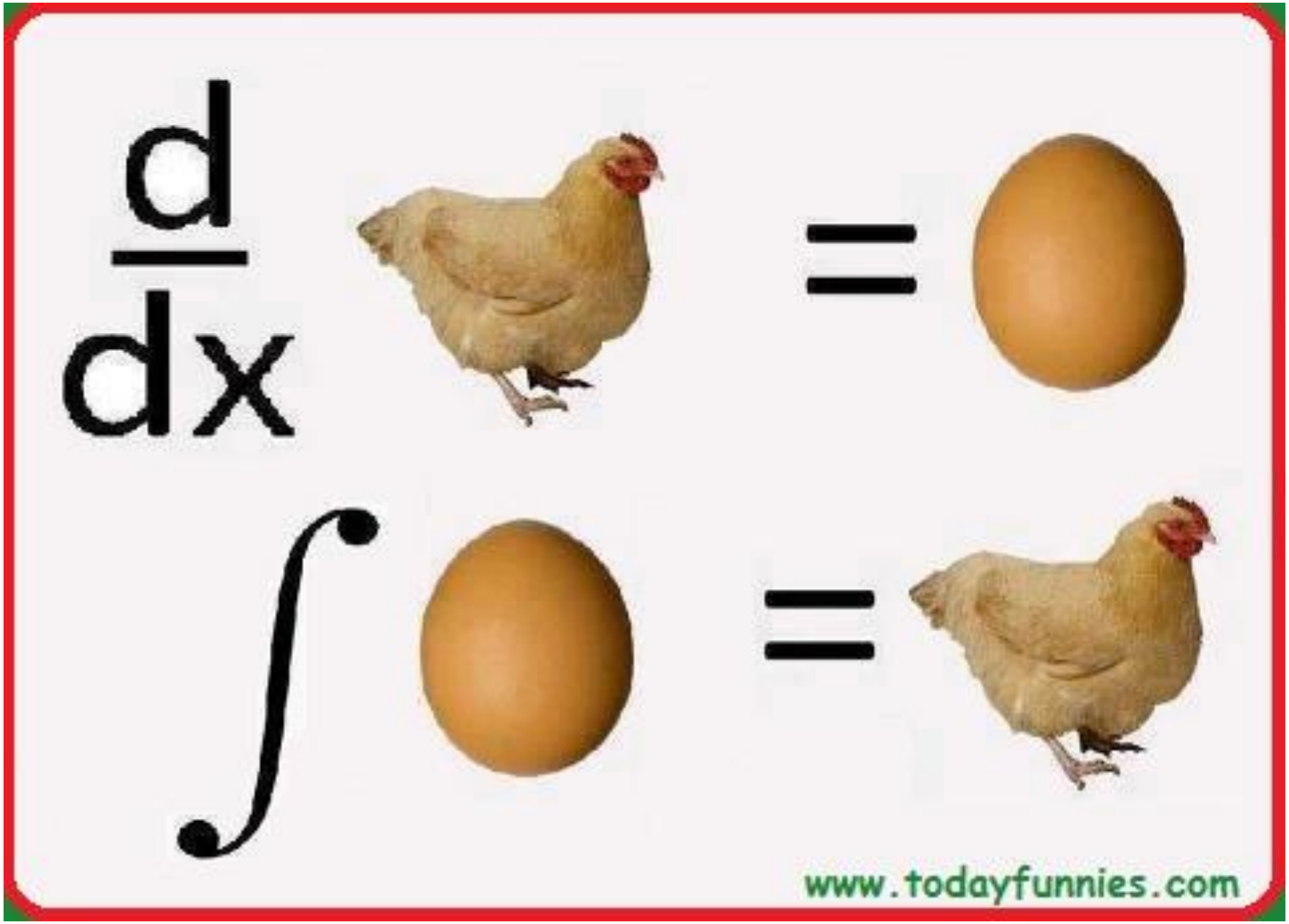
Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 5

Integralrechnung

Inhalt

5.1 Integrale



Anwendungen der Integralrechnung

Wiederaufbau der Frauenkirche in Dresden:

Statische Kräfte der Kuppel?

→ Masse bzw. **Volumen** bestimmen

Airbus A380:

Große Tanks bei kleiner Tragflächenmasse

→ Querschnitts**fläche** bestimmen

Eiffelturm:

Kompliziert geformte Stahlträger

→ **Länge** bestimmen

Integrale

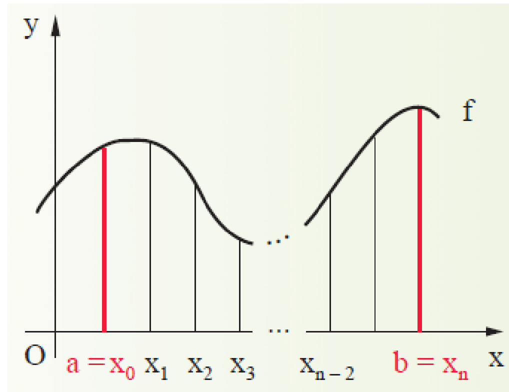
Ziel: Berechnung der Fläche „unter einer Kurve“, d.h. der Fläche zwischen Kurve und x-Achse in einem bestimmten Intervall [a, b]. Diesen Flächeninhalt nennt man aus historischen Gründen „Integral“ (lat.: integrare = wieder herstellen).

Idee: Man nähert gekrümmte Funktionsgraphen durch „Treppenfunktionen“ an, unter denen man die (Rechtecks-) Flächen einfach bestimmen kann.
Die Unterteilung macht man immer feiner.
Die Idee dazu stammt von Bernhard Riemann,1826 – 1866.

Praxis: Um ein Integral auszurechnen benutzt man „Stammfunktionen“.

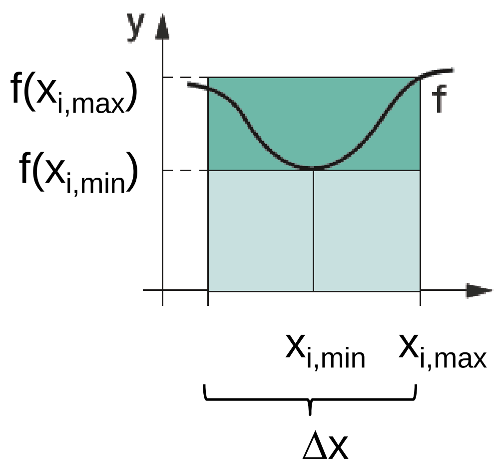
Unterteilung des Intervalls

Das Intervall [a, b] wird in n gleichgroße Teilintervalle der Länge $\Delta x = (b - a)/n$ zerlegt.



