Introdução a Grafos

Divisão do arquivo

- 1ª parte:
  - Motivação
  - Definição: Ordem, Multigrafo, Grafo Simples, Grafo Trivial, Grafo Vazio, Laço, Vértices Adjacentes, Arestas Adjacentes, Grafo Completo.
  - Exercícios

Divisão do arquivo

- 2ª parte
  - Aplicações
  - Grafo Orientado
  - Grau, Grau de Saída, Grau de Entrada, Grafo Regular
  - Exercícios

Divisão do arquivo

- 3ª parte
  - Grafo Valorado
  - Caminho e Caminho Simples
  - Circuito, Ciclo, Grafo Cíclico
  - Caminho e Grafo: Hamiltoniano e Euleriano.
  - Subgrafo
  - Grafo: Conexo e (Totalmente) Desconexo
  - Dígrafo Fortemente Conexo
  - Componente Conexa
  - Exercícios

Divisão do arquivo

- 4ª parte
  - Grafo Bipartido, Bipartido Completo
  - Complemento
  - Isomorfismo
  - Árvore, Árvore Enraizada, Floresta
  - Subgrafo, Subgrafo Gerador, Árvore Geradora, Sugrafo Induzido
  - Exercícios

Divisão do arquivo

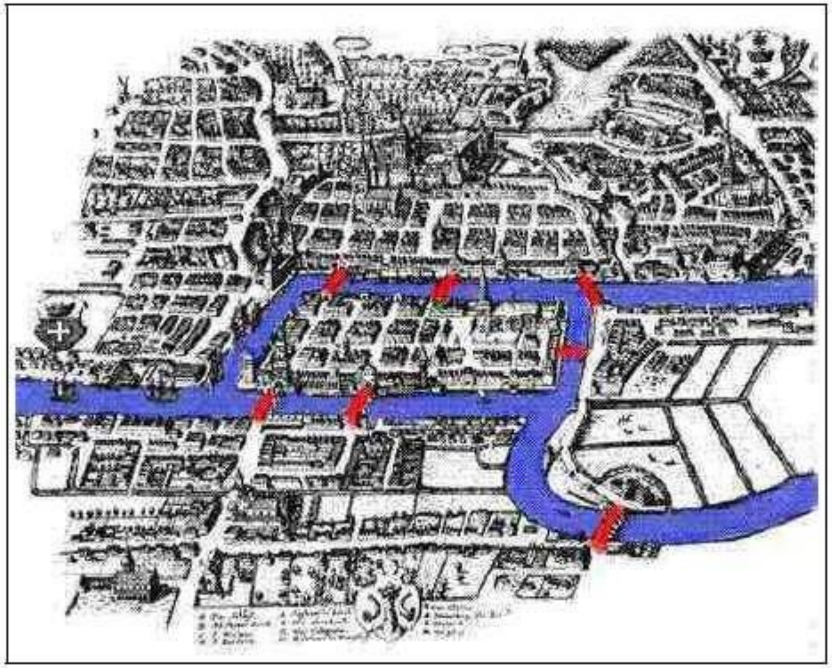
- 1ª parte:
  - Motivação
  - Definição: Ordem, Multigrafo, Grafo Simples, Grafo Trivial, Grafo Vazio, Laço, Vértices Adjacentes, Arestas Adjacentes, Grafo Completo.
  - Exercícios

Motivação

- Grafos: conceito introduzido por Euler, em 1736
  - Problema da Ponte de Könisberg
- Modelos matemáticos para resolver problemas práticos do dia a dia...
- Muito usados para modelar problemas em computação -> ênfase em aspectos computacionais

Exercício de Fixação

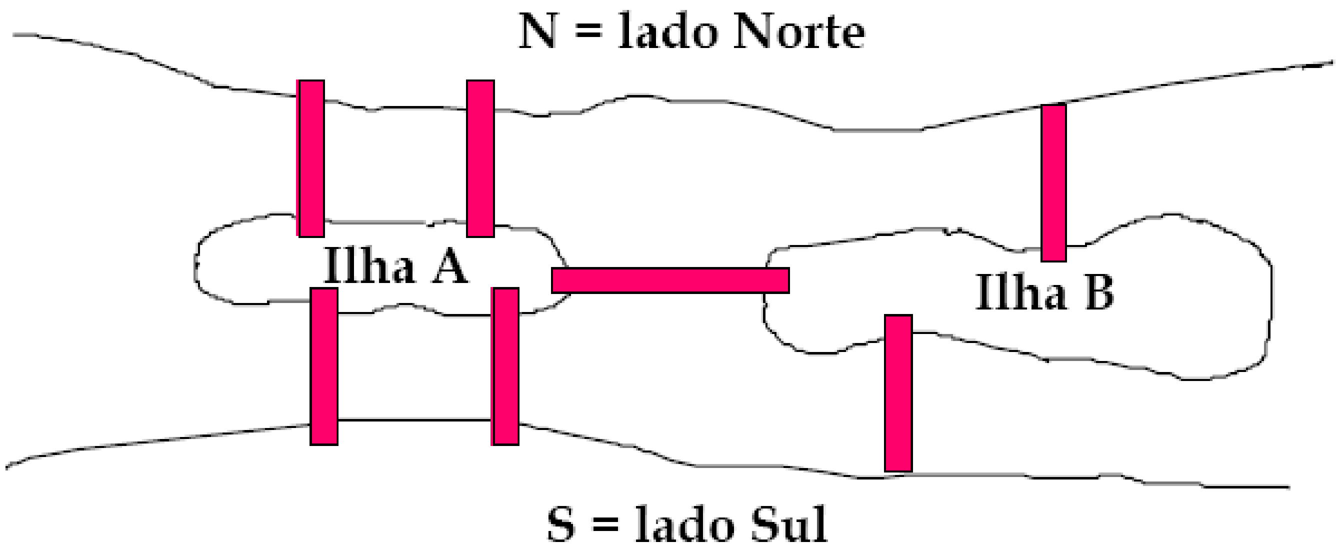
No século XVIII, na Prússia, havia uma controvérsia entre os moradores de Königsberg que chegou aos ouvidos do matemático Leonhard Euler.
Euler descreveu a controvérsia da seguinte forma:
“... Na cidade de Königsberg, na Prússia, há uma ilha chamada Kneiphhof, com os dois braços do rio Pregel fluindo em volta dela. Há 7 pontes – a, b, c, d, e, f e g – cruzando estes dois braços.
...A questão é se uma pessoa pode planejar uma caminhada de modo que ela cruze cada uma destas pontes uma única vez, e não mais que isso. . . ”



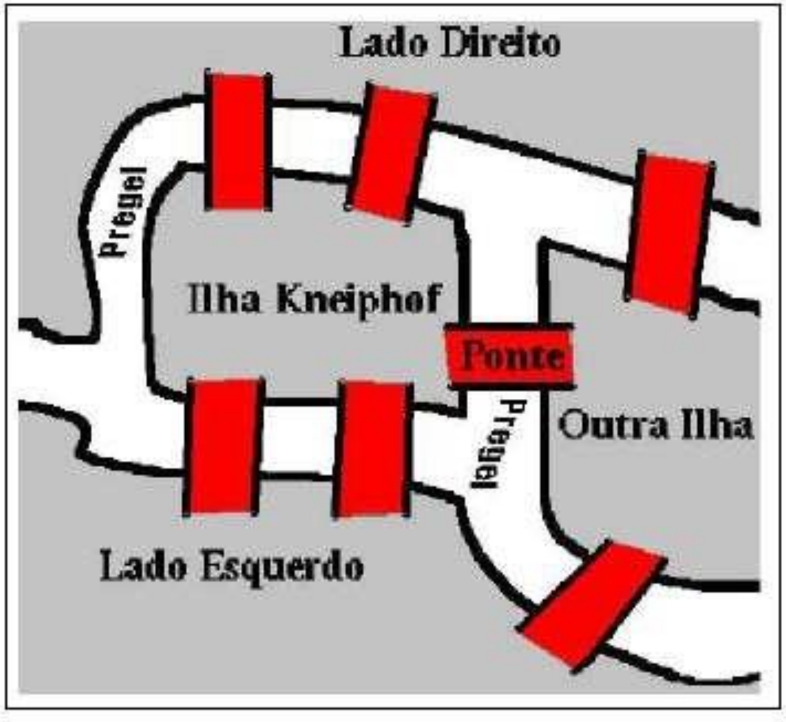
Como representar este problema?

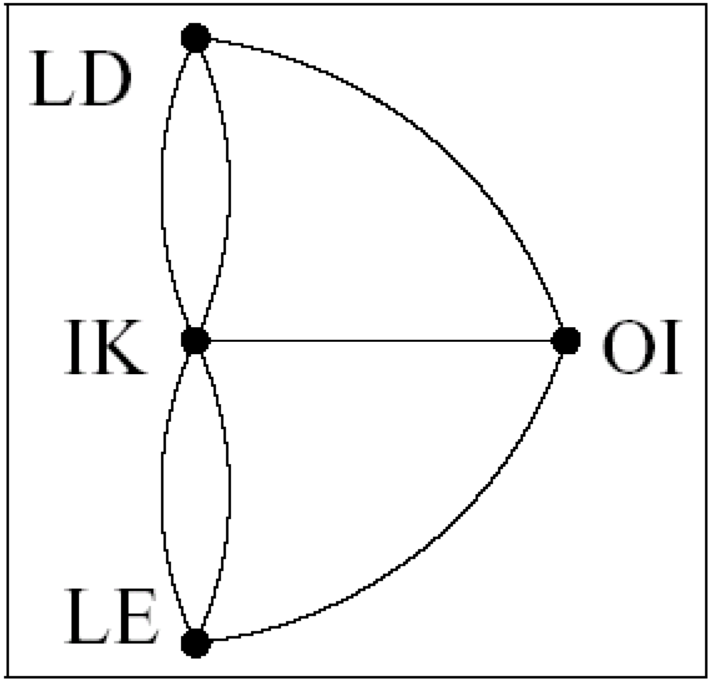
Um problema famoso

As 7 pontes de Konigsberg



Exercício de Fixação





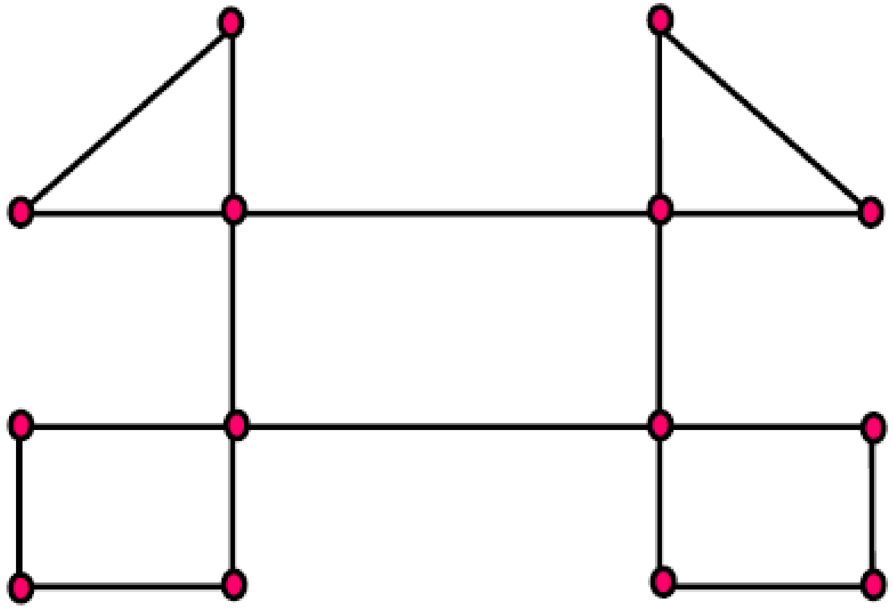
Por que não foi possível fazer tal trajeto?

Motivação

O problema do carteiro chinês...

- Não é exatamente um problema de Ciência da Computação...
- Mas a Teoria dos Grafos permite que ele seja resolvido automaticamente, usando o computador como ferramenta!
- Você acha que o problema tem solução?
- Se tem, qual seria uma ‘rota ideal’?

