Kap. 4: Grundlagen der Codierung

Quellen

- M. Broy: "Informatik - Eine grundlegende Einführung", Teil II, Springer-Verlag, 1992 (Kap. 1)
- U. Rembold, P. Levi: "Einführung in die Informatik für Naturwissenschaftler und Ingenieure", 3. Auflage, Hanser-Verlag, 1999 (Kap. 2.1.)
- D. Werner u.a.: "Taschenbuch der Informatik", Fachbuchverlag Leipzig, 1995 (Kap. 2.2)
- F. Mayer-Lindenberg: "Konstruktion digitaler Systeme", Vieweg-Verlag, 1998 (Kap. 2)
- J. Plate: "Modem-Technik", Skript FH München, 1998
- H. Dispert, H.-G. Heuck: "Einführung in die Technische Informatik und Digitaltechnik", Vorlesungsskript FH Kiel, © 1995 (Kap. 8.7), http://www.e-technik.fh-kiel.de/~dispert/digital/digital/dig0_00.htm
- W. Görke: "Fehlertolerante Rechensysteme", Oldenbourg Verlag, 1989 (Kap. 4.1)

4.1 Einführung

Wiederholung (Kap. 2.4):

- ***Codes*** **oder** ***Codierungen*** **sind Abbildungen c:A→B oder c:A^*→B^* zwischen Zeichenvorräten A und B oder zwischen Wörtern über Zeichenvorräten.**
- **Die Bildmenge {b∈B | b=c(a), a∈A} unter c, d.h. die Menge der Codewörter von c, wird ebenfalls** ***Code*** **genannt.**
- **Die Ausgangszeichen heißen auch** ***Klarzeichen*****, die Zielelemente** ***Codezeichen*** **und** ***Codewörter*****.**
- **Besteht der Definitionsbereich einer Codierung aus Einzelzeichen, so heißt die Codierung auch** ***Chiffrierung*** **und die Bildmenge auch** ***Chiffren*****.**
- **Eine Codierung erlaubt für dieselbe betrachtete Information den Übergang von Zeichen und Wörtern eines gegebenen Repräsentationssystems zu Zeichen und Wörtern eines neuen Repräsentationssystems.**

Weitere Begriffe

- In der Regel ist die Abbildung eines Codes injektiv, d.h. verschiedene Zeichen oder Wörter werden auf verschiedene Codewörter abgebildet. Damit ist die auf der Bildmenge umkehrbare Codierung beschrieben durch eine Abbildung

  $$d: \{b \in B \mid b=c(a), a \in A\} \rightarrow A ,$$

  die ***Decodierung*** genannt wird.
- Codierung wird auch als ***Verschlüsselung***, Decodierung als ***Entschlüsselung*** bezeichnet.
- Für die Informationsdarstellung in Rechensystemen werden fast ausschließlich ***Binär-Codierungen*** *(Binär-Codes)* ***von Alphabeten*** betrachtet. Dies sind Codierungen der Form

  $$c: A \rightarrow \{0,1\}^* ,$$

  wobei *A* ein vorgegebenes Alphabet ist.
- Beispiele (vgl. Kap. 3):
  Codierung ganzer Zahlen, Gleitkommazahlen, Text/Zeichenketten

Ziele von Codierungen

- **Funktionalität**
  - **Repräsentationssysteme zur Speicherung, Verarbeitung und Übertragung von Information**
  - **Umkehrbarkeit (Decodierbarkeit)**
  - **Ordnungserhaltung nach Codierung (z.B. für Sortierung)**
  - **Änderung an nur einer Stelle beim Übergang zum nächsten Zahlenwert (Korrektheit bei Messwerterfassung)**
- **Effizienz**
  - **übersichtliche und wenig aufwändige Codierungsfunktion**
  - **einfache und wirtschaftliche Verarbeitung in der neuen Repräsentierung**
  - **einfache Komplementbildung (für Arithmetik)**
  - **einfache Realisierung arithmetischer Operationen**
  - **möglichst kurze Codewörter; Reduktion von Speicherbedarf, Übertragungszeit, Energiekosten usw.**

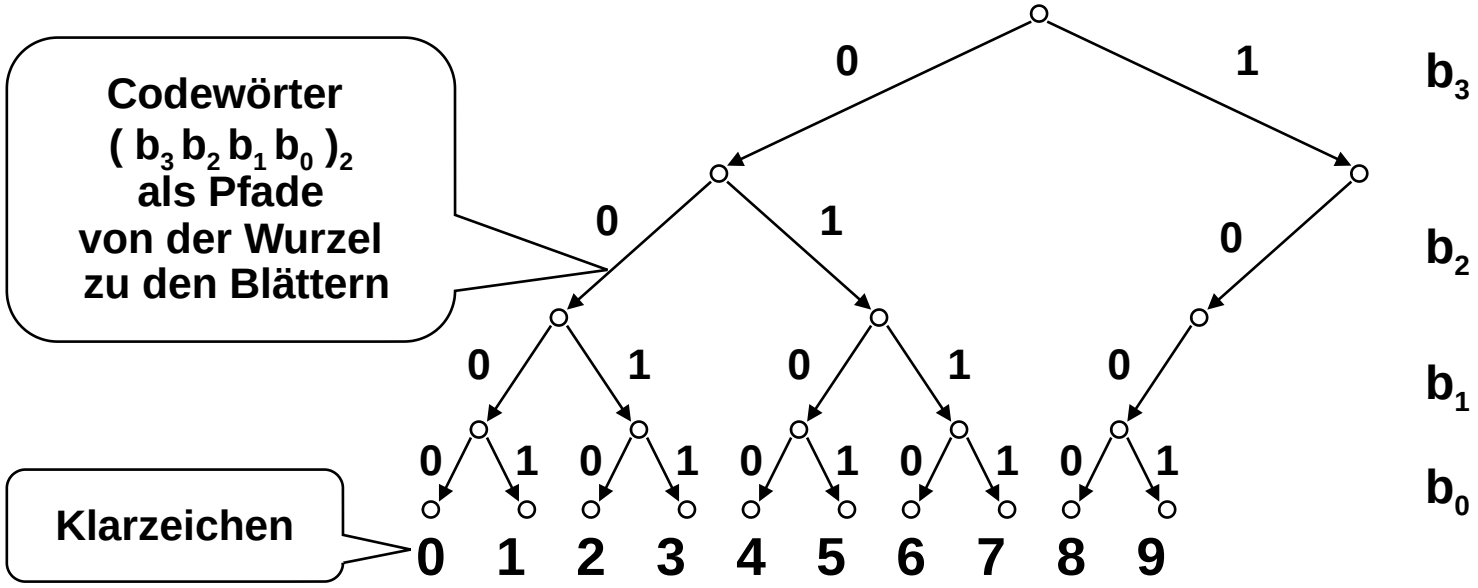
Ziele von Codierungen (2)

- **Effizienz (Forts.)**
  - **Beispiele:**
    - **Codierung und Arithmetik ganzer Zahlen (vgl. Kap. 3.3)**
    - **UTF-8-Codierung von Unicode-Zeichen (vgl. Kap. 3.4.6)**
- **Sicherung gegen Verfälschung**
  - **Fehler können zu Veränderungen der Repräsentierung von Information während der Speicherung und Übertragung führen (Störung) !**
  - **Erkennen von Fehlern in "geringfügig" gestörten Codewörtern**
  - **Erkennen von Verarbeitungsfehlern**
  - **automatische Korrektur fehlerhafter Codewörter ohne Informationsverlust (korrekte Decodierung)**
  - **Maßnahmen konkurrieren mit Effizienz**
- **Geheimhaltung von Information**
  - **Verschlüsselung (kryptographische Methoden)**

Codebaum

Def

- **Jeder Binär-Code kann graphisch durch einen *binären Codebaum* dargestellt werden:**
  - **jeder Stelle im Codewort wird eine Schicht im Baum zugeordnet**
  - **jedem Binärwert wird ein linker und ein rechter Unterbaum zugeordnet**
- **Beispiel (Codebaum des BCD-Codes):**



4.2 Blockcodes

Def

- Ein Code $c:A \rightarrow B^n$, dessen Codewörter alle die gleiche Länge n besitzen, heißt *(n-stelliger)* ***Blockcode***.
- Die Anzahl der möglichen Codewörter eines Blockcodes $c:A \rightarrow B^n$ beträgt $|B|^n$.
- Ein n-stelliger Blockcode $c:A \rightarrow B^n$ heißt ***dicht***, wenn c surjektiv ist, d.h. wenn alle $b \in B^n$ Codewörter unter c darstellen.
- Binäre Blockcodes $c:A \rightarrow \{0,1\}^n$ sind für Rechensysteme besonders geeignet, da die Codewörter n-Bit-Maschinenwörtern entsprechen.
- Ist $|A|=m$, d.h. A besteht aus m Zeichen, so benötigt man für einen binären Blockcode $c:A \rightarrow \{0,1\}^n$ mindestens $n = \lceil \log_2 m \rceil$ Stellen. ($\lceil x \rceil$ bedeutet "kleinste ganze Zahl größer gleich x".)

