Examen 2

Reconocimiento de Patrones

Daniel Fragoso Alvarado

IIMAS, *UNAM*

1 de junio, 2022

El Cuaderno de Colab donde se realizó este examen se puede consultar en el siguiente: Link.

---

1. (1 punto) Queremos clasificar lápices que pueden ser de plomo o grafito. Sea $p(C_1) = 1/3, p(C_2) = 2/3$ y suponga que queremos que cada lapiz es amarillo (Y), blanco (W) o rojo(R) con probabilidades condicionales dadas por:

	Y	W	R
C_1	3/5	3/4	1/4
C_2	3/5	1/4	3/4

Contruya el clasificador de Bayes discreto.

Sabemos que las probabilidades para cada clase deben de sumar 1, dado que no ocurre, vamos a normalizar los valores, con una simple regla de 3, de forma que:

	Y	W	R
C_1	12/32	15/32	5/32
C_2	12/32	5/32	15/32

Ahora, primero vamos a obtener las probabilidades de que los lápices sean Amarillo, Blanco o Rojo. Sabemos por probabilidad condicional que:

$$P(Y) = P(C_1) P(Y \mid C_1) + P(C_2) P(Y \mid C_2)$$
$$P(W) = P(C_1) P(W \mid C_1) + P(C_2) P(W \mid C_2)$$
$$P(R) = P(C_1) P(R \mid C_1) + P(C_2) P(R \mid C_2)$$

Entonces:

$$P(Y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{32} + \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

$$P(W)=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{32}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{32}=\frac{25}{96}$$

$$P(R)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{32}+\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{32}=\frac{35}{96}$$

Ahora calcularemos las probabilidades condicionales de cada clase dado el color del lápiz:

$$P\left(C_1\mid Y\right)=\frac{P\left(C_1\right)P\left(Y\mid C_1\right)}{P(Y)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{32}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(C_1\mid W\right)=\frac{P\left(C_1\right)P\left(W\mid C_1\right)}{P(W)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{32}}{\frac{25}{96}}=\frac{3}{5}$$

$$P\left(C_1\mid R\right)=\frac{P\left(C_1\right)P\left(R\mid C_1\right)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{32}}{\frac{35}{96}}=\frac{1}{7}$$

$$P\left(C_2\mid Y\right)=\frac{P\left(C_2\right)P\left(Y\mid C_2\right)}{P(Y)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{32}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}$$

$$P\left(C_2\mid W\right)=\frac{P\left(C_2\right)P\left(W\mid C_2\right)}{P(W)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{32}}{\frac{25}{96}}=\frac{2}{5}$$

$$P\left(C_2\mid R\right)=\frac{P\left(C_2\right)P\left(R\mid C_2\right)}{P(R)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{32}}{\frac{35}{96}}=\frac{6}{7}$$

Entonces el clasificador de Bayes no dice:

1. $P\left(C_1\mid Y\right)<P\left(C_2\mid Y\right)$
   Los lápices **Amarillos** se clasifican en $\boldsymbol{C_2}$
2. $P\left(C_1\mid W\right)>P\left(C_2\mid W\right)$
   Los lápices **Blancos** se clasifican en $\boldsymbol{C_1}$
3. $P\left(C_1\mid R\right)<P\left(C_2\mid R\right)$
   Los lápices **Rojos** se clasifican en $\boldsymbol{C_2}$

---

2. (1 punto) Considere un problema de classificación donde las clases están normalmente distribuidas con la misma matriz de covarianza
   $$C=[2,1;1,2]$$
   Las medias de las clases son
   $$\mu_1=[1,1]^T \text{ y } \mu_2=[2,1]^T$$
   respectivamente y $p\left(C_1\right)=p\left(C_2\right)=1/2$. Obtenga la frontera de decisión entre las dos clases.

Recordemos que las funciones de decisiones dado que C son iguales se calculan de forma que:

$$d_i(\boldsymbol{x})=\ln\left(p\left(C_i\right)\right)+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}^{-1}\mu_i-\frac{1}{2}\mu_i^T\boldsymbol{C}^{-1}\mu_i, 1\leq i\leq m$$

Y las fronteras:

$$d_{ij}(\boldsymbol{x})=d_i(\boldsymbol{x})-d_j(\boldsymbol{x})$$

Calculo de la Inversa. Primero vamos a calcular $\boldsymbol{C}^{-1}$. Sabemos que $C^{(-1)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(-1)} = \frac{1}{\det(C)} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$. Para esto primero obtendremos el determinante de $\boldsymbol{C}$.

