LA – 2. Probeklausur

1) a) $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ b) $M \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50{,}7 \\ 18{,}8 \\ 30{,}5 \end{pmatrix}$, $M^2 \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53{,}33 \\ 17{,}52 \\ 29{,}15 \end{pmatrix}$

c) $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$:

$$\begin{array}{rl} 0{,}7x + 0{,}3y + 0{,}4z = x & \mid -x \\ 0{,}1x + 0{,}5y + 0{,}1z = y & \mid -y \\ 0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}5z = z & \mid -z \\ x + y + z = 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -0{,}3x + 0{,}3y + 0{,}4z = 0 & \mathrm{I} \\ 0{,}1x - 0{,}5y + 0{,}1z = 0 & \mathrm{II} \\ 0{,}2x + 0{,}2y - 0{,}5z = 0 & \mathrm{III} \\ x + y + z = 1 & \mathrm{IV} \end{array}$$

$\mathrm{III} = -\mathrm{I} - \mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{III}$ ist überflüssig!

$$\begin{array}{r} -3x + 3y + 4z = 0 \\ x - 5y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \Rightarrow \text{Lösung: } x = 0{,}547,\ y = 0{,}167,\ z = 0{,}286$$

2) a) Drehung um 45° um Ursprung, Streckung um $\sqrt{2}$ } Reihenfolge beliebig (weil Streckungsmatrix $= \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) kommutativ

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix für } \varphi = 45°} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) a) $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 & \mathrm{I} \\ -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = 0 & \mathrm{II} = -2 \cdot \mathrm{I} \Rightarrow \text{überflüssig!} \end{array}$$

$5 \cdot \mathrm{I} \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$

$\mathrm{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x \right\}$ = Ursprungsgerade mit Steigung $\frac{1}{2}$.

b) $A\vec{x} = \vec{x}$:

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = x & \mid -x \\ -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = y & \mid -y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} -\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 & \mathrm{I} \\ -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = 0 & \mathrm{II} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{I} \text{ überflüssig!} \end{array}$$

$-5 \cdot \mathrm{I} \Rightarrow +4x + 2y = 0 \Rightarrow y = -2x$

$\mathrm{Fixpunkte}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x \right\}$ = Ursprungsgerade mit Steigung -2.

c) $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

d) Orthogonale Projektion auf die Gerade $y = -2x$.

4) a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\t+2\end{pmatrix}$ sind linear abhängig $\iff \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}2\\t+2\end{pmatrix} \iff r=\frac{1}{2} \iff t=4$

B_t ist Basis $\iff \underline{\underline{t \neq 4}}$.

b) $T=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w}=T^{-1}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}18\\-7\end{pmatrix}}}$

c) $B=T^{-1}\cdot A\cdot T=\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}19 & 45\\-8 & -19\end{pmatrix}}}$

5) a) $\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\0 & 3-\lambda & 0\\1 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2\cdot(3-\lambda)-(3-\lambda) = -\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda$

$=-\lambda\cdot(\lambda^2-5\lambda+6)=0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=2\ ;\ \lambda_3=3}}$

b) EV zu $\lambda_1=0$: $\left.\begin{array}{rl} x \quad + z &= 0\\ 3y \quad &= 0\\ x \quad + z &= 0\end{array}\right\}$ z.B. $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2=2$: $\begin{array}{rl} x \quad + z &= 2x\\ 3y \quad &= 2y\\ x \quad + z &= 2z\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} -x \quad + z &= 0\\ y \quad &= 0\\ x \quad - z &= 0\end{array}\right\}$ z.B. $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_3=3$: $\begin{array}{rl} x \quad + z &= 3x\\ 3y \quad &= 3y\\ x \quad + z &= 3z\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} -2x \quad + z &= 0\\ 0 &= 0\\ x \quad - 2z &= 0\end{array}\right\}$ z.B. $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

c) A hat 3 verschiedene Eigenwerte $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

6) a) $7\cdot e^{i\cdot 90°}$ b) $2\cdot e^{i\cdot 60°}$ c) $4{,}33+2{,}5i \; (=5\cdot(\cos(30°)+i\cdot\sin(30°))$

d) $2\cdot(\cos(\frac{\pi}{4})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$

e) $\mathbb{L}=\{2,-2,2i,-2i\}$ f) $\mathbb{L}=\{3i,-3i\}$

g) $x\cdot(x^2-6x+10)=0$

$x_1=0$

$x_{2,3}=3\pm\sqrt{9-10}$
$=3\pm\sqrt{-1}$
$=3\pm i$

h) $x^3=-i = e^{i\cdot 270°} \Rightarrow x_1=e^{i\cdot 90°}=i$

$x_2=e^{i\cdot 210°}$

$x_3=e^{i\cdot 330°}$