Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Marc Zschiegner

Analysis und Numerik
WS 2020/21

7. Übungsblatt

Teamaufgaben für die Woche vom 11. bis zum 15.01.2021. *Lösen Sie die folgenden Aufgaben während der Übung gemeinsam in einer Kleingruppe in einem Breakout-Raum. Nach der vereinbarten Zeit kehren Sie in den Übungsraum zurück, wo Sie Ihre Ergebnisse präsentieren können.*

A Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von de l'Hospital.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x}$ (b) $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3t)}{\cos(t)}$ (c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2^{x+2}-1}{x+2}$

B Schränken Sie den Definitionsbereich der Funktion f(x) = tan(x) so ein, dass sie umkehrbar ist. Skizzieren Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ = arctan(x). Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion.

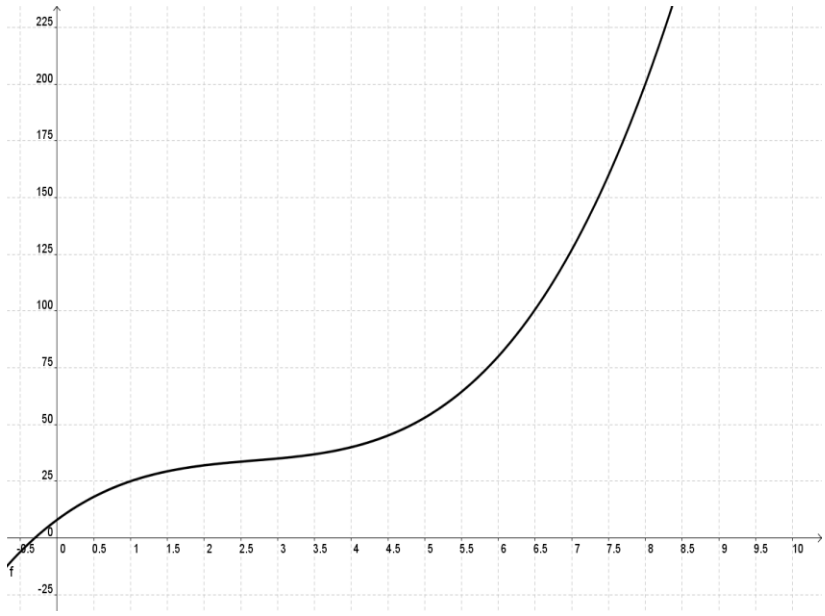
Hausaufgaben bis zum 17.01.2021. *Geben Sie die folgenden Aufgaben wie folgt ab: Schreiben Sie die Lösungen aller Aufgaben in eine einzige, max. 10 MB große PDF-Datei „Vorname_Nachname_BlattNr.pdf" (Beispiel: „Max_Mustermann_07.pdf"). Laden Sie diese Datei bis spätestens Sonntagabend in den passenden Ordner „Abgaben der Hausaufgaben" Ihrer StudIP-Übungsgruppe hoch.*

1 Schränken Sie den Definitionsbereich der Funktion f(x) = cos(x) so ein, dass sie umkehrbar ist. Skizzieren Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ = arccos(x). Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion. [4 P]

2 Die Gesamtkosten eines Betriebs sind durch die Funktion

$$K(x) = x^3 - 8x^2 + 24x + 8$$

festgelegt (Graph siehe Abbildung). Die Erlösfunktion lautet E(x) = 25x.



(a) Skizzieren Sie die Erlösfunktion E(x) in der Abbildung und berechnen Sie die Nutzenschwelle und die Nutzengrenze (Schnittstellen von K(x) und E(x)).
(b) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion G(x) = E(x) – K(x) und skizzieren Sie die Gewinnfunktion in der Abbildung. Erläutern Sie, warum ihre Nullstellen bereits bekannt sind.
(c) Berechnen Sie, bei wie vielen Produktionseinheiten der Gewinn maximal wird. Wie hoch ist dieser maximale Gewinn? [7 P]

3 Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Gerücht ausbreitet, lässt sich modellhaft mit der **logistischen Differenzialgleichung** $N'(t) = k \cdot N(t) - k \cdot N^2(t)$ erfassen. Dabei ist N(t) der Anteil der Personen, die das Gerücht nach t Stunden bereits kennen.
(a) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion die obige Differenzialgleichung löst:

$$N(t) = \frac{N(0) \cdot e^{kt}}{1 + N(0) \cdot (e^{kt} - 1)}.$$

(b) In einer Vorlesung sitzen 100 Studierende. Um 8 Uhr verbreitet ein Student das Gerücht, dass am nächsten Tag ein unangekündigter Test geschrieben wird. Um 9 Uhr wissen bereits 7 Studierende von dem Gerücht. Bestimmen Sie die Funktion N(t). Wie viele Studierende kennen das Gerücht um 13 Uhr? [4 P]

Worüber Mathematiker lachen

Unterhalten sich zwei platonisch verliebte Mathematiker.
Erzählt der eine: „Neulich kam meine Freundin auf dem Fahrrad an. Sie warf das Fahrrad beiseite, zog sich ihr Kleid aus, stellte sich vor mich hin und sagte, ich soll mir endlich nehmen, was ich will. Da hab ich mir das Fahrrad genommen.“
Dazu der andere Mathematiker: „Völlig logische Entscheidung, ihr Kleid hätte dir sicher nicht gepasst.“