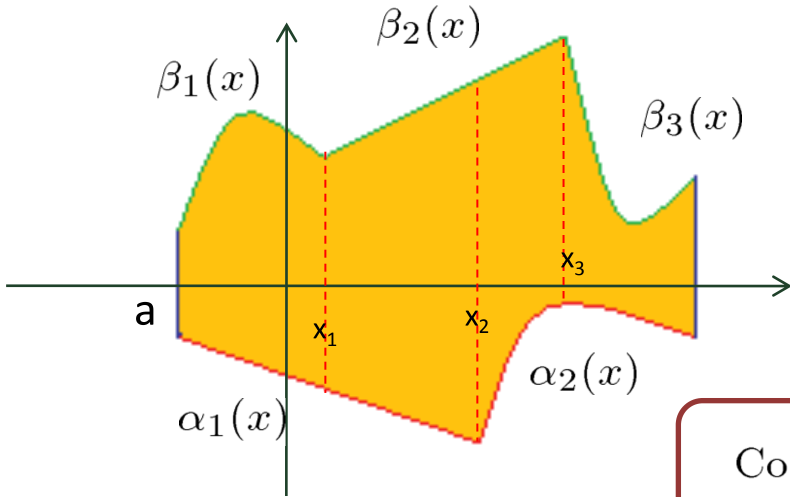
Para y=const., y varia entre $\varphi(x)$ e $\gamma(x)$.

Exemplo: $f(x,y) = 4xy,\ D = \{(x,y) :\ y \in [0,1],\ -y^2 \leq x \leq y+1\}$

$$\int_0^1 \int_{-y^2}^{y+1} 4xydx\ dy$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2y\right]_{x=-y^2}^{x=y+1} dx = \int_0^{\pi} 2\left(y(y+1)^2 - y^5\right)dx = \ldots$$





Seja D como ilustrado.

Como calcular $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$?

$$\int\int_D f(x,y)dxdy =$$

$$\int_a^{x_1}\left[\int_{\alpha_1(x)}^{\beta_1(x)} f(x,y)dy\right]dx + \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{\alpha_1(x)}^{\beta_2(x)} f(x,y)dy\right]dx +$$

$$+\int_{x_2}^{x_3}\left[\int_{\alpha_2(x)}^{\beta_2(x)} f(x,y)dy\right]dx + \int_{x_3}^{b}\left[\int_{\alpha_2(x)}^{\beta_3(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

AM2

Aquela coisa chata da mudança de variável vai ao brejo!!!

Querias!!! Vamos ver como se faz mudança de variável com integrais duplos.

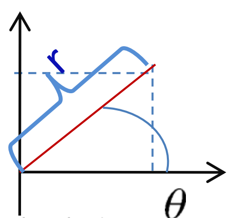
Lembrando mudança de variável em integrais simples...

$$\int_a^b f(x)dx \underset{(x=g(u))}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(u))g'(u)du$$

Exemplo: Calcular a área de $D = \{(x,y) : x, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$: $\int\int_D dxdy.$

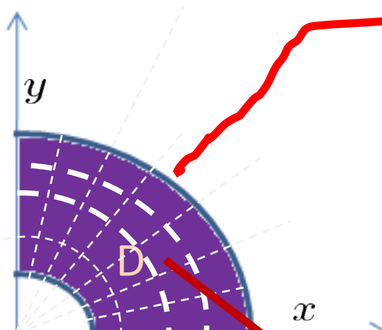
$r \geq 0, \;\; \theta \in [0, 2\pi[.$

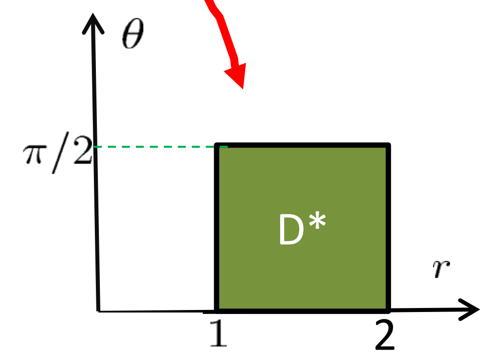
$x = r\cos(\theta),$
$y = r\sin(\theta).$



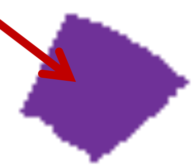
$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x).$

$D^* = \{r, \theta) : \;\; 1 \leq r \leq 2, \;\; \theta \in [0, \pi/2]\}$.