Beispiele

- **Die Codierung ganzer Zahlen in 2er-Komplement-Darstellung in n-Bit-Maschinenwörtern (vgl. Kap. 3.3.3) stellt einen binären, dichten Blockcode dar.**
- **Der ASCII-Code ist ein dichter 7-Bit Blockcode.**
- **Die BCD-Codierung von Dezimalziffern in 4-Bit Nibbles (vgl. Kap. 3.3.4) ist nicht dicht.**
- **Die Anzahl der möglichen Codewörter in einem n-Bit-Maschinenwort beträgt 2^n.**
- **Zur Codierung der 10 Dezimalziffern in einem binären Blockcode benötigt man mindestens $n = \lceil \log_2 10 \rceil = 4$ Stellen.**

Gewichtete Codes

Def

- **Ein binärer Blockcode $c: A \rightarrow \{0,1\}^n$ zur Codierung von Zahlen heißt *gewichtet* oder *bewertbar*, wenn den Stellen der Codewörter Gewichte W_i zugeordnet sind und sich der Wert der dargestellten Zahl z ergibt zu**

$$z = \sum_{i=1}^{n} b_i W_i \ ,$$

wobei $b_i \in \{0,1\}$, i=1,...,n die den Gewichten in der Codierung von z zugeordneten binären Ziffern entsprechen.

Andernfalls heißt der Code *Anordnungscode*.

Beispiele: gewichtete BCD-Codes

	üblicher BCD-Code	51111-Code
W_i	$2^3\,2^2\,2^1\,2^0$	5 1 1 1 1
0	0 0 0 0	0 0 0 0 0
1	0 0 0 1	0 0 0 0 1
2	0 0 1 0	0 0 0 1 1
3	0 0 1 1	0 0 1 1 1
4	0 1 0 0	0 1 1 1 1
5	0 1 0 1	1 0 0 0 0
6	0 1 1 0	1 1 0 0 0
7	0 1 1 1	1 1 1 0 0
8	1 0 0 0	1 1 1 1 0
9	1 0 0 1	1 1 1 1 1

Beispiele: gewichtete BCD-Codes (2)

	Aiken-Code
W_i	2 4 2 1
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	1 0 1 1
6	1 1 0 0
7	1 1 0 1
8	1 1 1 0
9	1 1 1 1

- Pseudotetraden liegen in der Mitte
- selbstkomplementierend (Vertauschen 0-1 ergibt Komplement)
- monoton wachsend
- Rundungserkennung (≥5, <5) am vordersten Bit
- Übertrag stimmt mit Dezimalübertrag überein

Beispiele: gewichtete BCD-Codes (3)

	2-aus-5-Code				
W_i	7	4	2	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	1	0	0	0	1
8	1	0	0	1	0
9	1	0	1	0	0

- bis auf die Null monoton wachsend
- fehlererkennend (für alle 1-Bit-Fehler)
- Einsatz: Strichcode (5 Striche: 3 schmal, 2 breit) (Postleitzahlencodierung)

Beispiele: gewichtete BCD-Codes (4)

	1-aus-10-Ring-Code
W_i	9876543210
0	0000000001
1	0000000010
2	0000000100
3	0000001000
4	0000010000
5	0000100000
6	0001000000
7	0010000000
8	0100000000
9	1000000000

- monoton wachsend
- sehr übersichtlich
- großer Aufwand
- Einsatz: Anzeigen, numerische Tastaturen

Gray-Code

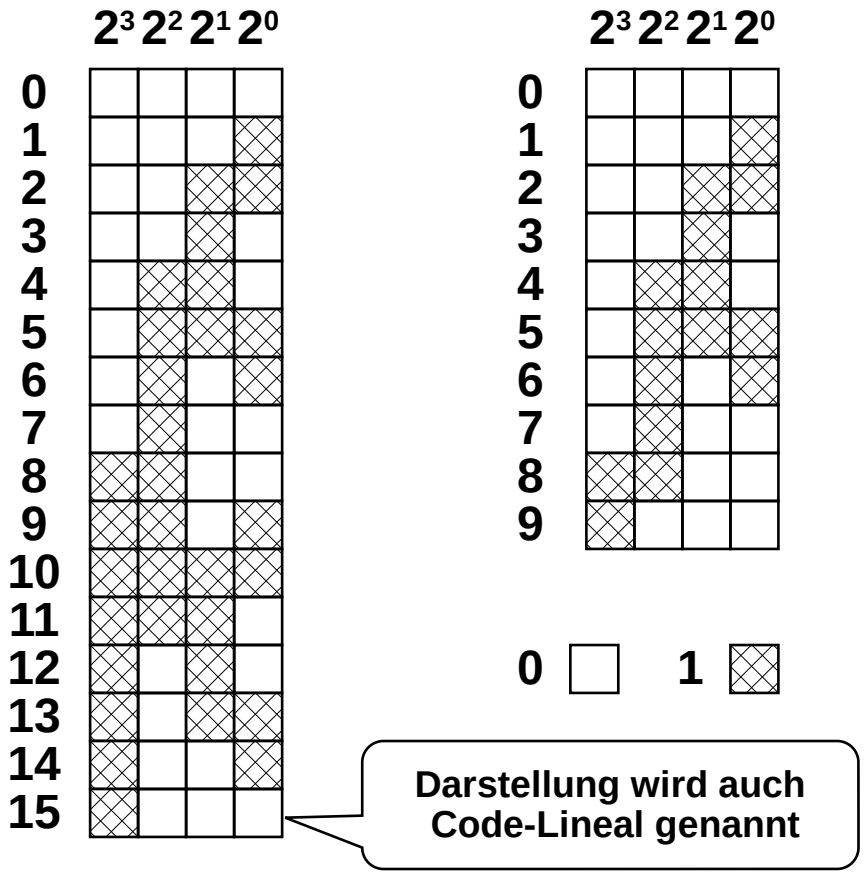
Def

- **Sei A ein Alphabet. (Damit ist eine lineare Ordnung auf A definiert.) Ein binärer Blockcode $c:A \rightarrow \{0,1\}^n$ heißt *Gray-Code* oder *einschrittiger Code*, wenn sich die Codierungen zweier in der Ordnung aufeinander folgender Zeichen in A stets in genau einer Bit-Stelle unterscheiden.**
- **Unterscheiden sich die Kodierung des ersten und des letzten Zeichens von A ebenfalls nur in einer Stelle, so spricht man von einem *zyklischen Gray-Code*.**

- **Gray-Codes besitzen wegen ihrer Einschrittigkeit eine hohe Bedeutung bei der Messwerterfassung, z.B. bei der Analog/Digital-Wandlung in Drehwinkelgebern, da sie inkorrekte Messergebnisse vermeiden.**

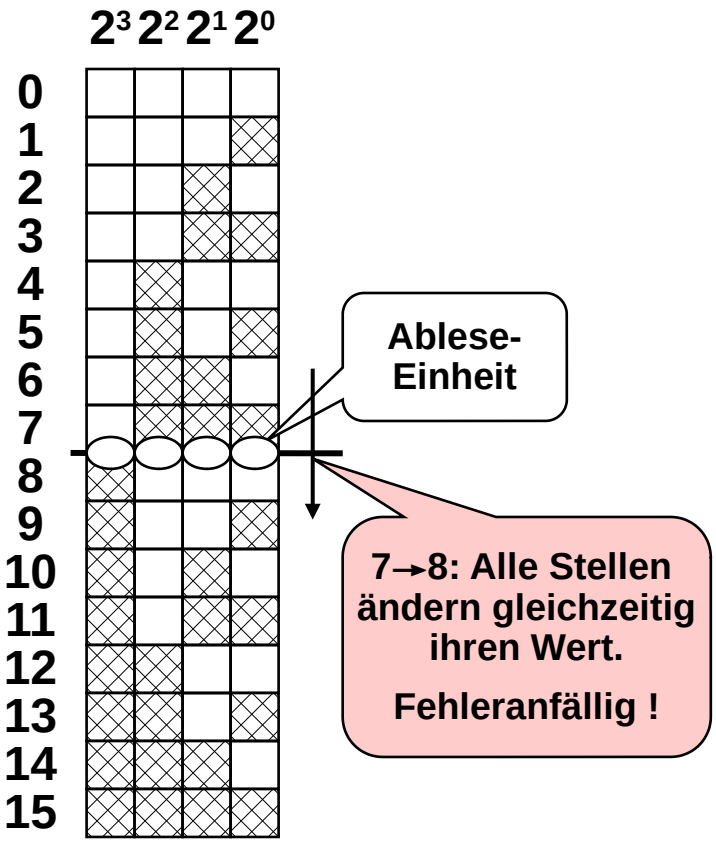
Beispiele

zyklischer, 4-stelliger Gray-Code



zyklischer Gray-Code für BCD-Ziffern (Glixon-Code)