Im i-ten Teilintervall sei jeweils $f(x_{i,min})$ der kleinste und $f(x_{i,max})$ der größte Funktionswert.

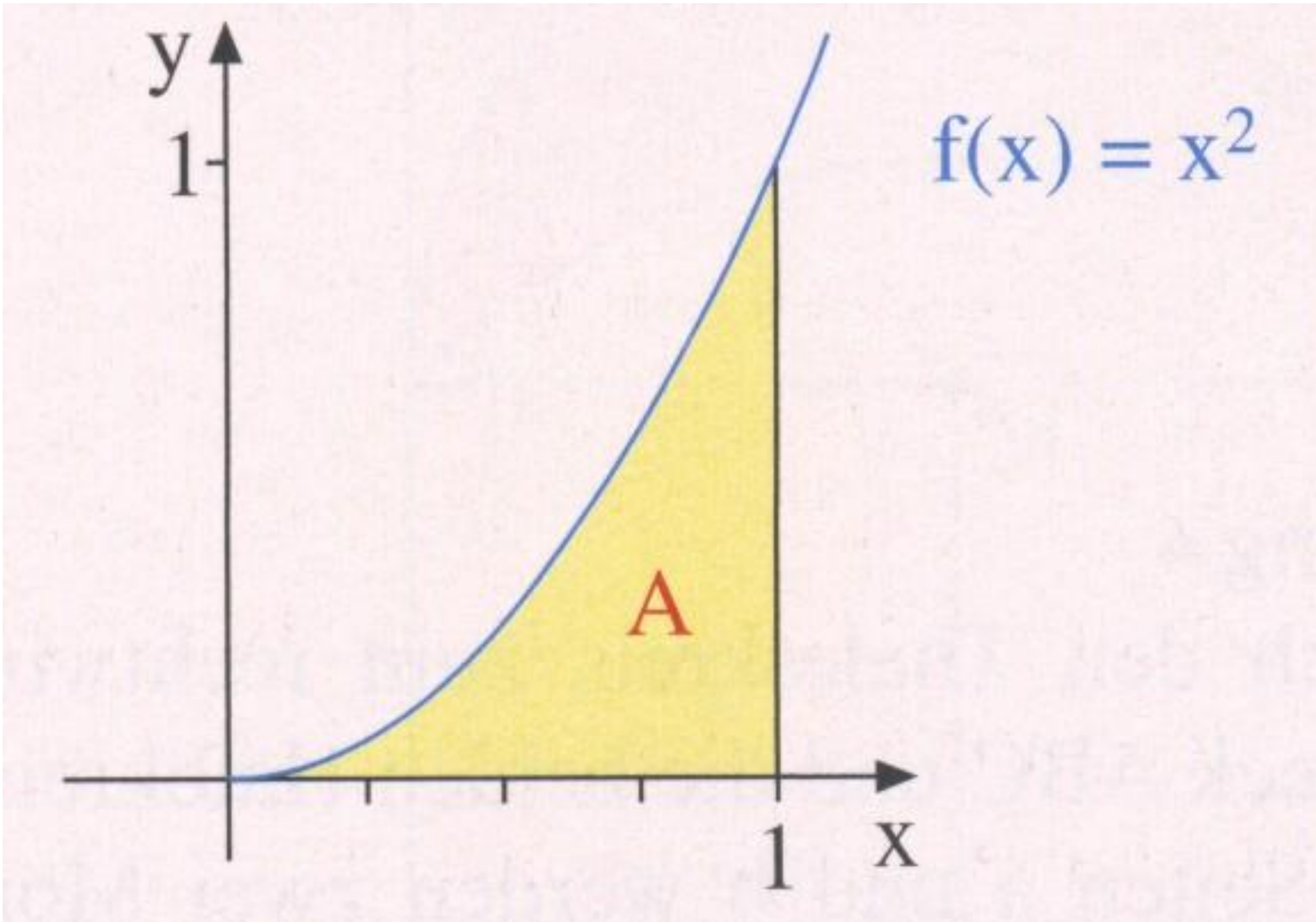
Es werden die Summen der Rechtecks-flächen $f(x_i)\cdot\Delta x$ gebildet:



Untersumme: $U_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,min})\cdot\Delta x$

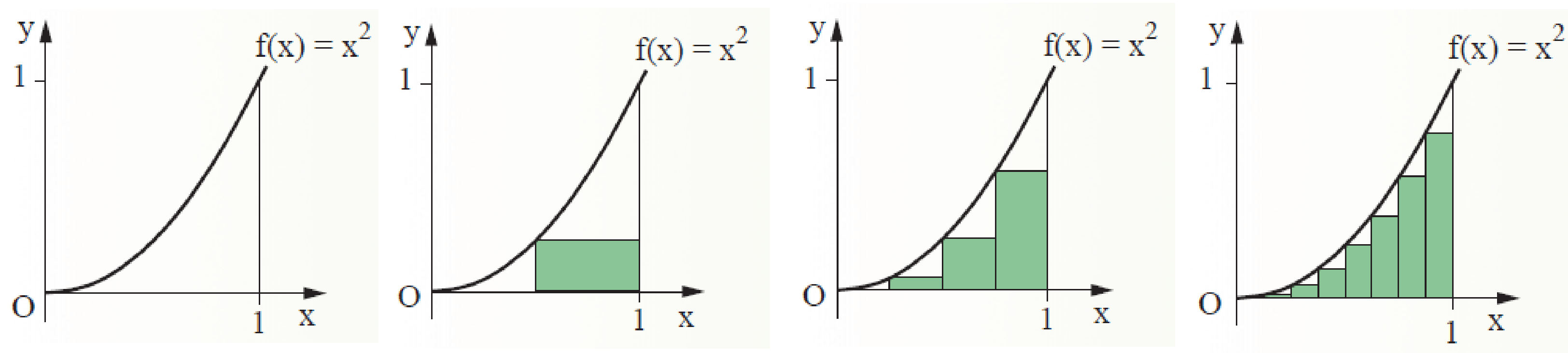
Obersumme: $O_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,max})\cdot\Delta x$

Wie groß ist die Fläche?