$$\boxed{\int\int_D dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 rdrd\theta.}$$

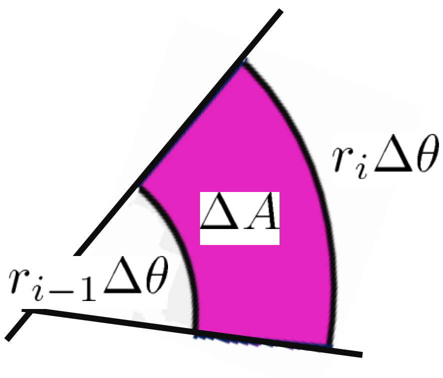


$rdrd\theta$

Analisando:

- temos a região $D^* = \{r,\theta) :\ 1 \leq r \leq 2,\ \theta \in [0, \pi/2]\}$.

- construímos uma grelha de subrectângulos dividindo em subintervalos [1,2] e $[0, \pi/2]$



$$\Delta r = r_i - r_{i-1},\ \Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}.$$

Consideramos $r_j \approx r_{j-1} = r$ e ΔA um rect. tal que

$$\boxed{\Delta A \approx r\Delta\theta\Delta r.}$$

Assumindo a grelha muito fina:

$$dA \approx \Delta A, \quad d\theta \approx \Delta\theta, \quad dr \approx \Delta r,$$

temos $\boxed{dA \approx r dr d\theta.}$

Temos, no exemplo,

$$\int\int_D dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r dr d\theta.$$

Problema: Calcular $\displaystyle\int\int_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$ onde D é um círculo de raio 2.

D em coordenadas polares é um rectângulo definido por: $\theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2].$

Em coordenadas polares $f(x, y) = e^{x^2+y^2} = e^{r^2}.$

Assim

$$\int\int_D e^{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 re^{r^2}\,dr\right]d\theta$$

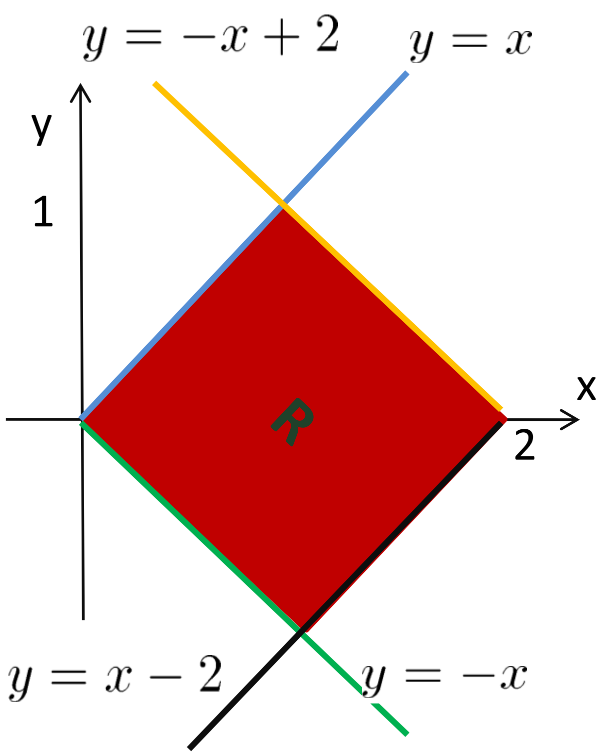
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{e^{r^2}}{2}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}\right]d\theta$$

$$= 2\pi\left[\frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}\right]$$

Outro problema: Calcular o volume do sólido dentro do parab. $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 16$.

E HÁ MAIS
SOBRE
MUDANÇA DE VARIÁVEL…

Exemplo: Calcular $\displaystyle\int\int_R (x+y)\,dA$ onde R como na fig.