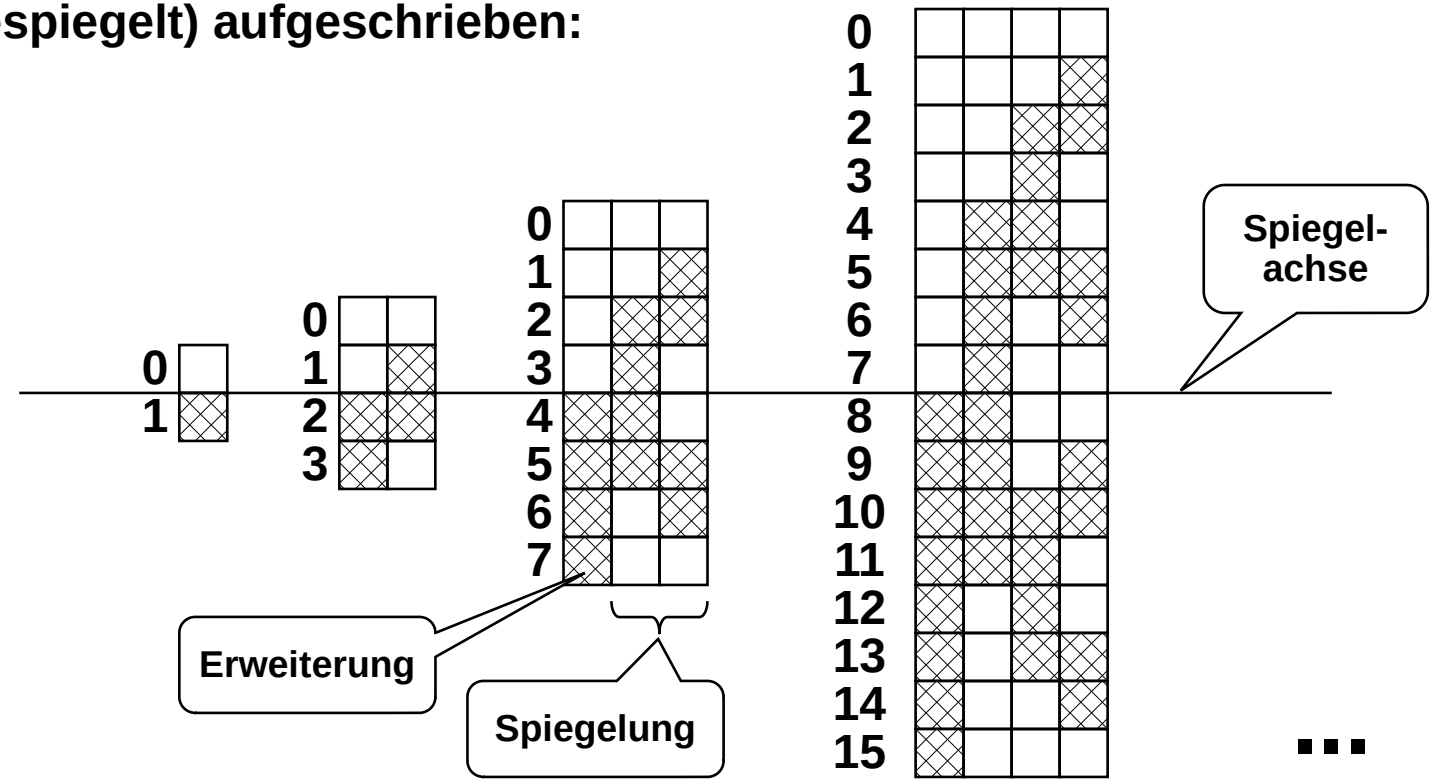
Vergleich: Dual-Darstellung



Bildung des n-stelligen Gray-Codes

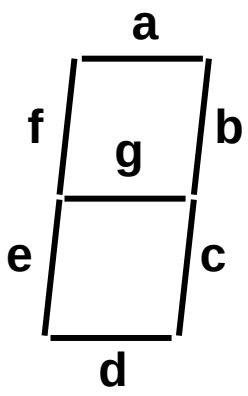
- **Bildungsgesetz (rekursiv):**
  - **0 und 1 werden mit den Dualzahlen 0 und 1 codiert.**
  - **Wenn eine neue Stelle gebraucht wird, wird sie mit 1 besetzt.**

    In den folgenden Stellen wird die bisherige Codierung rückwärts (gespiegelt) aufgeschrieben:



Blockcodes für spezielle Aufgaben

- **Beispiel: 7-Segment-Code für Dezimalziffern-Anzeigen:**



	a	b	c	d	e	f	g
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1	1
6	1	0	1	1	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	0	1	1

4.3 Codes variierender Länge

Def

- **Ein Code $c:A \rightarrow B^*$, dessen Codewörter verschiedene Längen besitzen können, heißt *variabel langer Code* oder *Code variierender Länge*.**
- **Beispiel (Impulswahlverfahren des Fernsprechsystems):**

  $c:\{0, ..., 9\} \rightarrow \{O,L\}^*$

Ziffer	Code
1	LO
2	LLO
3	LLLO
4	LLLLO
5	LLLLLO
6	LLLLLLO
7	LLLLLLLO
8	LLLLLLLLO
9	LLLLLLLLLO
0	LLLLLLLLLLO

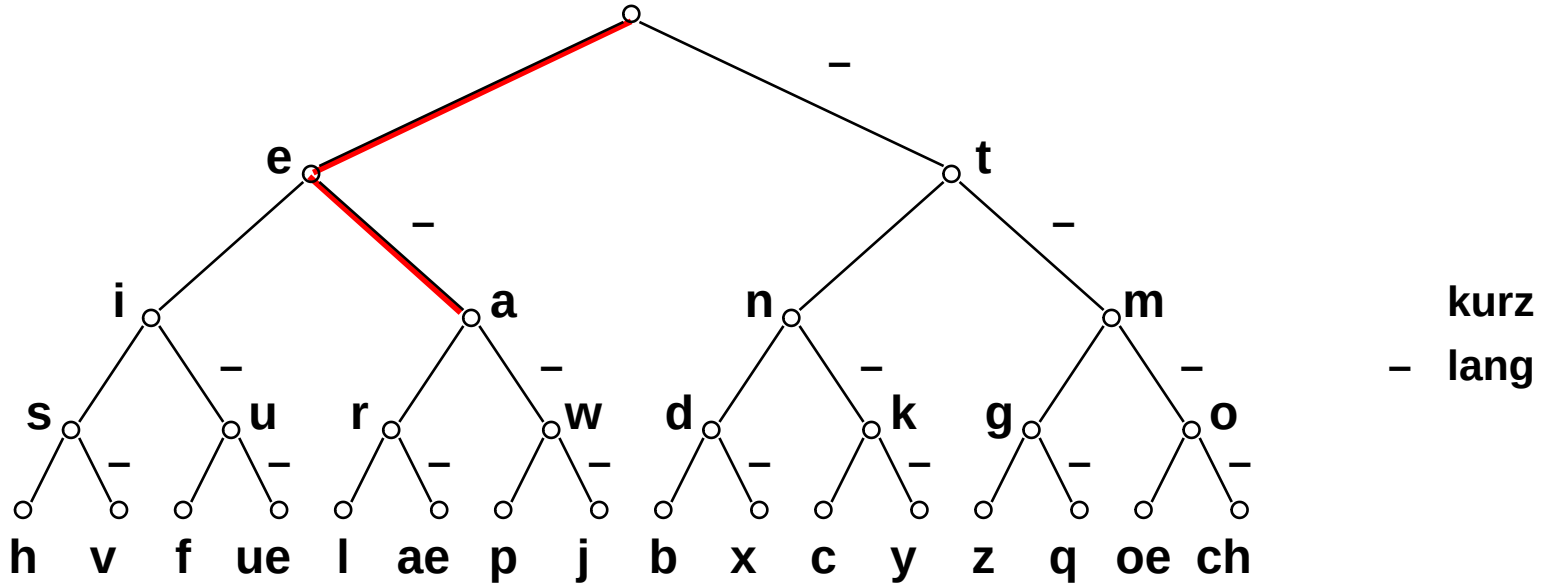
Codes variierender Länge in Rechensystemen

- **In heutigen Rechensystemen sind Codes variierender Länge für elementare Datentypen aufgrund der Maschinenwort-Struktur nicht sehr gebräuchlich.**

- **Beispiele:**
  - **Codierung von Maschinenbefehlen**
    - **z.B. 2, 4 oder 6 Bytes lange Befehle in IBM /360-Architektur**
    - **Bit-variabel lange Befehle im Prozessor Intel iAPX 432**
  - **UTF-8-Codierung von Unicode-Zeichen in 1, 2, …, 6 Bytes (vgl. Kap. 3.4.6)**
  - **Bitstream-Codierung in Abstract Syntax Notation One (ASN.1)**
    - **ASN.1: Eine formale Sprache zur abstrakten Beschreibung von Nachrichten für den Austausch zwischen Anwendungen.**
    - **Siehe auch** http://www.itu.int/ITU-T/asn1/
    - **Plattform-unabhängig, kompakt, schnell – und grundlegend.**

Beispiel: Morse-Code

- **Ausschnitt als Codebaum:**



Häufig vorkommende Schriftzeichen besitzen kurze Codewörter.

Zur korrekten Decodierung wurde zur Trennung der Codewörter ein drittes Codezeichen "Pause" (□) eingeführt.

