Lsg Vorschlag LAÜ05 Maximilian Maag

Aufgabe A

- falsch
- richtig
- richtig
- falsch
- richtig

Aufgabe B

a)

Annahme: Das Dreieck ABC umfasst die Winkel α, β und γ.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}$$
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{-1 \cdot 5 + 4 \cdot -1 + -1 \cdot 2}{\sqrt{1^2+4^2+1^2} \cdot \sqrt{5^2+1+2^2}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{-1 \cdot -5 + 4 \cdot -1 + -1 \cdot 2}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{30}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{5-4-2}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{30}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{30}}$$
$$\cos(\alpha) \approx 0{,}0430331$$
$$\alpha = \cos^{-1}$$
$$\alpha \approx 61{,}7471°$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b)

A $= \frac{1}{2} \cdot \mid \vec{AB}$ x $\vec{AC} \mid$
$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
A $= \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} \right\|$
A $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7^2 + 7^2 + 21^2}$
A $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{49 + 49 + 441}$
A $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{539}$
A = 11,6082

Aufgabe 1

Bilde Ebene in Normalform.

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ X $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix}$

Hilfsebene E mit $\vec{n}$

E: $\begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 0$

Überführung in Koordinatenform:

E: -7x - 14y -14z = 63 + 42 112
E: -7x - 14y -14z = 105 + 112
E: -7x - 14y -14z = 217

Überführung in hesse'sche Normalform:

$\|\vec{n}\| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 14^2}$
$\|\vec{n}\| = \sqrt{49 + 196 + 196}$
$\|\vec{n}\| = \sqrt{49 + 196 + 196}$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{441}$
$\|\vec{n}\| = 21$

Die H-Form liegt vor, wenn die Normalform um den Betrag des Normalvektors dividiert wird.

E: $\frac{1}{21}\ \| -7x - 14y - 14z - 217\| = 0$

Stützpunkt von h in E liefert die Distanz d:

d = $\frac{1}{21} \cdot \| -7 \cdot 4 - 14 \cdot 2 - 14 - 217\|$
d = $\frac{1}{21} \cdot \| -28 - 28 - 14 - 217\|$
d = $\frac{1}{21} \cdot \| -70 - 217\|$
d = $\frac{1}{21} \cdot \| -287\| = 0$
d = $\frac{1}{21} \cdot 287$

$d = 13,6667 RE$ (Raumeinheiten)

Aufgabe 2

a)

E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$

b)

E: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1111111111 \\ 2222222222 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

c)

E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

d)

Ebene E in Parameterform

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{r} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{s} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Überführung in Normalform

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Aufgabe 3

a)

Berechnung der Höhe der Pyramide als Abstand des Punktes S und dem Durchstoßpunkt einer Geraden h, die senkrecht auf der Ebene E stehe.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix}$$

E in Normalform:

$$E: \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

E in Koordinatenform:

E: 12x -12y + 36z - 72 = 0
E: 12x -12y + 36z = 72
E: 2x -2y + 6z = 12

Hilfsgerade h:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

h in E:
2(7 + 2r) -2(2 -2r) + 6(4 + 6r) = 12
14 + 4r -4 + 4r + 24 + 36r = 12
34 + 44r = 12
44r = -22
r = $-\frac{1}{2}$
r in h:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$
$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt P = (8 | 1 | 10) Höhe der Pyramide ergibt sich aus dem Abstand zwischen S und dem Durchstoßpunkt der Hilfsgeraden h.

$\vec{PS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$
$\vec{PS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$
h = $\|\vec{PS}\|$
h = $\sqrt{1+1+6^2}$
h = $\sqrt{1+1+36}$
h = $\sqrt{38}$
h = 6,16441
h $\approx$ 6,16 RE

b)

Für die Grundfläche der Pyramide gilt: $\|\vec{AB}x\vec{AC}\|$
$\rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \|\vec{AB}$ x $\vec{AC}\| \cdot h$
G = $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ x $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$
G = $\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix}$
V = $\frac{1}{3} * G * h$
V = 12 * 6,16441
V = 73,9729
V $\approx$ 73,973 VE (Volumeneinheiten)