Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Marc Zschiegner

Diskrete Strukturen
WS 2020/21

10. Übungsblatt

Teamaufgaben für die Woche vom 25. bis 29.01.2021. *Lösen Sie die folgenden Aufgaben während der Übung gemeinsam in einer Kleingruppe in einem Breakout-Raum. Nach der vereinbarten Zeit kehren Sie in den Übungsraum zurück, wo Sie Ihre Ergebnisse präsentieren können.*

A Den folgenden Satz kann man mit vollständiger Induktion beweisen: *Für jede natürliche Zahl* $n \geq 1$ *gilt:* $1 + 3 + 5 + ... + (2n–1) = n^2$.
Kreuzen Sie an, was im Induktionsschritt zu zeigen ist:
Wenn für eine natürliche $n \geq 1$ gilt $1 + 3 + 5 + ... + (2n–1) = n^2$, dann gilt …

- ❑ $1 + 3 + 5 + ... + 2n = (n+1)^2$
- ❑ $1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$
- ❑ $1 + 3 + 5 + ... + (2(n+1)–1) = n^2$

B Beweisen Sie $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + ... + n \cdot 2^n = (n–1) \cdot 2^{n+1} + 2$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$.

C Zeigen Sie durch Induktion nach n, dass für die Fibonacci-Zahlen gilt

$$1 + f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2}.$$

Hausaufgaben bis zum 31.01.2021. *Geben Sie die folgenden Aufgaben wie folgt ab: Schreiben Sie die Lösungen aller Aufgaben in eine einzige, max. 10 MB große PDF-Datei „Vorname_Nachname_BlattNr.pdf“ (Beispiel: „Max_Mustermann_10.pdf“). Laden Sie diese Datei bis spätestens 23:59 Uhr am Sonntagabend in den passenden Ordner „Abgaben der Hausaufgaben“ Ihrer StudIP-Übungsgruppe hoch.*

1 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n: [5 P]

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

2 Beweisen Sie die **geometrische Summenformel** mit vollständiger Induktion. Sei q eine reelle Zahl $\neq 1$, und sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt: [5 P]

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

3 Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2.$$

In Worten: Die Summe der ersten n positiven Kubikzahlen ist gleich dem Quadrat der Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen. [5 P]

Worüber Mathematiker lachen

In jeden Koffer passen unendlich viele Taschentücher. Beweis mit Induktion: Eines mehr passt immer noch rein.