Beispiel: • – : a • □ – : e t • □ • • □ – – □ • □ • – • □ : e i m e r

Fano-Bedingung

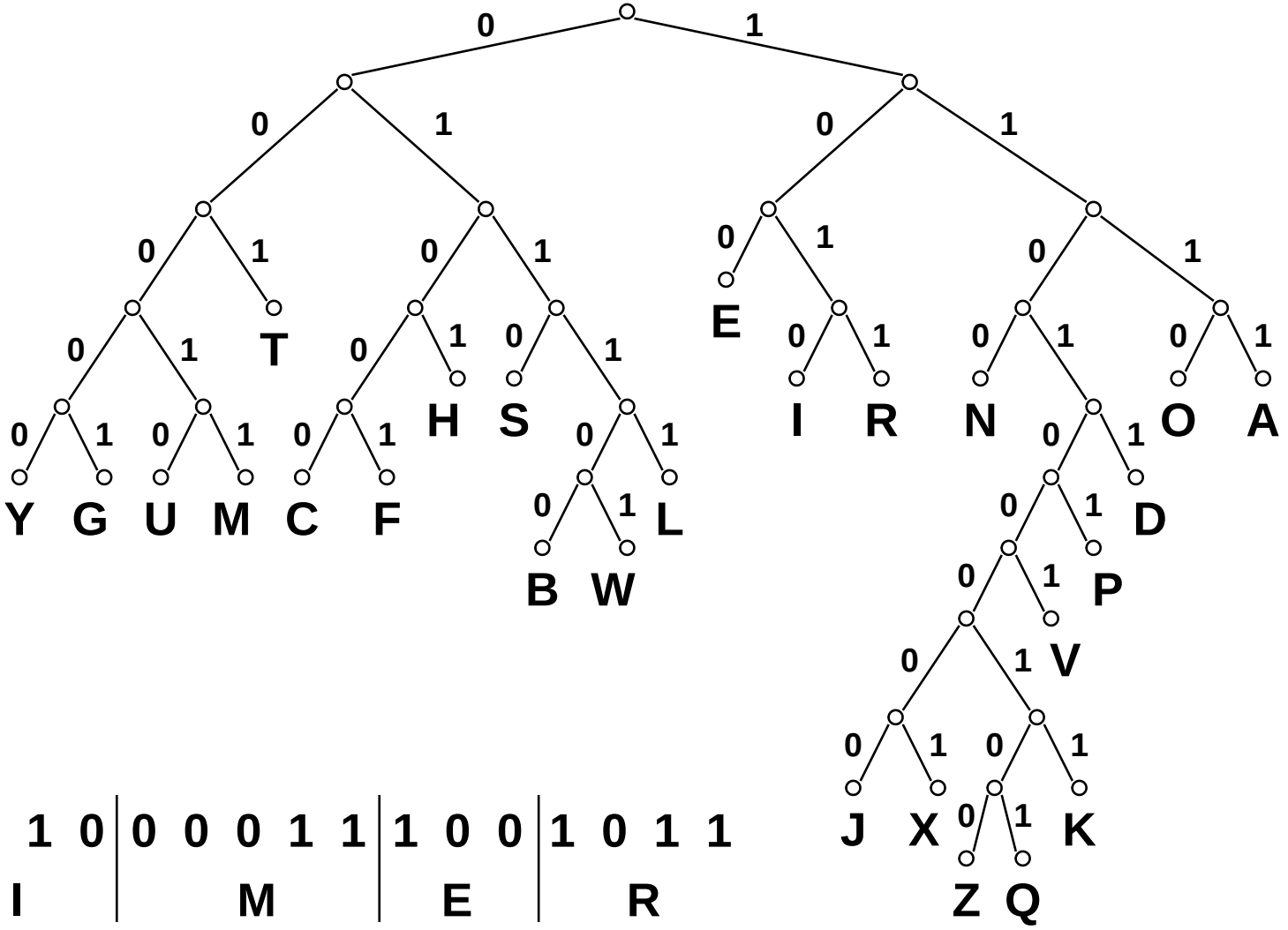
- **Vorteil von Codes variierender Länge:**
  Häufig vorkommende Zeichen aus A können durch kurze Codewörter dargestellt werden.
- **Problem:**
  Trennen der Codewörter voneinander ist schwieriger.
- **Die Eindeutigkeit der Decodierung eines Codes variierender Länge ist gegeben, wenn der Code die sogenannte *Fano-Bedingung* erfüllt: Kein Codewort ist Präfix (Anfangsstück) eines anderen Codewortes.**

Def

- **Bemerkungen:**
  - **Die Fano-Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass im Code-baum zu codierende Zeichen nur als Blätter des Baumes auftreten.**
  - **Codes mit erfüllter Fano-Bedingung heißen auch *präfixfrei*.**

Beispiel

Huffman-Code für das engl. Alphabet als präfixfreier Binär-Code variierender Länge



1 0 0	1 0 1 0	0 0 0 1 1	1 0 0	1 0 1 1
E	I	M	E	R

Beispiel (2)

- **Jeder Blockcode der Länge n erfüllt die Fano-Bedingung automatisch. Zur Decodierung werden jeweils Blöcke von n Codezeichen gebildet und decodiert.**

  Beispiel: BCD-Codierung der dezimalen Ziffern in Tetraden.

- **Der Morse-Code erfüllt die Fano-Bedingung nicht.**
  Zur sicheren Decodierung verwendet er ein Trennzeichen zwischen Codewörtern.

4.4 Komprimierende Codes

- **Ziele komprimierender Codes**
  - **Reduktion der Länge der Repräsentierung von Information durch Kompression**
  - **Kostenersparnis**
- **Anwendungsbereich:**
  Speicherung und Übertragung von Information.
- **Hier besprochen:**
  Verlustfreie Codierungen, die eine vollständige und korrekte Decodierung ermöglichen (z.B. für Text, Programme usw. notwendig)
- **Überblick**
  - **Lauflängenkodierung (*Run Length Encoding, RLE*)**
  - **Wörterbuch-Kompression**
  - **Huffmann-Codierung**
  - **Shannon/Fano-Codierung**

Lauflängenkodierung

- (engl.: ***Run Length Encoding***, RLE)
- Viele Daten enthalten Läufe, d.h. Folgen identischer Zeichen.
- Idee:
  Folge identischer Zeichen durch (Anzahl, Zeichen) codieren.
- Problem:
  Unterscheidung des Zählers von Daten gleicher Repräsentierung

- RLE codiert Läufe beliebiger Zeichen typischerweise durch
  - (Zeichen, Marker, Anzahl)
  - Marker in Daten codiert durch (Marker, Marker)

Lauflängenkodierung (2)

- **Beispiel:**
  - **Marker: #**
  - **"ABBBBBBBCDEEEEEEEEEEEF#34777777" (31 Zeichen)**
  - **komprimiert: "AB#7CDE#11F##347#6" (18 Zeichen)**

- **Vereinfachung in Sonderfällen möglich,**
  z.B. bei 7-Bit-Zeichen ⇨ MSB als Markierung des Zählers

- **Anwendungsspezialfall: Null-Unterdrückung**

Wörterbuchkompression (Lempel-Ziv)

- Wörterbuch mit Tupeln (Phrase, Codewort) wird schrittweise erzeugt
  - Phrase: Folgen von Eingabezeichen
  - erzeugte Codewörter enthalten Verweise in das Wörterbuch
- Vorteile
  - adaptiv (selbstanpassend)
  - optimal, wenn Tabelle beliebig groß und Eingabe unendlich lang sind
- Problem: Datenstruktur für das Wörterbuch
  - Tabelle, Baum, Hash-Funktion (vgl. 2. Semester: Datenstrukturen)
- Verfahren:
  - LZ77 (Lempel, Ziv, 1977), neuere Varianten `pkzip, gzip`
  - LZ78 (Lempel, Ziv, 1978), Baum statt Tabelle als Basis
  - LZW (Lempel, Ziv, Welch, 1984), komplexeres Tabellenverfahren, Basis von `compress` und dem Bildformat `gif`

Beispiel

- **Eingabe: AAABAABAABAAABB...**

---

(1) **A A A B A A B A A B A A A B B ...**

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	**1**
Phrase	**A**
Codewort	**(0,A)**

---

(2) **A A A B A A B A A B A A A B B ...**

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	**1**	**2**
Phrase	**A**	**AA**
Codewort	**(0,A)**	**(1,A)**

Beispiel (2)

3 **A A A B A A B A A B A A A B B ...**

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	1	2	3
Phrase	A	AA	B
Codewort	(0,A)	(1,A)	(0,B)

---

4 **A A A B A A B A A B A A A B B ...**

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	1	2	3	4
Phrase	A	AA	B	AAB
Codewort	(0,A)	(1,A)	(0,B)	(2,B)

Beispiel (3)

5 **A A A B A A B A A B A A A B B ...**

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	1	2	3	4	5
Phrase	A	AA	B	AAB	AABA
Codewort	(0,A)	(1,A)	(0,B)	(2,B)	(4,A)

---

6 **A A A B A A B A A B A A A B B ...**

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	1	2	3	4	5	6
Phrase	A	AA	B	AAB	AABA	AABB
Codewort	(0,A)	(1,A)	(0,B)	(2,B)	(4,A)	(4,B)

...

Häufigkeitsabhängige Codierungen

- Ein Code $c: A \rightarrow B^*$ mit variierender Länge kann ebenfalls zur Komprimierung von Wörtern $w \in A^*$ genutzt werden.

- Annahmen:
  - $A = \{ a_1, a_2, ..., a_m \}$.
  - Die relative Häufigkeit p_i jedes Zeichens $a_i \in A$ in w sei bekannt.
  - Abhängigkeiten zwischen Zeichen werden nicht betrachtet, d.h.: zu jedem Zeitpunkt entspricht die Wahrscheinlichkeit für ein neu zu kodierendes Zeichen genau der relativen Häufigkeit p_i des Zeichens

    (in der Informationstheorie als stochastische Quelle bezeichnet).
  - Es darf durch die Codierung kein Informationsverlust auftreten.

Häufigkeitsabhängige Codierungen (2)

- **Aufgabe:**
  Gesucht ist ein Binärcode $c:A \rightarrow \{0,1\}^*$ zur Codierung von $w \in A^*$, sodass die Gesamtlänge $L = |c(w)|$ des codierten Wortes minimal ist.

