Notizen Diskrete Strukturen

Was kommt in die Klausur? - Eine Roadmap zum lernen und üben

Was kommt in die Klausur dran?
1. Logik:

Wahrheitswertetafel ausfüllen,

Beweise

Umformungen

Vereinfachungen

(AND, OR, XOR, IMPLIKATION, FÜRALLE, ES EXISTIERT, ...)

(sprachlich ¡ – ¿ formal)

2. Mengen:

Mengen bestimmen:

aus vorgegebenen Mengen andere Mengen bilden (schnittmenge / vereinigung / verneinung, etc...)

Rechengesetze anwenden

Mächtigkeiten von Mengen:

Summenformel (bis zu 3 Mengen)

Binomialkoeffizient können

3. Relationen und Funktionen:
Relation
Umkehrrelation
Komposition (R o S)
Äquivalenzklassen
Äquivalenzrelation

reflexiv

symmetrisch

transitiv

Funktionen:

injektiv

surjektiv

bijektiv

Umkehrfunktionen bestimmen!

4. Beweisen:
- Schubfachprinzip(auch erweitert)
- vollständige Induktion (Summenformeln, Fibonacci)

5. Graphentehorie

- Eulersche Graphen

- Eulerscher Kreis

- Offene Eulersche Linien

-Vollständige Graphen

-Vollständig bipartide Graphen

-planare Graphen

-Eulersche Polyederformel

6. Algebraische Strukturen

-Mod, ggT((erweiterter)Euklid)

-Vielfachsummendarstellung

- Gruppen(Z ohne und mit Stern)

-Multiplikationstafeln aufstellen

-inverse bestimmen

- Ringe

- Körper

06.11.2020

Allgemeine Hinweise. Zu Vorlesungen und Übungen etc. Jens betont mann könne ihm jederzeit eine E-Mail schreiben. Vorlesung ging mit Technischen Problemen vorüber. Diskrete Mathematik für Kryptographie. Endliche Strukturen. Vereint endliche Phänomene Beispiel Algebra, Graphentheorie. Dient als Grundlage für Informatik.
Logik, Mengen,, Relationen und Funktionen, Weweise, Graphentheorie, Algebraische Grundstrukturen
Induktionsbeweise Definitionen, Sätze, Beweis, Beispiele

Logik

Aussagen, Distributionen, Aussagen sind wahr oder falsch nie beides Aussage besitzt Wahrheitswert. Paradoxon, ist keine Aussage weil sie nicht wahr oder falsch ist.

20.11.2020

Junktoren boolsche Algebra
$\neq$ nicht; $\wedge$ und; $\vee$ oder
Dualität ein Satz folgt aus einem anderen wenn $\wedge$ und $\vee$ vertauscht werden.
Absorptionsgesetz
Idempotenzgesetze
Doppelte Negation (doppeltes nicht hebt sich auf)
A $\wedge$ A = A Idepotenzgesetz
Vereinfachen Sie: (A $\wedge$ B) $\vee$ ($\not A$ $\wedge$ B)
$\equiv$ B $\wedge$(A $\vee$ $\not A$)
$\equiv$ B $\wedge$ w
$\equiv$ B
Disjunktive Normalform umformen.
Mindestens zwei aus drei Schaltung und Disjunktive Normalform
WolframAlpha

Aussageform Aussageform Aussage entsteht erst indem im Term Variable eine Zahl bekommt
$A(x) = x$ ist eine Primzahl
$A(2) = w$; $A(0) = f$ Aussage entsteht durch Belegung der Variable x.
Universum ist Definitionsbereich der Aussageform.
Aussageform kann verschiedene Variablen haben von denen jede Variable ein eigene Universum haben kann.

Quantoren Allaussagen gelten für alle Elemente eines Universums einer Aussageform. Allquantor großer $\wedge$ Operator
Existenzaussage $\equiv$ verkettete Oder-Aussage es gibt mindestens ein Element; Existenzquantor
All- und Existenzaussagen können auch negiert werden

27.11.2020

Mengen
Mächtigkeiten von Mengen bestimmen
Binomialzahlen.
Def. Menge nach Cantor Mengen sind Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung.
Menge beschreiben durch Aufzählung und Beschreibung.
Reihenfolge der Objekte einer Menge ist nicht entscheidend. Objekte müssen sich klar unterscheiden.
a $\in$ M oder a $\notin$ M.
Berühnmte Mengen Zahlenmengen.
N $\in$ Z $\in$ Q $\in$ R.
Menge durch Beschreibung Y = { $x \in X | A(x)$ } Menge durch Aufzählung A = {3, 5, 7, 9}
(a, b) = {x $\in R | a < x < b$} offenes Intervall
Schnittmenge A $\cap$ B enthält alle Objekte, die in A und B enthalten sind.
Vereinigungsmenge A $\cup$ B enthält alle objekte, die in A oder in B enthalten sind.
Wenn A $\cap$ B = {} dann sind A und B disjunkte Mengen.
A $\setminus$ B gesp. A ohne B. Differenzmenge
A $\subset$ B A Teilmenge von B.
A $\subseteq$ B A ist echte Teilmenge von B.
Komplement einer Menge ist Differenz Universum und Menge.
De Morgansche Gesetze für Mengen beachten.
Beweise können relevant für Klausur sein.
es gelten Rechengesetze für Mengen.
Distributivgesetz, Komutativgesetz, Komplement, neutrales Element.

