Lineare Algebra – 1. Probeklausur – Lösungen

1

x: Anzahl der Hektar Kartoffeln

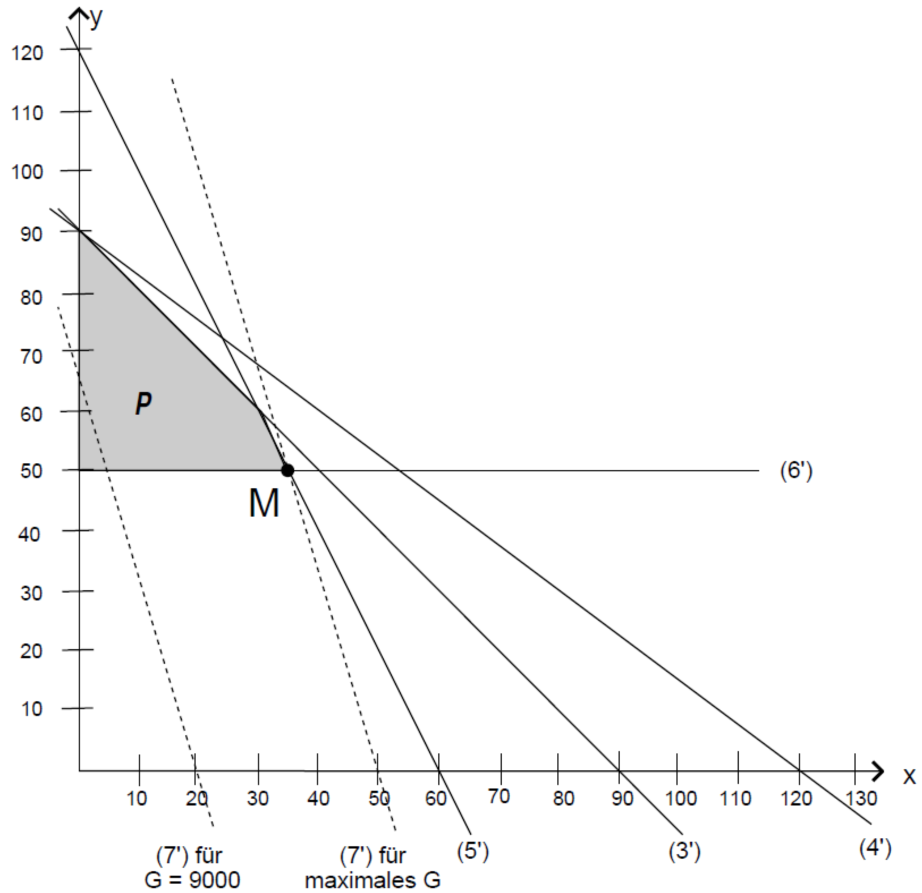
y: Anzahl der Hektar Zuckerrüben

Mathematisches Modell:

a) Nichtnegativitätsbedingung: $x \geq 0 \qquad y \geq 0$ (1)/(2)

b) Weitere einschränkende Bedingungen:

Land:	x	$+$	y	$\leq$	90	(3)
Arbeit:	$3x$	$+$	$4y$	$\leq$	360	(4)
Kapital:	$400x$	$+$	$200y$	$\leq$	24000	(5)
Bodenqualität:			y	$\geq$	50	(6)
Gewinnfunktion:			$G(x,y)$	$=$	$450x + 150y$	(7)



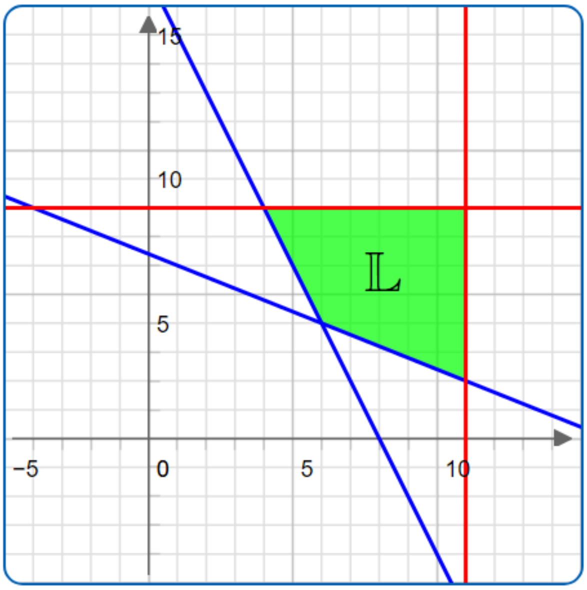
Der Maximalpunkt M ist der Schnittpunkt der Geraden (5′) und (6′).
Aus (6′) liest man ab: $y_{max} = 50$.
Dies in (5′) eingesetzt ergibt:

$$400x_{max} + 200 \cdot 50 = 24000 \iff x_{max} = 35.$$

Also: Der Gewinn ist maximal, wenn 35 ha mit Kartoffeln und 50 ha mit Zuckerrüben bebaut werden. Der maximale Gewinn ist dann:

$$G_{max} = G(35, 50) = (450 \cdot 35 + 150 \cdot 50)\text{EUR} = 23250\,\text{EUR}.$$

Zielfunktion	$z(x,y) = 4000x + 1000y \quad \rightarrow \quad \text{Min!}$
Nebenbedingungen	$200x + 100y \geq 1600$ $6x + 15y \geq 96$
...außerdem gilt:	$x \leq 11$ $y \leq 8$
Nichtnegativitätsbedingung	$x \geq 0$ $y \geq 0$



Die **Lösungsmenge** des linearen Ungleichungssystems..