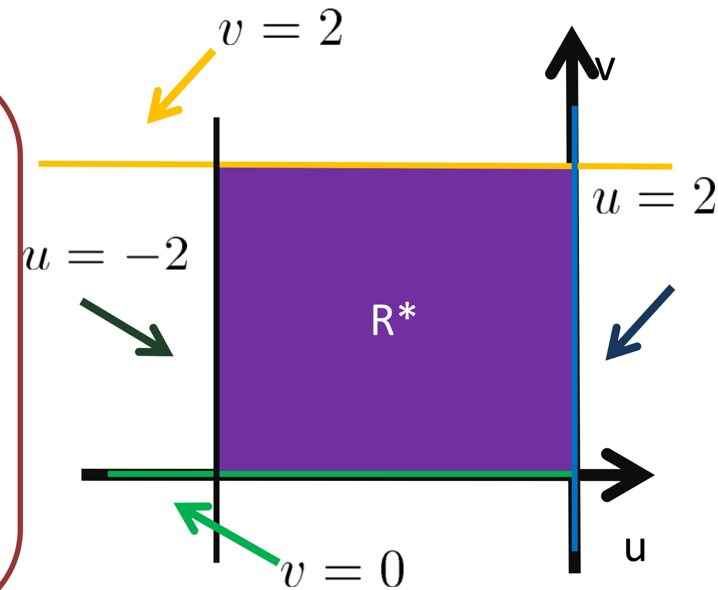


Mudança de Variável

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = (v-u)/2 \\ y = (v+u)/2 \end{cases}$$



Como exprimir $\displaystyle\int\int_R (x+y)\,dx\,dy$ nas coordenadas u, v?

Teorema da mudança de variável

Suponhamos que queremos integrar f(x,y) na região R

usando as coordenadas u e v.

Devia estar F(R*) = R

e também devia estar

F: R* ——> R

Considerando a transformação

$$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v)), \quad F(R) = R^*,$$
$$F : R \to R^* \text{classe } C^1 \text{ e bijectiva,}$$

obtemos

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int\int_{R^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv,$$

$$\text{onde } \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = |\det F(u,v)|.$$

Devia estar
Idet JF(u,v)I

Voltando ao Exemplo:

Calcular $\int\int_R (x+y)dA.$

Temos $F(u,v) = ((v-u)/2, ((v+u)/2),\ R^* = \{(u,v) : u \in [-2,0], v \in= [0,2]\}$

$$F(u,v) = ((v-u)/2, (v+u)/2), \quad \det JF(u,v) = \det \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = -1/2,$$

$$\boxed{|\det JF(u,v)| = 1/2}$$

Como $f(x,y) = x+y,$ temos $f(x(u,v), y(u,v)) = v$ e

$$\boxed{\int\int_R (x+y)dxdy = \int_{-2}^{0}\left[\int_0^2 \frac{1}{2} v dv\right] du.}$$

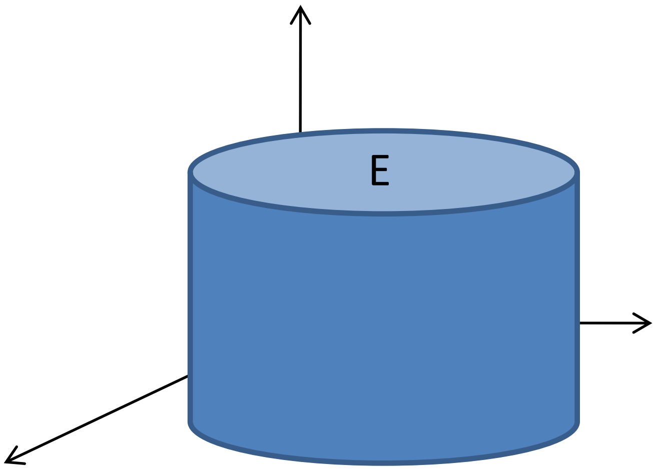
Integrais triplos

- Definição de integral triplo

    generalização definição integral simples e duplo

- Integrais triplos num paralelipípedo: integrais iterados
- Integrais triplos em regiões mais gerais
- Integrais triplos: coordenadas cilíndricas
- Integrais triplos: coordenadas esféricas
- Transformações genéricas para calcular integrais triplos

Integral triplo – interpretação geométrica



E, região limitada em $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \text{ volume de } E$$

$$\int_a^b 1\,dx = \text{ comprimento de } [a,b]$$

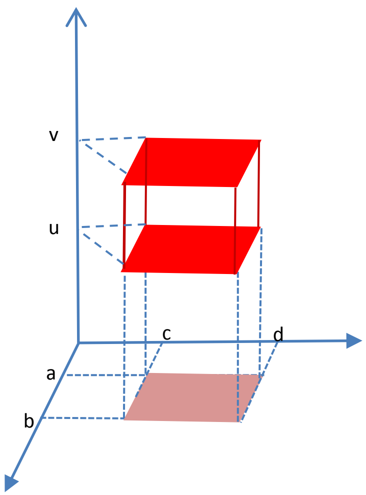
$$\iint_D 1\,dxdy = \text{ área de } D$$

$$\iiint_E 1\,dxdy = \text{ volume de } E$$

Integral triplo – cálculo

$$f : B = [a,b] \times [c,d] \times [u,v] \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f \text{ limitada.}$$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ u \leq z \leq v\}$$



$$\int\!\!\int\!\!\int_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Como calcular?