- **Idee:**
  - **Häufiger vorkommende Zeichen werden durch kurze Codewörter dargestellt, weniger wahrscheinliche durch längere.**
  - ⇨ **Die Gesamtlänge zur Repräsentation verkleinert sich.**

Anmerkung

- **Die Aufgabenstellung entspricht einem Optimierungsproblem:**

Sei l_i die Länge des unbekannten Codeworts für $a_i \in A$,
N_i die Anzahl der Vorkommen von a_i in w, $N=|w|$

Dann ist:

$$L = |c(w)| = N_1 l_1 + N_2 l_2 + \ldots N_m l_m \stackrel{!}{=} \min$$

ist zu minimieren

Division durch N liefert:

$$dl = L/N = \sum_{i=1}^{m} p_i l_i \stackrel{!}{=} \min$$

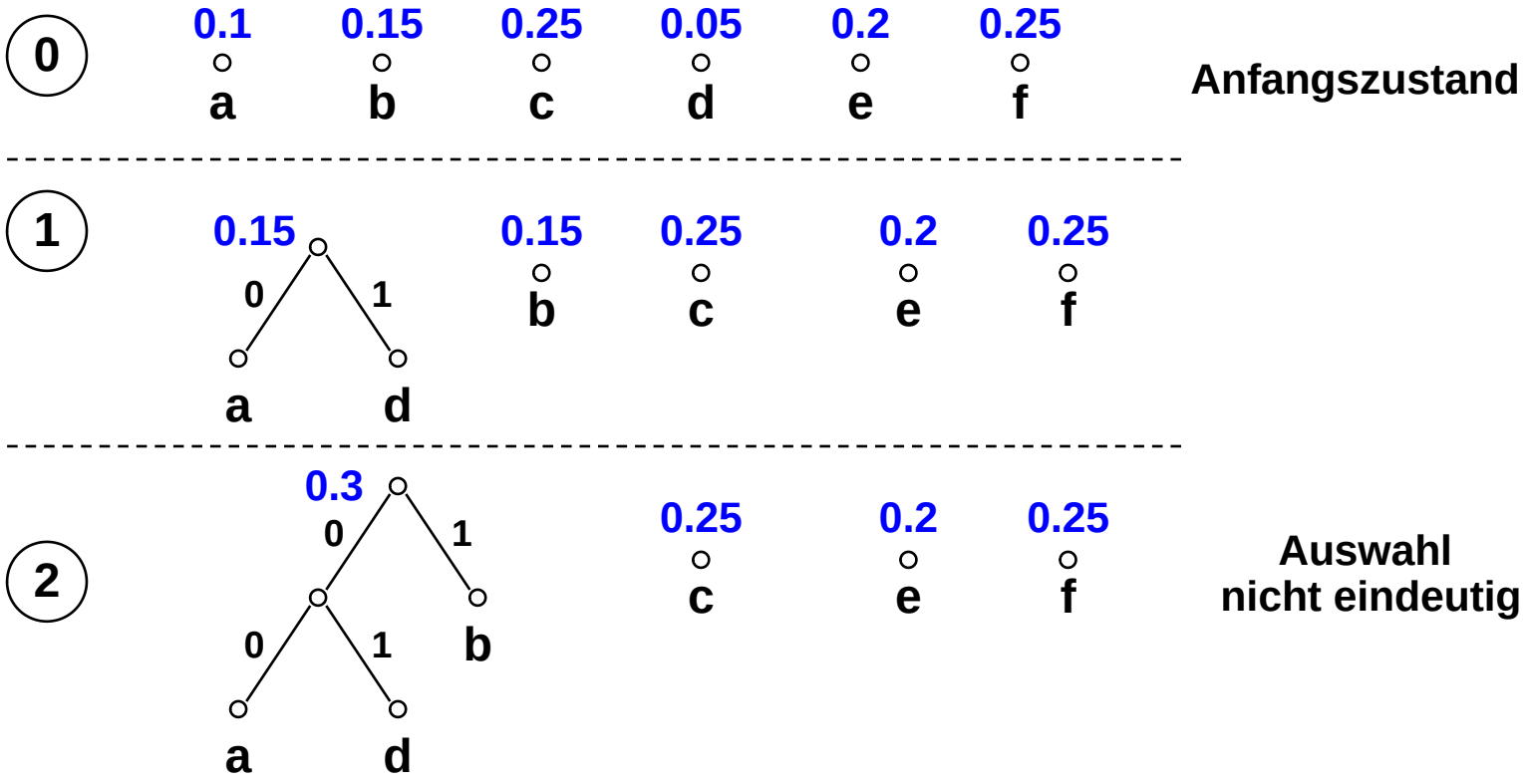
Die Aufgabenstellung ist also gleichbedeutend mit der Minimierung der durchschnittlichen Länge dl der Codewörter.

Huffman-Codierung

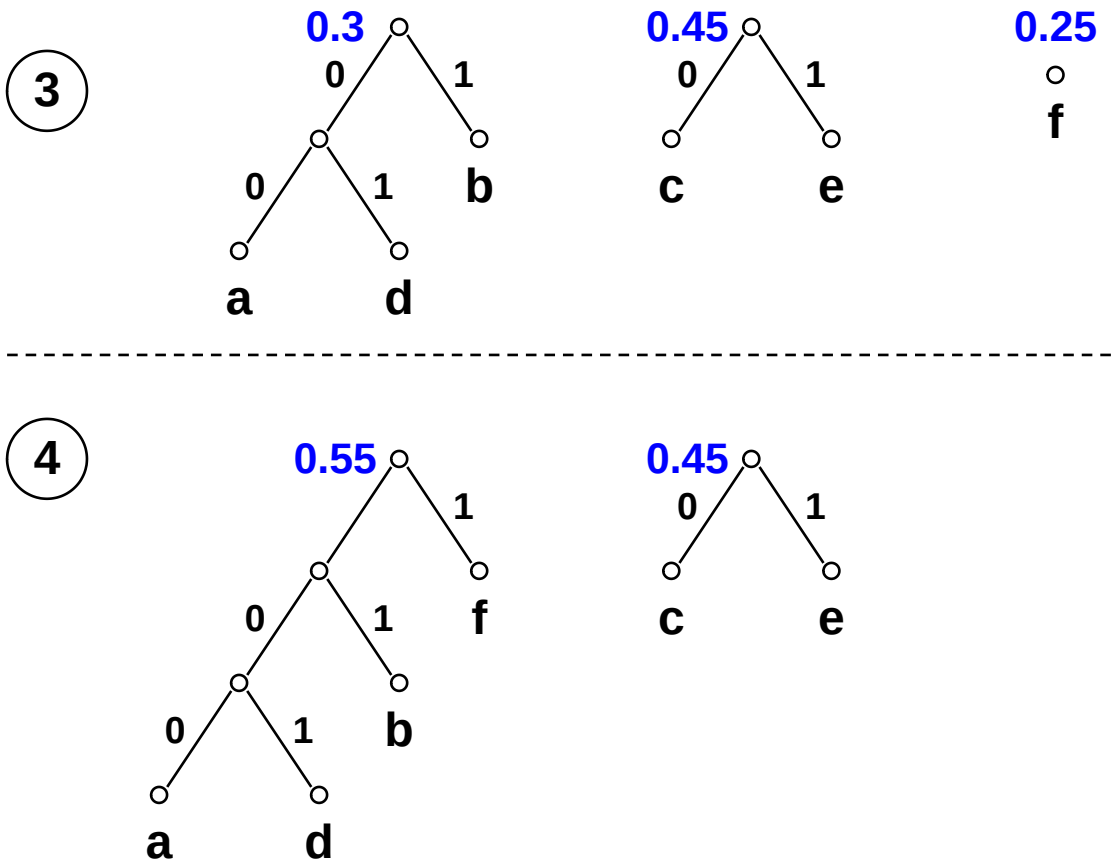
- **Die Huffman-Codierung generiert anhand der relativen Häufigkeiten einen optimalen Code, der die mittlere Codewortlänge minimiert.**
- **Verfahren zur Konstruktion des Codebaums:**
  - **(1) Ordne jedem Zeichen einen isolierten Knoten mit dem Gewicht der relativen Häufigkeit des Zeichens zu.**
  - **(2) Suche die beiden Zeichen/Teilbäume mit dem geringsten Gewicht.**
  - **(3) Gruppierung:**
    - **Bilde einen binären Teilbaum mit diesen Zeichen/Teilbäumen.**
    - **Ordne den beiden neuen Kanten die Codierungen 0 und 1 frei zu.**
    - **Ordne dem Teilbaum die Summe der Gewichte der beiden Zeichen/Teilbäume als Gewicht zu.**
  - **(4) Wiederhole (2) und (3) so lange, bis ein einziger binärer Baum mit dem Gewicht 1 existiert.**

Beispiel

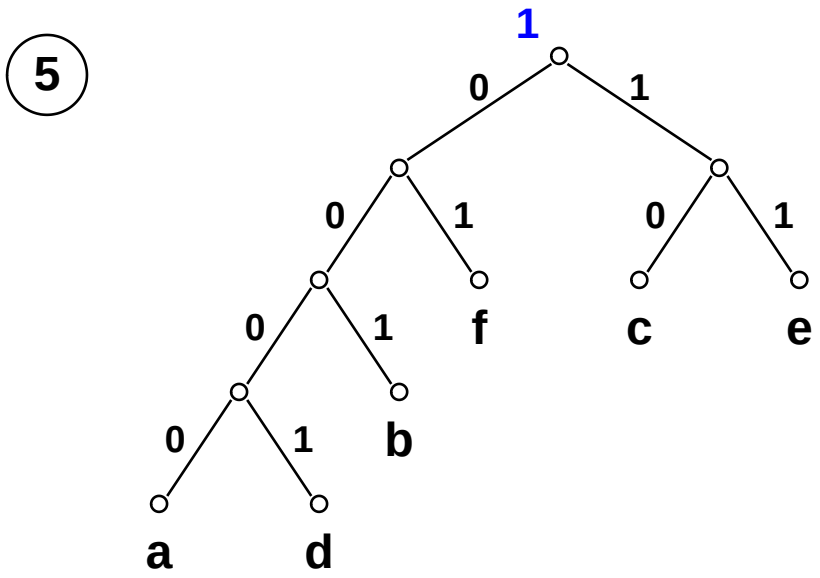
- A = { a, b, c, d, e, f }
- Gegebene relative Häufigkeiten:
  (0.1, 0.15, 0.25, 0.05, 0.2, 0.25)
- Entwicklung des Codebaums:



Beispiel (2)



