Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Marc Zschiegner

04.03.2021

Take-Home-Prüfung

zur Vorlesung

Diskrete Strukturen

Klausur-ID: 145 **Nachname**: Maag **Vorname:** Maximilian Jakob

Hinweise zur Bearbeitung:

- Sie können die Prüfungsaufgaben **ausdrucken** oder auf **leere Zettel** schreiben. Jeder Zettel muss mit Ihrem *Namen*, Ihrer *Matrikelnummer* und der jeweiligen *Aufgabennummer* beschriftet sein. Schreiben Sie deutlich mit einem gut lesbaren Stift, unleserliche Bearbeitungen werden nicht gewertet.
- Lesen Sie die Aufgabenstellungen vollständig. Sollten während der Prüfung Unklarheiten auftreten, können Sie der Aufsicht im **Zapp/BBB-Raum** der Vorlesung Fragen im privaten Chat stellen.
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **105 min** (= 90 min + 15 min für Download, Einscannen und Hochladen).
- **Hilfsmittel:** Taschenrechner (keine Computeralgebrasysteme!), Vorlesungsunterlagen (Folien, Übungsaufgaben), selbsterstellte Formel- und Merkzettel. **Nicht erlaubt** ist die Kommunikation mit anderen Personen außer der Prüfungsaufsicht!
- **Bewertung:** Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die **besten 5 Aufgaben** werden gewertet.

Hinweise zur Abgabe:

- Scannen Sie die Aufgaben in der richtigen **Reihenfolge** ein. Erzeugen Sie eine **einzige Pdf-Datei** mit dem **Dateinamen** „*Maag-Maximilian Jakob-DS.pdf*“ (wichtig: Nachname zuerst!). Kontrollieren Sie den Scan!
- Die PDF-Datei muss bis zum Ende der **Bearbeitungszeit** in den **StudIP-Ordner „Upload Lösungen“** hochgeladen werden. (Nur wenn es technische Probleme beim Upload gibt, dürfen Sie die Datei von Ihrer studentischen (!) E-Mailadresse an marc.zschiegner@hs-rm.de schicken.)

Viel Erf☺lg!

Aufgabe 1: Logik

(a) Seien A und B Aussagen. Stellen Sie für die folgende aussagenlogische Formel eine Wahrheitswertetafel auf:

$$(A \oplus B) \rightarrow (B \wedge \neg A).$$

Verwenden Sie 1 oder w für „wahr" und 0 oder f für „falsch".

A	B	$A \oplus B$	$\neg B$	$B \wedge \neg A$	$(A \oplus B) \rightarrow (B \wedge \neg A)$
0	0				
0					
1	0				

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an: Die obige Formel ist äquivalent zu

- ❑ $\neg A \vee B$,
- ❑ $A \vee \neg B$,
- ❑ $B \rightarrow A$
- ❑ $A \rightarrow B$.

(b) Geben Sie die De Morganschen Gesetze der Aussagenlogik an.

(c) Es seien die folgenden Aussageformen über den natürlichen Zahlen gegeben:

$P(n)$ = „n ist eine Primzahl",
$G(n)$ = „n ist gerade",
$T(n)$ = „n ist durch 4 teilbar".

Formulieren Sie die folgenden verbalen Aussagen mit Hilfe von Quantoren, Junktoren und obigen Aussageformen:

(1) Es existiert eine natürliche Zahl n, die gerade ist aber nicht durch 4 teilbar ist.

(2) Für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl t, so dass gilt: n ist genau dann durch 4 teilbar, wenn $n = 4 \cdot t$ gilt.

(3) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Wenn n eine Primzahl ist, dann ist n entweder nicht gerade oder n ist gleich 2.

Aufgabe 2: Mengen

(a) Im Universum $U = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geq 5 \text{ und } x \leq 15\}$ seien die folgenden Mengen gegeben:

$A = \{x \in U \mid x \text{ ist ungerade und } x > 5\}$,
$B = \{8, 9, 10, 11, 12\} \cup \{16\}$,
$C = \{x \in U \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$.

Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(1) $A \cap B \cap C$

(2) $A \setminus (B \cup C)$

(3) $\overline{A \cup B}$

(4) $(A \setminus C) \times (B \setminus \{10, 11, 12, 16\})$

(b) Für zwei Mengen A und B sei der Operator ■ definiert als $A \blacksquare B = \overline{A \cup B}$. Beweisen Sie mit Hilfe der bekannten Rechengesetze für Mengen:

$$(A \blacksquare B) \blacksquare (A \blacksquare B) = A \cup B.$$

(c) Von den insgesamt 250 Informatikstudenten einer Hochschule können 193 in JAVA programmieren, 99 beherrschen C++ und 35 RUBY. Von 88 Studenten weiß man, dass sie sowohl JAVA als auch C++ können. Die zwei Sprachen C++ und RUBY beherrschen 23 Studenten, und 30 können JAVA und RUBY. Außerdem ist bekannt, dass 20 Studenten alle drei Programmiersprachen beherrschen. Finden Sie heraus, wie viele Informatikstudenten in *keiner* dieser drei Sprachen programmieren können.