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

Entonces:

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{(-1)} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Calculo de las funciones de decisión.

$$\begin{aligned} d_1(\boldsymbol{x}) &= \ln\left(p\left(C_1\right)\right) + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{C}^{-1} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_1^T \boldsymbol{C}^{-1} \mu_1 \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(1,1) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2x_1 - x_2}{3} \; \frac{-x_1 + 2x_2}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{x_1 + x_2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2(\boldsymbol{x}) &= \ln\left(p\left(C_2\right)\right) + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{C}^{-1} \mu_2 - \frac{1}{2} \mu_1^T \boldsymbol{C}^{-1} \mu_2 \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(2,1) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2x_1 - x_2}{3} \; \frac{-x_1 + 2x_2}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + (x_1) - \frac{1}{2}(2) \end{aligned}$$

Calculo de las funciones de frontera.

$$\begin{aligned} d_{12}(\boldsymbol{x}) &= d_1(\boldsymbol{x}) - d_2(\boldsymbol{x}) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{x_1 + x_2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) + (x_1) - \frac{1}{2}(2)\right) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2}{3}\right) - \frac{1}{3} - x_1 + 1 \\ &= \frac{-2x_1 + x_2 + 2}{3} \end{aligned}$$

3. (2 puntos) Considere un problema de clasificación con patrones normalmente distribuidos. Suponga que el vector de patrones $[0,0]^T, [1,0]^T, [0,1]^T, [1,1]^T$ que pertenecen a C_1y$[-1,0]^T, [0,-1]^T, [-1,-1]^T, [-2,-2]^T$ a C_2. Aproxime la media y matriz de covarianza de cada clase utilizando solo los patrones clasificados y calcule la frontera de decisión entre las clases.

Calculemos μ.

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} \frac{-4}{4} \\ \frac{-4}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos C. Para calcular C_i vamos a usar unas funciones de Python que desarrollamos, las cuales se pueden consultar en el link del archivo adjunto.

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculemos la Frontera. Para esto primero debemos de calcular la inversa, y por lo tanto calcular el determinante de cada una:

Calculo de la Inversa.

$$|\boldsymbol{C}_1| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right) - 0\cdot 0 = \frac{1}{16}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{C}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{(-1)} = 16\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{C}_2| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{C}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{(-1)} = \frac{16}{3}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Funciones de decisión. Dado que las covarianzas son diferentes, las funciones de decisión están dadas por:

$$d_i(x) = -\frac{1}{2}\ln|C_i| + \ln(p(C_i)) - \frac{1}{2}(x-\boldsymbol{\mu}_i)^T C_i^{-1}(x-\boldsymbol{\mu}_j)$$

Luego haciendo las correspondientes sustituciones:

$$\begin{aligned}
d_1(x) &= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{16}\right) + \ln\left(p\left(C_1\right)\right) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1-\frac{1}{2} & x_2-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\frac{1}{2} \\ x_2-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{16}\right) + \ln\left(p\left(C_1\right)\right) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4x_1-2 & 4x_2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\frac{1}{2} \\ x_2-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{16}\right) + \ln\left(p\left(C_1\right)\right) - \frac{1}{2}\left(4x_1^2-4x_1+4x_2^2-4x_2+2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2(x) &= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{16}\right) + \ln\left(p\left(C_2\right)\right) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1+1 & x_2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+1 \\ x_2+1\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{16}\right) + \ln\left(p\left(C_1\right)\right) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{8x_1-4x_2+4}{3} & \frac{-4x_1+8x_2+4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\frac{1}{2} \\ x_2-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{16}\right) + \ln\left(p\left(C_1\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{8x_1^2+8x_1+8x_2^2-8x_1x_2+8x_2+8}{3}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos calcular la frontera de decisión:

$$\begin{aligned}
d_{12}(x) =& d_1(x) - d_2(x) \\
=& -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{16}\right) + \ln\left(p\left(C_1\right)\right) - \frac{1}{2}\left(4x_1^2-4x_1+4x_2^2-4x_2+2\right) \\
& - \left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{16}\right) + \ln\left(p\left(C_1\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{8x_1^2+8x_1+8x_2^2-8x_1x_2+8x_2+8}{3}\right)\right) \\
=& \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{256}\right) + \ln\left(p\left(C_1\right)\right) - \ln\left(p\left(C_2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-2(2x_1^2-10x_1+2x_2^2-10x_2+4x_1x_2-1)}{3}\right)
\end{aligned}$$