$200x + 100y \geq 1600$

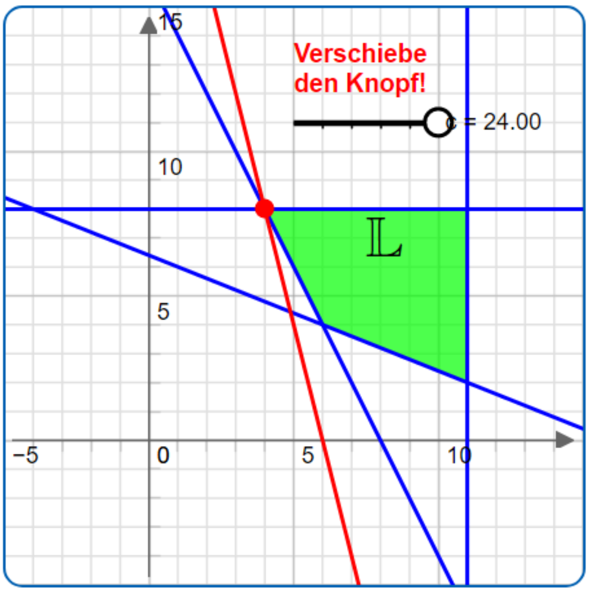
$6x + 15y \geq 96$

$x \leq 11$

$y \leq 8$

..ist in der nebenstehenden Graphik farblich hervorgehoben.

Graphisch findet man das **Minimum**, indem man die Zielfunktion einzeichnet und anschließend solange parallel verschiebt, bis die Gerade den **ersten Eckpunkt** des Lösungsbereichs berührt. Der erste Eckpunkt entspricht dann der optimalen Lösung.



Wir lösen die Zielfunktion zunächst nach y auf..

$z(x,y) = 4000x + 1000y = 0$

$1000y = -4000x$

$y = -4x$

..um diese in das Koordinatensystem zu zeichnen. Danach verschieben wir die Gerade solange parallel, bis wir den ersten Eckpunkt des Lösungsbereichs erreichen.

Das Optimum (hier: Minimum) ist in der Graphik durch einen roten Punkt dargestellt.

$$z(4,8) = 4.000 \cdot 4 + 1.000 \cdot 8 = 24.000€ \qquad \rightarrow \qquad \text{Minimum!}$$

Antwort:

Die Fluggesellschaft minimiert ihre Kosten unter Einhaltung der Nebenbedingungen, wenn sie *4* Flugzeuge des Typ A und *8* Flugzeuge des Typ B einsetzt.

(Quelle: http://www.mathebibel.de/lineare-optimierung)

3

a) P ist Schnittpunkt zweier Geraden:

$$\begin{pmatrix}-4\\-8\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\15\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}24\\32\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\20\end{pmatrix} \Rightarrow \text{LGS:} \quad \begin{aligned} r+s &= 28 & \text{I}\\ r+2s &= 40 & \text{II}\\ 15r-20s &= 0 & \text{III}\end{aligned}$$

$\text{II}-\text{I}: s=12 \overset{\text{I}}{\Rightarrow} r=16$, Probe mit $\text{III}: 15\cdot 16 - 20\cdot 12 = 0$ ✓

Schnittpunkt: $\begin{pmatrix}-4\\-8\\0\end{pmatrix} + 16\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\8\\240\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P=(12,8,240)}}$

b) Abstand PQ: $|\overrightarrow{PQ}| = \left|\begin{pmatrix}22-12\\28-8\\216-240\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}10\\20\\-24\end{pmatrix}\right| = \sqrt{10^2+20^2+(-24)^2} \approx 32{,}8$

Geschwindigkeit: $\dfrac{32{,}8\text{ km}}{1\text{ min}} = \dfrac{32{,}8\text{ km}}{1/60\text{ h}} = \underline{\underline{1968\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$

Gerade der Satellitenbahn: $\vec{x} = \begin{pmatrix}12\\8\\240\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\-24\end{pmatrix}$

Erdoberfläche: $z=0$: $240-24r=0 \Rightarrow r=10 \Rightarrow \underline{\underline{A=(112,208,0)}}$

4

a) $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix}}}$

b) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\0\\30\end{pmatrix} \Rightarrow E: \; 40x + 0\cdot y + 30z = 330$

z.B. $A=(6,0,3)$ einsetzen

$\overset{:10}{\Rightarrow} E: \; \underline{\underline{4x + 3z = 33}}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ in E einsetzen:

$$\begin{aligned} 4\cdot 4 + 3\cdot(3+t) &= 33\\ 16 + 9 + 3t &= 33\\ 3t &= 8\\ t &= 8/3 \end{aligned}$$

Schnittpunkt: $\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} + \frac{8}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}4\\4\\17/3\end{pmatrix}}}$

5

$$E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}8\\4\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-28\\28\\56\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Abstand } S\text{-}E_{ABC}: \; h = \left|\left[\begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\right| = \frac{12}{\sqrt{6}} \\ \text{Grundfläche}: A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}8\\4\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-28\\28\\56\end{pmatrix}\right| = 14\sqrt{6}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Volumen: } V = \frac{1}{3}\cdot A\cdot h \\ = \frac{1}{3}\cdot 14\sqrt{6}\cdot\frac{12}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{56}}\end{array}$$

6

a) $$A = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Z_1 & Z_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}\end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\end{array}$$

b) $$A\cdot B = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \\ 20 & 20 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}\end{array} = \text{Bedarf an Rohstoffen für die Endprodukte}$$

c) $$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \\ 20 & 20 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}50\\155\\300\\320\end{pmatrix} = \text{benötigter Rohstoffvektor}$$