LA – 2. Probeklausur

1) a) $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$ b) $M \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 50,7 \\ 18,8 \\ 30,5 \end{pmatrix}}}$, $M^2 \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 53,33 \\ 17,52 \\ 29,15 \end{pmatrix}}}$

c) $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$:

$$\begin{array}{rl} 0,7x + 0,3y + 0,4z = x & |-x \\ 0,1x + 0,5y + 0,1z = y & |-y \\ 0,2x + 0,2y + 0,5z = z & |-z \\ x + y + z = 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -0,3x + 0,3y + 0,4z = 0 & \mathrm{I} \\ 0,1x - 0,5y + 0,1z = 0 & \mathrm{II} \\ 0,2x + 0,2y - 0,5z = 0 & \mathrm{III} \\ x + y + z = 1 & \mathrm{IV} \end{array}$$

$\mathrm{III} = -\mathrm{I} - \mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{III}$ ist überflüssig!

$$\begin{array}{r} -3x + 3y + 4z = 0 \\ x - 5y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \Rightarrow \text{Lösung: } \underline{\underline{x = 0,547 \,,\; y = 0,167 \,,\; z = 0,286}}$$

2) a) Drehung um 45° um Ursprung, Streckung um $\sqrt{2}$ } Reihenfolge beliebig (weil Streckungsmatrix $= \sqrt{2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{kommutativ}}$)

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix für } \varphi = 45°} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$

3) a) $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 & \mathrm{I} \\ -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = 0 & \mathrm{II} = -2 \cdot \mathrm{I} \Rightarrow \text{überflüssig!} \end{array}$$

$5 \cdot \mathrm{I} \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x}}$

Kern $(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x \right\}$ = Ursprungsgerade mit Steigung $\frac{1}{2}$.

b) $A\vec{x} = \vec{x}$:

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = x & |-x \\ -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = y & |-y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} -\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 & \mathrm{I} \\ -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = 0 & \mathrm{II} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{I} \text{ überflüssig!} \end{array}$$

$-5 \cdot \mathrm{I} \Rightarrow +4x + 2y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = -2x}}$

Fixpunkte$(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x \right\}$ = Ursprungsgerade mit Steigung -2.

c) $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}}}$

d) Orthogonale Projektion auf die Gerade $y = -2x$.

4) a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\t+2\end{pmatrix}$ sind linear abhängig $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}2\\t+2\end{pmatrix} \Leftrightarrow r=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=4$

B_t ist Basis $\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{t \neq 4}}$.

b) $T=\begin{pmatrix}1&2\\3&7\end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}=\begin{pmatrix}7&-2\\-3&1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w}=T^{-1}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}7&-2\\-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}18\\-7\end{pmatrix}}}$

c) $B=T^{-1}\cdot A\cdot T=\begin{pmatrix}7&-2\\-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&7\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}19&45\\-8&-19\end{pmatrix}}}$

5) a) $\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\0&3-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2(3-\lambda)-(3-\lambda)=-\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda$

$=-\lambda\cdot(\lambda^2-5\lambda+6)=0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=2\ ;\ \lambda_3=3}}$

b) EV zu $\lambda_1=0$: $\left.\begin{array}{l}x+z=0\\3y=0\\x+z=0\end{array}\right\}$ z.B. $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2=2$: $\begin{array}{l}x+z=2x\\3y=2y\\x+z=2z\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-x+z=0\\y=0\\x-z=0\end{array}\right\}$ z.B. $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_3=3$: $\begin{array}{l}x+z=3x\\3y=3y\\x+z=3z\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2x+z=0\\0=0\\x-2z=0\end{array}\right\}$ z.B. $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

c) A hat 3 verschiedene Eigenwerte $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$

6) a) $7\cdot e^{i\cdot 90°}$ b) $2\cdot e^{i\cdot 60°}$ c) $4{,}33+2{,}5i\ (=5\cdot(\cos(30°)+i\cdot\sin(30°)))$

d) $2\cdot(\cos(\frac{\pi}{4})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$

e) $\mathbb{L}=\{2,-2,2i,-2i\}$ f) $\mathbb{L}=\{3i,-3i\}$

g) $x\cdot(x^2-6x+10)=0$

$x_1=0$ $x_{2,3}=3\pm\sqrt{9-10}=3\pm\sqrt{-1}=3\pm i$

h) $x^3=-i=e^{i\cdot 270°} \Rightarrow x_1=e^{i\cdot 90°}=i$

$x_2=e^{i\cdot 210°}$

$x_3=e^{i\cdot 330°}$