Hochschule RheinMain
Sommersemester 2017

Fachbereich DCSM
Prof. Dr. Adrian Ulges

Probeklausur zur Veranstaltung
Algorithmen und Datenstrukturen
20.06.2017

Name: Beispiel Vorname: Lösung

Matrikelnummer: ______ Unterschrift: ______

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die Anmerkungen unten zur Kenntnis genommen, die Aufgaben eigenständig gelöst, sowie nur die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe.

- Die Klausurdauer beträgt **90 Minuten**.
- Bitte legen Sie **Studierendenausweis** und **Lichtbildausweis** auf Ihren Tisch.
- Bitte schreiben Sie **deutlich**. Unleserliche Lösungen werden nicht gewertet. Die **Bindung** der Blätter dieser Klausur **darf nicht entfernt** werden. Sie dürfen auch die **Rückseiten** der Blätter verwenden (weiteres Schmierpapier befindet sich am Ende).
- Lesen Sie die Aufgabenstellungen **vollständig**. Sollten während der Klausur Unklarheiten bestehen, ist es möglich kurze **Fragen** zu stellen.
- Für die Vergabe von Punkten ist generell die **Angabe eines Lösungswegs** erforderlich.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen. Entfernen Sie Mobiltelefone, Vorlesungsmitschriften, sonstige lose Blätter und Bücher von Ihrem Tisch.
- Täuschungsversuche aller Art werden mit der **Note 5** geahndet.
- Beachten Sie insbesondere, dass **elektronische Geräte** (z.B. Mobiltelefone, Smartwatches oder Kameras) **unerlaubte Hilfsmittel** sind! Bereits das **Berühren** eines nicht erlaubten Hilfsmittels während der Prüfung stellt einen Betrugsversuch dar.
- **Toilettengänge** während der Prüfung kosten Ihre Zeit und schaffen für alle Unruhe. Erledigen Sie sie möglichst vor der Prüfung. Wenn es trotzdem sein muss: Es darf immer nur einer gleichzeitig. Melden Sie sich bei der Aufsicht an und warten Sie auf das OK.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Erreichte Punkte	15	15	13	15	13	13	X	100
Erreichbare Punkte								
Note								

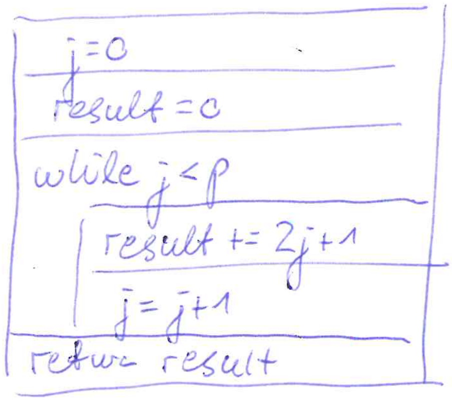
Aufgabe 1 (3+3+4+3+2 = 15 Punkte)
Gegeben sei der folgende Algorithmus in Pseudo-Code:

```
# Eingabe
# p: Eine ganze Zahl

j = 0
result = 0
while j<p:
    result = result + (2 j+1)
    j = j + 1

return result
```

a) Geben Sie ein Struktogramm des Algorithmus an.



b) Terminiert der Algorithmus für alle Eingabewerte $p \in \mathbb{Z}$? Geben Sie eine Begründung.

Für $p \leq 0$: Schleifenkörper wird nie ausgeführt
→ Terminiert (sofort).

Für $p > 0$: j wird immer weiter inkrementiert und erreicht nach p Iterationen den Wert p.
→ Terminiert.

⇒ Der Algorithmus terminiert für alle $p \in \mathbb{Z}$.

c) Berechnen Sie die Ausgabe des Algorithmus für die Eingabewerte von 0 bis 4. Gegeben Werte $p \geq 0$, welche Funktion f berechnet der Algorithmus? Geben Sie eine Vermutung ab, eine Begründung ist nicht erforderlich.

p	0	1	2	3	4
result	0	1	4	9	16

Vermutung: result $= p^2$.

d) Schreiben Sie den Algorithmus als rekursive Funktion `foo(p)` in Pseudo-Code.

```
function foo(p):
    if p ≤ 0:
        return 0
    else:
        return foo(p-1) + (2(p-1)+1)
```

e) Ergänzen Sie Ihre rekursive Funktion so, dass auch für negative Werte das korrekte Ergebnis $f(p)$ (siehe Aufgabe (c)) zurückgeliefert wird.

```
function foo(p):
    if p==0:
        return 0
    else if p<0:
        return foo(-p)    // weil (-z)^2 = z^2
    else:
        return foo(p-1) + (2(p-1)+1)
```

