Гафни Даниил, 306 группа, физический факультет МГУ

Постановка задачи

Используя схему бегущего счета и итерационные методы, решить задачу для квазилинейного уравнением переноса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{2+\cos u}{1+(2u+1+\sin u)^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \le 1, \\ \hfill u(x,0) = \cos\dfrac{\pi x}{2}, \\ \hfill u(0,t) = 1 + \dfrac{1}{2}\arctan t. \end{cases}$$

Исследование задачи

Иследование характеристик

В точках пересечения проекций его характеристик решение будет разрывным. Посмотрим, как будут вести себя проекции характеристик в заданных областях. Уравнение характеристик будет иметь вид $dt = \frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}dx$

Преобразуем его.

$\int_{t_o}^{t} dt = \int_{x_o}^{x} \frac{1+(2u+1+\sin u)^2}{2+\cos u}dx$

$t = \frac{1+(2u_0+1+\sin u_0)^2}{2+\cos u_0}(x - x_0) + t_0$

Воспользуемся начальным и граничным условиями для получения двух семейств кривых:

1) $t_0 = 0: \quad t = \frac{1+(2\cos\frac{\pi x_0}{2}+1+\sin(\cos\frac{\pi x_0}{2})^2)}{2+\cos(\cos\frac{\pi x_0}{2})}(x - x_0)$

2) $x_0 = 0: \quad t = \frac{1+(3+\arctan t_0+\sin(1+\frac{1}{2}\arctan t_0))^2}{2+\cos(1+\frac{1}{2}\arctan t_0)}x + t_0$

Необходимо будет построить соответсвующие графики и проверить их на отсутствие пересечений кривых.

Для удобства введем обозначение:

$C(u) = \frac{2+\cos u}{1+(2u+1+\sin u)^2}$

Проверка сходимости по спектральному критерию Неймана

Зафиксируем коэффициент перед $\frac{\partial u}{\partial x}$ Возьмём какую-нибудь произвольную точку (x_o, t_0). Тогда разностная схема будет иметь вид

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m + y_{n+1}^{m+1} - y_{n+1}^m}{2h_t} - \frac{\text{C}y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1} + y_{n+1}^m - y_n^m}{2h_x} = 0$$

Будем искать решение в виде $y_{n+1}^{m+1} = \lambda^m e^{i\alpha n}$. Подставляя, получаем:

$\lambda = \frac{1+e^{i\alpha}-\frac{Ch_t}{h_x}(e^{i\alpha}-1)}{1+e^{i\alpha}+\frac{Ch_t}{h_x}(e^{i\alpha}-1)}$

Из этого выражения видно, что условие $|\lambda(\alpha)|$≤1 выполнено для любых значений шага по времени и координате, следовательно, спектральный критерий Неймана также выполнен для любых τ и h.

Численное решение

Сетка

Введем в области

$$\Omega = \{(x,t) : 0 \le x < 4,\ 0 < t < 4\}$$

сетку с шагом h_x по x и шагом h_t по t:

$$\omega_{h_x,h_t} = \begin{cases} x_n = n \cdot h_x, h_x = \frac{1}{N}, n = \overline{0, N} \\ t_m = m \cdot h_t, h_t = \frac{1}{M}, m = \overline{0, M} \end{cases}$$

На $\omega_{h_x,\, h_t}$ будем рассматривать сеточную функцию $y_n^m = u(x_n, t_m)$

Шаблон

Перепишем исходное уравнение, приведя его к дивергентному виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\arctan(2u + \sin u + 1))}{\partial x} = 0$$

Для удобства введем обозначение:

$C\_i(u) = \arctan(2u + \sin u + 1)$ - первообразная функции $C(u)$

Для рассматриваемой задачи будем использовать четырехточечный шаблон. Он безусловно устойчив и аппроксимирует задачу как $O({h_x}^2 + {h_t}^2)$.

