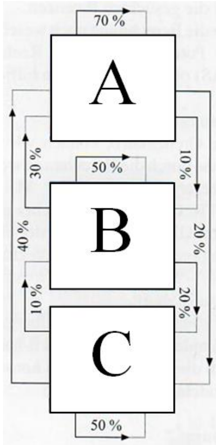
Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Marc Zschiegner

Lineare Algebra
Sommersemester 2019

2. Probeklausur

1 Drei Geschäfte A, B und C konkurrieren um ihre Kunden. Der rechts abgebildete Übergangsgraph zeigt die monatlichen Kundenströme.

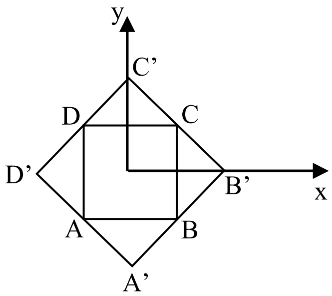


(a) Stellen Sie die Übergangsmatrix auf.
(b) In diesem Monat lauten die Marktanteile:

A: 43%, B: 22%, C: 35%.

Berechnen Sie die Verteilung nach einem Monat und nach zwei Monaten.
(c) Berechnen Sie die stabilen Marktanteile, die sich langfristig einstellen.

2 Das Quadrat ABCD werde wie folgt auf das Quadrat A'B'C'D' abgebildet.



(a) Beschreiben Sie, aus welche elementaren linearen Abbildungen sich die obige Abbildung zusammensetzt. Erläutern Sie, ob die Reihenfolge der Abbildungen eine Rolle spielt.
(b) Bestimmen Sie eine Abbildungsmatrix der gesamten linearen Abbildung.

3 Die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung laute

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Kern von A.
(b) Berechnen Sie alle Fixpunkte von A.
(c) Bestimmen Sie das Bild der folgenden Geraden unter der Abbildung A:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbf{R}.$$

(d) Interpretieren Sie die durch A dargestellte Abbildung geometrisch.

4 Die Menge B_t von Vektoren, der Vektor $\vec{v}$ und die Abbildungsmatrix A (in der Standardbasis) seien wie folgt gegeben:

$$B_t = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t+2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen t die Menge B_t eine Basis des $\mathbf{R}^2$ ist.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$ bzgl. der Basis B_5.

(c) Rechnen Sie die Abbildungsmatrix A in die Basis B_5 um.

5 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen zugehörigen Eigenvektor.

(c) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist. Geben Sie die Diagonalmatrix B und eine Transformationsmatrix T mit $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ an.

6 Wandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen von der algebraischen Darstellung in die Exponentialdarstellung bzw. umgekehrt um:

(a) $7i$ (b) $1 + \sqrt{3}\,i$ (c) $5 \cdot e^{i \cdot 30°}$ (d) $2 \cdot e^{i \cdot \pi/4}$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen im Bereich der komplexen Zahlen:

(e) $x^4 = 16$ (f) $x^2 + 9 = 0$ (g) $x^3 - 6x^2 + 10x = 0$ (h) $x^3 = -i$

Viel Erf☺lg!

Korrigieren Sie sich selbst! Die Lösungen finden Sie demnächst bei StudIP.
Bei jeder Aufgabe können 10 P. erreicht werden. Werten Sie die besten 5 Aufgaben.