Beispiel (3)



endgültiger Codebaum

- **Bestimmung der mittleren Codewortlänge:**

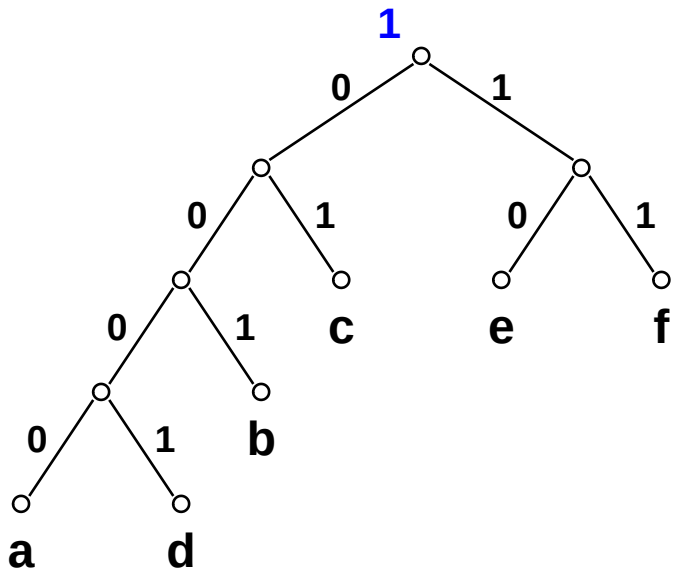
Zeichen	a	b	c	d	e	f
rel. Häufigkeit p_i	0.1	0.15	0.25	0.05	0.2	0.25
Länge l_i	4	3	2	4	2	2

⇨ **mittl. Codewortlänge dl = 0.4 + 0.45 + 0.5 + 0.2 + 0.4 + 0.5 = 2.45 Bit**

Unter Verwendung eines Blockcodes wären $\lceil \log_2 6 \rceil = 3$ Bit notwendig

Beispiel (4)

- **Bei Wahl der anderen Alternative am Ende von Schritt 2 hätte sich der folgende Codebaum ergeben :**



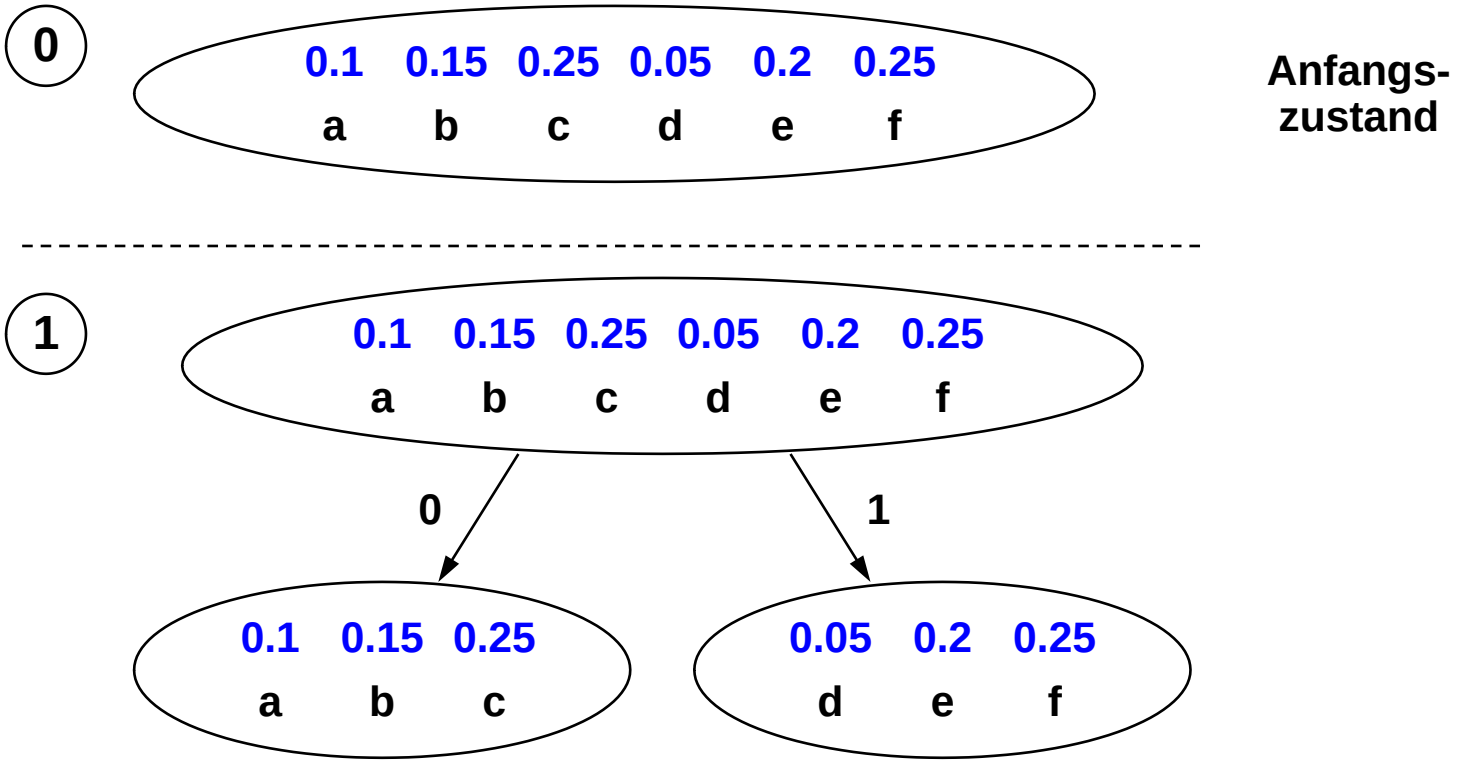
... und damit die gleiche mittlere Codewortlänge.

Shannon/Fano-Codierung

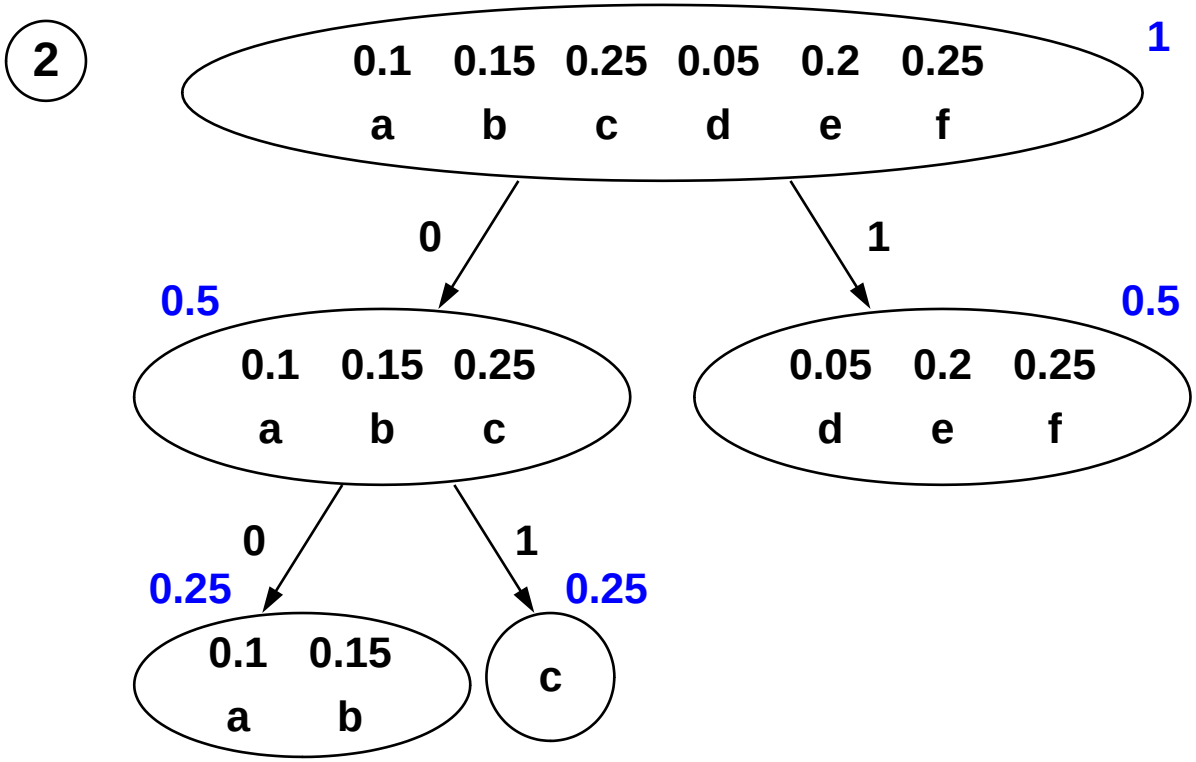
- **Die Shannon/Fano-Codierung entwickelt den Codebaum im Gegensatz zur Huffman-Codierung top-down.**
- **Verfahren zur Konstruktion des Codebaums:**
  - **(1) Bilde die Wurzel des Baumes bestehend aus der Menge aller Zeichen und dem Gewicht aus der Summe aller relativen Häufigkeiten (1).**
  - **(2) Wähle ein Blatt des Baumes, dessen zugeordnete Menge M von Zeichen nicht einelementig ist.**
  - **(3) Teilung:**
    - **Teile M in zwei möglichst gleichgewichtige Teilmengen M_0 und M_1.**
    - **Ordne M als linkes und rechtes Kind M_0 und M_1 zu sowie den neuen Kanten die Codierungen 0 und 1 zu.**
  - **(4) Wiederhole (2) und (3) so lange, bis alle Blätter des Baumes einelementig sind.**

