Lsg Vorschlag LAÜ11 Maximilian Maag

Aufgabe 1

$\xi_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$
$\xi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{5}-\lambda & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5}-\lambda \end{pmatrix}$
$\xi_A\lambda) = ((\frac{1}{5}-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(\frac{4}{5}-\lambda)) - (\frac{2}{5}\cdot(1-\lambda)\cdot\frac{2}{5})$
$\xi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$

Eigenwerte bestimmen

$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$
$\lambda \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$
$\lambda_1 = 0$
$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
$\lambda_2 = 1 + -\sqrt{1-1}$
$\lambda_2 = 1$ Doppelte Nullstelle

Eigenvektoren:

LGS1:
A1: $\frac{1}{5}$ x + $\frac{2}{5}$z = 0
B1: y = 0
C1: $\frac{2}{5}$ x + $\frac{4}{5}$z = 0

$\vec{\lambda_0} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

LGS2:
A1: $\frac{1}{5}$ x + $\frac{2}{5}$z = x
B1: y = y
C1: $\frac{2}{5}$ x + $\frac{4}{5}$z = z

A2: $-\frac{4}{5}$ x + $\frac{2}{5}$z = 0
B2: 0 = 0
C2: $\frac{2}{5}$ x - $\frac{1}{5}$z = 0

$\vec{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Aus der Kurvendiskussion in Aufgabe 1 ergab sich eine doppelte Nullstelle daher gilt folgende lineare Zerlegung:

$(\lambda - 1)^2 \cdot (-(\lambda - 0)) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$

Der Eigenwert λ_1 ist zweimal enthalten, woraus sich folgende LGS Aussage ableiten lässt:

Der Vektor $\vec{\lambda_1}$ hat nur eine linear unabhängige Lösung der Form $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ erscheint aber in der Linearfaktorzerlegung zweimal aus diesem Grund ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 3

a)

$U' = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)

$U' = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$