Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Marc Zschiegner

11. Übungsblatt

Teamaufgaben für die Woche vom 28. bis zum 02.07.2021. *Lösen Sie die folgenden Aufgaben während der Übung gemeinsam in einer Kleingruppe in einem Breakout-Raum. Nach der vereinbarten Zeit kehren Sie in den Übungsraum zurück, wo Sie Ihre Ergebnisse präsentieren können.*

A Bilden Sie die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotient der komplexen Zahlen $1 + 4i$ und $3 + 2i$ in algebraischer Darstellung. [*Hinweis:* Schauen Sie sich zur Quotientenberechnung den „Erweiterungstrick“ auf Folie 23 an.]

B Zeigen Sie, dass die Matrix A aus Teamaufgabe B von Übungsblatt 10 diagonalisierbar ist. Geben Sie die Diagonalmatrix B und eine Transformations-matrix T mit $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ an.

Hausaufgaben bis zum 04.07.2021. *Geben Sie die folgenden Aufgaben wie folgt ab: Schreiben Sie die Lösungen aller Aufgaben in eine einzige, max. 10 MB große PDF-Datei „Nachname_Vorname_BlattNr.pdf“ (Beispiel: „Mustermann_Max_11.pdf“). Laden Sie diese Datei bis spätestens Sonntagabend in den passenden Ordner „Abgaben der Hausaufgaben“ Ihrer StudIP-Übungsgruppe hoch.*

1 Berechnen Sie für die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte und je einen zugehörigen Eigenvektor.

2 Überprüfen Sie mit dem 2. Kriterium zur Diagonalisierbarkeit, ob die Matrix aus Aufgabe 1 diagonalisierbar ist.

3 In der Computergrafik und im Quantencomputing spielen unitäre Matrizen eine wichtige Rolle. Dies sind quadratische Matrizen mit komplexen Einträgen, deren inverse Matrix gleich ihrer komplex konjugierten Transponierten ist. Das heißt, eine komplexe n×n-Matrix U ist **unitär**, falls gilt

$$U^{-1} = \overline{U}^T \quad \text{bzw.} \quad \overline{U}^T \cdot U = E_n.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen unitär sind.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$

[*Hinweis:* $\overline{U}$ entsteht aus U, indem jeder Eintrag komplex konjugiert wird. Das bedeutet, dass jede komplexe Zahl $a + i \cdot b$ in ihre **komplex konjugierte** Zahl $a - i \cdot b$ umgewandelt wird.]

Worüber Mathematiker lachen