Beispiel

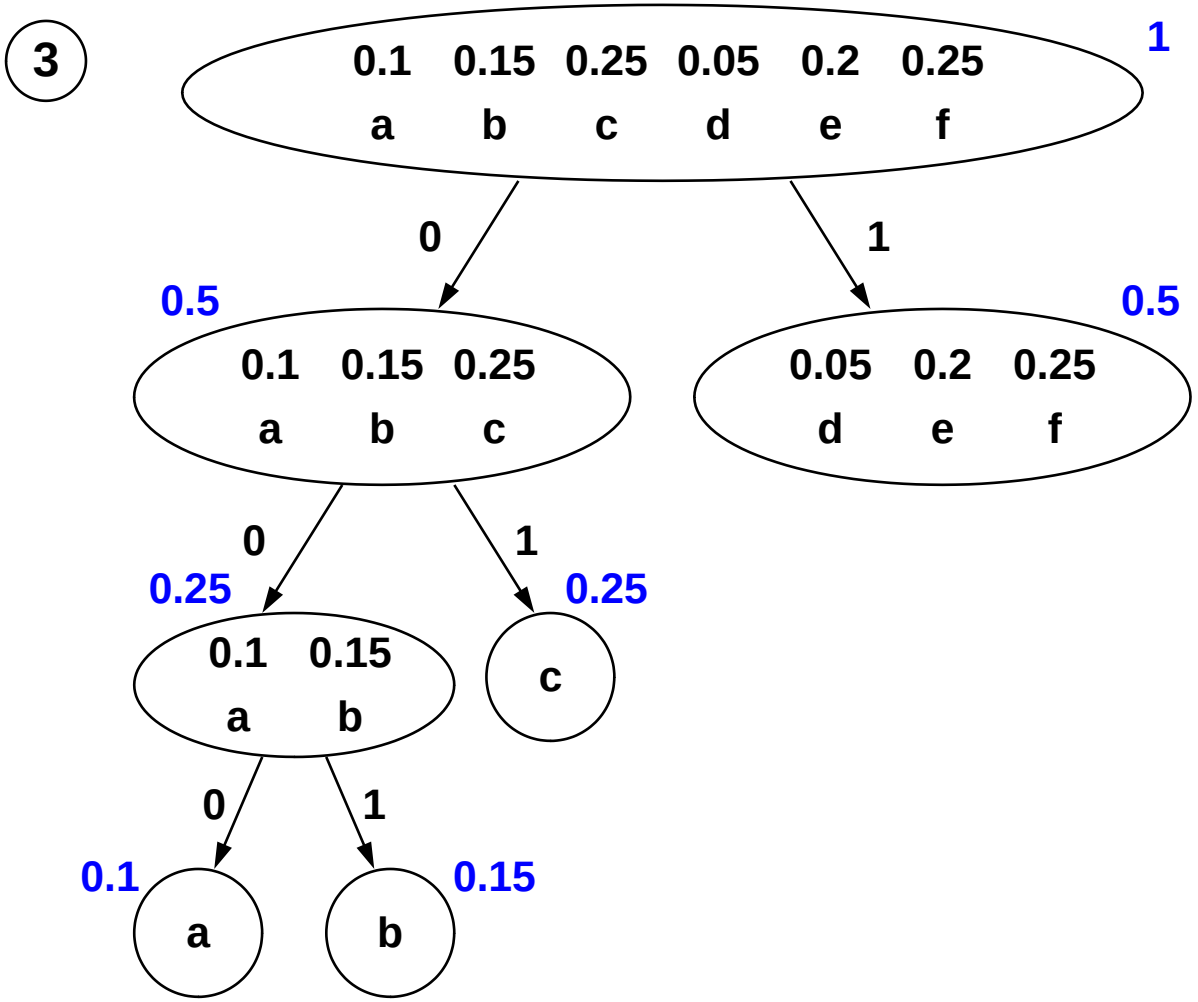
- A = { a, b, c, d, e, f }
- Gegebene relative Häufigkeiten: (0.1, 0.15, 0.25, 0.05, 0.2, 0.25)
- Entwicklung des Codebaums:



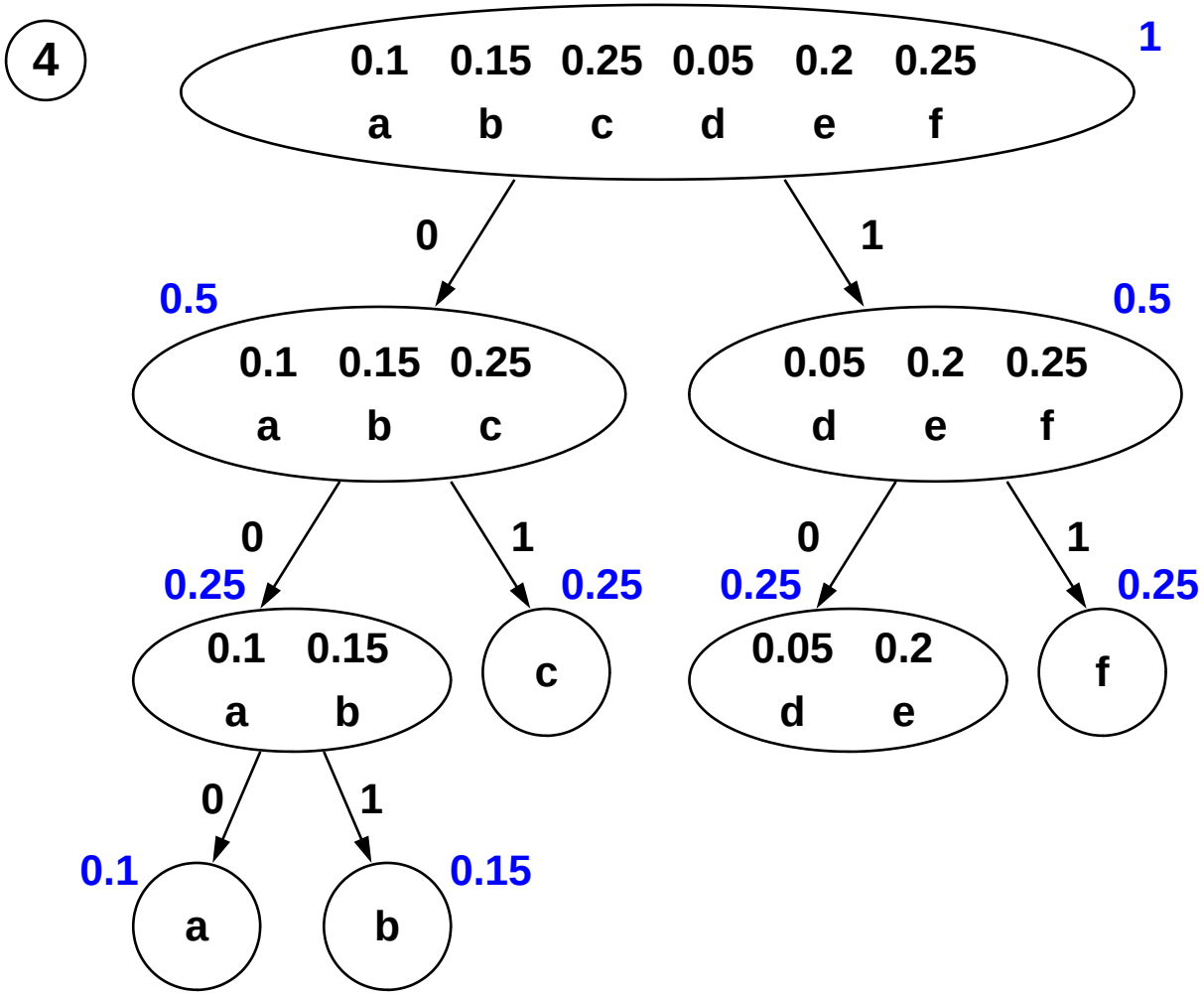
Beispiel (2)



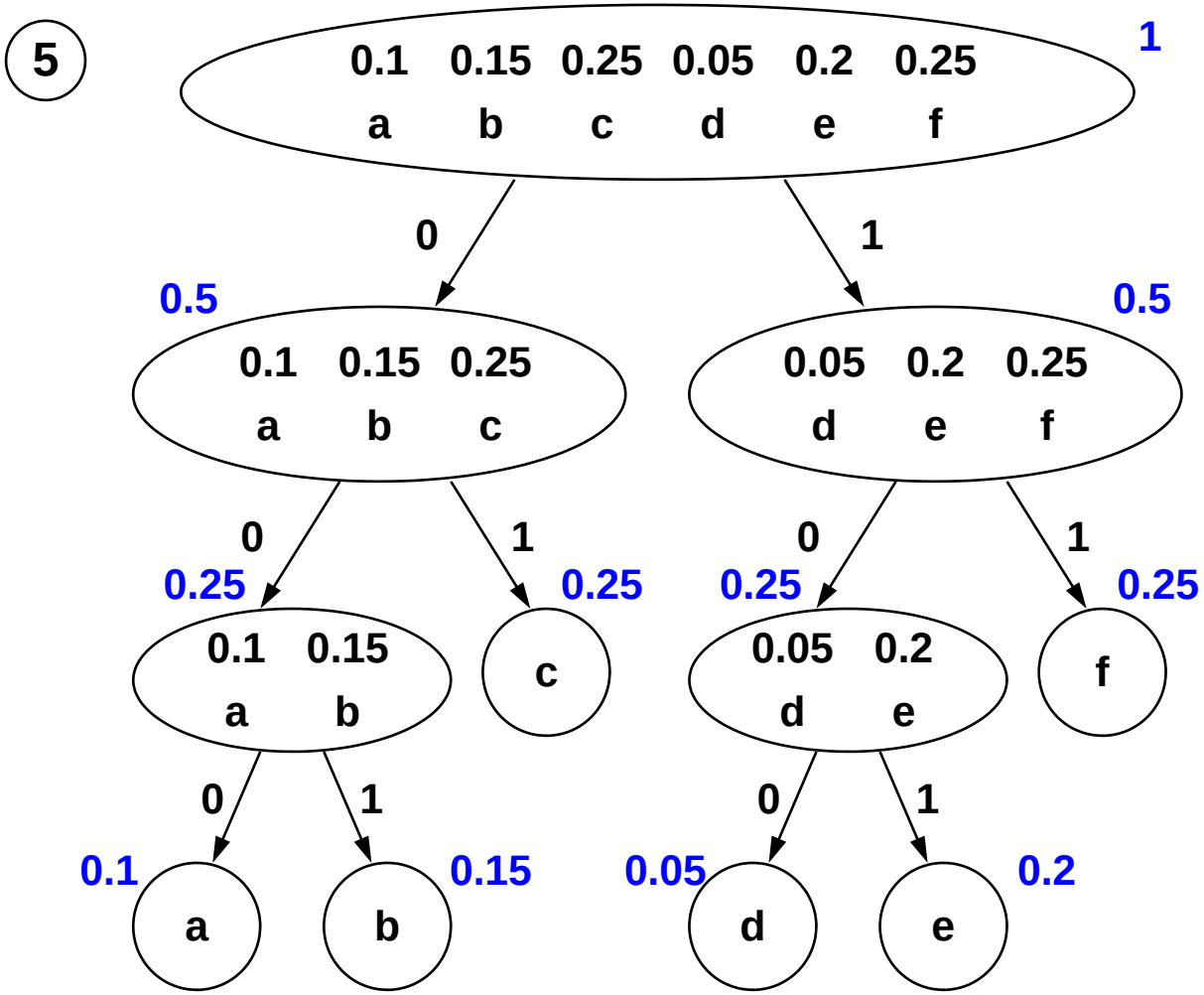
Beispiel (3)