---

4. (2 puntos) Aplicar el método de aproximación de funciones para estimar $p\left(x \mid C_1\right)$ $p\left(x \mid C_2\right)$ donde

$$C_1 = [1,0]^T, [1,1]^T, [2,1]^T, [3,0]^T, [4,1]^T$$
$$C_2 = [-1,0]^T, [-2,0]^T, [-2,-1]^T, [-3,1]^T, [-3,2]^T$$

Utilice los primeros tres polinomios de Hermite para 2D para obtener los coeficientes

Recordemos que la función recursiva de los polinomios de Hermite esta dada por:

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0, \quad n \geq 2$$

, donde por definición:

$$H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = 2x$$

$n = 2$

$$\begin{aligned}
H_2(x) - 2xH_1(x) + 2(2-1)H_0(x) &= 0 \\
H_2(x) - 2x + 2x + 2 &= 0 \\
H_2(x) - 4x^2 + 2 &= 0 \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2
\end{aligned}$$

Ahora calculemos los polinomios, que en total deberían de ser 9:

$$
\begin{aligned}
\phi_1(\boldsymbol{x}) &= H_0\left(x_1\right) H_0\left(x_2\right) = 1 \\
\phi_2(\boldsymbol{x}) &= H_0\left(x_1\right) H_1\left(x_2\right) = 2x_2 \\
\phi_3(\boldsymbol{x}) &= H_0\left(x_1\right) H_2\left(x_2\right) = 4x_2^2 - 2 \\
\phi_4(\boldsymbol{x}) &= H_1\left(x_1\right) H_0\left(x_2\right) = 2x_1 \\
\phi_5(\boldsymbol{x}) &= H_1\left(x_1\right) H_1\left(x_2\right) = 4x_1x_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_6(\boldsymbol{x}) &= H_1\left(x_1\right) H_2\left(x_2\right) = 8x_1x_2^2 - 4x_1 \\
\phi_7(\boldsymbol{x}) &= H_2\left(x_1\right) H_1\left(x_2\right) = 4x_1^2 - 2 \\
\phi_8(\boldsymbol{x}) &= H_2\left(x_1\right) H_2\left(x_2\right) = 8x_2x_1^2 - 4x_2 \\
\phi_9(\boldsymbol{x}) &= H_2\left(x_1\right) H_0\left(x_2\right) = 16x_1^2x_2^2 - 8x_2^2 - 8x_1^2 + 4
\end{aligned}
$$

Ahora vamos a calcular los coeficientes asociados, los cuales se calculan como (los cálculos fueron realizados en el cuaderno de código):

$$
a_i^{(l)} = \frac{1}{N_l}\sum_{k=1}^{N_l} \phi_i\left(x_k^{(l)}\right), \quad 1 \le l \le 2
$$

$$
\begin{aligned}
a_1^1 &= \frac{1}{5}\left(1+1+1+1+1\right) = 1 \\
a_2^1 &= \frac{1}{5}\left(2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1\right) = \frac{6}{5} \\
a_3^1 &= \frac{1}{5}\left(-2+2+2-2+2)\right) = \frac{2}{5} \\
a_4^1 &= \frac{1}{5}\left(2+2+4+6+8\right) = \frac{22}{5} \\
a_5^1 &= \frac{1}{5}\left(0+4+8+0+16\right) = \frac{28}{5} \\
a_6^1 &= \frac{1}{5}\left(-4+4+8-12+16\right) = \frac{12}{5} \\
a_7^1 &= \frac{1}{5}\left(2+2+14+34+62\right) = \frac{114}{5} \\
a_8^1 &= \frac{1}{5}\left(0+4+28+0+124\right) = \frac{156}{5} \\
a_9^1 &= \frac{1}{5}\left(-4+4+28-68+124\right) = \frac{84}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1^2 &= \frac{1}{5}\left(1+1+1+1+1\right) = 1 \\
a_2^2 &= \frac{1}{5}\left(0+0-2+2+4\right) = \frac{4}{5} \\
a_3^2 &= \frac{1}{5}\left(-2-2+2+2+14\right) = \frac{14}{5} \\
a_4^2 &= \frac{1}{5}\left(-2-4-4-6-6\right) = \frac{-22}{5} \\
a_5^2 &= \frac{1}{5}\left(0+0+8-12-24\right) \frac{-28}{5} \\
a_6^2 &= \frac{1}{5}\left(4+8-8-12-84\right) = \frac{-92}{5} \\
a_7^2 &= \frac{1}{5}\left(2+14+14+34+34\right) = \frac{98}{5} \\
a_8^2 &= \frac{1}{5}\left(0+0-28+68+136\right) = \frac{176}{5} \\
a_9^2 &= \frac{1}{5}\left(-4-28+28+68+476\right) = \frac{540}{5}
\end{aligned}
$$