Aufgabe 3: Relationen und Funktionen

(a) Auf der Menge der ganzen Zahlen sei folgende Relation definiert:

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x - y \text{ ist gerade}\}.$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Geben Sie alle Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[7]_R$ an.

(b) Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ und $C = \{x, y\}$, sowie die Relationen

$$S = \{(1, a), (1, b), (2, b)\} \subseteq A \times B \quad \text{und} \quad T = \{(a, x), (b, y)\} \subseteq B \times C.$$

Bestimmen Sie die Komposition $S \circ T$.

Geben Sie das Komplement von T^{-1} in $C \times B$ an.

(c) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

Funktion	injektiv	surjektiv	bijektiv
$f(x) = 3^x$			
$f(x) = 3 \cdot x + 3$			
$f(x) = x^3 - 5x^2$			

Aufgabe 4: Beweisen

(a) Ergänzen Sie die kleinste mögliche Zahl: Unter je ______ Leuten haben mindestens 8 im gleichen Monat Geburtstag. [*Tipp:* Erweitertes Schubfachprinzip.]

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gilt

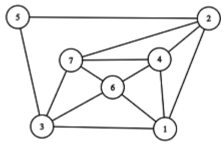
$$2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + (3n + 2) = \frac{1}{2}(3n^2 + 7n + 4) .$$

(c) Die Fibonacci-Zahlen f_n sind für $n \geq 1$ durch $f_1 = f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ definiert. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass für $n \geq 1$ gilt:

$$1 + f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} .$$

Aufgabe 5: Graphentheorie

Gegeben sei der folgende Graph G:



(a) Ist G ein eulerscher Graph? Begründen Sie.

(b) Zeigen Sie, dass für G die eulersche Polyederformel gilt.

(c) Wie viele Kanten muss man zu G hinzufügen, damit ein vollständiger Graph entsteht? Antwort: ______ .

(d) Ein Baum B soll genauso viele Kanten haben wie der obige Graph G. Wie viele Ecken muss B haben? Antwort: _______ .

(e) Eine Folge von Graphen G_n mit der Eckenmenge E_n und der Kantenmenge K_n sei für $n \geq 0$ wie folgt definiert:

$$E_0 = \{a_0, b_0\} \text{ und } K_0 = \{\{a_0, b_0\}\},$$

$$E_{n+1} = E_n \cup \{a_{n+1}, b_{n+1}\} \text{ und } K_{n+1} = K_n \cup \{\{a_n, b_{n+1}\}, \{b_n, a_{n+1}\}, \{a_{n+1}, b_{n+1}\}\}.$$

Zeichnen Sie die Graphen G_0, G_1 und G_2 und begründen Sie, dass alle Graphen G_n bipartit sind.

Aufgabe 6: Algebraische Strukturen

(a) Zeigen Sie, dass die Zahlen 12 und 31 teilerfremd sind, und bestimmen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus ganze Zahlen a und b, so dass gilt

$$1 = 12 \cdot a + 31 \cdot b.$$

(b) Begründen Sie, dass gilt: $\mathbf{Z}_{12}^* = \{1, 5, 7, 11\}$.

Stellen Sie eine vollständige Multiplikationstafel von $\mathbf{Z}_{12}^*$ auf.

·	1	5	7	11
1				
5				
7				
11				

(c) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr (w) und welche falsch (f) sind.

	w	**f**	
(1)	❑	❑	$(\mathbf{Z}_{12}^*, \cdot)$ ist eine Gruppe.
(2)	❑	❑	$(\mathbf{Z}_{12}^*, +)$ ist eine Gruppe.
(3)	❑	❑	$(\mathbf{Z}_{12}, +)$ ist eine Gruppe.
(4)	❑	❑	$(\mathbf{Z}, \cdot)$ ist eine Gruppe.
(5)	❑	❑	Sei $G = \{z \in \mathbf{Z} \mid z \text{ ist gerade}\}$. Dann ist $(G, +)$ eine Gruppe.
(6)	❑	❑	Sei $\mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$. Dann ist $(\mathbf{R}^-, \cdot)$ eine Gruppe.
(7)	❑	❑	Für jede natürliche Zahl $n > 1$ ist $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ mit Addition und Multiplikation modulo n ein Körper.
(8)	❑	❑	Für jede Primzahl p ist $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$ mit Addition und Multiplikation modulo n ein Körper.