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Sind die folgenden Behauptungen korrekt? Kreuzen Sie an. Geben Sie (falls ja) eine knappe Begründung oder (falls nein) ein Gegenbeispiel an.

a) Jeder Algorithmus mit deterministischem Ablauf ist auch terminierend. ☐ gilt ☒ gilt nicht

Begründung/Gegenbeispiel:

j = 1
while j > 0:
j += 1

→ deterministisch, aber Endlosschleife.

b) Alle vergleichsbasierten Sortierverfahren besitzen einen Worst-Case-Aufwand von $\Theta(n^2)$. ☐ gilt ☒ gilt nicht

Begründung/Gegenbeispiel:

Mergesort: Zeitkomplexität: $\Theta(n \cdot \log(n))$
Speicher " : $\Theta(n)$

c) Ein Algorithmus der Aufwandsklasse $\Theta(n)$ benötigt immer weniger Rechenschritte als ein Algorithmus der Aufwandsklasse $\Theta(n^2)$. ☐ gilt ☒ gilt nicht

Begründung/Gegenbeispiel:

$a_n = n + 100000000 \in \Theta(n)$
$b_n = n^2 \in \Theta(n^2)$

Für kleine Eingaben ist $a_n > b_n$

d) Backtracking-Verfahren finden immer die global optimale Lösung eines Problems. ☒ gilt ☐ gilt nicht

Begründung/Gegenbeispiel:

Ja, denn der komplette Lösungsraum wird durchsucht.

e) Bei einfach verketteten Listen gehören sämtliche Standard-Operationen zur Aufwandsklasse O(1). ☐ gilt ☒ gilt nicht

Begründung/Gegenbeispiel:

getLast() : Durchläuft alle Elemente der Liste bis zum Ende.

→ $O(n)$, bei n Elementen.

Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe 3 (5+4+4 = 13 Punkte)

a) Geben Sie rechts jeweils eine Funktion an, die beide Bedingungen auf der linken Seite erfüllt. Sollte keine solche Funktion existieren, markieren Sie dies durch einen Strich.
Hinweis: Es ist keine Herleitung erforderlich.

$a(n) = \Theta(n^2)$ und $a(n) \in O(\frac{4n^6}{3n^3})$ $\rightarrow a(n) =$ $42 \cdot n^2$

$b(n) = O(n \cdot log_2(n))$ und $b(n) \in \Omega(n^2)$ $\rightarrow b(n) =$ /

$log_2(n) \in O(c(n))$ und $c(n) \in O(2^n)$ $\rightarrow c(n) =$ n^3

$d(n) = \Theta(1)$ und $d(n) \in \Theta(log(n))$ $\rightarrow d(n) =$ /

$\underbrace{O(e(n)) \subseteq O(n^{10})}$ und $e(n) \in \Omega(log(n))$ $\rightarrow e(n) =$ $2 \cdot n \cdot log(n)$

d.h., $e(n) \in O(n^{10})$

Schleife wird max. 10x durchlaufen (O(1))

```
# Eingabe
# feld:   Ein array
# n:      Die Länge von feld
# start: Eine Position in feld

function sub(feld, n, start):

  pos = start
  max = feld[pos]

  while pos<start+10 and pos<n:
    if feld[pos]>max:
      max = feld[pos]
    pos += 1

  return max
```

```
# Eingabe
# feld: Ein array
# n:     Die Länge von feld

function super(feld, n):

   s = 0
   pos = 0

   while pos<n:
     s += sub(feld, n, pos)
     pos += 10

  return s
```

Schleife wird $\frac{n}{10}$ mal durchlaufen!

b) Gegeben seien zwei Methoden `sub()` und `super()` (welche `sub()` aufruft). Bestimmen Sie zunächst die Worst-Case-Laufzeit von `sub()`, d.h. zählen Sie die Anzahl der elementaren Operationen. Als elementare Operationen sollen gelten: Arithmetische Operationen, Vergleiche und Feldzugriffe, aber keine Zuweisungen.

$$1 + 10 \cdot [3 + 4] + 2$$

max = feld[pos] — # Durchläufe — Schleifenprüfung — Schleifenkörper — Schleife verlassen

$$= 73 \in O(1)$$

c) Bestimmen Sie die **Worst-Case-Aufwandsklasse** von `super()` in Abhängigkeit von n. Hier genügt eine Abschätzung gemäß den Rechenregeln der O-Notation. Es ist kein explizites Zählen von Einzelschritten erforderlich.