Finalmente, estimemos las probabilidades de forma que:

$$
\begin{aligned}
p(x|C_1) =& 1 + \frac{6}{5}2x_2 + \frac{2}{5}(4x_2^2-2) + \frac{22}{5}2x_1 + \frac{28}{5}4x_1x_2 + \frac{12}{5}(8x_1x_2^2 - 4x_1) + \frac{114}{5}(4x_1^2-2) + \frac{156}{5}(8x_2x_1^2 - 4x_2) \\
&+ \frac{84}{5}(16x_1^2x_2^2 - 8x_2^2 - 8x_1^2 + 4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(x|C_2) =& 1 + \frac{4}{5}2x_2 + \frac{14}{5}(4x_2^2-2) - \frac{22}{5}2x_1 - \frac{28}{5}4x_1x_2 - \frac{92}{5}(8x_1x_2^2 - 4x_1) + \frac{98}{5}(4x_1^2-2) + \frac{176}{5}(8x_2x_1^2 - 4x_2) \\
&+ \frac{540}{5}(16x_1^2x_2^2 - 8x_2^2 - 8x_1^2 + 4)
\end{aligned}
$$

5. (1 punto) Para el alfabeto $V = 0, 1$ encuentre todas las palabras con menos de 4 símbolos.

Dado que solo tenemos 2 elementos dentro de nuestro alfabeto, y esta limitando a 4 símbolos estaríamos esperando:

0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

Habría que discutir si el carácter vació es parte del alfabeto.

6. (2 puntos) Escriba el automáta de pila para el lenguaje que reconoce palindromos pares $L = \left\{ww^R : |w| \geq 1\right\}$

Primero, vamos a suponer que nuestro alfabeto se trata de $V = 0, 1$. Además iniciamos con una pila con un elemento inicial $\#$. Así nuestro autómata estará definido por:

$$S = q_2, q_3, q_4$$

$$\Sigma = (0, 1)$$

$$\Gamma = (\#, 0, 1)$$

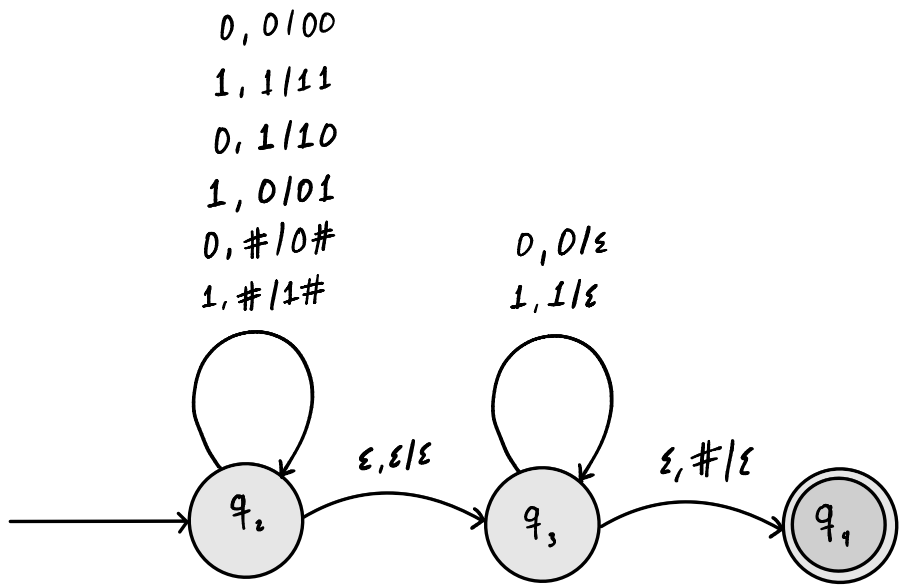
$$s = q_2$$

$$Z = \#$$

$$F = q_4$$

$$\begin{aligned}
\delta = \{ & \\
& (q_2, 1, \#) \to (q_2, 1) \\
& (q_2, 0, \#) \to (q_2, 0) \\
& (q_2, 1, 1) \to (q_2, 1) \\
& (q_2, 0, 0) \to (q_2, 0) \\
& (q_2, 1, 0) \to (q_2, 1) \\
& (q_2, 0, 1) \to (q_2, 0) \\
& (q_2, \epsilon, \epsilon) \to (q_3, \epsilon) \\
& (q_3, 0, 0) \to (q_3, \epsilon) \\
& (q_3, 1, 1) \to (q_3, \epsilon) \\
& (q_3, \epsilon, \#) \to (q_4, \epsilon) \\
& \}
\end{aligned}$$

Vamos a usar la notación gráfica para expresarlo.