Таким образом, разностная схема задачи имеет вид:

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m + y_{n+1}^{m+1} - y_{n+1}^m}{2h_t} - \frac{C\_i(y_{n+1}^{m+1}) - C\_i(y_n^{m+1}) + C\_i(y_{n+1}^m) - C\_i(y_n^m)}{2h_x} =$$

При помощи метода Ньютона найдем корень этого уравнения - y_{n+1}^{m+1} и перейдем к вычислению следующей точки

Также начальное и граничное условия:

$$\begin{cases} y_n^0 = \cos\frac{\pi n h_x}{2} \\ y_0^m = 1 + \frac{1}{2}\arctan(m h_t) \end{cases}$$

```
## Код
```

Код

Импортируем необходимые библиотеки

```
[1]
import numpy as np

import plotly
import plotly.graph_objs as go

import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation

import warnings

from IPython.display import clear_output, HTML, display
```

Проведем необходимые настройки

```
[2]
plotly.offline.init_notebook_mode()
warnings.filterwarnings('ignore')
%matplotlib inline
%config InlineBackend.figure_format = 'retina'

# Оформление графиков plotly
layout = go.Layout(
    scene = dict(
    xaxis = dict(
        title='x',
        gridcolor="rgb(255, 255, 255)",
        zerolinecolor="rgb(255, 255, 255)",
        showbackground=True,
        backgroundcolor="rgb(200, 200, 230)"),

    yaxis = dict(
        title='y',
        gridcolor="rgb(255, 255, 255)",
        zerolinecolor="rgb(255, 255, 255)",
        showbackground=True,
        backgroundcolor="rgb(230, 200,230)"),

    zaxis = dict(
        title='u(x, t)',
        gridcolor="rgb(255, 255, 255)",
        zerolinecolor="rgb(255, 255, 255)",
```

```
            showbackground=True,
            backgroundcolor="rgb(230, 230,200)",),),
        width=800, height=600,
        margin=dict(
            r=20, b=10,
            l=10, t=10),
        )
```