Teorema de Fubini

Se f é contínua em $B = [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$, então

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \iiint_B f(x,y,z) dx dy dz =$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d \underbrace{\left(\int_u^v f(x,y,z)\, dz \right)} dy \right] dx$$

considerar x e y fixos

$$= \int_c^d \left[\int_a^b \underbrace{\left(\int_u^v f(x,y,z)\, dz \right)} dx \right] dy$$

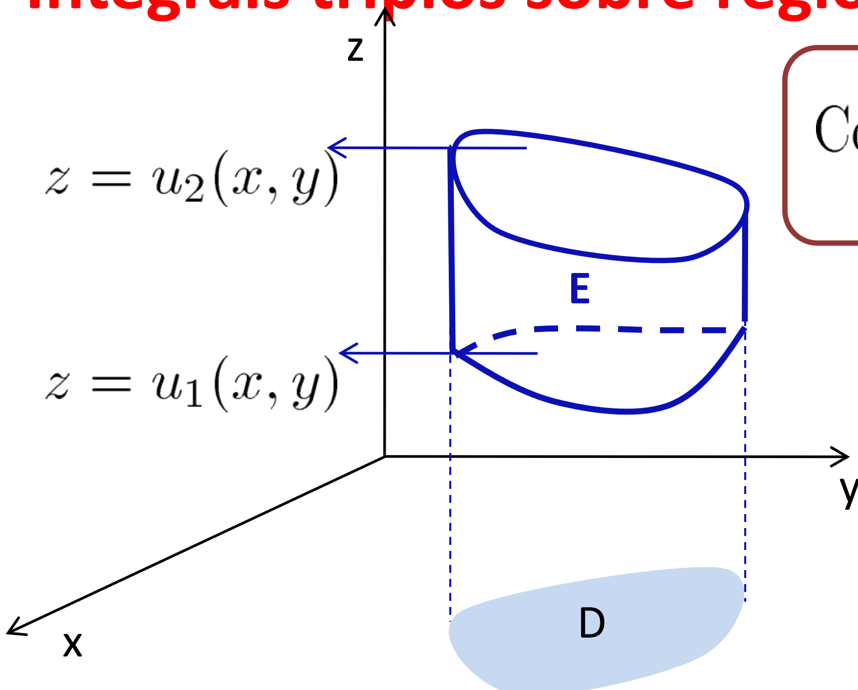
$$= \int_u^v \left[\int_a^b \underbrace{\left(\int_u^v f(x,y,z)\, dy \right)} dx \right] dz$$

considerar x e z fixos

$$\vdots$$

Exemplo: • $f(x,y,z) = x^3 y^2 + z, \quad B = [0,1] \times [1,2] \times [0,2]$

Integrais triplos sobre regiões mais gerais – cálculo



Como calcular $\displaystyle\iiint_E f(x, y, z)\, dxdydz$?

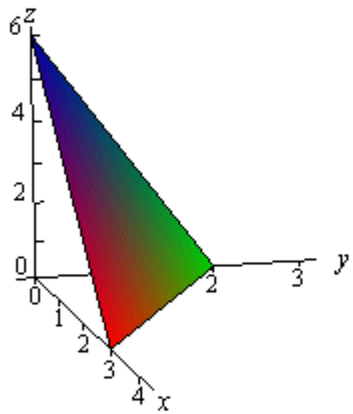
Para (x,y) constante, z varia entre $\mathbf{u_1(x,y)}$ e $\mathbf{u_2(x,y)}$.

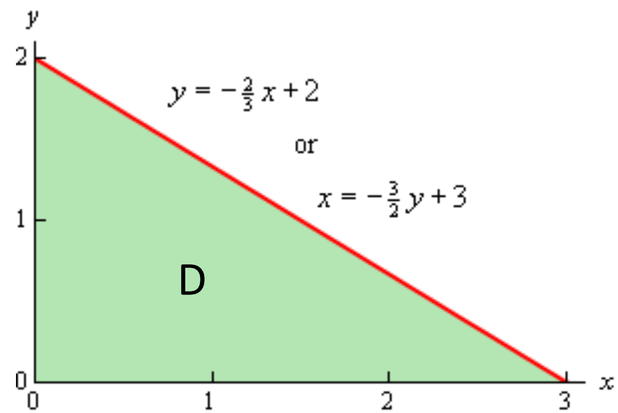
$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D, \ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\right\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dxdydz = \iint_D \boxed{\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz}\, dxdy$$

Após integrar, é uma função de **x e y**.