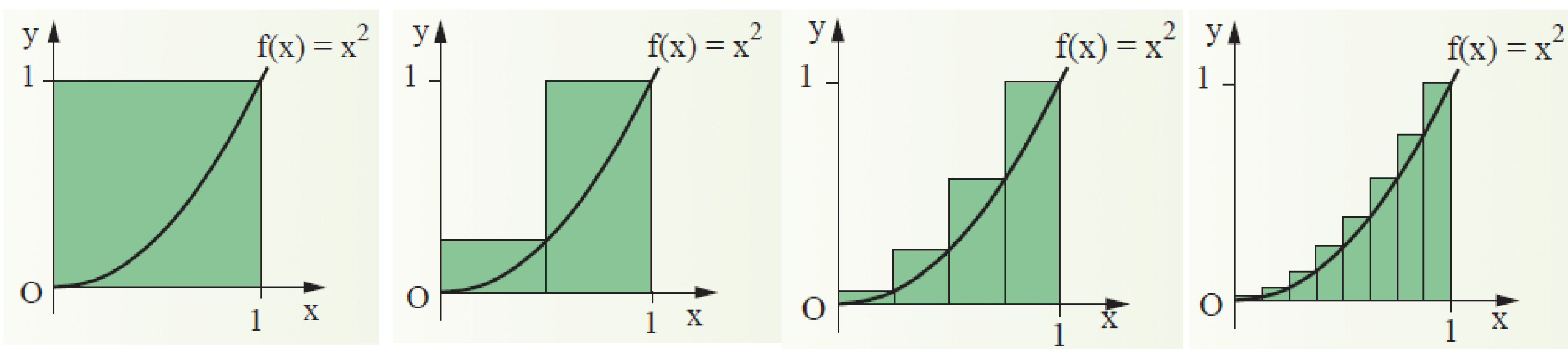


Unter- und Obersumme von f (x) = x²

Untersumme: $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$

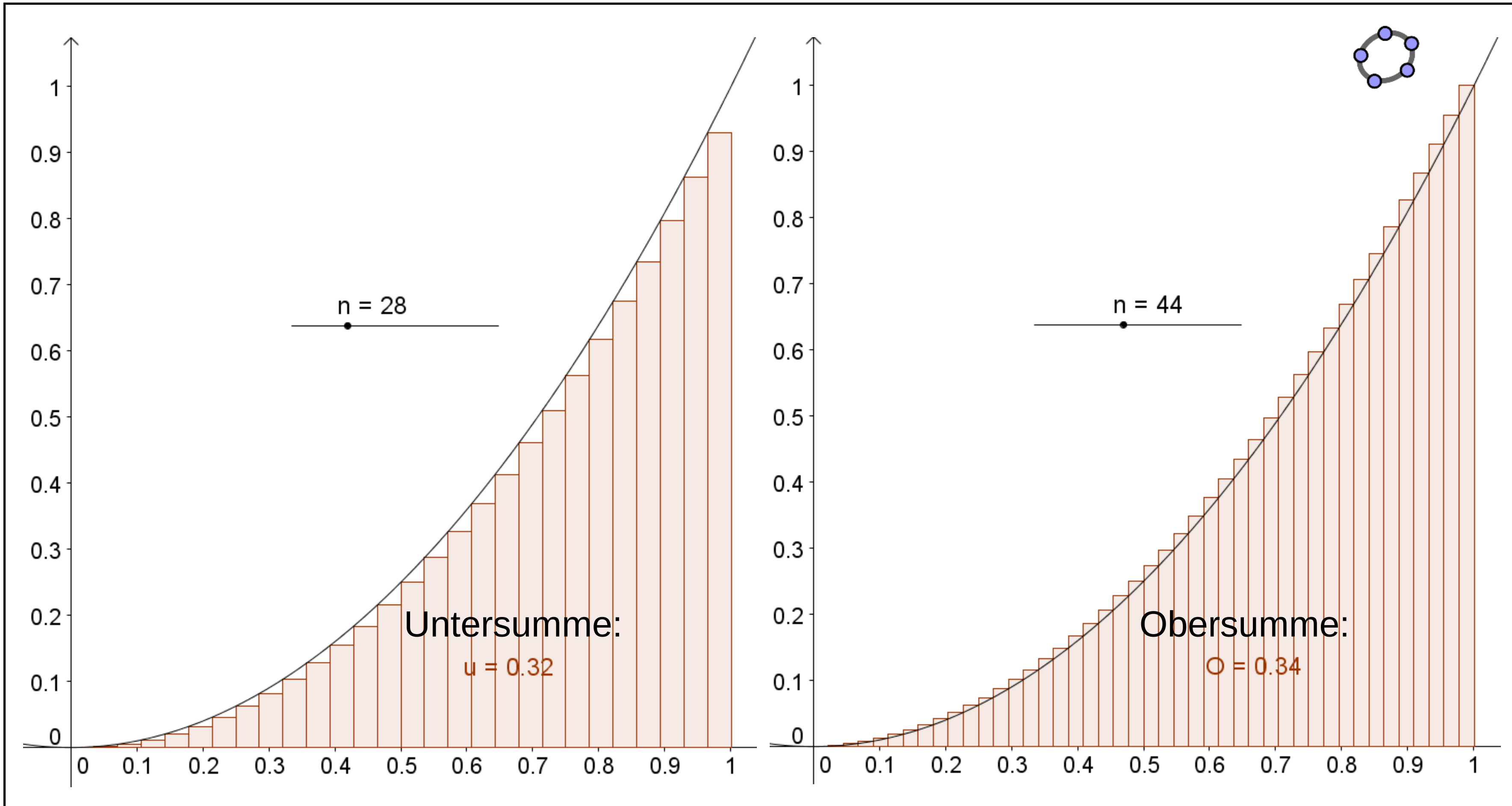


Obersumme: $O_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2$



n = 1 n = 2 n = 4 n = 8

Grenzwert von Unter- und Obersumme für $f(x) = x^2$



Das bestimmte Integral

Wenn die Untersumme U_n und die Obersumme O_n einer Funktion f den gleichen Grenzwert für $n \to \infty$ haben, so ist die Funktion **integrierbar**. Der gemeinsame Grenzwert heißt dann das **bestimmte Integral** von f, geschrieben

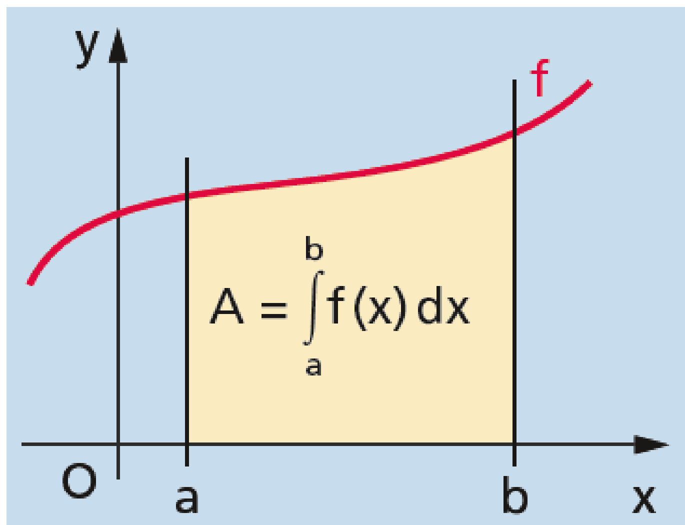
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gesprochen: „Integral von f(x) in den Grenzen von a bis b".