Создадим класс TransportEquationSolver

```
[3]
class TransportEquationSolver:
    '''
    Класс для численного решения уравнения переноса.
    Пока что не поддерживает неоднородное уравнение, поэтому в
    качестве функции неоднородности и ее производной передается
    функция, всегда возвращающая ноль.
    '''
    state_functions = False

    def __init__(self, X_START=0, X_END=1, T_START=0, T_END=1,
                 N=100, M=100, error=0.0001):

        # Задание параметров сетки
        self.X_START = X_START
        self.X_END = X_END
        self.T_START = T_START
        self.T_END = T_END
        self.N = N
        self.M = self.N  # На данный момент это сделано,
        #потому что иначе будет выводиться неполный график (будет
исправлено)

        # Задание параметров метода Ньютона
        self.error = error
        self.i_max = 10000

        # Создание сетки и шагов по x и t
        self.x = np.linspace(X_START, X_END, N)
        self.t = np.linspace(T_START, T_END, M)
        self.dx = self.x[1] - self.x[0]
        self.dt = self.t[1] - self.t[0]

    def initialize(self, C, C_integral , condition_initial,
condition_border,
                   heterogeneity, heterogeneity_div):
        '''
```

```
        Метод инициализации данных. Принимает на вход функцию C,
ее производную, а так же
        начальное и граничное условия, неоднородность и
производную неоднородности.
        '''

        # Определение функций
        self.C = C
        self.C_integral = C_integral
        self.condition_initial = condition_initial
        self.condition_border = condition_border
        self.heterogeneity = heterogeneity
        self.heterogeneity_div = heterogeneity_div

        # Создание матрицы u и заполнение соответствующих строки
и столбца начальным и граничным условиями
        self.u = np.empty((self.N, self.M))

        self.u[0] = condition_border(self.t)
        self.u.T[0] = condition_initial(self.x)


        # Значения функции u(x, t) в точка, на которых в данный
момент будет выполняться шаблон
        self.__u11 = self.u[0][0]
        self.__u12 = self.u[0][1]
        self.__u21 = self.u[1][0]

    def calculate_u(self):
        '''
        Главный метод класса. Вычисляет значения u(x, t) на всей
сетке.
        '''

        print('Calculating...')
        for n in range(1, self.N):
            clear_output(wait = True)
            print(f'Progress: {round(n/(self.N-1)*100)}%')
            for m in range(1, self.M):

                # Определение точек, на которых будет работать
шаблон
                self.__u11 = self.u[n-1][m-1]
                self.__u21 = self.u[n][m-1]
                self.__u12 = self.u[n-1][m]

                # Вычисление значения u в новой точке
                u_new = self.solve_newton(self.template,
self.template_div, self.__u11, self.i_max)
                self.u[n][m] = u_new
        print('Done!')
```

```python
    def template(self, u22):
        '''
        Четырехточечный шаблон.
        '''

        return 0.5*(self.__u12 - self.__u11 + u22 -self.__u21) /
self.dt + 0.5*(self.C_integral(u22) -

                    self.C_integral(self.__u12) +

                    self.C_integral(self.__u21) -

                    self.C_integral(self.__u11)) / self.dx

    def template_div(self, u22):
        '''
        Производная четырехточечного шаблона.
        '''

        return 0.5 / self.dt + 0.5*(self.C(u22)) / self.dx

    def solve_newton(self, f, f_div, x0, i_max):
        '''
        Численное вычисление корня функции при помощи метода
Ньютона.
        Принимает на вход функцию, ее производную,
        начальное приближение и максимальное число итераций.
        '''

        x = x0
        i = 0
        while abs(f(x)) > self.error and i < i_max:
            x += (-f(x) / f_div(x))
            i+=1
        return x


    def characteristics(self, x, x0=0, t0=0, first=True):
        '''
        Метод, который позволяет получить функции характеристик
        first = True - t0 = 0
        first = False - x0 = 0
        '''

        if first:
            t0 = 0
            return 1/self.C(self.condition_initial(x0))*(x - x0)
        if not first:
            x0 = 0
            return 1/self.C(self.condition_border(t0))*x + t0
```

```
    def plot_characteristics(self, x_start, x_end, t_start,
t_end, how_many):
        '''
        Метод, который строит график характеристик.
        Принимает на вход четыре числа - границы по x и t,
        внутри которых будут построены характеристики,
        а так же число кривых для построения.
        '''

        f, axs = plt.subplots(2,2,figsize=(14,7))
        f.suptitle('Characteristics plot')
        plt.subplot(1, 2, 1)
        plt.xlim(self.X_START, self.X_END)
        plt.ylim(t_start, t_end)
        plt.title('First family')
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('t')
        x_for_char = np.linspace(x_start, x_end, how_many)
        t_for_char = np.linspace(t_start, t_end, how_many)
        for x0 in x_for_char:
            plt.plot(self.x, self.characteristics(self.x, x0 =
x0))
        plt.subplot(1, 2, 2)
        plt.title('Second family')
        plt.xlim(self.X_START, self.X_END)
        plt.ylim(t_start, t_end)
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('t')
        for t0 in t_for_char:
            plt.plot(self.x, self.characteristics(self.x, t0 =
t0, first = False))

    def plot_conditions(self):
        '''
        Метод, который строит график начального и граничного
условий.
        '''

        f, axs = plt.subplots(2,2,figsize=(14,7))
        f.suptitle('Conditions plot', )
        plt.subplot(1, 2, 1)
        plt.title('Initial Condition')
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('u')
        plt.plot(self.x, self.u.T[0][:])
        plt.subplot(1, 2, 2)
        plt.title('Border Condition')
        plt.xlabel('t')
        plt.ylabel('u')
        plt.plot(self.t, self.u[:][0])

    def visualise_evolution(self, filename = 'basic_animation'):
```

```
        '''
        Метод, который возвращает анимацию временной эволюции
u(x, t),
        а так же записывает ее в .mp4 видеофайл.
        '''

        fig = plt.figure(dpi = 200, figsize = (3, 2))
        ax = plt.axes(xlim=(self.X_START*0.9, self.X_END*1.1),
                      ylim=(np.min(self.u)*0.9,
np.max(self.u)*1.1))

        ax.set_title('Evolution of u(x, t)')
        ax.set_ylabel('u(x, t)', fontsize = 12)
        ax.set_xlabel('x', fontsize = 12)

        line, = ax.plot([], [], lw=2)

        textvar = fig.text(0.15, 0.15, '', fontsize = 20)

        def init():
            line.set_data([], [])
            return line,

        def animate(i):
            x = self.x
            y = self.u.T[i]

            textvar.set_text(f't = {round(self.t[i], 1)}')
            line.set_data(x, y)
            return line,

        anim = animation.FuncAnimation(fig, animate,
init_func=init,
                                       frames=self.N,
interval=5000/self.N, blit=True)
        plt.close(fig)
        anim.save(filename + '.mp4', fps=30, extra_args=['-
vcodec', 'libx264'])

        return anim

    def plot_u(self, filename='OMM_Task_1', online=True):
        '''
        Метод, который строит 3D график численного решения.
        '''

        data = [go.Surface(x = self.x, y = self.t, z = self.u.T,
colorscale = 'YlGnBu')]
        fig = go.Figure(data = data, layout = layout)  # Стиль
графика определен в начале программы

        if not online:
```

```
            return plotly.offline.iplot(fig, filename = filename)
 # построение графика оффлайн влечет за собой
                                        # большой вес ноутбука,
но построение почти мгновенное
        if online:
            return plotly.plotly.iplot(fig, filename = filename)
 # Построение графика онлайн - маленький вес ноутбука,
                                        # сравнительно долгое
построение
```