Inicialmente tenemos un apila con el elemento # en ella. Cuando pasa al estado q_2 según sea el valor de la cadena que lea habrá diferentes casos según el valor que esta en la cima de la pila, la idea de cada caso es apilar todos los elementos, hasta que en algún punto por magia del no determinismo, pase al siguiente estado a la lectura de la mitad de la cadena, al ser un palíndromo los elementos que ahora leerá de la cadena, deberán de estar en el mismo orden que los elementos apilados. Así que solo tenemos 2 casos, al finalizar la cadena si se trato de una cadena que haya sido un palíndromo, la pila deberá de haber quedado solo con el elemento #, y pasa al estado final.

---

7. (2 punto) Escriba una grámatica libre de contexto para reconocer el lenguaje $L = \left\{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \quad i = j \quad i = k\right\}$

Sabemos que una gramática libre de contexto esta formada de $G = \{V, T, P, S\}$. En este caso, al saber el alfabeto sabemos que los valores terminales serán a, b, c. Y por otro lado, para las reglas, iniciemos pensando en en casos base:

Caso i = j

1. $i = 0 = j$ y $k \neq 0$

   Los valores posible son solo: $c....c$. Por lo tanto creemos una regla para generar este valor:

$$S \longrightarrow C$$
$$C \longrightarrow cC$$
$$C \longrightarrow c$$

2. $i = j \neq 0$ y $k = 0$

   Los valores posibles son: $a...ab...b$. Por lo tanto creemos una regla para generar este valor:

$$S \longrightarrow D$$
$$D \longrightarrow aDb$$
$$D \longrightarrow ab$$

3. $i = j \neq 0$ y $k \neq 0$

   Los valores posibles son: $a...ab...bc..c$. Por lo tanto creemos una regla para generar este valor:

$$S \longrightarrow DcC$$

Caso i = k

1. $i = 0 = k$ y $j \neq 0$

   Los valores posible son solo: $b....b$. Por lo tanto creemos una regla para generar este valor:

$$S \longrightarrow B$$
$$B \longrightarrow bB$$
$$B \longrightarrow b$$

2. $i = k \neq 0$ y $j = 0$

   Los valores posibles son: $a...ac...c$. Por lo tanto creemos una regla para generar este valor:

$$S \longrightarrow E$$
$$E \longrightarrow aEc$$
$$E \longrightarrow ac$$

3. $i = k \neq 0$ y $j \neq 0$

   Los valores posibles son: $a...ab..bc...c$. Por lo tanto creemos una regla para generar este valor:

$$S \longrightarrow aFc$$
$$F \longrightarrow aFc$$
$$F \longrightarrow B$$

Por lo tanto nuestra gramática estará dada por:

$$T = \{a, b, c\}$$
$$V = \{S, B, C, D, E, F\}$$

$$P = \begin{cases} S \to C & C \to cC & E \to aEc \\ S \to D & C \to C & E \to ac \\ S \to DcC & D \to aDb & F \to aFc \\ S \to B & D \to ab & F \to B \\ S \to E & B \to bB & \\ S \to aFc & B \to b & \end{cases}$$

8. (1 punto) Opinión del curso (qué salió bien, qué se puede mejorar, qué cosas se deberían tratar o quitar, estaban preparados para tomar el curso, etc.)

Personalmente, me gustó el curso, siendo honesto esperaba algo mucho más avanzado considerando el nivel que tuvo el curso antecedente (Paradigmas de la Computación), sin embargo, fue mucho más formativo en cuanto a la teoría, lo que a mí en particular me ayuda a entender mejor a la hora de programar. Aunque sí me hubiera gustado un poco más de práctica con código. Un detalle importante, y que sí creo que se debe de mantener es todo el tema relacionado a negocio, a veces esta universidad puede pecar de ser demasiado enfocada a la academia, y considerando el tiro de esta carrera, no creo que sea lo mejor necesariamente. El ritmo del curso al principio se podría sentir un tanto lento, sin embargo, con el paso del semestre me pareció incluso apresurado, especialmente con el tema de clasificación por probabilidad y los autómatas y gramáticas. Me hubiera gustado que se le hubiera dedicado más tiempo a estos últimos temas. Y en definitiva el Kahood no me gustó, es decir, fue divertido hasta que se mencionó que contaba para la calificación. Quizá mantenerlo, pero aclarar desde un principio o como actividad de repaso estaría padre.

Happy Pride Month