Die Funktion f heißt auch **Integrand,** und x heißt **Integrationsvariable**.

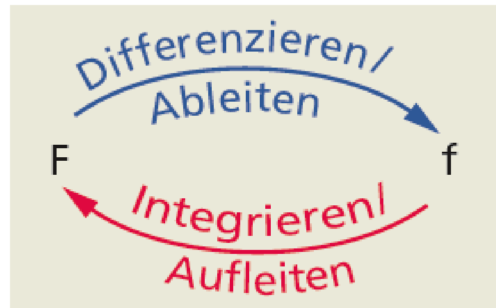
Das Integral als Flächeninhalt

Hat die Funktion f im Intervall [a, b] nur nichtnegative Funktionswerte, dann gibt das Integral den Inhalt der Fläche an, die vom Graphen von f, der x-Achse und den Geraden x = a und x = b begrenzt wird.



Stammfunktionen

Definition. Sei f eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f, falls $F' = f$ ist.



Beispiele:

Eine Stammfunktion von	x^2	ist	$1/3\ x^3$,	
eine Stammfunktion von	x^3	ist	$1/4\ x^4$,	
eine Stammfunktion von	x^n	ist	$x^{n+1}/(n+1)$,	
eine Stammfunktion von	$\sin(x)$	ist	$-\cos(x)$,	
eine Stammfunktion von	e^x	ist	e^x	(e = Eulersche Zahl)
eine Stammfunktion von	$1/x$	ist	$\ln(x)$.	

Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f bezeichnet man auch als **unbestimmtes Integral** und schreibt dafür

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, kann man mit einer beliebigen reellen Konstante c schreiben

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Beispiel:

$$\int x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 + c$$

Beispiele für unbestimmte Integrale

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

$$\int 8x^3\,dx = 2x^4 + c$$

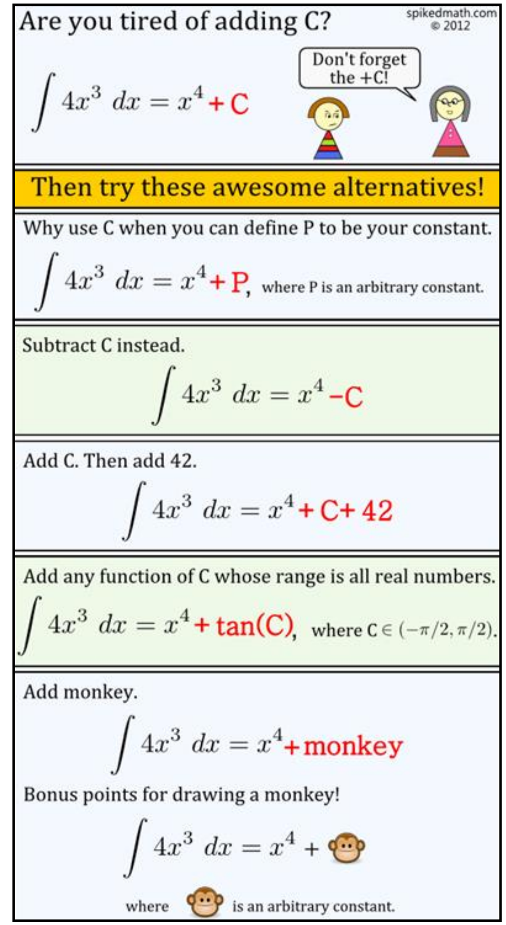
$$\int x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \tfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$



Wie berechnet man bestimmte Integrale konkret?

Der folgende Satz zeigt die Bedeutung der Stammfunktion:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Sei f eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

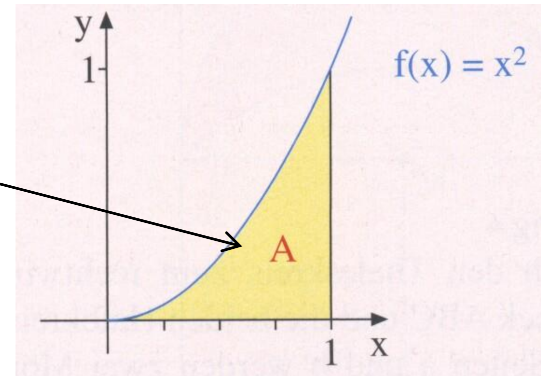
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bemerkung: Mit der Stammfunktion kann man ein Integral ganz einfach ausrechnen: Man bestimmt die Werte an den Stellen a und b und bildet die Differenz!

Für $F(b) – F(a)$ schreibt man auch $[F(x)]_a^b$ oder $F(x)\Big|_a^b$.

Beispiele

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}\cdot 1 - \tfrac{1}{3}\cdot 0 = \tfrac{1}{3}$$



$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

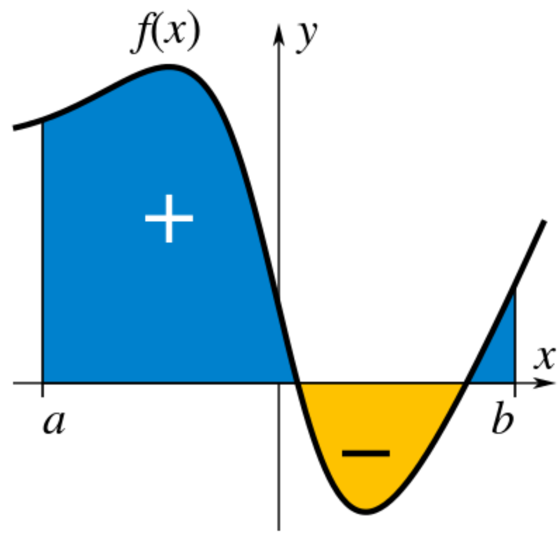
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$

$$\int_1^2 \tfrac{1}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Integral als Flächenbilanz

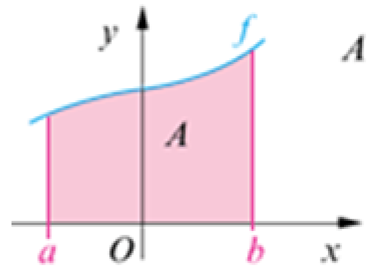
Das Integral stellt eine **Flächenbilanz** dar:

Positive Funktionswerte gehen mit positivem Vorzeichen ein,
negative Funktionswerte mit negativem Vorzeichen.