$$T(n) = O(1) + O\left(\frac{n}{10}\right) \cdot [O(1) + O(1)]$$

// Initialisierung — // # Durchläufe — // Schleifenprüfung, pos+=10 — // Aufruf sub()

$$= O(1) + O(n) \cdot O(1)$$

$$= O(n)$$

Aufgabe 4 (6+3+6 = 15 Punkte)

a) Die erste Zeile der unteren Tabelle stellt ein Array mit 9 Elementen dar. Führen Sie eine absteigende Sortierung mittels InsertionSort durch. Tragen Sie in jeder neuen Zeile das Ergebnis nach einer weiteren Insertion ein.

4	8	6	5	2	4	1	9	2
8	4	6	5	2	4	1	9	2
8	6	4	5	2	4	1	9	2
8	6	5	4	2	4	1	9	2
8	6	5	4	2	4	1	9	2
8	6	5	4	4	2	1	9	2
8	6	5	4	4	2	1	9	2
9	8	6	5	4	4	2	1	2
9	8	6	5	4	4	2	2	1

b) Diese Java-Implementierung realisiert einen absteigenden InsertionSort. Ist sie stabil? Geben Sie eine Begründung. Falls nein, wie müssten Sie die Implementierung ändern um Stabilität zu erreichen?

```java
static void sort(int[] a) {

  for(int i=0; i<a.length; ++i) {
     int val = a[i];
     int j = i;
     while(j>0 && a[j-1]<=val) {
       a[j] = a[j-1];
       j--;
     }
     a[j] = val;
  }
}
```

Die Implementierung ist nicht stabil.

Beispiel:

8	6	4	1	4'	...

Füge 4' ein

sortierte Bereich

8	6	4'	4	1	...

4' wird vor 4 eingefügt ⇒ ↯

Lösung (s.o.): „<=" durch „<" ersetzen.

⇒ 4 wird nicht mehr an 4' „vorbeigeschoben".

c) Die erste Zeile der unteren Tabelle stellt ein Array mit 8 Elementen dar. Führen Sie auf dem Array einen Mergesort durch. Sortieren Sie das Array erneut absteigend. Führen Sie in jeder Zeile eine Misch-Operation durch. Markieren Sie hierzu jeweils die beiden Bereiche die gemischt werden.

4	8	6	5	2	4	1	9
8	4	6	5	2	4	1	9
8	4	6	5	2	4	1	9
8	6	5	4	2	4	1	9
8	6	5	4	4	2	1	9
8	6	5	4	4	2	9	1
8	6	5	4	9	4	2	1
9	8	6	5	4	4	2	1

Bsp.-Durchlauf

Iteration	pos	min	a[l]	a[r]
1	1	25	17	23
2	2	17	10	7
3	5	7	2	-
4	10	2	/	/
5	11 ϟ			

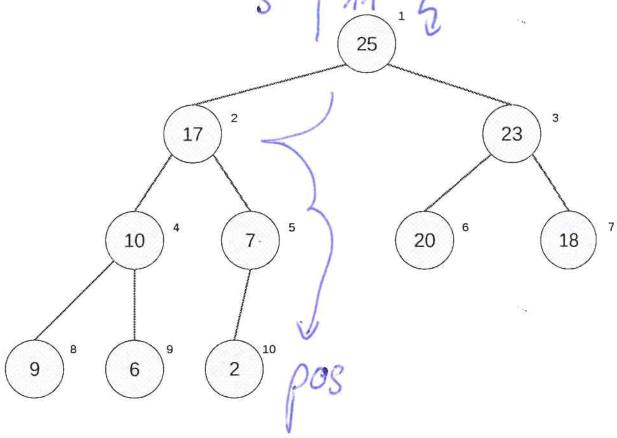
Aufgabe 5 (5+4+4 = 13 Punkte)

```
# Eingabe
# a: Array, das den Heap darstellt
# n: Anzahl der Elemente des Heaps

pos = 1
min = a[1]

while pos <= n:
  l = left(pos)
  r = right(pos)
  if r<=n and a[r]<a[l]:
        pos = r
        min = a[r]
  else if l<=n:
        pos = l
        min = a[l]
  else:
        pos = n+1

return min
```



Gegeben sei ein Max-Heap wie in der Vorlesung definiert. Wir möchten das **Minimum** des Heaps finden. Hierzu schlägt Alice den obigen Algorithmus (in Pseudo-Code) vor.
Hinweise: Wie in der Vorlesung spezifiziert beginnt der Heap bei Element 1, und die Methoden `left()` und `right()` liefern die Positionen der Kindknoten.

a) Welche Lösung gibt der Algorithmus für den Beispiel-Heap auf der rechten Seite zurück? Schildern Sie kurz den Verlauf des Algorithmus (welche Werte nimmt pos an?).