04.12.2020

Kapitel 2 Mengen
Kartesisches Produkt
A x B = (a,b) | a $\in$ A b $\in$ B
Kombination von Menggen.
Innerhalb der Ergebnismenge kommt es nicht auf die Reihenfolge an in den

Ergebnispaaren allerdings schon.

Für zwei nicht leere mengen A und B ist das kartesische Produkt das Kreuzprodukt von A und B.
Kartesisches Produkt mit leerer Menge ist eine leere Menge.

Distributivgesetz: (A $\cup$ B) x C $\equiv$ (A X C) $\cup$ (B X C)
KP kann auch über n Mengen gebildet werden.

11.12.2020

Mächtigkeit von Mengen.
Anzahl der Elemente einer menge.
Mächtigkeit kann eine endliche natürliche Zahl.
Mächtigkeit kann aber auch ∞ sein.
Mächtigkeit Vereinigungsmenge $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
Disjunkte Menge —A— + —B—
Mächtigkeit von Drei endlichen Mängen
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
Summe beliebig vieler Mengen (Siebformel)
$|A_1 \cup A_2 \cup ...A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + -....$
α_1 wird mit Durschnitt einer Menge gebildet.
α_2 Wird mit Durchschnitt von zwei Mengen gebildet.
Siebformel kann nicht negativ sein.
$|AxB| = |A| * |B|$
Potenzmenge
Def. Die Menge aller Teilmengen von M heißt Potenzmenge $\mathcal{P}$(M) von M.
$|\mathcal{P}(M)| = 2^n$
k-elementige Teilmengen
Binomialzahl $\binom{n}{k}$
Anzahl der k-teiligen Teilmengen einer n teiligen Menge berechnen.
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$

Kaptiel 3 - Relationen und Funktionen

Definition einer Funktion.
Relationen, Funktionen, Abzählbarkeit
Relationen
Relationen schränken ein KP ein und betrachten eine Teilmenge mit bestimmter Beziehung.
R $\subset$ A x B; x R y

18.12.2020

Eine Relation ist eine Teilmenge eines Kathesischen Produktes.
Umkehrrelation.
R^{-1} enthält Paare aus B x A anstatt aus A x B, für alle Paare die in R enthalten sind.
Komposition verbindet zwei Relationen.
a-Element aus A b-Element aus C wenn es ein b gibt, dass in B und C verbindet.
Relationen zwischen gleichen Mengen
reflexsiv: x R x
symetrisch: $xRy \to yRx$
transitiv: x R y $\wedge$ y R z $\to$ x R z
Gleichheitsrelation: x = y
Symmetrie
$R^-1 = R$
Äquivalenzrelation sind Relationen, dir reflexiv, symmetrisch und transitiv.

08.01.2021

Def. Kongruenz Relation ist $\subset$ des kathesischen Produkts X x X.
Kongruenz Relation
$\equiv_n = \{(x, y) \in Z^2 y - x\}$ Ist ein ganzzahliges Vielfaches von n.
$\equiv_n$ ist eine Äquivalenzrelation und damit transitiv, reflexsiv und symmetrisch.
Def. modulo ist der kleinste nicht negative Rest, mit einem Teiler > 1. 0 eingeschlossen.
Def. Äquivalenzklasse sei eine Äquivalenzrelation auf der Menge X und sei x $\in$ X dann heißt die Menge: {y $\in$ X | y˜x} die Äquivalenzklasse von x.
Anmerkung: Beweisen wird teil der Klausur. Vollständige Indunkttion.
Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt.
Jedes Element x $\in$ X liegt in einer Äquivalenzklasse.
Def. Partition Menge von Äquivalenzklassen von X sind paarweise disjunktgge Teilmengen von X die zusammen Z ergeben.
Def. injenktiv Eine Funktion f bildet für zwei x werte auf einen y wert ab.
Def. surjektiv wenn es für jedes y ein x. Kein y bleibt unbesetzt.
Def. bijektiv wenn f surjektiv und injektiv.
Einache Erklärung auf Youtube

15.01.2021

jede bijektive Funktion ist umkehrbar.
Umkehrfunktion heißt: $f^{-1}(x)$.
$f^{-1}(x)$ hebt $f(x)$ auf.
Definitions- und Wertebereich tauschen.
Funktion umkehren:

1. ersetze f(x) durch y.
2. ersetze x durch y.
3. löse nach y auf.