Problema do carteiro chinês

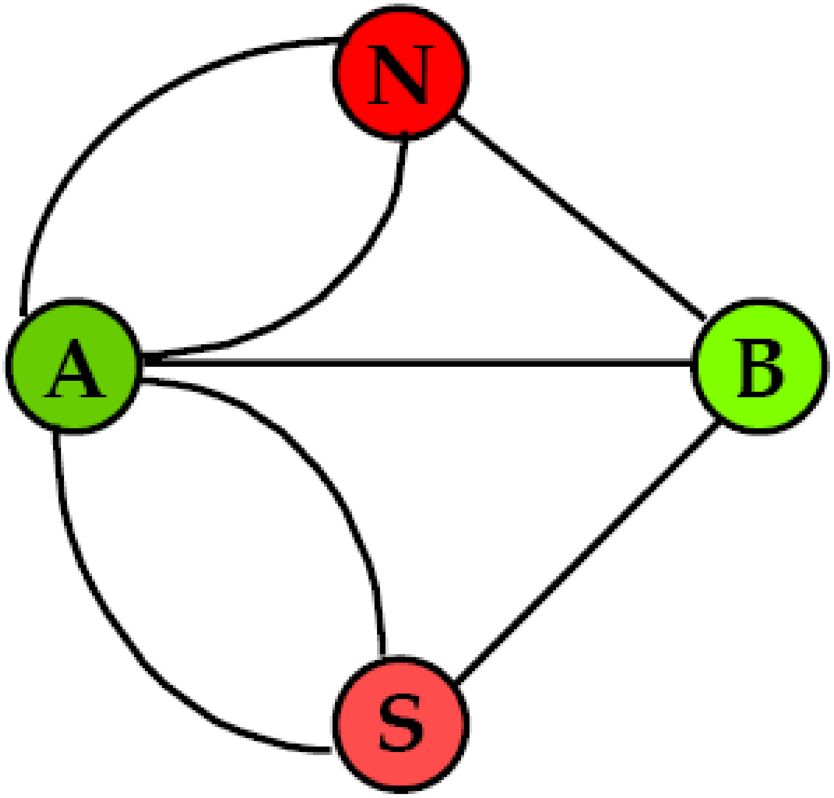


Um problema simples do carteiro chinês

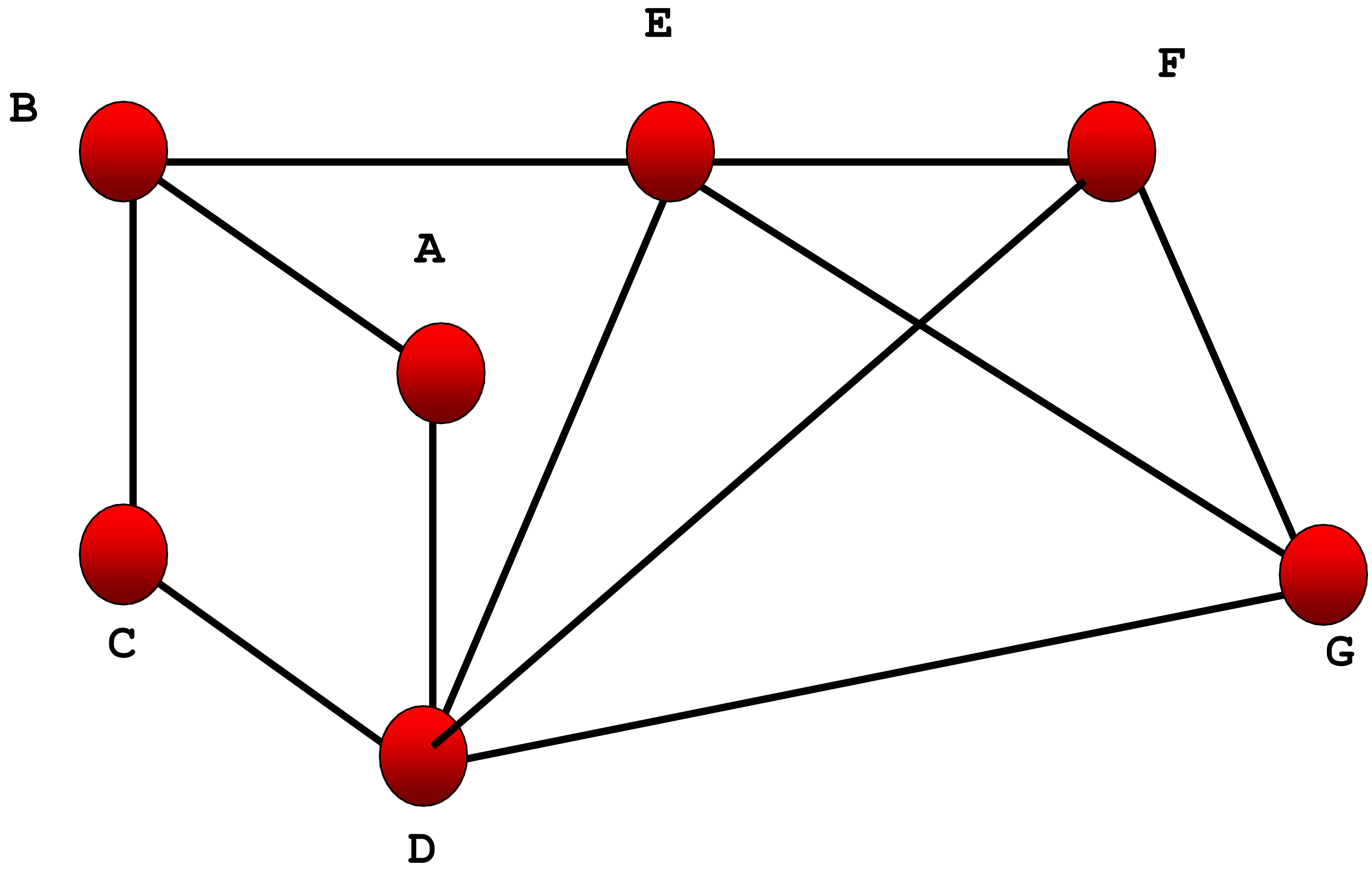
Exemplos de estruturas que podem ser representadas como grafos

- Circuitos elétricos
- Redes de distribuição
- Relações de parentesco entre pessoas
- Outras Redes Sociais
- Rede de estradas entre cidades/vôos
- Redes (físicas e lógicas) de computadores
- Páginas da Web

Exemplo



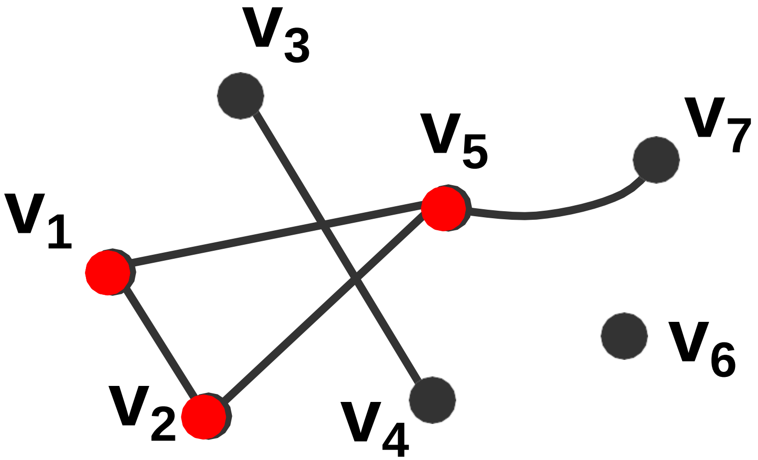
Exemplo



Definição

- Grafo é um modelo matemático que representa relações entre objetos. Um grafo $G = (V, E)$ consiste de um conjunto de <u>vértices</u> V, ligados por um conjunto de <u>arestas</u> ou <u>arcos</u> E.

Representação:



$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

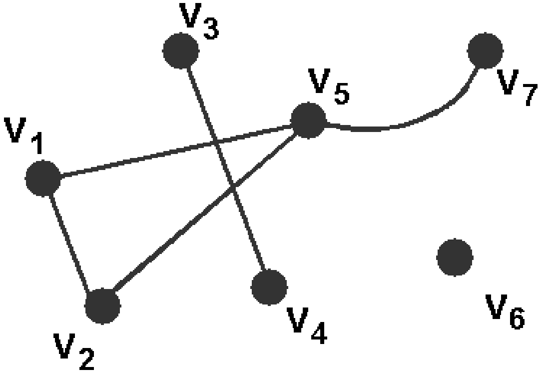
$E(G) = \{(v_1, v_2); (v_1, v_5); (v_2, v_5); (v_3, v_4); (v_5, v_7)\}$

Definição

- A ordem de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices $|V(G)|$, ou seja, pelo número de vértices de G.
- O número de arestas de um grafo é dado por $|E(G)|$. Assim, para o grafo do exemplo anterior:

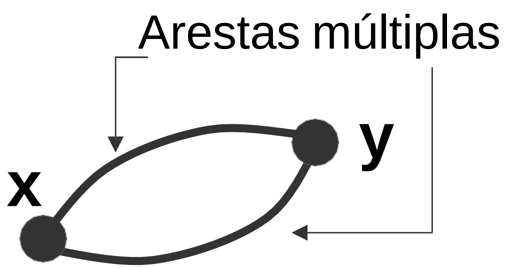
$$|V(G)| = 7$$

$$|E(G)| = 5$$



Multigrafo

- Quando um grafo possui mais de uma aresta interligando os mesmos dois vértices diz-se que este grafo possui arestas múltiplas (ou arestas paralelas). Ele é chamado de multigrafo ou grafo múltiplo. Por exemplo:



$V = \{x, y\}$

$E = \{(x, y); (y, x)\}$

$|V| = 2$ e $|E| = 2$

- Um grafo simples é um grafo que não possui arestas múltiplas.

Grafo Trivial e Grafo Vazio

- Um grafo é dito trivial se for de ordem 0 ou 1. Por Exemplo:

$$V = \{v_1\}$$

$$E = \varnothing$$

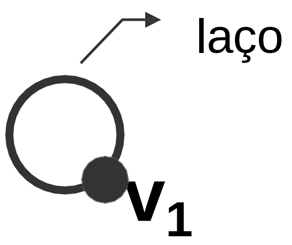
$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 0$$

- Um grafo vazio $G=(\varnothing, \varnothing)$ pode ser representado somente por $G = \varnothing$.

Laço

- Se houver uma aresta e do grafo G que possui o mesmo vértice como extremos, ou seja, e=(x,x), então é dito que este grafo possui um laço.

Exemplo:



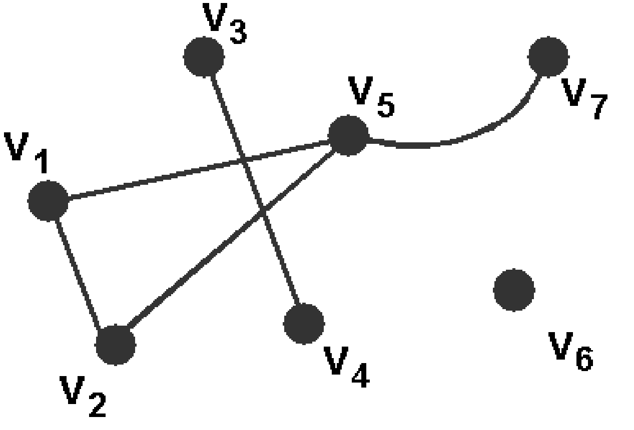
$$V = \{v_1\}$$

$$E = \{(v_1, v_1)\}$$

$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 1$$

Vértices Adjacentes

- Diz-se que os vértices x e y são adjacentes (ou vizinhos) quando estes forem os <u>extremos</u> de uma mesma aresta *e*=(x,y). Assim:



v_3 é adjacente a v_4

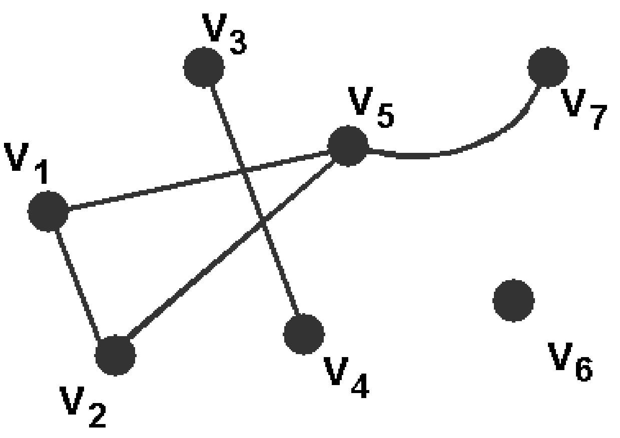
v_4 é adjacente a v_3

v_5 NÃO é adjacente a v_4

v_7 NÃO é adjacente a v_2

Arestas Adjacentes

- Diz-se que duas arestas são adjacentes (ou vizinhas) quando estas possuírem um mesmo vértice em comum.



Assim:

(v_1,v_2) é adjacente a (v_2,v_5)

(v_1,v_2) NÃO é adjacente a (v_3,v_4)

- A aresta e =(v_3,v_4) é dita incidente a v_3 e a v_4

Ou, duas arestas adjacentes são incidentes a um vértice comum.

Grafo Completo

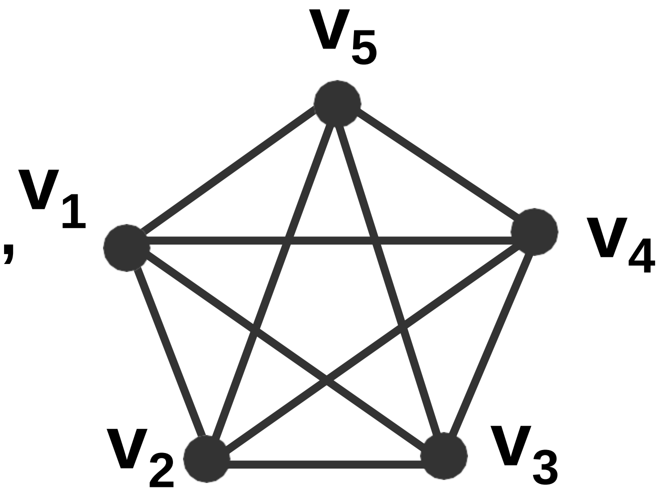
- Um grafo é completo se todos os seus vértices forem adjacentes. Um grafo <u>completo</u> K_n possui $n(n-1)/2$ arestas.