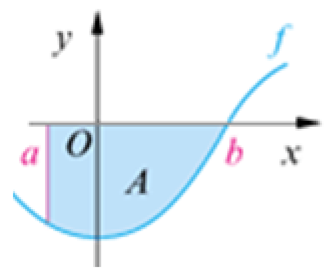
Flächen zwischen Graph und x-Achse

Fläche oberhalb der x-Achse:



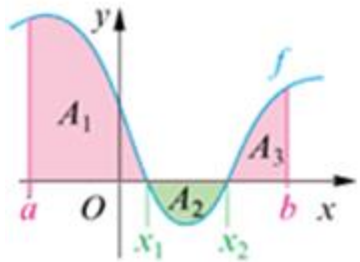
$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Fläche unterhalb der x-Achse:



$$A = \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

Graph schneidet x-Achse:



Achtung: zuerst Nullstellen bestimmen.

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \int_{x_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

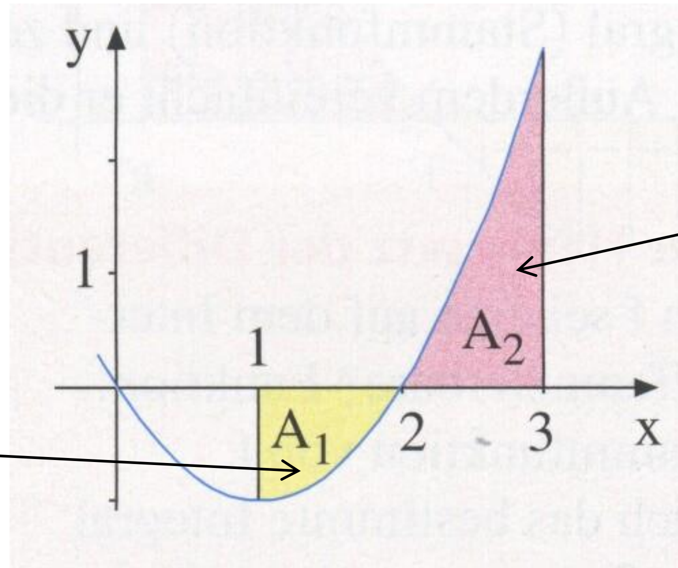
Beispiel: $f(x) = x^2 - 2x$

Gesamtes Integral: $\int_1^3 (x^2 - 2x)\,dx = \frac{2}{3}$

Teilintegrale:

$\int_1^2 (x^2 - 2x)\,dx = -\frac{2}{3}$

$A_1 = \frac{2}{3}$

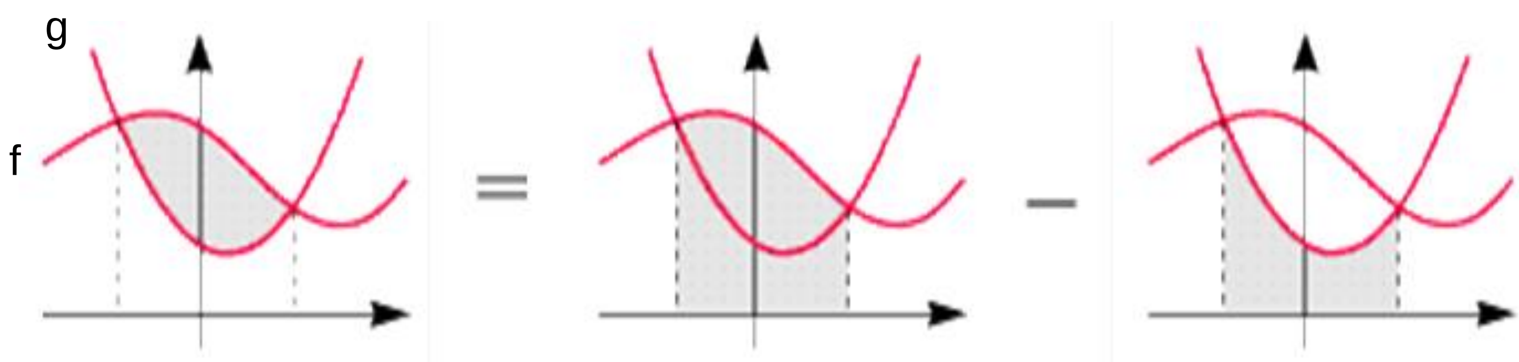


$\int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

$A_2 = \frac{4}{3}$

Gesamte Fläche: $A = A_1 + A_2 = 2/3 + 4/3 = 2.$

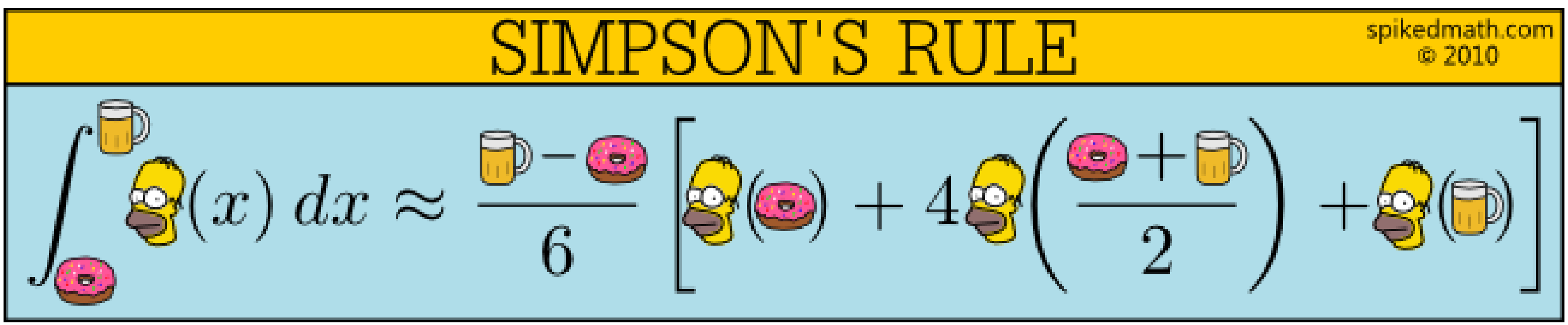
Fläche zwischen zwei Graphen



Für die Fläche zwischen den Graphen von f und g mit $f(x) \geq g(x)$ gilt:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