Verfahren gilt nur für bijektive Funktionen.
Falls $f(x)$ nicht bijektiv schränke Definitionsbereich ein!!!!!!!
Abzählbarkeit
Def. Zwei Mengen A, B heißen gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung (Funktion) von A nach B gibt. Def. Eine Menge heißt Abzählbar, wenn sie endlich ist oder gleichmäßig zu N ist.
Überabzählbare Menge z.B. Potenzmenge.
Kapitel 4 Beweise
Beweisarten, Schubfachprinzip, Vollständige Induktion
Mathematische Sätze müssen allgemein bewiesen oder durch Gegenbeispiel widerlegt werden.
Jeder Satz ist eine Wenn-Dann-Aussage (A $\rightarrow$ B)
Aus einer Voraussetzung folgt eine Behauptung.
Kontraposition Anstatt A $\rightarrow$ B wird $\not A \rightarrow \not B$
Widerspruch um A $\rightarrow$ B zu zeigen nimmt man an B ist falsch. Dies führt zu einem Widerspruch.
Beweis von Äquivalenzen A $\rightarrow$ B $\wedge$ B $\rightarrow$ A. Beide Richtungen zeigen.

29.01.2021

Kapitel 5 Graphentheorie
Bäume Planarität
Graphen bestehen aus Ecken und kannten. Eine Kante verbindet zwei Punkte. Ein Graph ist ein Tupel aus der Menge der Knoten und Kanten.
ungerichteter Graph Linie verbindet zwei Punkte (Teilmenge der Punkte)
gerichteter Graph Punkte werden durch einen Pfeil verbunden (Relation auf die Eckenmenge)
Vollständiger Graph alle Ecken sind mit je einer Kante verbunden.
vollständiger Graph hat n über zwei Kanten.
Graphen sind zusammenhängend, wenn jede Ecke über eine Folge von Kanten erreicht werden kann.
Grad einer Ecke ist die Anzahl der ausgehenden Kanten.
Bei einem vollständigen Graphen K_n hat jede Ecke den Grad n - 1.
Kantenzug ist eine Folge von Kanten.
eulerscher Kreis Kantenzug wenn jede Kante unter den Kanten k1 bis ks des Kantenzugs auftaucht.
zzgl. der letzte Punkt ist der erste Punkt.
Eulerscher Graph ist ein Graph der einen eulerschen Kreis besitzt.
Wenn ein Graph eulersch ist hat jede Ecke einen geraden Grad.
Offene eulersche Linie durchläuft jede Kante einmal. Die Anfangsecke darf aber ungleich der Endecke sein.

Graph enthält eulersche Linie wenn er genau zwei Ecken ungeraden Grades enthält.
Bäume
Ein Baum ist ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält.
Planarität
Graph kann ohne Überschneidung von Kanten in der Ebene gezeichnet werden.
eulersche Polyederformel: n - m + g = 2
n Ecken, m Kanten, g Gebiete.
bipartit ein Graph bekommt schwarze und weiße Ecken. Jede Kante verbindet einen schwarzen und einen weißen Punkt.
vollständig bipartit wenn alle weißen mit allen schwarzen Ecken verbunden.

05.02.2021

Gruppen Abgeschlossenheit, Assoziativität, inverses Element, Kommutativität
diverse Beispiele für Gruppen.
Eine Gruppe muss ein neutrales Element enthalten.
teilerfremd
Zwei Zahlen sind teilerfremd wenn sie nur die 1 als gemeinsamen Teiler haben.
ggT Algorithmus, größter gemeinsamer Teiler.
ggT kann als Vielfachsumme der Originalzahlen dargestellt werden.
Sind die Originalzahlen teilerfremd kann die 1 als Vielfachsumme dargestellt werden.
Auf diesen Operationen beruht z.B. der RSA Algorithmus.

19.02.2021

Ringe, Körper
Ring sind diskrete Strukturen in denen man addieren und multiplizieren kann.
FÜr die Addition müssen alle Gruppenaxiome gelten.
Addition: abgeschlossen, assoziativ, neutrales Element, kommutativ
Multiplikation: Abgeschlossenheit, Assoziativität
Distributivgeseteze
gerühmter Ring: Menge der ganzen Zahlen.
Ring: Addition mod n und Multiplikation mod n
Polynomring R[x]
Ganze Zahlen und Polynome sind beides Ringe. Darauf basiert Polynomdivision
algebraischer Körper: alle Gesetze für Ring + multiplikative Inverse
Beispiel Q und R
Endliche Körper
Wenn p eine Primzahl ist ist Z_p ein endlicher Körper
Es gibt einen Körper mit q Elementen, genau dann wenn q Primzahlpotenz