Exemplo:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

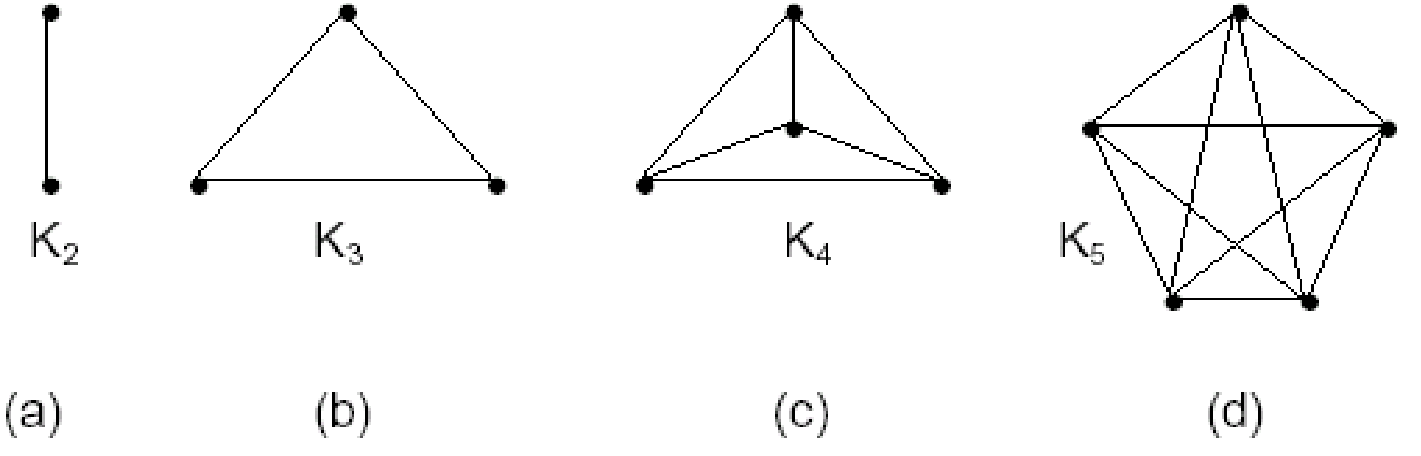
$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5),$
$(v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5),$
$(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$

$|V| = 5$ e $|E| = 5(5-1)/2 = 10$



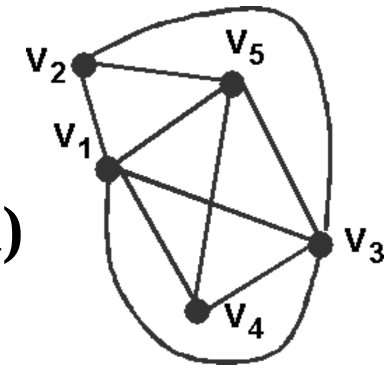
Grafo K_5

Grafos Completos

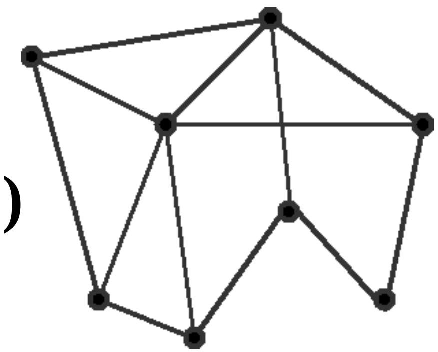


Exercícios de Fixação 1

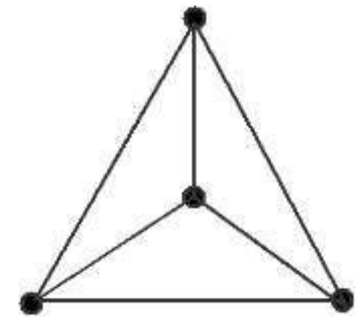
(a)



(b)



(c)

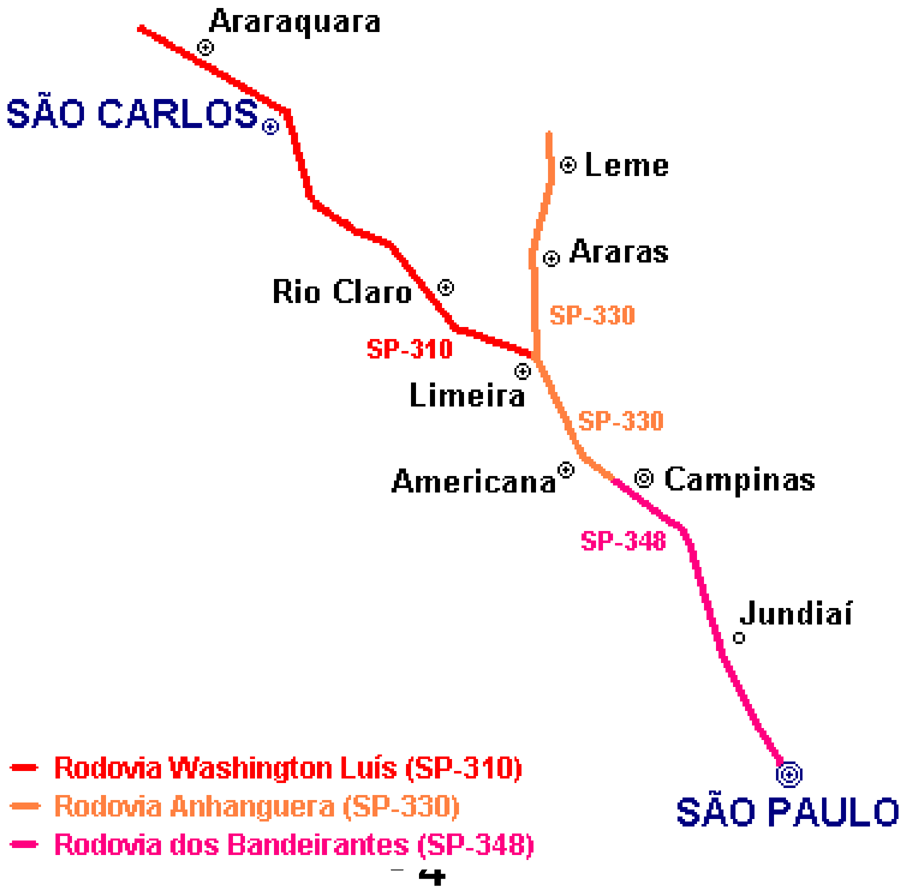


- Qual a ordem e o número de arestas de cada grafo?
- Quais dos grafos acima são completos?
- Quais dos grafos acima são simples?
- Escreva a representação V(G) e E(G) do grafo (a).
- No grafo (a), quais vértices são adjacentes a v_3? E quais arestas são adjacentes a (v_3,v_5)?

Divisão do arquivo

- 2ª parte
  - Aplicações
  - Grafo Orientado
  - Grau, Grau de Saída, Grau de Entrada, Grafo Regular
  - Exercícios

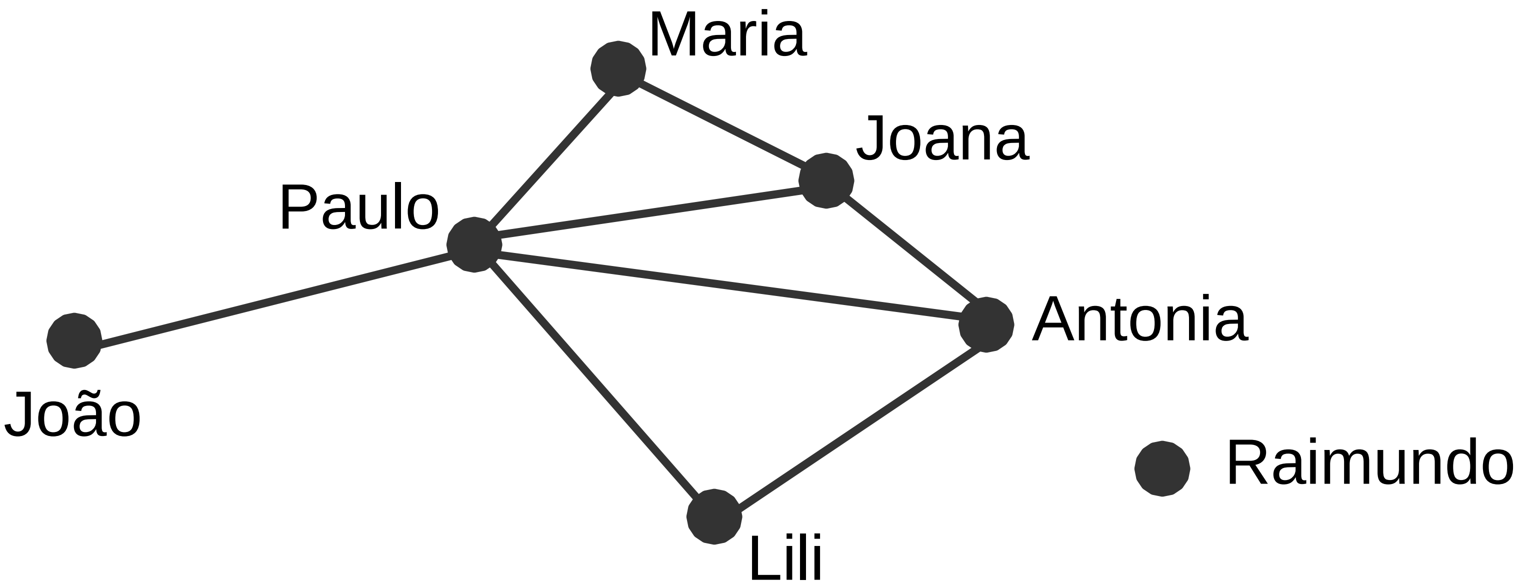
Aplicações



Araraquara
SÃO CARLOS
Leme
Araras
Rio Claro
SP-330
SP-310
Limeira
SP-330
Americana
Campinas
SP-348
Jundiaí
SÃO PAULO
Rodovia Washington Luís (SP-310)
Rodovia Anhanguera (SP-330)
Rodovia dos Bandeirantes (SP-348)

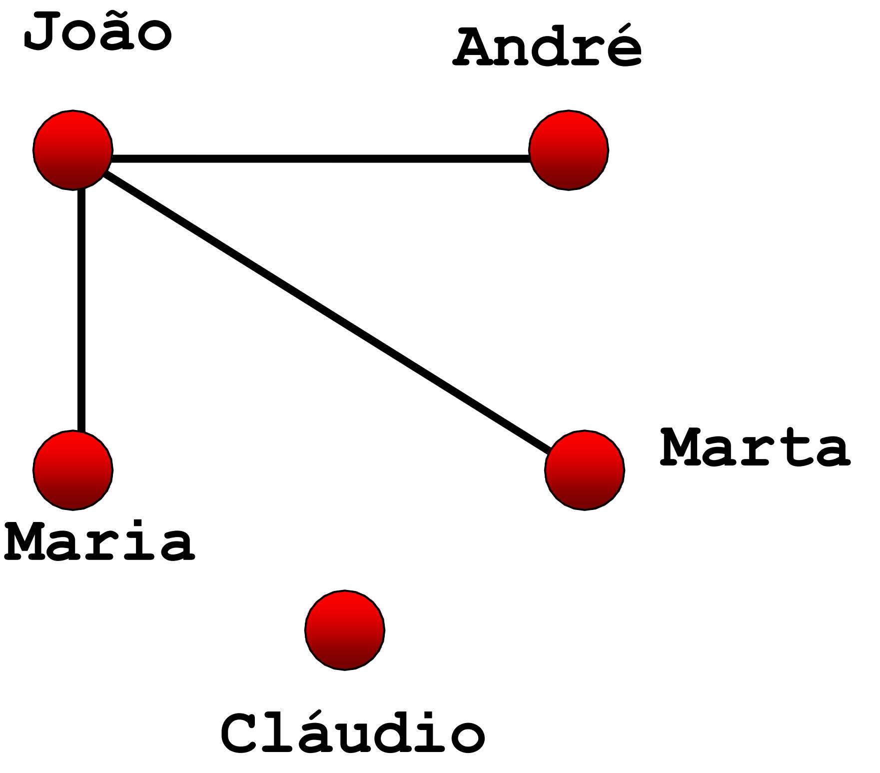
Aplicações

Rede de Relacionamentos (relação "Conhecer"):



Aplicações

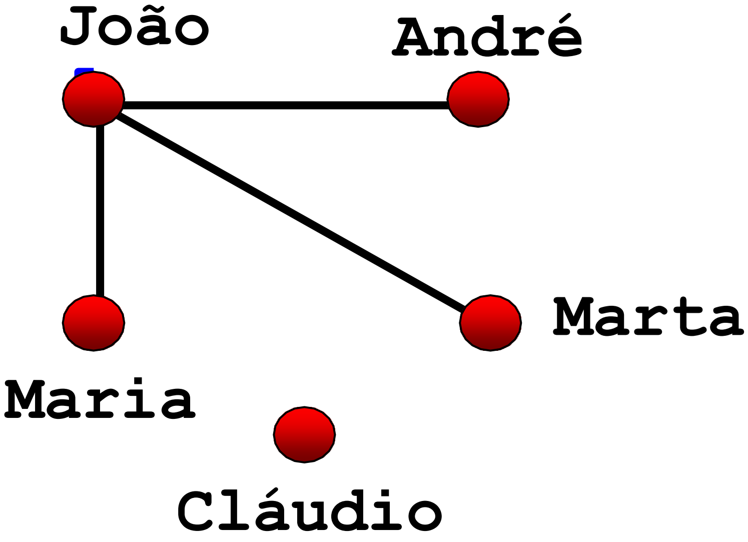
Rede de Relacionamentos (relação “amizade”):



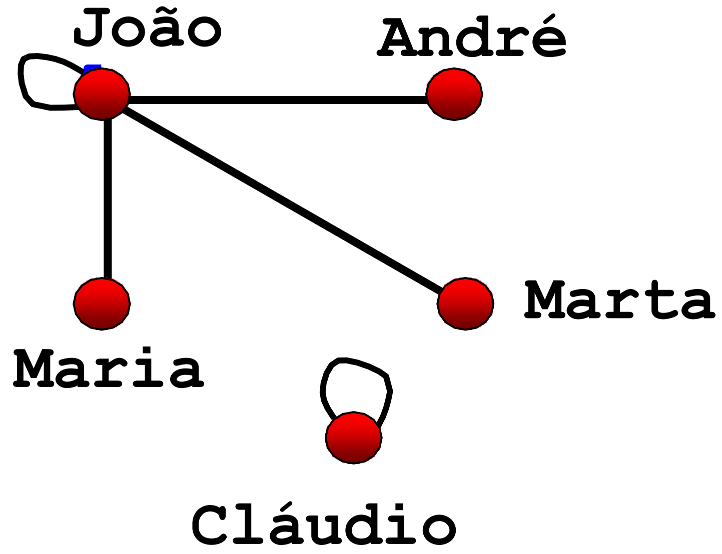
Quem possui mais amigos?
E menos amigos?