5.2 Numerische Integration

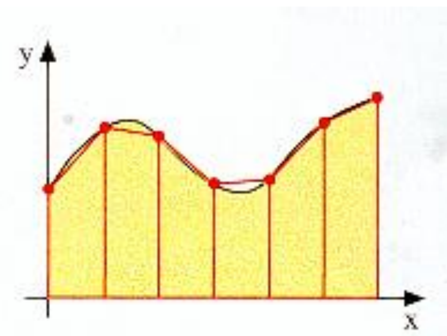


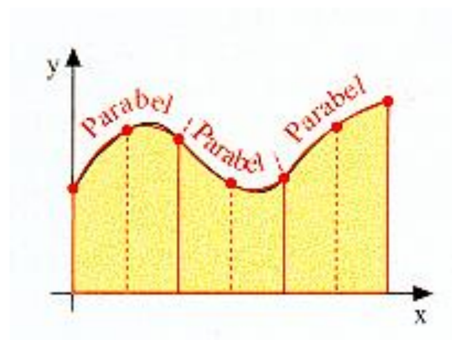
Numerische Integration

Manche Integrale können **nicht exakt berechnet** werden. **Beispiele:**

- Es existiert keine geschlossen darstellbare Stammfunktion (z. B. Gauß´sche Glockenkurve).
- Die Stammfunktion ist zu schwierig zu bestimmen.
- Die Kurve ist nicht durch eine Funktionsgleichung gegeben.

Dann kann man das Integral **näherungsweise** bestimmen. **Beispiele:**



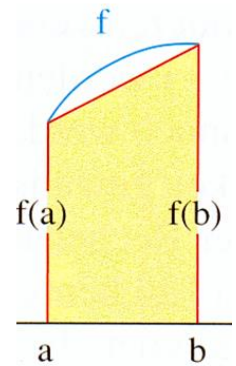


Trapezverfahren

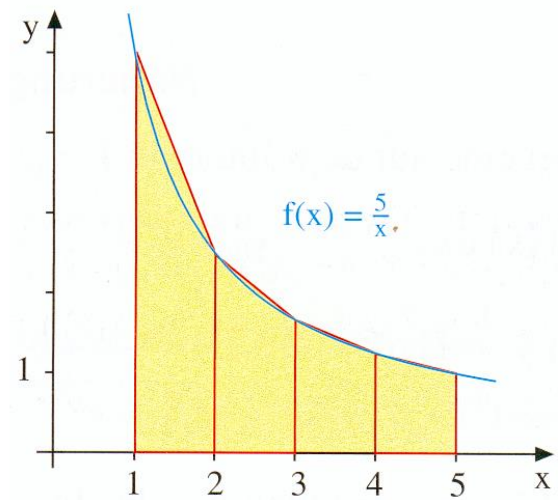
Idee: Wir nähern das Integral durch Trapezstreifen an.

Der Flächeninhalt eines solchen Trapezes ist

$$A = \tfrac{1}{2}\,(b - a)\,(f(a) + f(b))$$



Beispiel: $\int_1^5 \frac{5}{x}\,dx$ wird mit 4 Trapezstreifen angenähert.



$$A_1 = \tfrac{1}{2}(2-1)\cdot\left(\tfrac{5}{1}+\tfrac{5}{2}\right)$$

$$A_2 = \tfrac{1}{2}(3-2)\cdot\left(\tfrac{5}{2}+\tfrac{5}{3}\right)$$

$$A_3 = \tfrac{1}{2}(4-3)\cdot\left(\tfrac{5}{3}+\tfrac{5}{4}\right)$$

$$A_4 = \tfrac{1}{2}(5-4)\cdot\left(\tfrac{5}{4}+\tfrac{5}{5}\right)$$

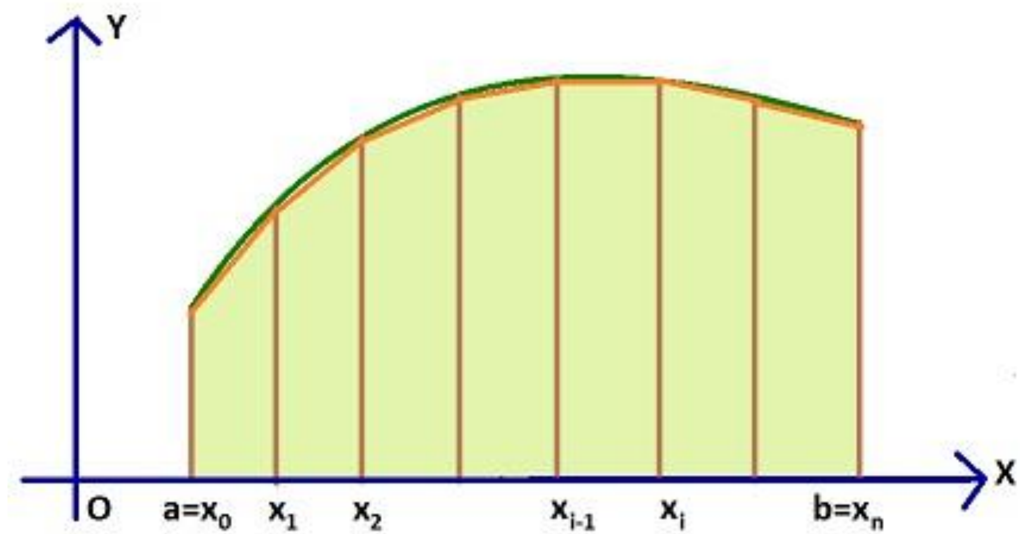
$$\int_1^5 \frac{5}{x}\,dx \approx \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\tfrac{5}{1}+2\cdot\tfrac{5}{2}+2\cdot\tfrac{5}{3}+2\cdot\tfrac{5}{4}+\tfrac{5}{5}\right) \approx 8{,}42$$

Trapezverfahren

Sei f eine auf [a, b] stetige Funktion. Dann gilt die Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{b-a}{n} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

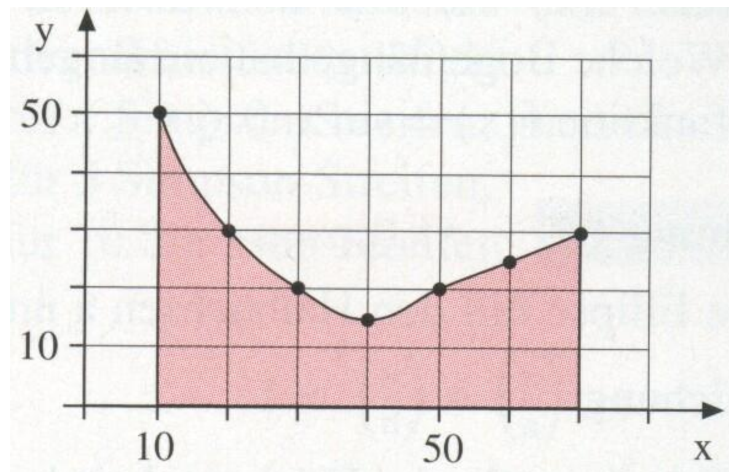
mit $y_i = f(x_i) = f(a + i \cdot (b - a)/n)$ für $i = 0, \ldots, n$.