Siehe Tabelle oben: pos = 1 → 2 → 5 → 10

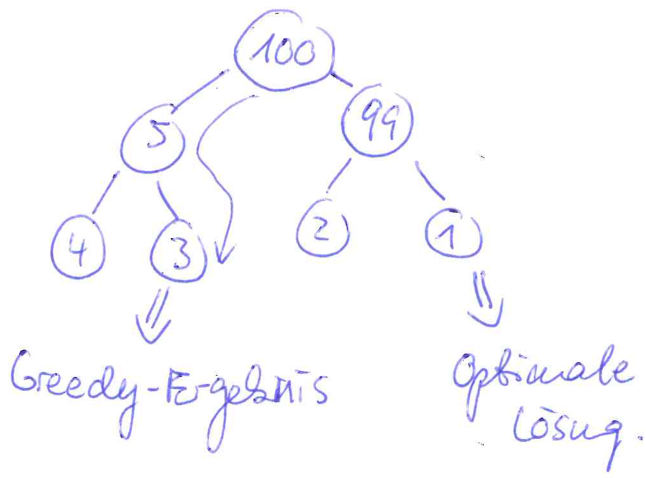
Ergebnis: min = 2

b) Welchem der in der Vorlesung vorgestellten Algorithmenmuster entspricht der Algorithmus? Begründen Sie kurz.

Greedy: Es wird in jeder Iteration der lokal beste Schritt ausgeführt (wähle das kleinere der beiden Kinder).

c) Findet der Algorithmus immer das Minimum des Heaps? Falls ja, begründen Sie. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

Nein! Gegenbsp:

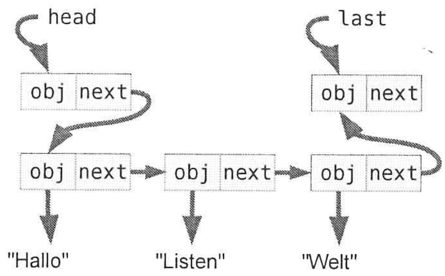


Aufgabe 6 (6+7 = 13 Punkte)

```
class LinkedList<T> {
  private Node head;
  private Node last;

  private class Node {
    T obj;
    Node next;
  }

  ...
}
```



Gegeben sei eine einfach verkettete Liste. Gemäß unserer Spezifikation aus der Vorlesung (oben links) besteht die Liste aus Knoten (`Nodes`) und besitzt für Anfang und Ende separate Knoten `head` und `last`.

a) Implementieren Sie eine private Methode `get(int i)`, die den i-ten Knoten der Liste zurückgibt. Für $i = 1$ soll das 1. Element zurückgeliefert werden, für $i = 0$ der Knoten `head`, für $i = n+1$ (für n-elementige Listen) der Knoten `last`. Für $i < 0$ und $i > n+1$ soll eine `ListException` geworfen werden (diese brauchen Sie nicht extra zu definieren).

```
private Node get(i) throws ListException {
    if (i<0) throw new ListException();
    int j=0;
    Node n = head;
    while (j<i && n!=null) {
        n=n.next;
        j++;
    }
    if (n==null) throw new ListException();
    return n;

}
```

b) Implementieren Sie eine Methode `swap(int j, int k)`, die die Listenelemente an den Positionen j und k vertauscht. Die Zähler j und k beginnen bei 1. Sie können außerdem davon ausgehen, dass $j < k$.
Hinweis: Verwenden Sie die Methode `get()` aus der vorherigen Aufgabe.

```
void swap(int j, int k) throws ListException
{
    Node nj    = get(j);
     "   prevj = get(j-1);
     "   nk    = get(k);
     "   prevk = get(k-1);
     "   succk = get(k+1);
     "   succj = get(j+1);
    if (k > j+1) {
        prevj.next = nk;
        nk.next = ~~nj.next;~~ succj;
        prevk.next = nj;
        nj.next = succk;
    } else {   // k==j+1
        prevj.next = nk;
        nk.next = nj;
        nj.next = succk;
    }
}
```