Aplicações

Grafo sem laço



Grafo com laço



Aplicações

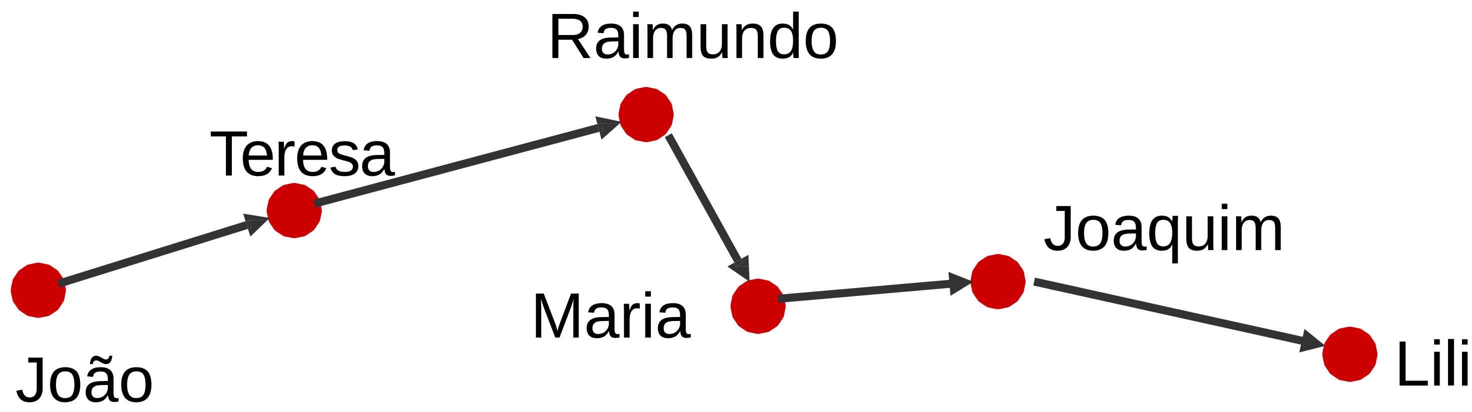
- Cada vértice é uma tarefa de um grande projeto. Há uma aresta de x a y se x é pré-requisito de y, ou seja, se x deve estar pronta antes que y possa começar.

- Cada vértice é uma página na teia WWW. Cada aresta é um link que leva de uma página à outra (Há cerca de 2 milhões de vértices e 5 milhões de arestas).

- Outros: Redes de computadores, rotas de vôos, redes de telefonia, etc

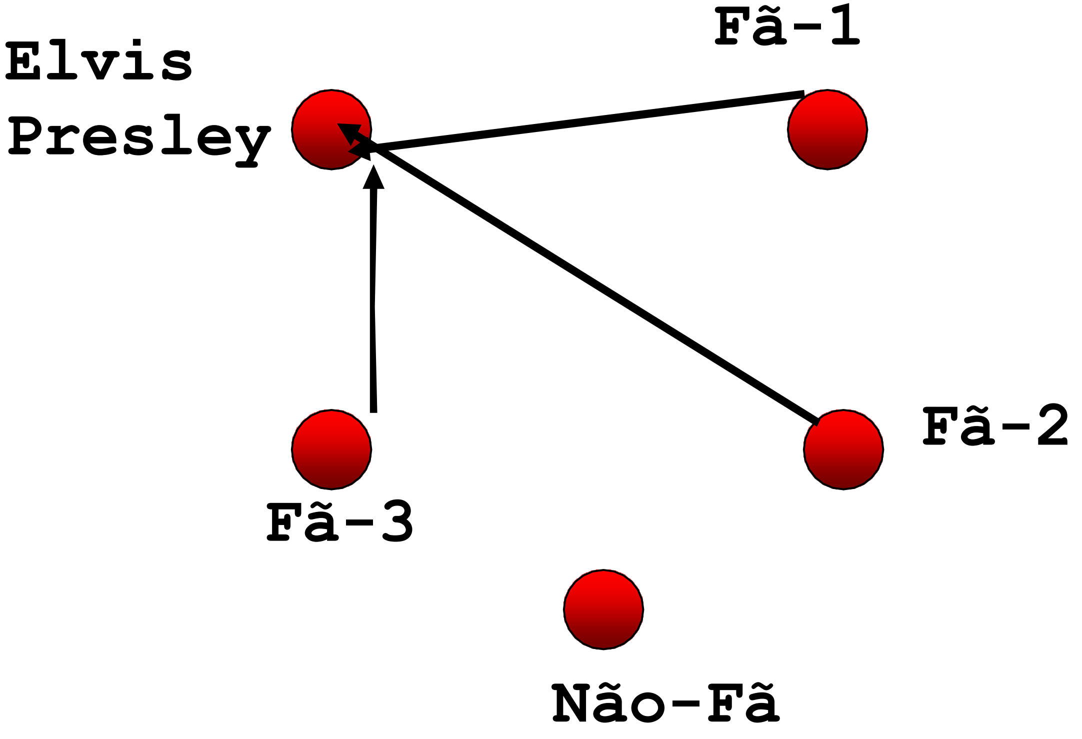
Aplicações

“João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria que amava Joaquim que amava Lili que não amava ninguém...” (Carlos Drummond de Andrade)



Aplicações

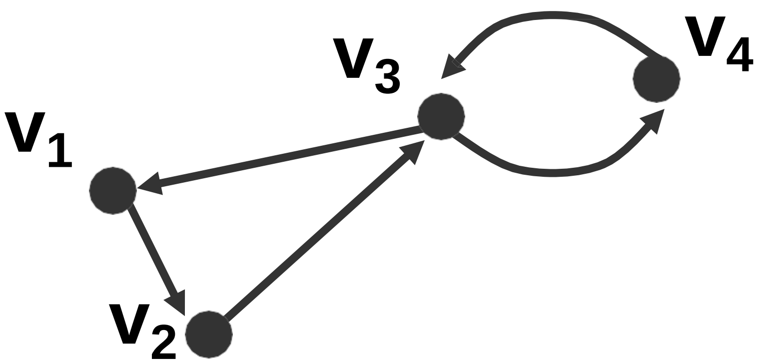
- O Grafo “sou fã de…”



Orientados

- Um grafo orientado (ou dígrafo) $D = (V, E)$ consiste de um conjunto V (vértices) e de um conjunto de E (arestas) de <u>pares ordenados</u> de vértices distintos.

Representação :



$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

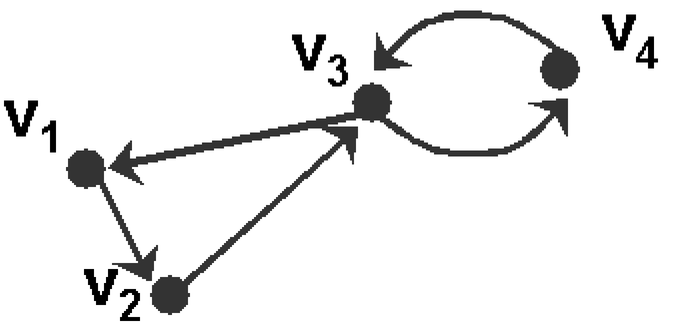
$E(G) = \{(v_1, v_2); \ (v_3, v_1); (v_2, v_3); (v_3, v_4); (v_4, v_3)\}$

Orientados

- Em um grafo <u>orientado</u>, cada aresta $e = (x, y)$ possui uma <u>única direção</u> de x para y. Diz-se que (x, y) é divergente de x e convergente a y. Assim:

(v_3,v_1) é divergente de v_3

(v_3,v_1) é convergente a v_1



Grau

- O Grau $d(v)$ de um vértice v corresponde ao <u>número de vértices adjacentes</u> a v (ou ao número de arestas incidentes a v).

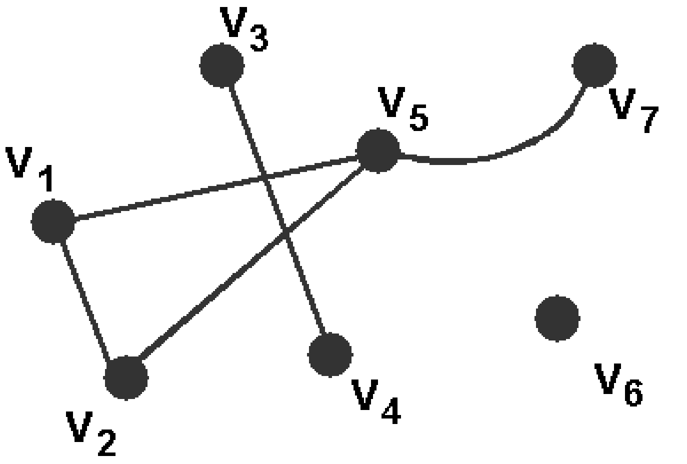
Exemplo:

$\boldsymbol{d(v_6) = 0}$

$\boldsymbol{d(v_3) = d(v_4) = d(v_7) = 1}$

$\boldsymbol{d(v_1) = d(v_2) = 2}$

$\boldsymbol{d(v_5) = 3}$



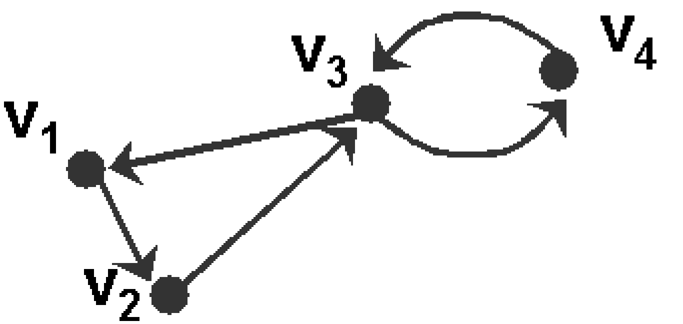
Grau

- Em um grafo orientado:
  - O Grau de Saída $d_{out}(v)$ de um vértice v corresponde ao número de arestas <u>divergentes</u> (que saem) de v.
  - O Grau de Entrada $d_{in}(v)$ de um vértice v corresponde ao número de arestas <u>convergentes</u> (que chegam) a v.

$d_{in}(\mathbf{v_3}) = 2$ **e** $d_{out}(\mathbf{v_3}) = 2$

$d_{in}(\mathbf{v_1}) = d_{in}(\mathbf{v_2}) = d_{in}(\mathbf{v_4}) = 1$

$d_{out}(\mathbf{v_1}) = d_{out}(\mathbf{v_2}) = d_{out}(\mathbf{v_4}) = 1$

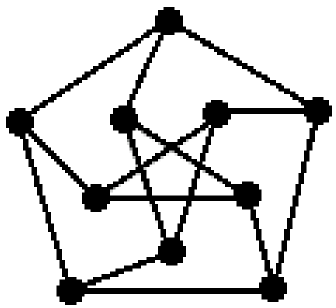


Grau

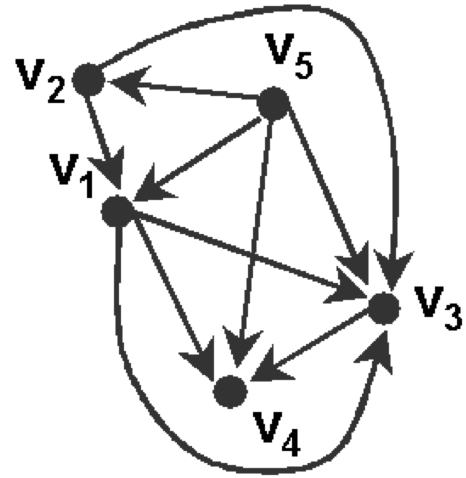
- Um vértice com grau de saída nulo, ou seja, $\mathbf{d_{out(v)} = 0}$, é chamado de sumidouro (ou sorvedouro).
- Um vértice com grau de entrada nulo, ou seja, $\mathbf{d_{in(v)} = 0}$, é chamado de fonte.
- Diz-se que um grafo é regular se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau.

Exercício de Fixação 2

(a)



(b)



- Os grafos (a) e (b) são regulares? Por quê?
- No grafo (b) represente o d_{in} e d_{out} para cada vértice.
- Quem são os vertices fonte ou sumidouro no grafo (b) ?
- Escreva a represetanção V(G) e E(G) do grafo (b).