Определим функции конкретной задачи

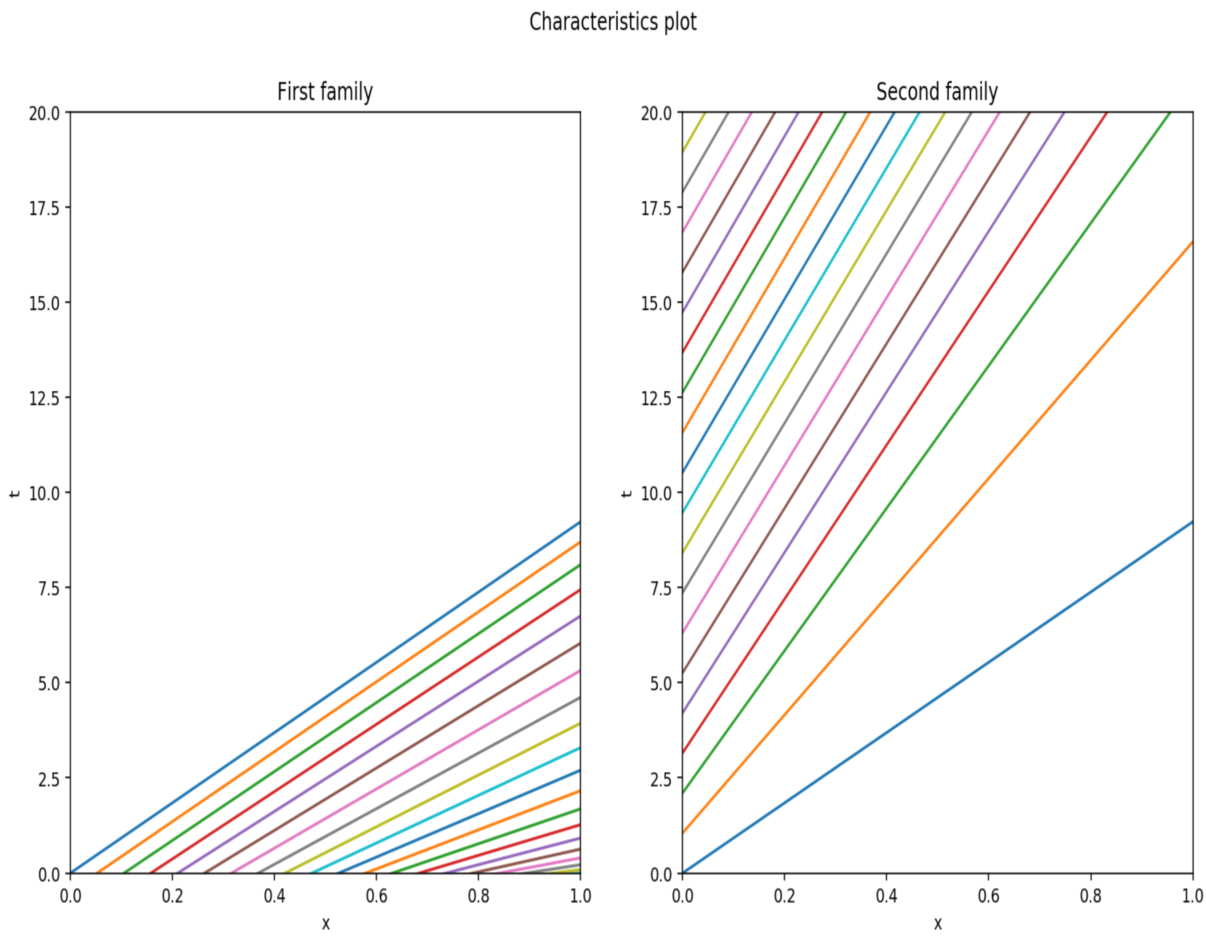
```
[4]
def C(u):
    return (2 + np.cos(u)) / (1 + 2*u + 1 + np.sin(u))**2

def C_integral(u):
    return np.arctan(2*u + np.sin(u) + 1)

def condition_initial(x):
    return np.cos(np.pi*x/2)

def condition_border(t):
    return 1 + 0.5*np.arctan(t)

def heterogeneity(u):
    return 0

def  heterogeneity_div(u):
    return 0
```