Exemplo: determinar $\displaystyle\iiint_E 2x\,dV$ onde E é a região do 1º octante que está abaixo do plano 2x + 3y + z = 6





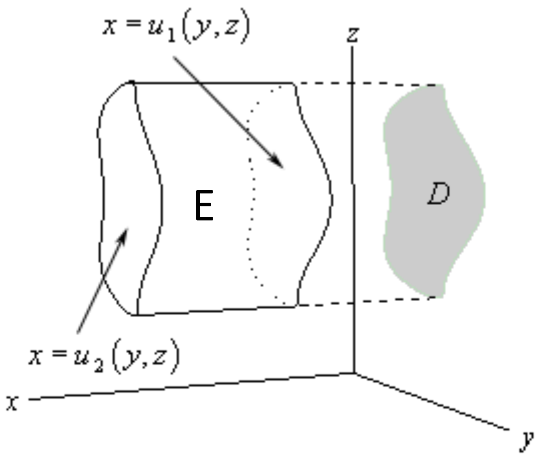
$$(x,y) \in D$$
$$0 \le z \le 6 - 2x - 3y$$

$$0 \le x \le 3 \qquad\qquad 0 \le y \le 2$$
$$0 \le y \le -\tfrac{2}{3}x + 2 \quad \text{ou} \quad 0 \le x \le -\tfrac{3}{2}y + 3$$

$$\iiint_E 2x\,dV = \iint_D \left(\int_0^{6-2x-3y} 2x\,dz\right) dx dy = \iint_D 2x(6-2x-3y)\,dx dy$$
$$= \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} (12x - 4x^2 - 6xy)\,dy\,dx = \int_0^3 \left(\frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 12x\right) dx = 9$$

Integrais triplos sobre regiões mais gerais – proj. no plano yz

Como calcular $\displaystyle\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz$?



Para (y,z) constante, x varia entre $\mathbf{u_1(y,z)}$ e $\mathbf{u_2(y,z)}$.

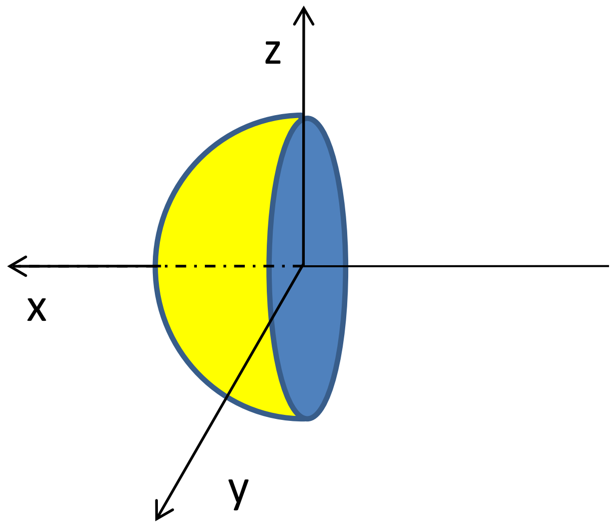
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (y,z) \in D, \ u_1(y,z) \leq x \leq u_2(y,z)\}$$

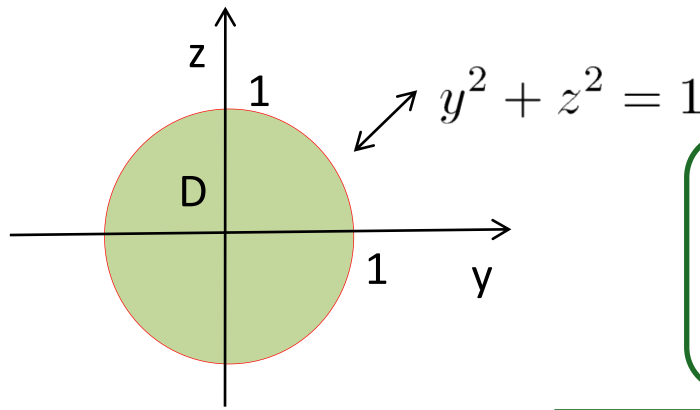
$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \boxed{\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)dx}\, dydz$$

Após integrar,
é uma função de **y e z**.