Divisão do arquivo

- 3ª parte
  - Grafo Valorado
  - Caminho e Caminho Simples
  - Circuito, Ciclo, Grafo Cíclico
  - Caminho e Grafo: Hamiltoniano e Euleriano.
  - Subgrafo
  - Grafo: Conexo e (Totalmente) Desconexo
  - Dígrafo Fortemente Conexo
  - Componente Conexa
  - Exercícios

Grafos Valorados

- Um grafo valorado G(V, A) consiste de um conjunto finito não vazio de vértices V, ligados por um conjunto A de arestas (ou arcos) com **pesos**.
- O conjunto A consiste de triplas distintas da forma (v,w,valor), em que v e w são vértices pertencentes a V e valor é um número real.

Grafos Valorados

O quanto aquela pessoa é minha amiga?

Grafos podem ter arestas com pesos representando a ‘força’ da relação entre os vértices:

Ex.

0: inimiga

5: colega

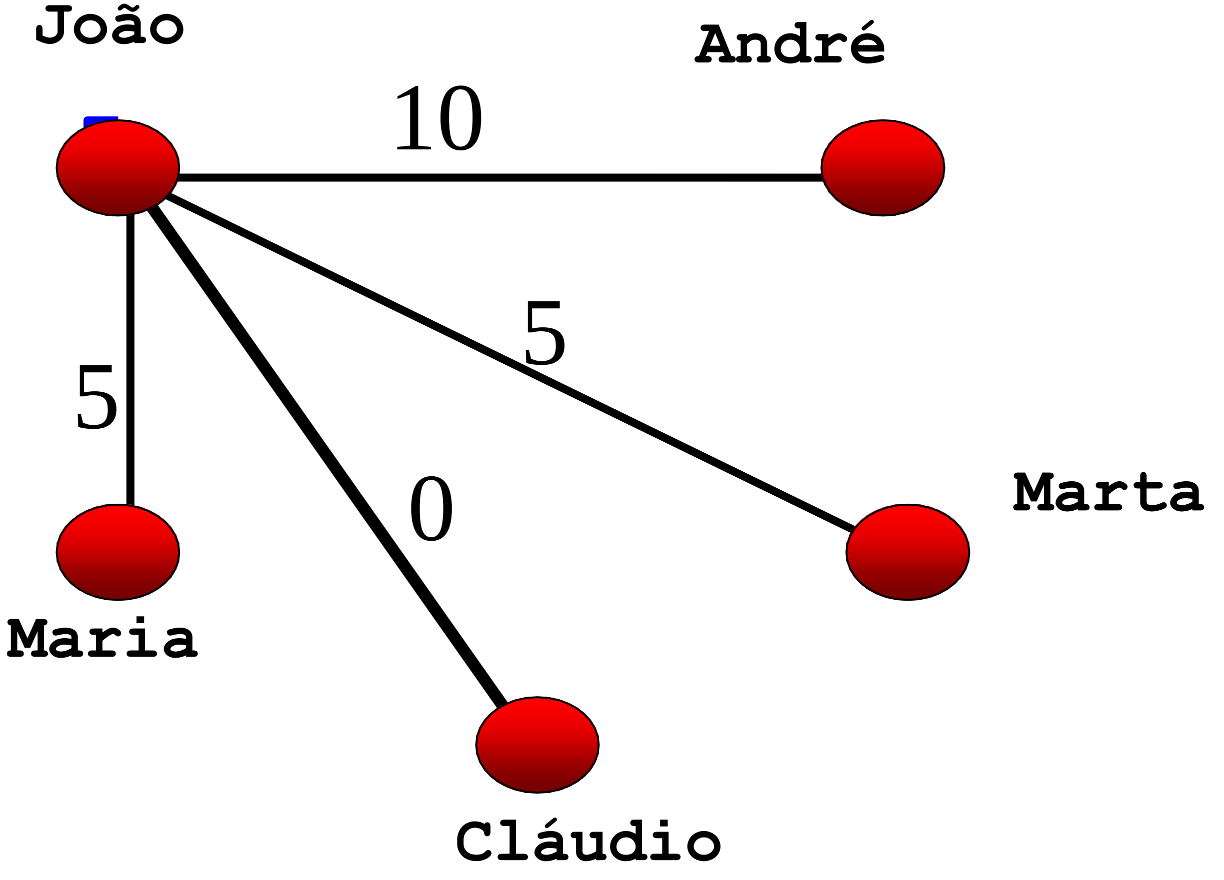
10: amiga

Exemplo

0: inimiga

5: colega

10: amiga

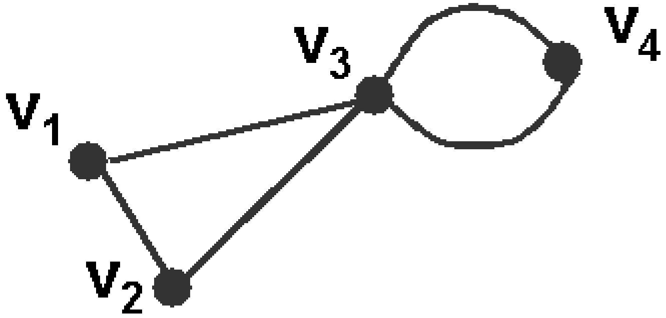


Caminho

- Um caminho entre dois vértices, x e y, é uma sequência de vértices e arestas que une x e y.
- Um caminho de k-vértices é formado por k-1 arestas (v_1,v_2), (v_2,v_3) ... (v_{k-1}, v_k), e o valor de k-1 é o comprimento do caminho.

P = v_3,v_1,v_2 = P tem 2 arestas

P= v_3,v_4,v_3,v_1 =P tem 3 arestas

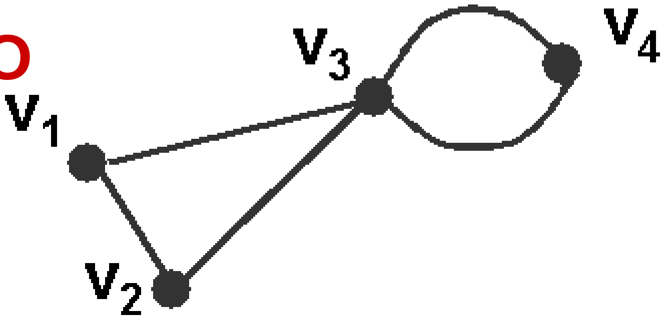


Caminho Simples

- Um caminho é simples se todos os vértices que o compõem forem distintos.

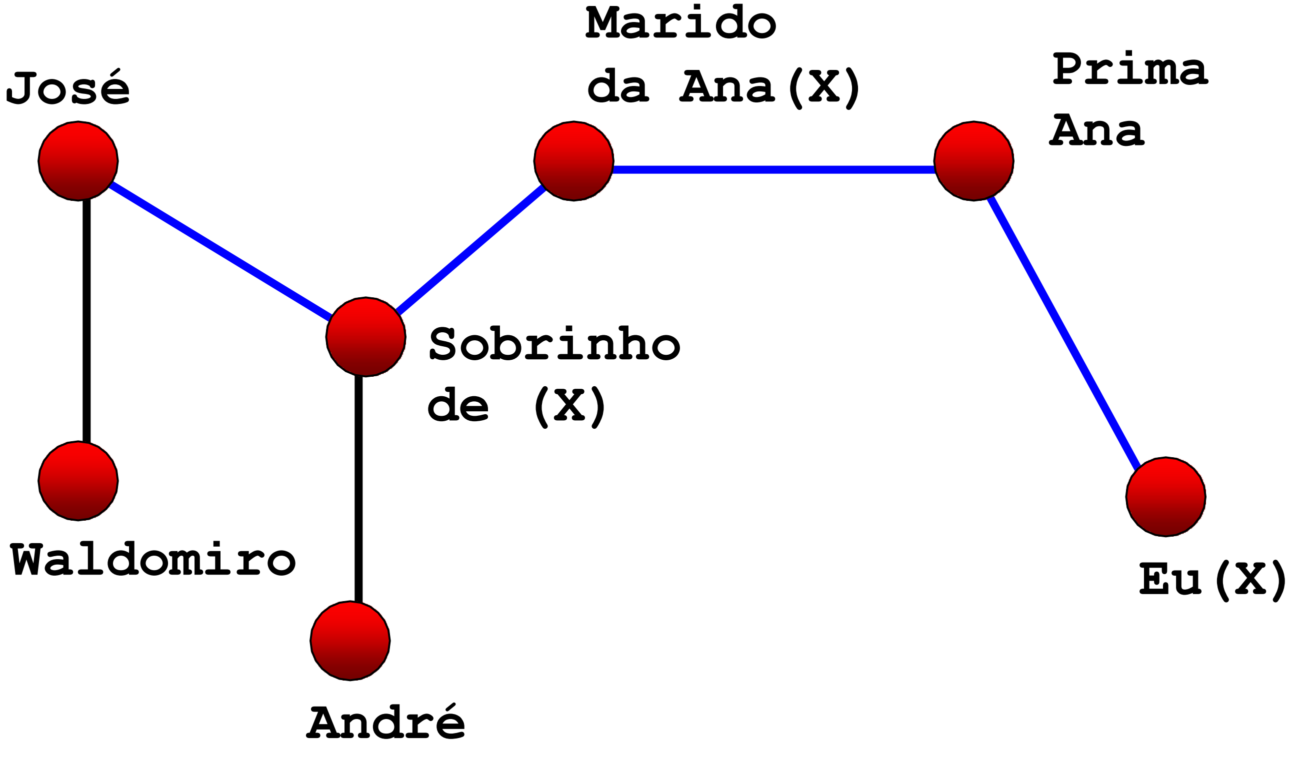
O caminho P= v_3,v_1,v_2 é simples

O caminho P= v_3,v_4,v_3,v_1 NÃO é simples



Caminho

O Grafo da Amizade…



Menor caminho

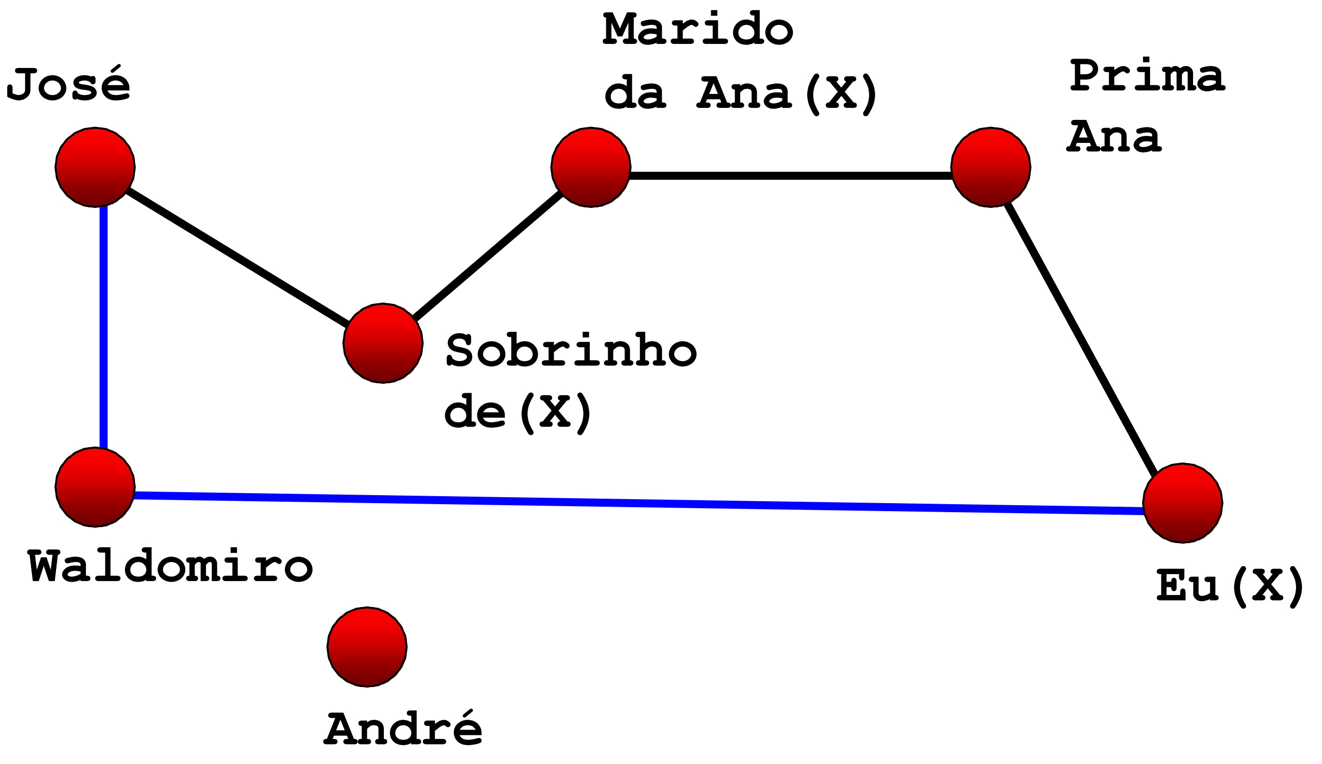
O Grafo da Amizade

Qual o menor caminho para me ligar a um famoso?

Tendo múltiplos possíveis caminhos, um grafo pode gerar a necessidade de buscar o menor caminho a um determinado vértice.