Создадим объект класса TransportEquationSolver, инициализируем нашу задачу.

```
[5]
solver_small = TransportEquationSolver(N = 100, M = 100)
solver_small.initialize(C, C_integral, condition_initial,
condition_border,
                            heterogeneity,  heterogeneity_div)
```

Построение характеристик

```
[6]  solver_small.plot_characteristics(0, 1, 0, 20, 20)
```



Как видно, в заданных областях пересечений нет.

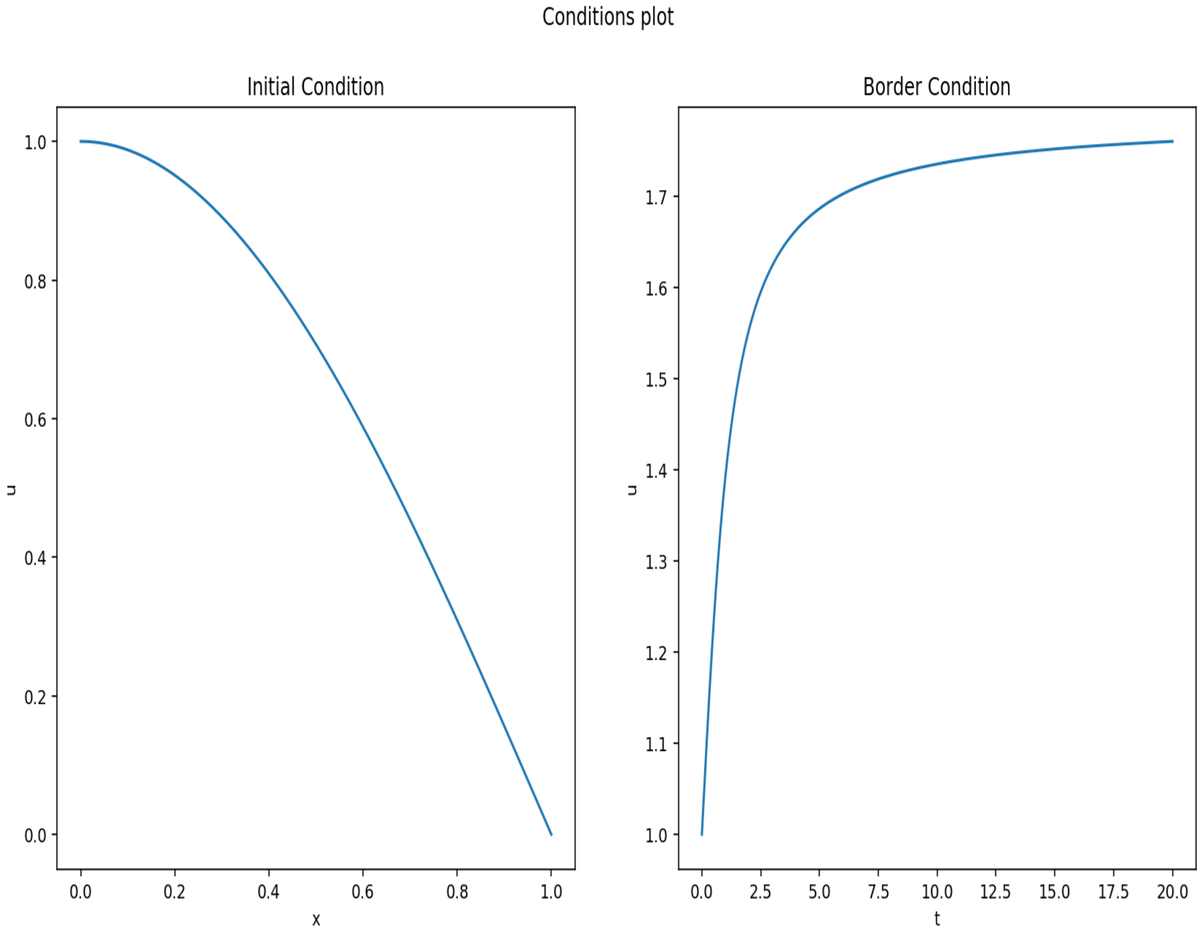
Следовательно, нет так называемого опрокидывания волны, и во всей области решение будет представимо через разностную схему.