Übung

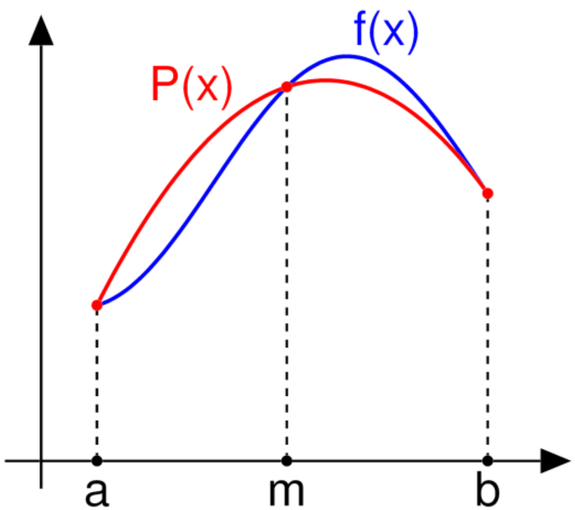
Wenn nur einzelne Messpunkte einer Kurve (und nicht die Funktionsgleichung) bekannt sind, so kann man den Flächeninhalt unter der Kurve numerisch errechnen.

Übung: Bestimmen Sie mit dem Trapezverfahren den Flächeninhalt unter der Kurve durch folgende Messwerte:



Kepler´sche Fassregel

Weil Johannes Kepler sich bei Weinkauf für seine Hochzeit betrogen fühlte, entwickelte er ein einfaches numerisches Integrationsverfahren.



Idee: Die Funktion f wird durch eine Parabel P durch die drei Stellen

a, m und b

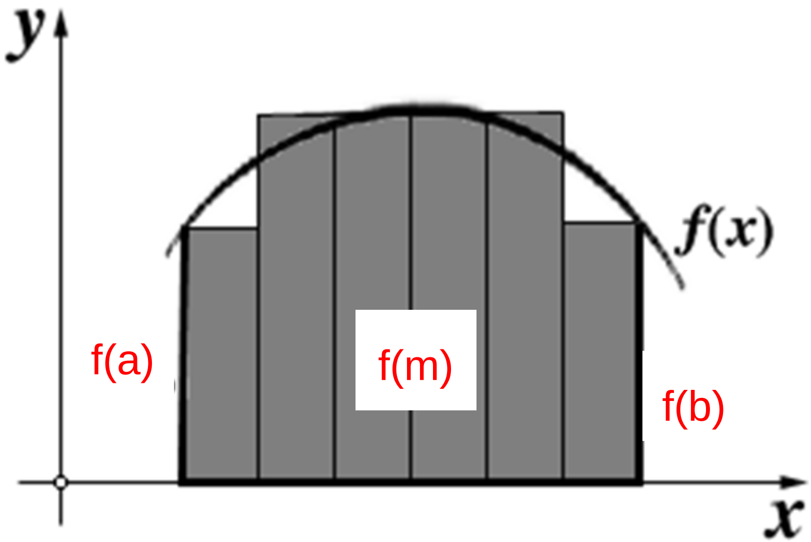
approximiert (mit m = (a+b)/2). Dann wird das Integral dieser Parabel bestimmt.

Kepler´sche Fassregel

Es ergibt sich die **Kepler'sche Fassregel** (Parabelverfahren):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f(m) + f(b)\right)$$

mit m = (a+b)/2.



Beispiel

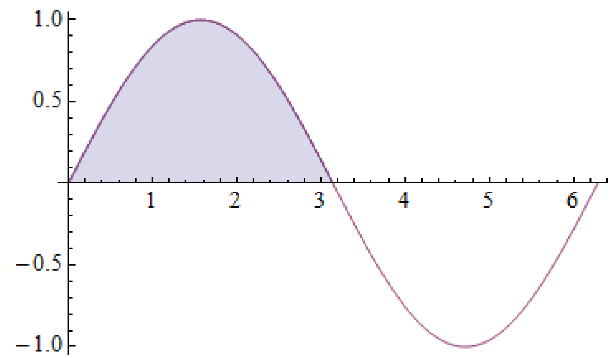
Beispiel: $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ wird mit der Kepler'schen Fassregel approximiert:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx \approx \tfrac{\pi-0}{6}\cdot(\sin(0)+4\cdot\sin(\tfrac{\pi}{2})+\sin(\pi)) = \tfrac{\pi}{6}\cdot 4 \approx 2{,}09$$

Der exakte Wert ist

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^\pi$$

$$= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$

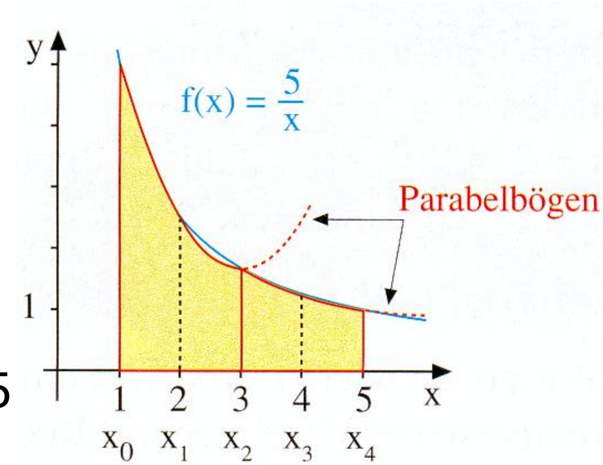


Der relative Fehler beträgt also nur ca. 5%.

Simpson-Verfahren

Idee: Wir unterteilen die Fläche in mehrere Streifen (**Simpson-Streifen**) und wenden auf jeden die Kepler'sche Fassregel an.