Exemplo: determinar $\int\int\int_E 2x\,dV$ onde E é o sólido definido por

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x \geq 0$.





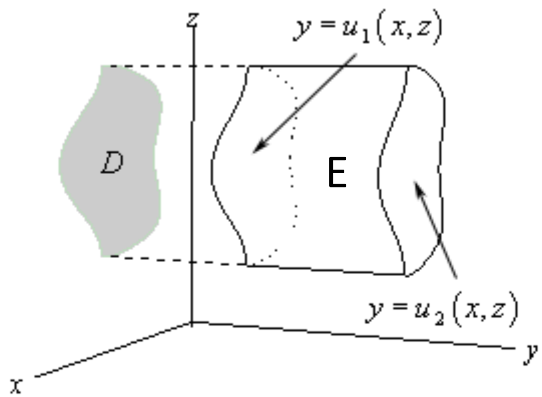
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq r \leq 1$$

coordenadas polares para a projecção.

$$\int\int\int_E 2x\,dV = \int\int_D \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} 2x\,dx\right) dydz = \int\int_D 1 - y^2 - z^2\,dydz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^3)\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Integrais triplos sobre regiões mais gerais - proj. no plano xz



Como calcular $\displaystyle\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz$?

Para (x,z) constante, y varia entre $\mathbf{u_1(x,z)}$ e $\mathbf{u_2(x,z)}$.

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,z) \in D, \ u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \boxed{\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)dy}\, dxdz$$

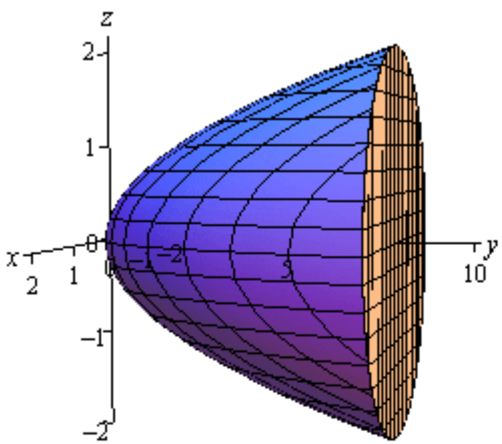
Após integrar,
é uma função de **x e z**.

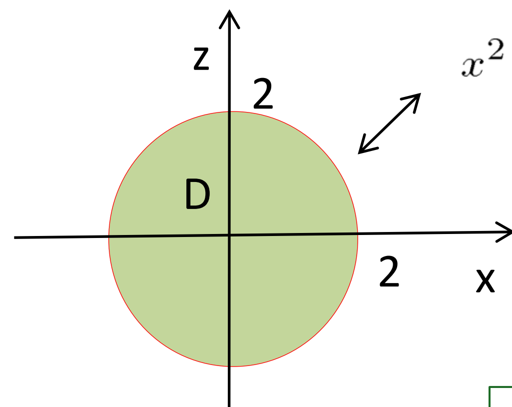
Exemplo: determinar $\iiint_E \sqrt{3x^2+3z^2}\, dV$ onde E é o sólido limitado por

$y = 2x^2 + 2z^2$ e pelo plano y=8.