Возьмем 20 за вернюю границу t и создадим объект класса TransportEquationSolver с нужными нам параметрами.

```
[7]  solver = TransportEquationSolver(T_END = 20, N = 500, M = 500)
     solver.initialize(C, C_integral, condition_initial,
     condition_border,
                          heterogeneity,  heterogeneity_div)
```

Построим график начального и граничных условий.

```
[8]    solver.plot_conditions()
```



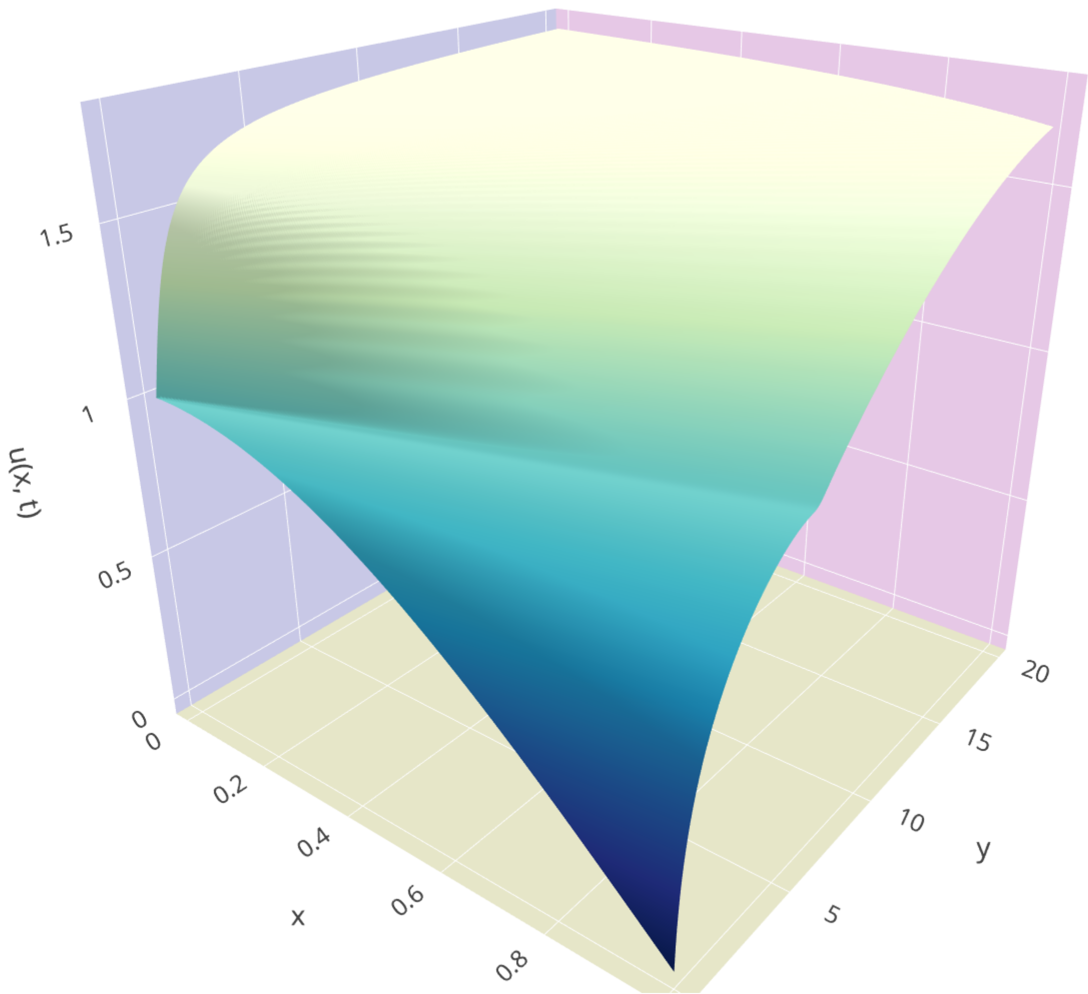
Вычислим значение функции u(x, t) во всех точках сетки.

```
[ ]    solver.calculate_u()
```

```
Progress: 100%
Done!
```