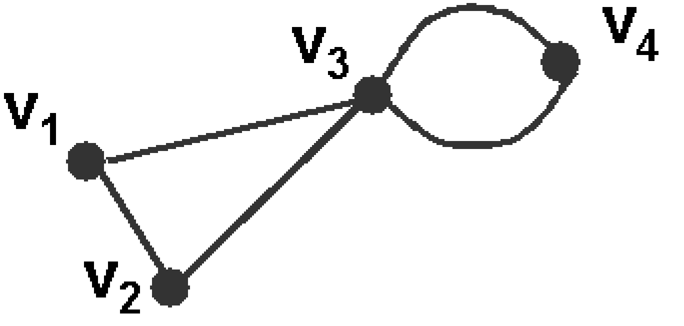
Exemplo de menor caminho

O Grafo da Amizade



Circuito e Ciclo

- Um circuito/ciclo é um caminho P = $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$, onde $v_1 = v_{k+1}$. Um circuito/ciclo é um circuito onde todos os vértices são distintos (exceto pelo primeiro e pelo último).
- Um grafo é cíclico se apresentar ao menos um ciclo.

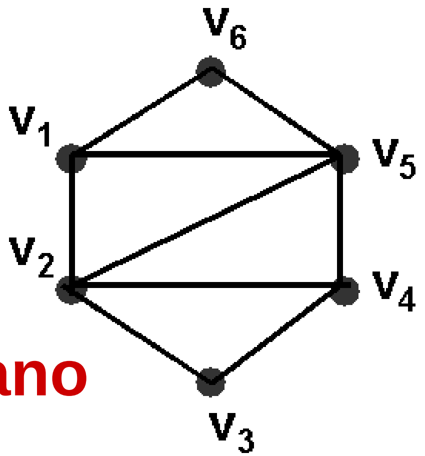


v_3, v_1, v_2, v_3 é um ciclo

Portanto, este grafo é cíclico

Caminho Hamiltoniano

- Caminho Hamiltoniano é aquele que contém <u>cada vértice do grafo</u> **exatamente uma vez**.
- Um <u>ciclo</u> $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ é <u>hamiltoniano</u> quando o caminho $v_1, v_2, \ldots, v_k$ for um caminho hamiltoniano.



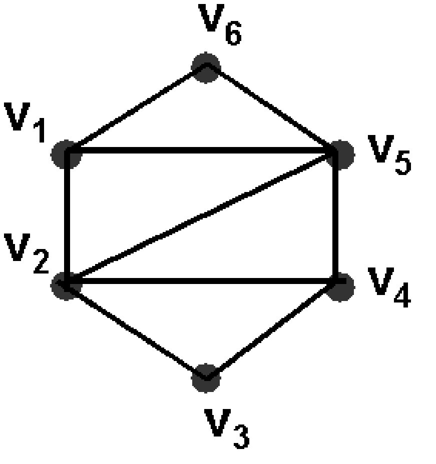
v_1,v_6,v_5,v_2,v_3,v_4 é hamiltoniano

$v_6,v_5,v_4,v_3,v_2,v_1,v_6$ é um ciclo hamiltoniano

Grafo Hamiltoniano

- Um grafo é Hamiltoniano se tiver um ciclo hamiltoniano.

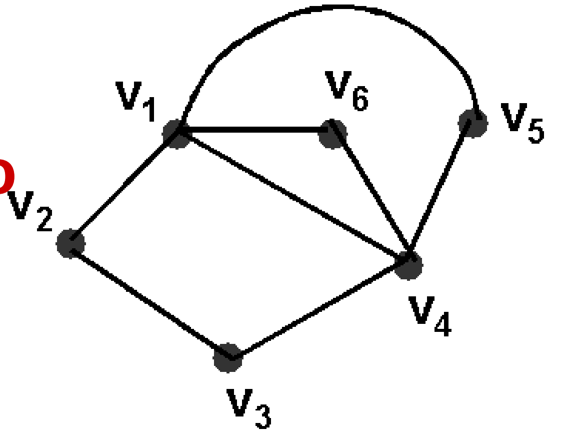
Se $v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_6$ é um ciclo hamiltoniano, portanto o grafo é hamiltoniano.



Caminho Euleriano

- Caminho Euleriano é aquele que contém <u>cada aresta do grafo</u> **exatamente uma vez.**
- Um grafo é Euleriano se há um <u>circuito</u> em G que contenha todas as suas arestas uma única vez.

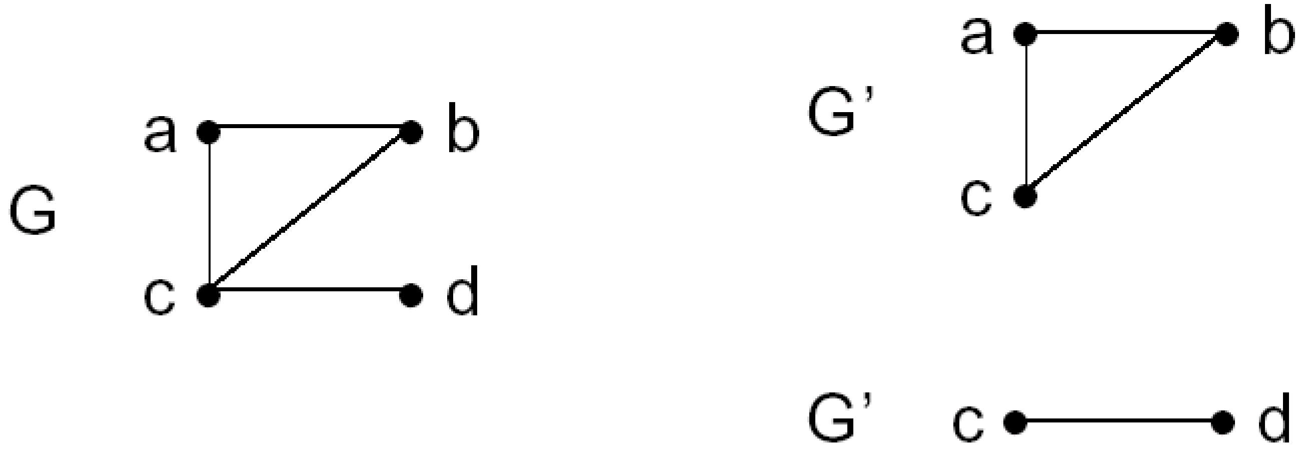
$v_1,v_6,v_4,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_1$ é euleriano



Portanto, este grafo é euleriano

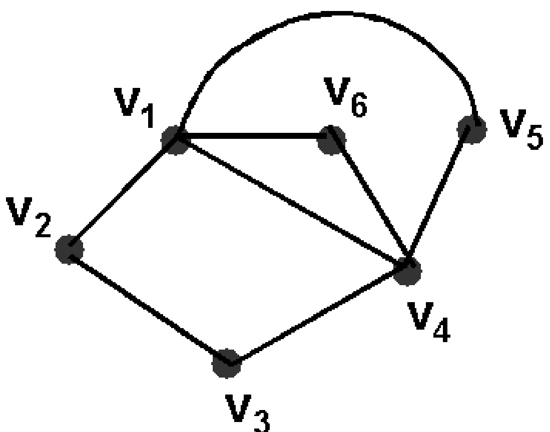
Subgrafo

- Um subgrafo $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

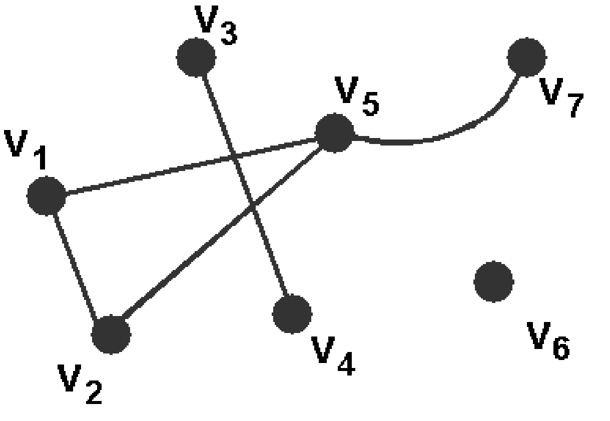


Grafo Conexo

- Um grafo $G = (V, E)$ é conexo quando existe um caminho entre cada par de vértices de G, caso contrário, G é desconexo. Para um grafo orientado, a decisão é feita SEM considerar a orientação das arestas.



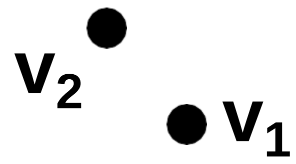
Conexo



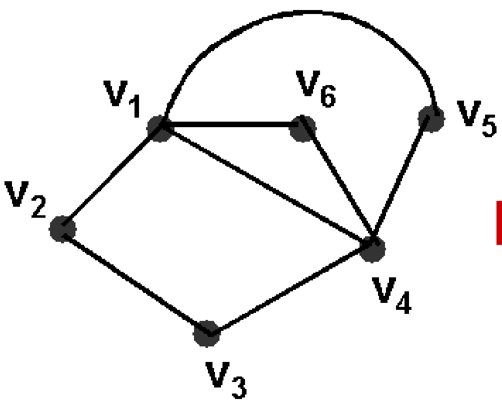
Desconexo

Grafo Conexo

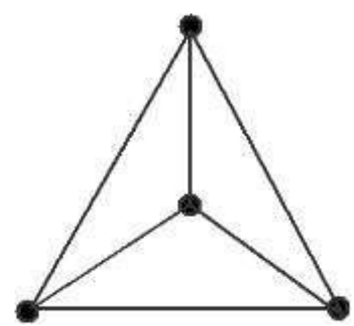
- Um grafo é totalmente desconexo quando <u>não</u> possui arestas.



- Todo grafo <u>euleriano</u> é conexo e todos os seus vértices possuem grau par.



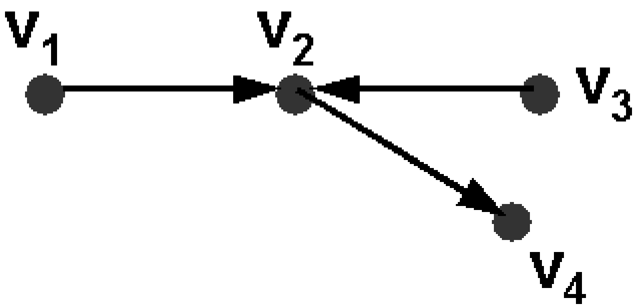
É euleriano



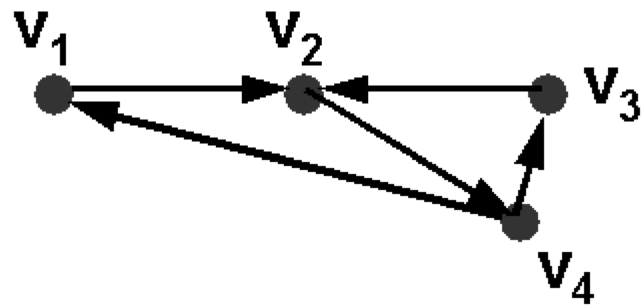
Não é euleriano

Dígrafo Fortemente Conexo

- Um grafo <u>orientado</u> $D = (V, E)$ é dito ser fortemente conexo quando existe um caminho entre cada par de vértices (x,y) e também entre (y,x).



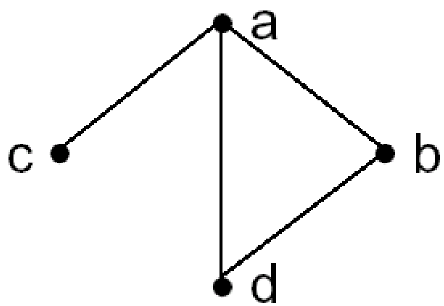
Conexo



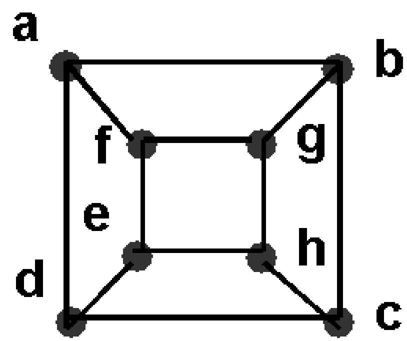
Fortemente Conexo

Exercícios de Fixação 3

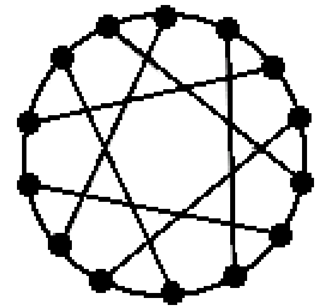
(a)



(b)



(c)



- Quais dos grafos acima são cíclicos?
- Indique os grafos que são conexos.
- Qual(is) dos grafos acima são Eulerianos? Quais são Hamiltonianos?
- Como seria um caminho Euleriano nos grafos (b) e (c).
- Como seria um caminho Hamiltoniano nos grafos (b) e (c).