$$y = 2x^2 + 2z^2 \;\wedge\; y = 8$$

$$x^2 + z^2 = 4$$





$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le r \le 2$$

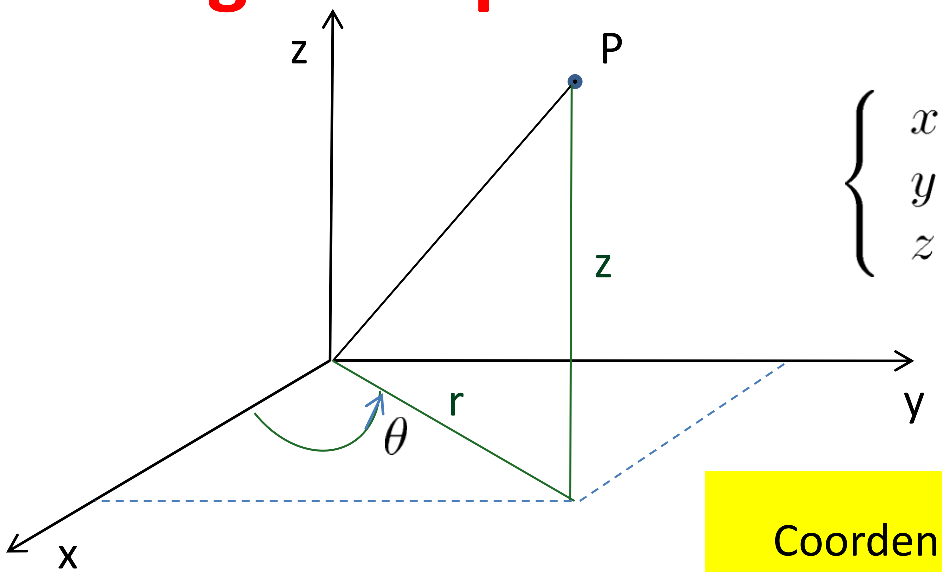
coordenadas polares para a projecção

$$\iiint_E \sqrt{3x^2+3z^2}\, dV =$$

$$= \iint_D \left(\int_{2x^2+2z^2}^{8} \sqrt{3x^2+3z^2}\, dy \right) dx\,dz = \iint_D \sqrt{3}\sqrt{x^2+z^2}(8-2x^2-2z^2)\, dx\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{3}r(8-2r^2)\, r\, dr\, d\theta = \sqrt{3}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (8r^2-2r^4)\, dr\, d\theta = \frac{256\sqrt{3}\pi}{15}$$

Integrais triplos – coordenadas cilíndricas



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

Coordenadas cilíndricas:
extensão das coordenadas polares a 3 dimensões

lugar geométrico dos pontos com $r = \text{const.}$ $\Rightarrow$ cilindro

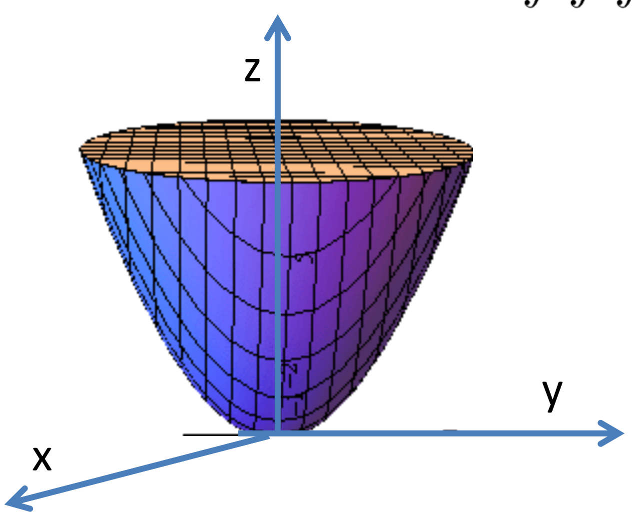
lugar geométrico dos pontos com $\theta = \text{const.}$ $\Rightarrow$ semiplano vertical

lugar geométrico dos pontos com $z = \text{const.}$ $\Rightarrow$ plano horizontal

Mudança para coordenadas cilíndricas

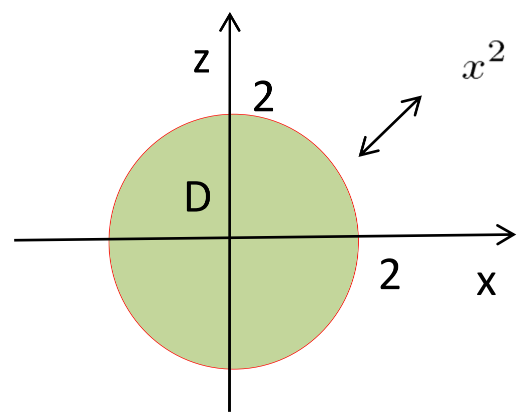
$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\,dz dy dx = \iiint_{E^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta}$$

Exemplo: determinar $\int\int\int_E 1\, dV$ onde E está limitado por $z = x^2 + y^2$ e z = 4.



$$\boxed{z = x^2 + y^2 \ \wedge\ z = 4}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