График численного решения задачи

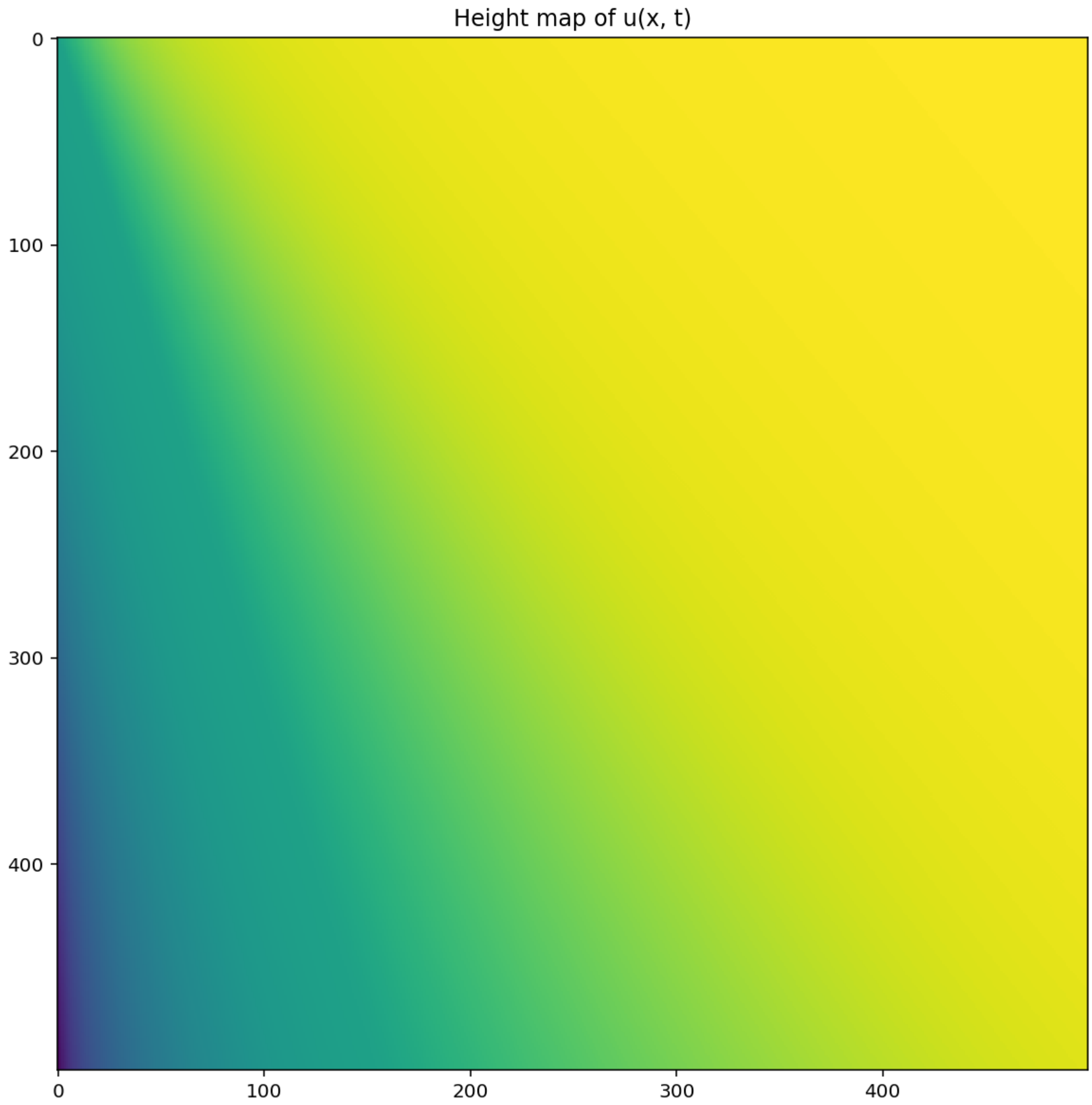
```
[10]    solver.plot_u(online = True)
```



"Карта высот" численного решения

```
[11]    plt.figure(figsize = (10, 10))
        plt.title('Height map of u(x, t)')
        plt.imshow(solver.u)
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x17310615c18>
```