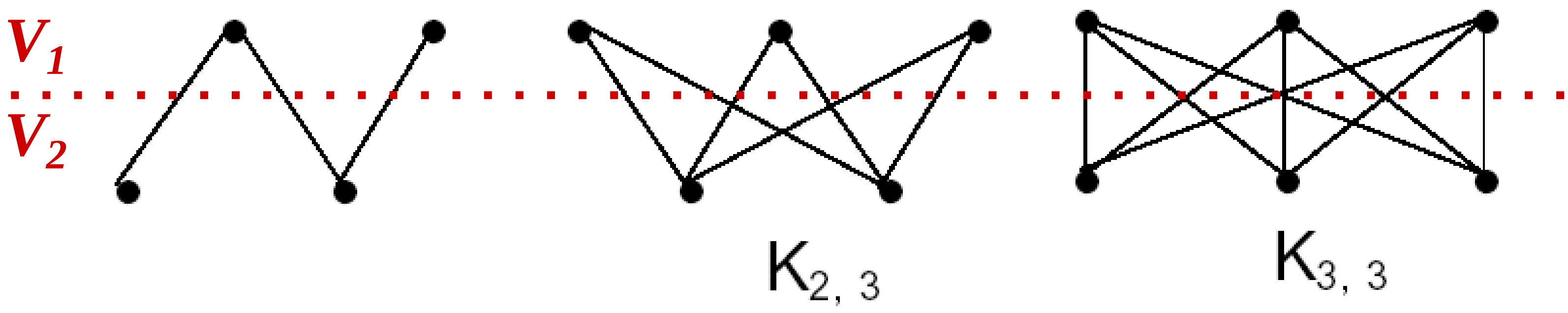
Divisão do arquivo

- 4ª parte
  - Grafo Bipartido, Bipartido Completo
  - Complemento
  - Isomorfismo
  - Árvore, Árvore Enraizada, Floresta
  - Subgrafo, Subgrafo Gerador, Árvore Geradora, Sugrafo Induzido
  - Exercícios

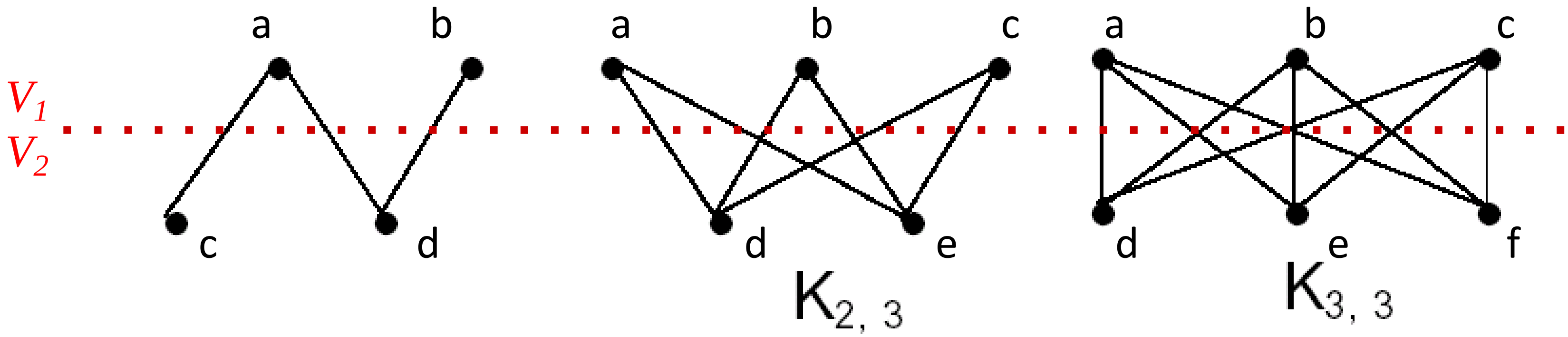
Grafo Bipartido

- Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido quando o seu conjunto de vértices V puder ser <u>dividido</u> em dois subconjuntos V_1, V_2 tais que toda aresta do conjunto E une um vértice de V_1 a outro vértice de V_2. Matematicamente:

$$V = V_1 \cup V_2;\ V_1 \cap V_2 = \varnothing \text{ e } \forall e = (u,v) \in E \Rightarrow u \in V_1 \text{ e } v \in V_2$$



Grafo Bipartido Completo



e = ((a,b), (c,d)) e = ((a,b,c), (d,e)) e = ((a,b,c), (d,e,f))

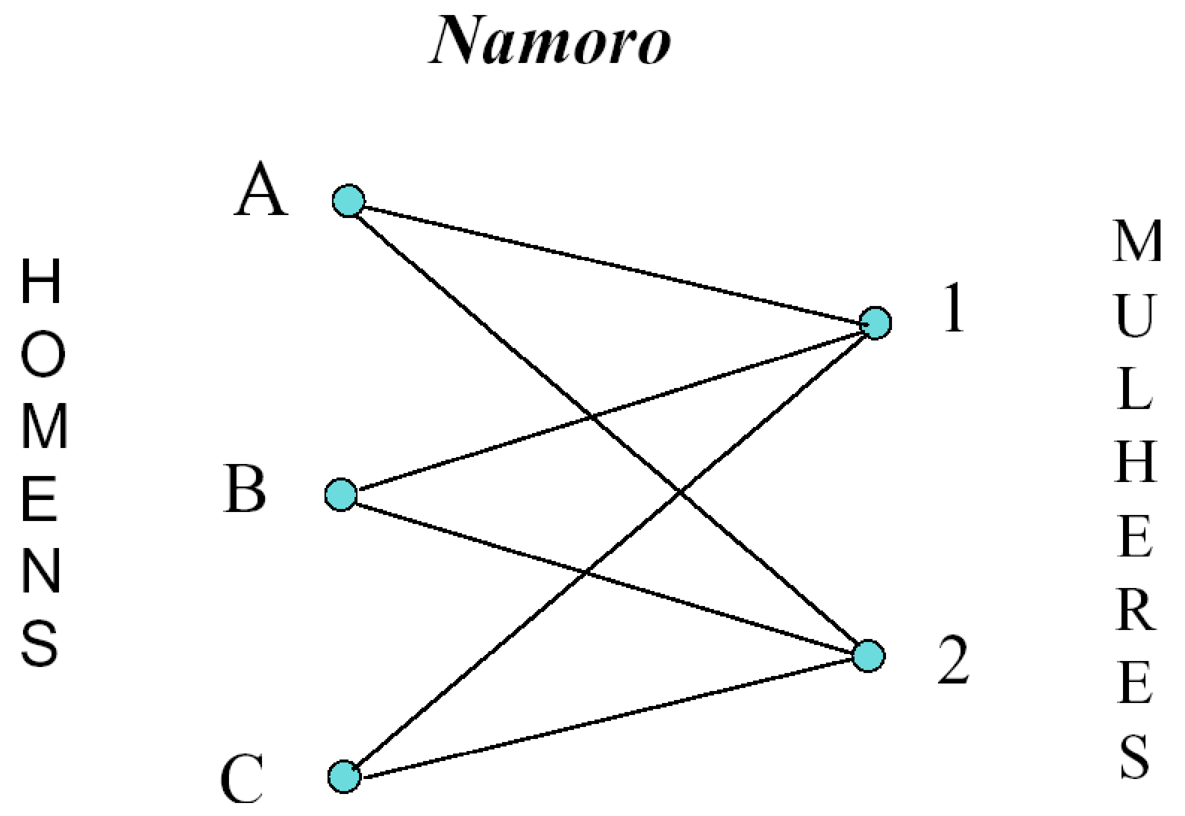
- Bipartido:

$$V = V_1 \cup V_2;\ V_1 \cap V_2 = \varnothing \text{ e } \forall e = (u,v) \in E \Rightarrow u \in V_1 \text{ e } v \in V_2$$

- Bipartido Completo (notação $K_{|V_1|,|V_2|}$):

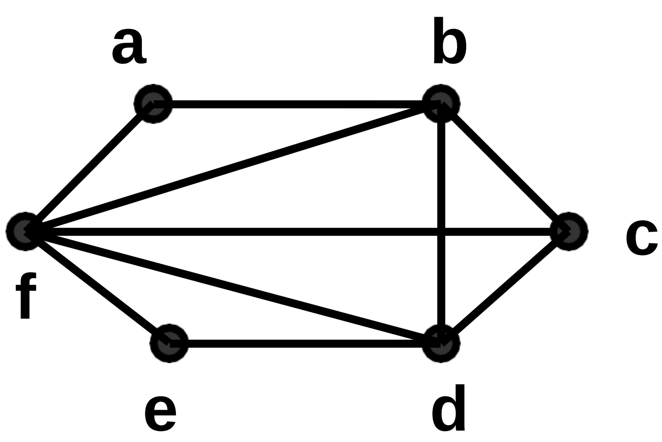
$$V = V_1 \cup V_2;\ V_1 \cap V_2 = \varnothing \text{ e } \forall e = (u,v) \in E \Rightarrow u \in V_1 \text{ e } v \in V_2\ ;$$
$$\forall\ u \in V_1,\ \forall\ v \in V_2 \Rightarrow e = (u,v) \in E$$

Grafo Bipartido

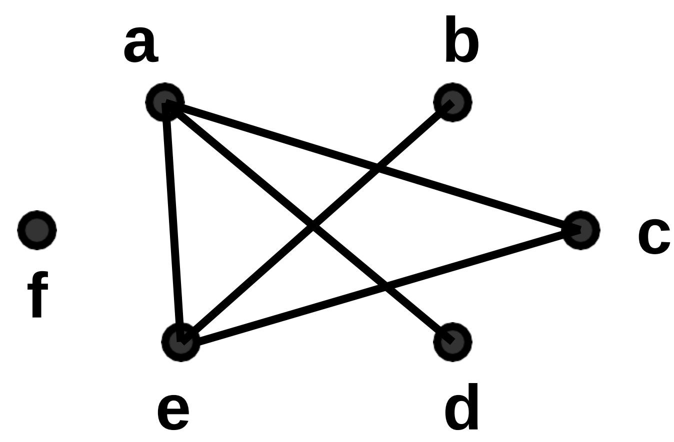


Complemento

- Denomina-se complemento de um grafo $G = (V, E)$ a um grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' = V$ e E' é <u>complementar</u> a E, *ou seja,* você preenche todas as arestas que **faltavam** para obter um <u>grafo completo</u>.

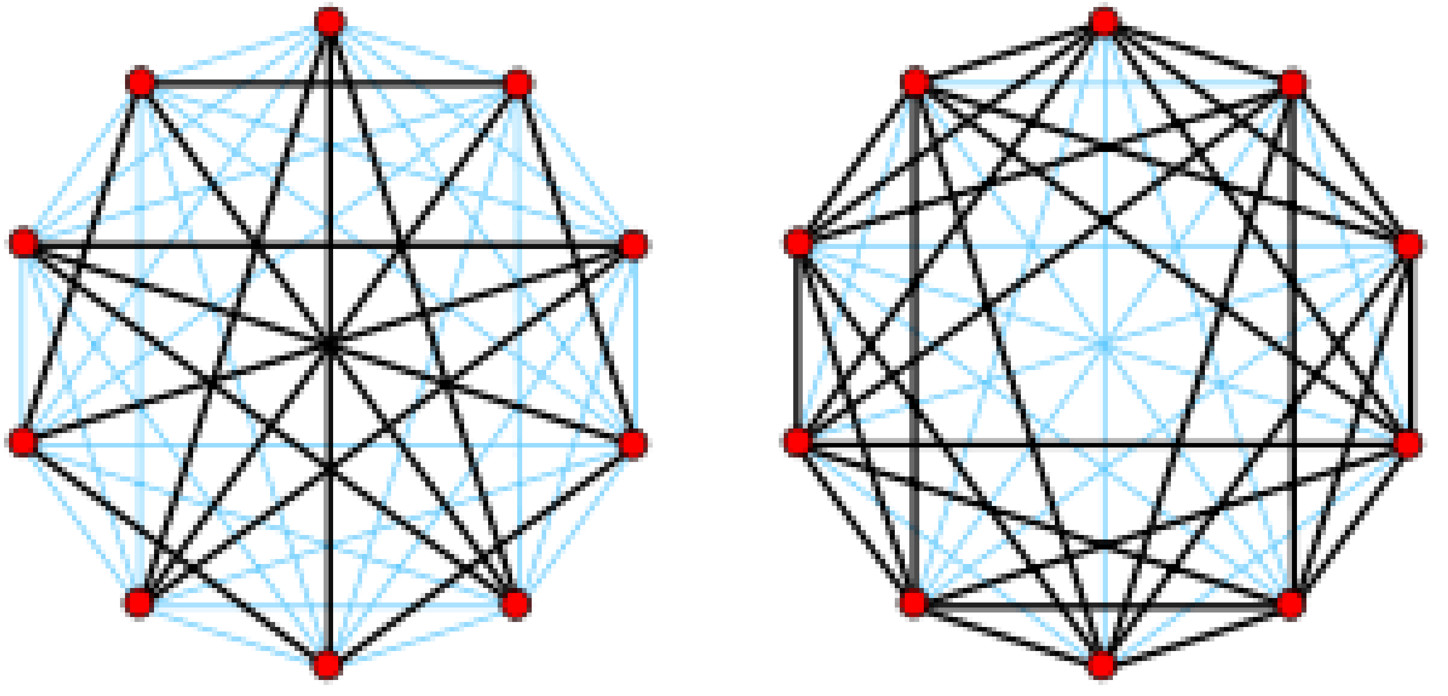


G



Complemento de *G*

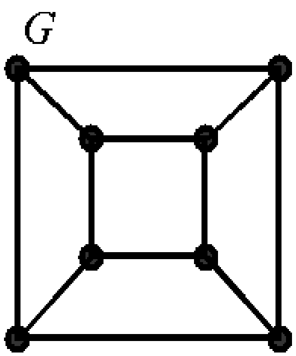
Complemento

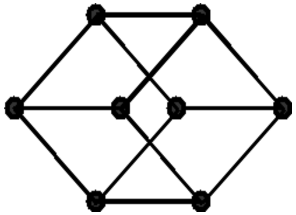


O grafo de Petersen (à esquerda) e o seu grafo complementar (à direita).