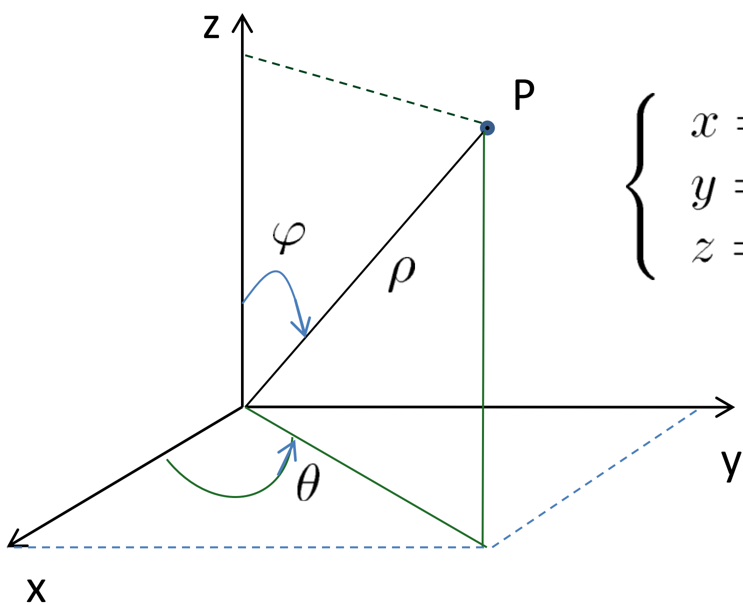


$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq r \leq 2$$

$$\int\int\int_E 1\, dV = \int\int_D \left(\int_{x^2+y^2}^{4} 1\, dz\right) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 4r - r^3\, dr\, d\theta \ = \ 8\pi$$

Integrais triplos – coordenadas esféricas



$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \\ \varphi = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi]$$

lugar geométrico dos pontos com $\rho = \text{const.}$ $\longrightarrow$ esfera

lugar geométrico dos pontos com $\theta = \text{const.}$ $\longrightarrow$ semiplano vertical

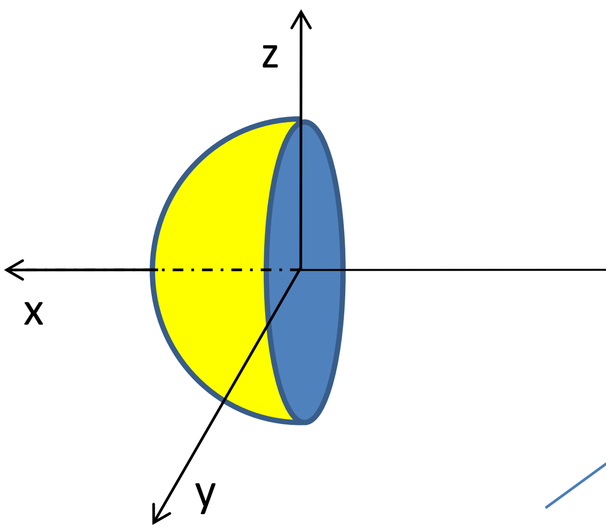
lugar geométrico dos pontos com $\varphi = \text{const.}$ $\longrightarrow$ cone

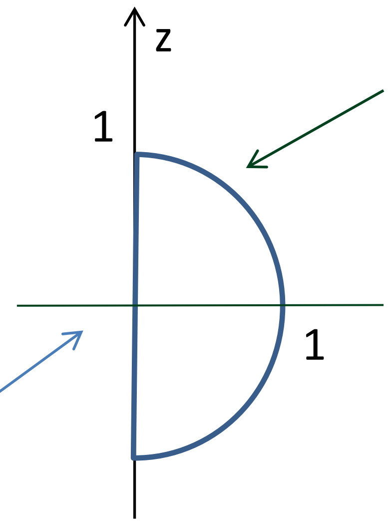
Integrais triplos – coordenadas esféricas

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \iiint_{E^*} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

Exemplo: determinar $\int\int\int_E 2x\,dV$ onde E é o sólido definido por

$x^2+y^2+z^2=1$ e $x \geq 0$.





“fatia” correspondente a θ constante

Resultado já obtido. Verifique!

$$\int\int\int_E 2x\,dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \int_0^{1} (2\rho\sin\varphi\cos\theta)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi \right) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Exercício:

1) Considere o integral $\iiint_E f(x,y,z)\,dV$ onde E é o sólido limitado pela metade superior da esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ e pelo parabolóide $z=x^2+y^2$. Defina os limites de integração para coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

2) Transforme o integral $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,dz\,dx\,dy$ num integral em coordenadas cilíndricas

Integrais triplos – mudança de variável geral

$$F(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)), \quad F(E^*) = E,$$
$$F : E^* \to E \text{ classe } C^1 \text{ e bijectiva,}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint_{E^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

$$\text{onde } \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| = |\det F(u,v,w)|.$$