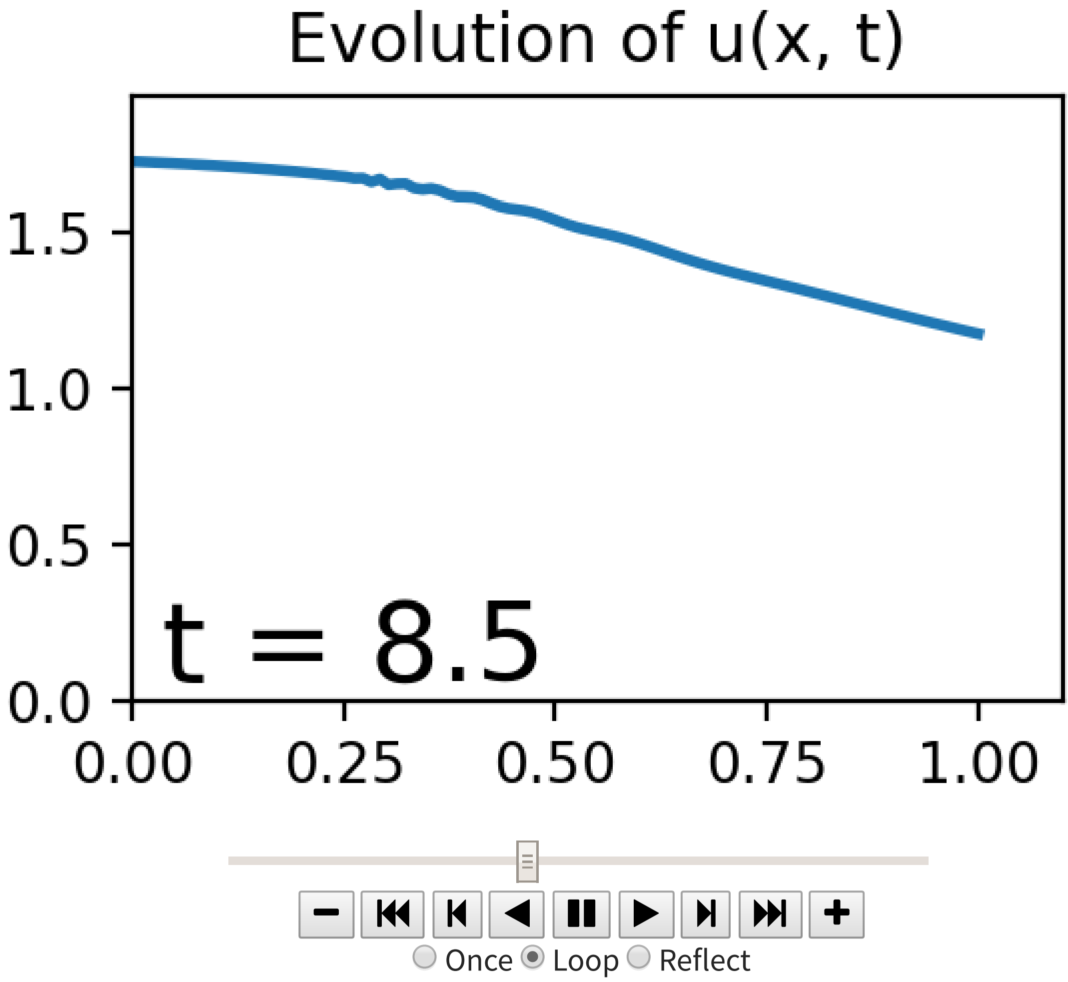
Видео визуализация численного решения

Чтобы полученные файлы не занимали слишком много места, будем работать с большим шагом по сетке.

```
solver_anim = TransportEquationSolver(N = 100, M = 100, T_END = 20)
solver_anim.initialize(C, C_integral, condition_initial, condition_border,
                                       heterogeneity,  heterogeneity_div)
solver_anim.calculate_u()
```

```
Progress: 100%
Done!
```

```
[13]  anim = solver_anim.visualise_evolution(filename =
      'small_animation')
      HTML(anim.to_jshtml())
      plt.close()  # <-- Это нужно, чтобы обойти глупый баг,
                   #     который строит ненужный график после первого
      запуска
      HTML(anim.to_jshtml())
```



😉