# Lsg Vorschlag LAÜ10 Maximilian Maag

## Aufgabe 1

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 12 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

T = $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{-1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

B = $T^{-1}$ · A · T

B = $\begin{pmatrix} -2 & \frac{-1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 12 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

B = $\begin{pmatrix} -2 & \frac{-1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 12 & 0 & 48 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

B = $\begin{pmatrix} -6 & 0 & -24 \\ 6 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### a)

Berechnung der Eigenwerte:

$\xi_A(\lambda)$ = det(A - $\lambda$ · E)

$= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$

$= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= ((2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda)) + (1\cdot 1\cdot 0) + (0\cdot 1\cdot(2-\lambda)) - (0\cdot(1-\lambda)\cdot 0) - (1\cdot 1\cdot(2-\lambda)) - ((2-\lambda)\cdot 1\cdot 1)$

$= (4-2\lambda-4\lambda+2\lambda^2-2\lambda+\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3) - (1\cdot 1\cdot(2-\lambda)) - ((2-\lambda)\cdot 1\cdot 1)$

$= (-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4) - (1\cdot 1\cdot(2-\lambda)) - ((2-\lambda)\cdot 1\cdot 1)$

$= (-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4) - 2+\lambda-2+\lambda$

$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda + 4 - 4$
$\xi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$

Bestimmung Nullstellen des Polynoms:

$\xi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$
$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda = 0$
$-\lambda \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$
$x_1 = 0$
$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
$x_{2,3} = \frac{5}{2} + - \sqrt{\frac{5}{2}^2 - 6}$
$x_2 = 2$
$x_3 = 3$

Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Als homogenes LGS:

A1: 2x + y = 0
B1: x + y + z = 0
C1: y + 2z = 0
B2: $\frac{1}{2}$y + z = 0
C2: y - y +2z -2z = 0
C2: 0 = 0
A2: 3x + 2y + z = 0

In Stufenform:
A2: 3x + 2y + z = 0
B2: $\frac{1}{2}$y + z = 0
C2: z = z
z = z; y = -2z; x = z
Lösung in Abhängigkeit von z:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$$

Daraus Folgt eine Lösung für den Eigenwert 0:

$$\vec{\lambda_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Als LGS:
A1: 2x + y = 2x
B1: x + y + z = 2y

C1: y + 2z = 2z
Als homogenes LGS:
A1: y = 0
B1: x - y + z = 0
C1: y = 0
x = -z; y = 0; z = z

$$\vec{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Als LGS:
A1: 2x + y = 3x
B1: x + y + z = 3y
C1: y + 2z = 3z

Als homogenes LGS:
A1: -x + y = 0
B1: x -2y + z = 0
C1: y = z
C1 in A1
A2: -x + z = 0
A3: x = z A3 und C1 in B2
B2: z -2z + z = 0
B3: 0 = 0
Lösung in Abhängigkeit von z:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \vec{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### b)

Wir recyclen die Eigenvektoren aus Aufgabe a und zeigen durch $T^{-1}$ · A · T das B eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten aus A auf ihrer Diagonalen.

T Ergibt sich aus den Eigenvektoren:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$T^{-1}$ ist entsprechend:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 3

### a)

Die Z werte einer Koordinate werden bei einer Multiplikation mit der Matrix $R_z$ nicht verändert. Durch entsprechende Multiplikationen mit Sinus und Kosinus der X und Y-Werte der entsteht eine Drehung. Insgesamt bewirkt die Matrix damit eine Drehung um die Z-Achse.

### b)

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

### c)

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(60°) & 0 & \sin(60°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(60°) & 0 & \cos(60°) \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \cos(60°) & 0 & \sin(60°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(60°) & 0 & \cos(60°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 54 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} \cos(60°) & 0 & \sin(60°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(60°) & 0 & \cos(60°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 58 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} \cos(60°) & 0 & \sin(60°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(60°) & 0 & \cos(60°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+4 \\ 58 \\ -4\sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} \cos(60°) & 0 & \sin(60°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(60°) & 0 & \cos(60°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+4 \\ 54 \\ -4 * \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$

Die Ortsvektoren $A'$, $B'$, $C'$ und $D'$ können waagerecht als Bildpunkte der Punkte A, B, C und D gelesen werden.

$A' = (\ 4 \parallel 54 \parallel -4\sqrt{3}\ )$
$B' = (\ 4 \parallel 58 \parallel -4\sqrt{3}\ )$
$C' = (\ \sqrt{3}+4 \parallel 58 \parallel -4\sqrt{3}+1\ )$
$D' = (\ \sqrt{3}+4 \parallel 54 \parallel -4 * \sqrt{3}+1\ )$