Beispiel: $\int_1^5 \frac{5}{x}dx$ mit 2 Simpson-Streifen:



1\. Streifen: $\int_1^3 \frac{5}{x}dx \approx \frac{3-1}{6}\cdot(f(1)+4\cdot f(2)+f(3)) \approx 5{,}55$

2\. Streifen: $\int_3^5 \frac{5}{x}dx \approx \frac{5-3}{6}\cdot(f(3)+4\cdot f(4)+f(5)) \approx 2{,}55$

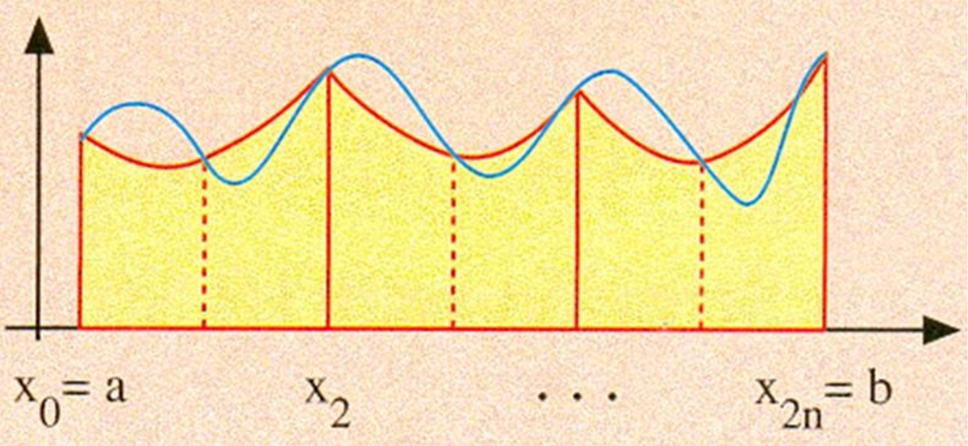
Insgesamt: $\int_1^5 \frac{5}{x}dx \approx \frac{2}{6}\cdot(f(1)+4\cdot f(2)+2\cdot f(3)+4\cdot f(4)+f(5)) \approx 8{,}11$

Simpson-Verfahren

Sei f eine auf [a, b] stetige Funktion. Dann gilt die Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\cdot\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

mit $y_i = f(x_i) = f(a + i\cdot(b - a)/(2n))$ für $i = 0, \ldots, 2n$.



Übung

Bestimmen Sie mit dem Simpson-Verfahren die Fläche unter der Kurve durch folgende Messwerte. Verwenden Sie 3 Simpson-Streifen.

x	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**
y	5	8	10	11	10	9	7

Vergleich

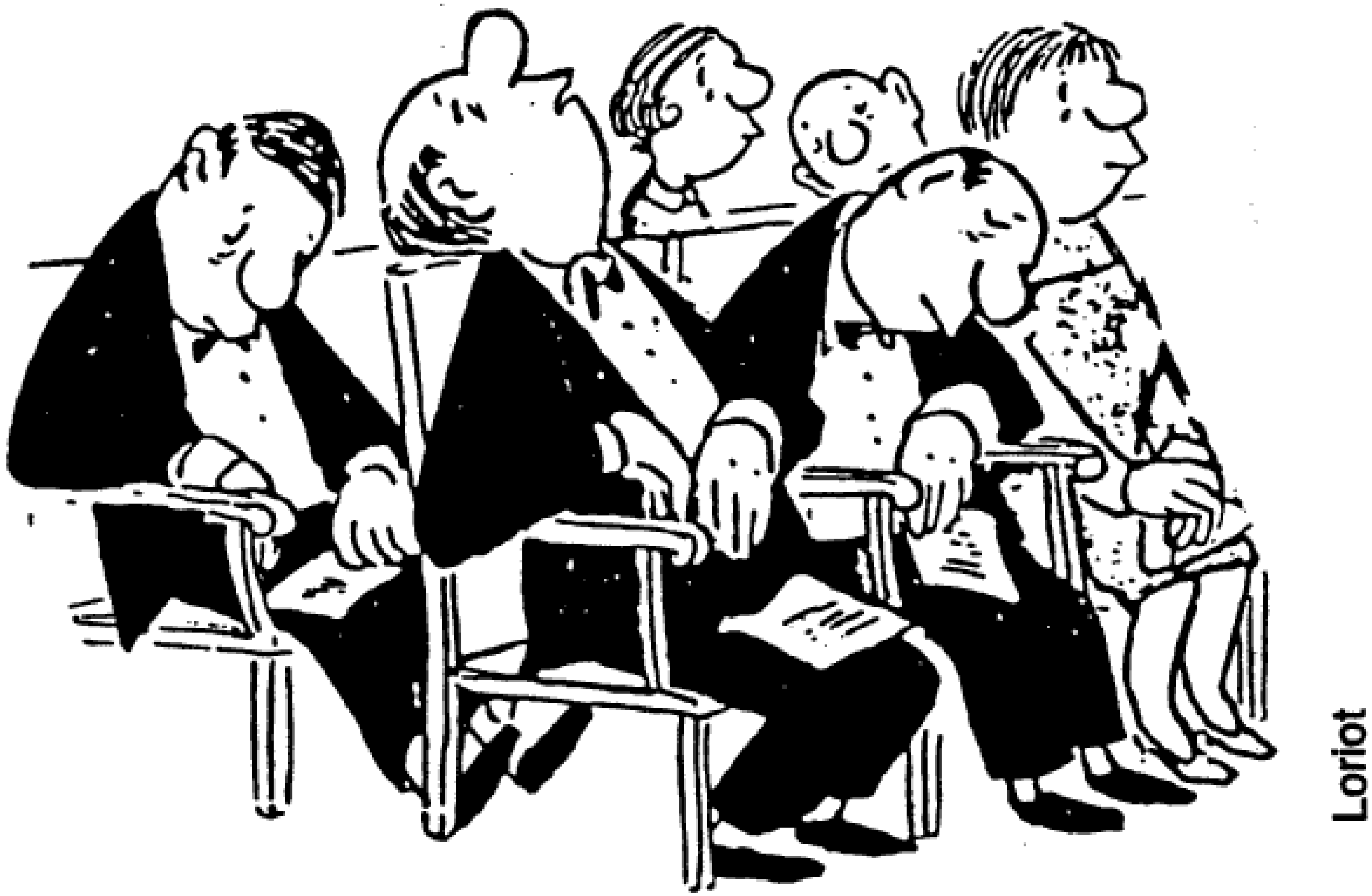
Vergleich der numerischen Integrationsverfahren:

Bei einer Verzehnfachung der Streifenzahl steigt die Genauigkeit bei

- **Ober- und Untersummen:** um ca. 1 Dezimalstelle
- **Trapezverfahren:** um ca. 2 Dezimalstellen
- **Simpson-Verfahren:** um ca. 4 Dezimalstellen

Bemerkung: Die **Kepler'sche Fassregel** liefert für Polynome bis dritten Grades sogar exakte Ergebnisse.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!!!



Viel Erfolg beim Lernen und bei den Klausuren!!!

Klausur

Klausur