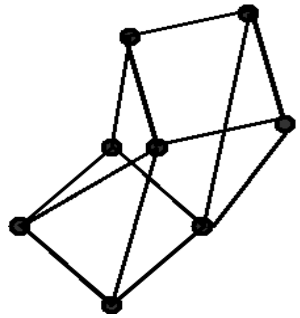
Isomorfismo

- Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são isomorfos entre si se tiverem o mesmo número de vértices com seus respectivos graus, mesmo número de arestas e os vértices serem adjacentes nos dois grafos. Só muda os rótulos dos vertices.
- Se dois grafos são isomorfos, denotamos G $\simeq$ H .



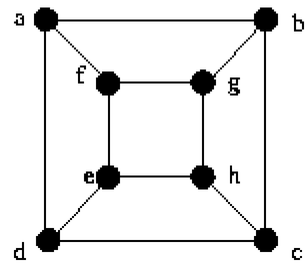


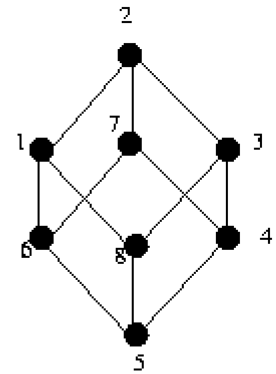
É isomorfo a *G*

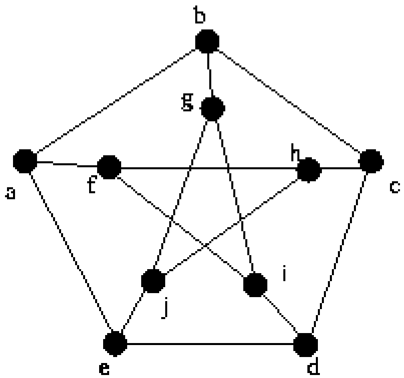


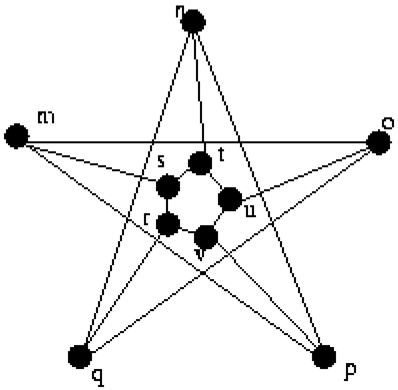
NÃO É isomorfo a *G*

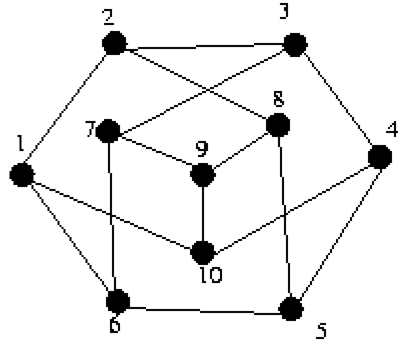
Grafos Isomorfos





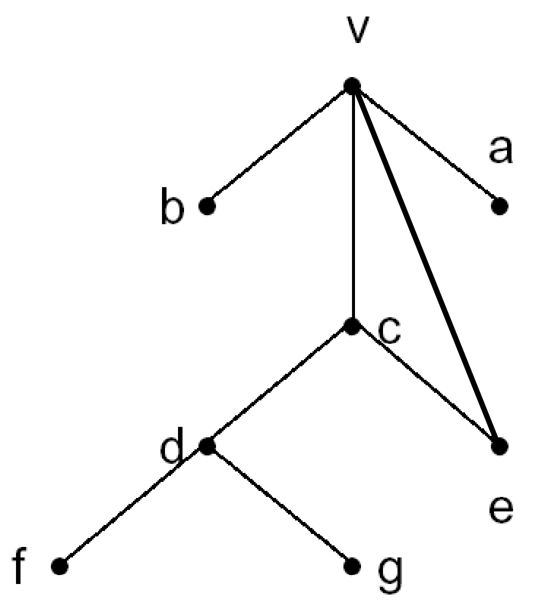




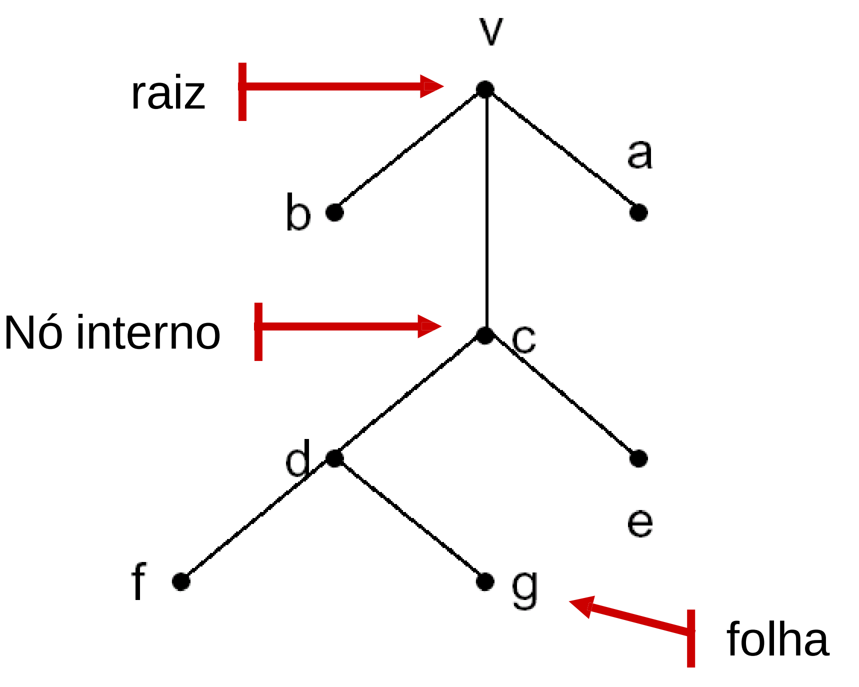


Árvore

- Uma árvore é um grafo <u>conexo</u> e <u>acíclico</u>.



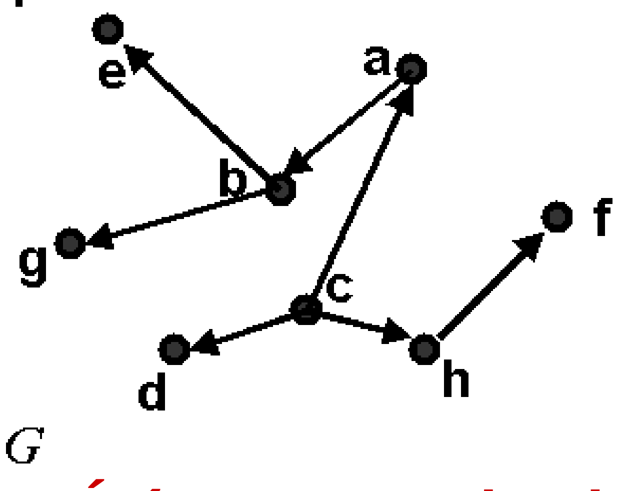
Não é uma árvore



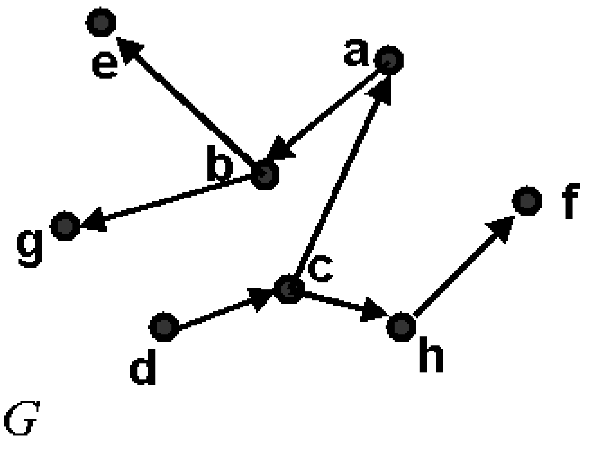
É uma árvore

Árvore Enraizada

- Uma árvore enraizada é uma <u>árvore orientada</u> em que há um vértice (raiz) do qual todas as arestas se afastam.



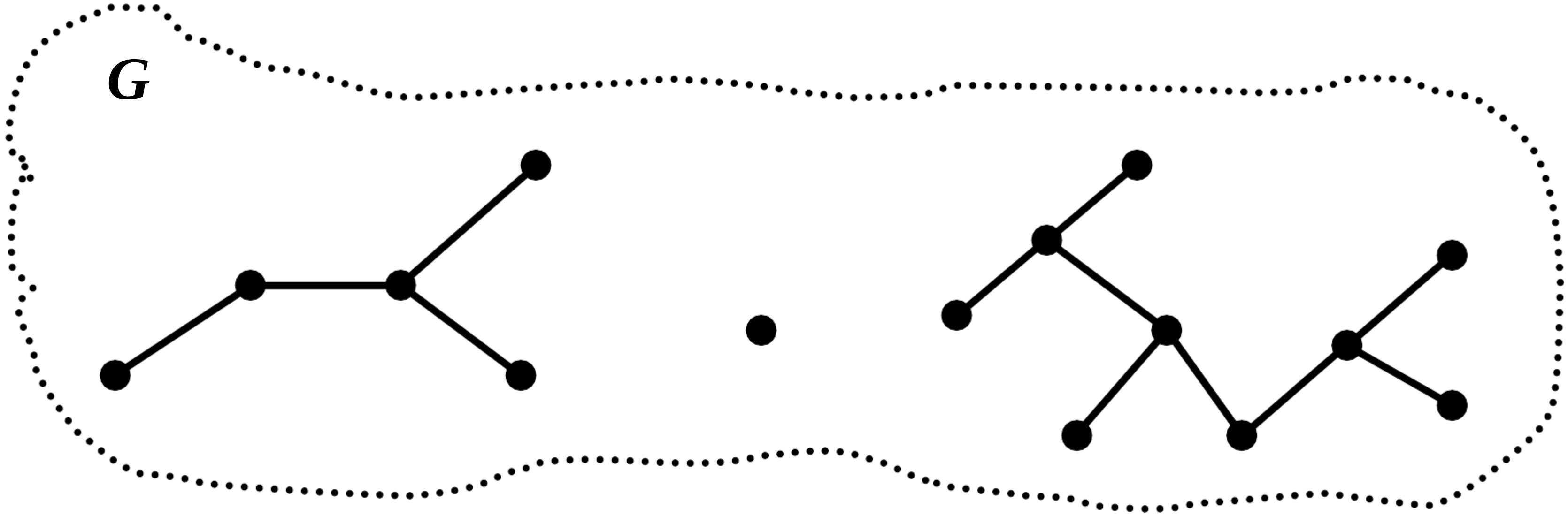
É árvore enraizada (raiz c)



É árvore enraizada (raiz d)

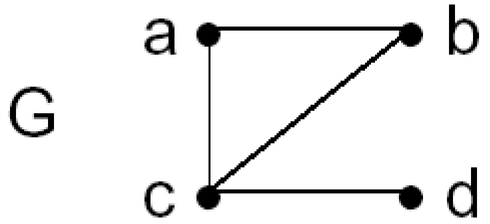
Floresta

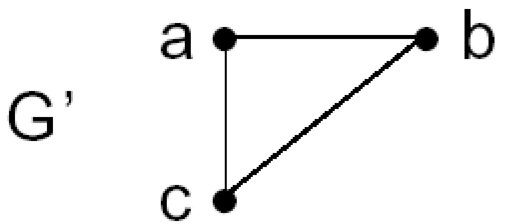
- Uma Floresta é um <u>conjunto</u> <u>de</u> <u>árvores</u>.

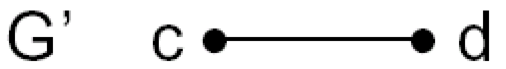


Subgrafo

- Um subgrafo $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

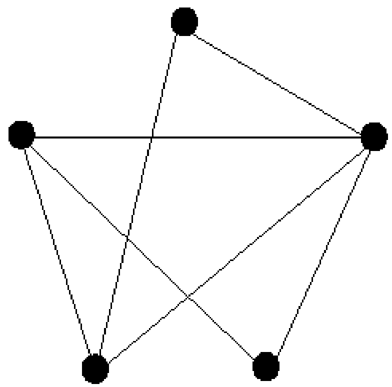




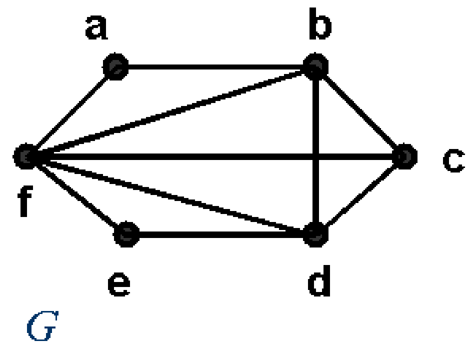


Exercícios de Fixação

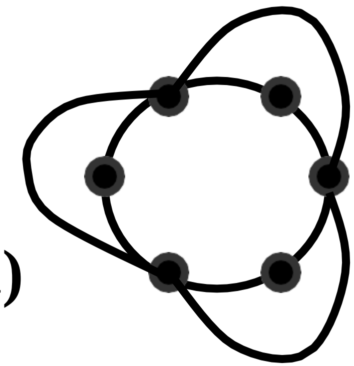
(a)



(b)



(c)



- Quais os complementos dos grafos (a), (b) e (c)?
- Os grafos (b) e (c) são isomorfos? Porque?

FIM