Beispiel (4)

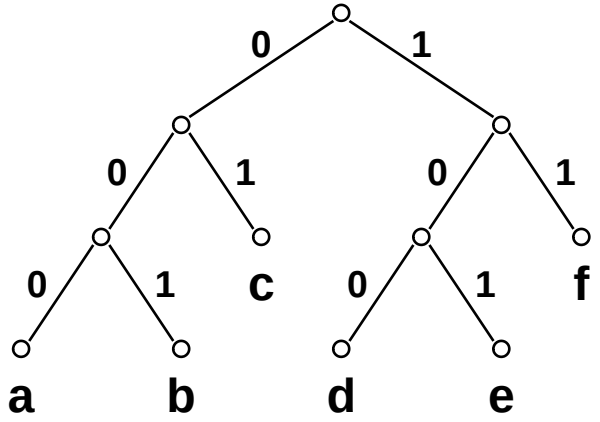


Beispiel (5)



Beispiel (6)

- **Endgültiger Codebaum:**



- **Bestimmung der mittleren Codewortlänge:**

Zeichen	a	b	c	d	e	f
rel. Häufigkeit p_i	0.1	0.15	0.25	0.05	0.2	0.25
Länge l_i	3	3	2	3	3	2

⇨ **mittl. Codewortlänge dl = 0.3 + 0.45 + 0.5 + 0.15 + 0.6 + 0.5 = 2.5 Bit**

Anmerkungen

- Die Suche nach optimalen Codes wird im Rahmen der Vorlesung "Informations- und Systemtheorie" (2. Semester) auf eine informationstheoretische Basis gestellt.
- **Das dort besprochene Codierungstheorem von Shannon besagt,**
  - **dass es eine untere Grenze für die mittlere Codewortlänge dl gibt, die durch den mittleren "Informationsgehalt" der Nachrichtenquelle bestimmt ist. Diese wird als Entropie H bezeichnet und in Bit gemessen.**

    H bestimmt sich für die hier betrachtete gedächtnislose Quelle mit den Zeichenwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, ..., p_m zu

$$H = - \sum_{i=1}^{m} p_i * \log_2 p_i$$

Unser Huffman-Bsp.:
R = 2,45 – 2,42321…
= 0,02678...

    Formal kann dann der Begriff der Code-Redundanz R als R = dl - H bzw. der relativen Code-Redundanz r als r = R / dl = 1 - H/dl eingeführt werden.
  - **dass sich jede Nachrichtenquelle so codieren lässt, dass die Redundanz des Codes beliebig klein wird.**
- **Komprimierende Codes verkleinern also die Code-Redundanz.**

Anmerkungen (2)

- **Eine weitere Verkleinerung der mittleren Codewortlänge dl gegenüber der Huffman- oder der Shannon/Fano-Codierung kann erreicht werden, indem nicht einzelne Zeichen aus A codiert werden, sondern Gruppen von k aufeinander folgenden Zeichen.**

  (In der Informationstheorie lässt sich zeigen, dass mit wachsendem k die mittlere Codewortlänge bezogen auf ein Zeichen gegen die Entropie konvergiert).

Anwendungsbeispiel

- **Fax-Komprimierung CCITT T4**
  - **Das Scannen eines Seite führt zu Zeilen aus 1728 einzelnen schwarzen und weißen Punkten (Pixeln) (bei 3,85 oder 7,7 Zeilen/mm (fein)).**
  - **Für jede Bildzeile werden die Längen der Folgen von schwarzen und weißen Pixeln bestimmt (Lauflängenbestimmung).**
  - **Die Zahlenfolge wird durch speziellen Huffman-Code komprimiert:**

weiß: Länge	Codewort	schwarz: Länge	Codewort
0	00110101	0	0000110111
1	000111	1	010
2	0111	2	11
3	1000	3	10
4	1011	4	011
5	1100	5	0011
6	1110	6	0010
7	1111	7	00011
8	10011	8	000101
9	10100	9	000100
10	00111	10	0000100
11	01000	11	0000101
12	001000	12	0000111
....		....	

Nicht verlustfreie Codierungen

- **Nicht verlustfreie Codierungen nehmen einen Informationsverlust in Kauf, um einen höheren Komprimierungsgrad zu erreichen.**
- **Typische Anwendungsbereiche:**
  - **Audio-Daten**
  - **Bilddaten**
- **Typische Kompressionsverfahren:**
  - **MPEG-Audio**
    - **Verlustminimierung auf Basis eines psycho-akustischen Modells**
    - **Lauflängenkodierung**
    - **Huffman-Codierung der Lauflängenbeschreibung**
  - **MP3 für Audio-Daten**
  - **JPEG (Joint Photographic Expert Group) für Bilddaten**
    - **dem Auge angepasste Bildtransformationen (Informationsverlust)**
    - **Lauflängenkodierung von quantisierten Werten**
    - **Huffman-Codierung der Lauflängenbeschreibung**
    - **JPEG2000: Basis „Wavelet“-Transformation**
  - **MPEG/MPEG2/MPEG4 Videostrom-Kompression**

4.5 Fehlererkennende und -korrigierende Codes

Überblick

1. Einführung
2. Fehlererkennende Codes
3. Fehlerkorrigierende Codes
4. Zyklische Codes zur Fehlererkennung

4.5.1 Einführung

- Bei der Eingabe, Verarbeitung, Übertragung und Speicherung von Informationen können Fehler auftreten, die zu Störungen in der Repräsentierung führen.
- Ein ***Bitfehler*** eines binären Signals ist seine Umkehrung (0→1, 1→0).
  - typisches Maß: Bitfehler-Wahrscheinlichkeit
  - Beispiel: Für ISDN semipermanente Verbindungen wird eine Bitfehler-Wahrscheinlichkeit von 10^{-7} angegeben.
- Störungen führen zur ***Verfälschung*** von Codewörtern.
- Fehlererkennung ist nur möglich, wenn die durch Bitfehler entstehenden Binärwörter keine gültigen Codewörter sind.
- Bitfehler, die ein Codewort in ein anderes gültiges Codewort verfälschen, sind nicht erkennbar.
- ***Codesicherung*** beinhaltet alle Maßnahmen der Erkennung oder Korrektur von Bitfehlern in Codewörtern oder Blöcken von Codewörtern.

Def

Beispiele

- **bei Eingabe durch den Menschen:**
  - **vertauschte Zeichen ("Zahlendreher")**
  - **ausgelassene oder verdoppelte Zeichen**
- **bei Übertragung:**
  - **Übertragungsstörung kann zu einzelnen oder mehreren aufeinander folgenden fehlerhaften Bits (*Burst*-Fehler oder *Bündel*-Fehler) führen.**
- **bei Speicherung:**
  - **"Umkippen" von einzelnen Datenbits eines Maschinenworts im Hauptspeicher durch fehlerhaften Speicherchip oder Strahlung**
    - **DRAM: Entladung des Speicherkondensators durch ionisierende Strahlung, insb. Alphateilchen.**
  - **Mängel in der Magnetisierung einer Plattenoberfläche können zu *Burst*-Fehlern führen.**

Redundanz

- Unter **Code-Redundanz** soll im folgenden jeglicher Zusatzaufwand in einem Code verstanden werden, der über die reine Darstellung der gewünschten Codewörter hinausgeht.
- Beispiele:
  - Im BCD-Code stellen nur 10 der 16 möglichen Tetraden gültige Codewörter dar.
  - Die gesprochene deutsche Sprache enthält etwa 80% Redundanz.
- Das Vorhandensein von Redundanz kann benutzt werden, um aufgetretene Fehler zu erkennen und evtl. sogar zu korrigieren.
- Zusätzliche Redundanz entsteht z.B., wenn einem Code zusätzliche Bitstellen hinzugefügt werden.
- Kompression und Fehlererkennung konkurrieren miteinander ! Bei der Festlegung von Codierungen ist zu prüfen, inwieweit Redundanz wünschenswert oder erforderlich ist.

Konsequenzen bei der Decodierung

- **Je nach Umfang der Störung und der vorhandenen Redundanz sind unterschiedliche Fälle bei der Decodierung möglich:**
  - **keine Störung → fehlerfreie Decodierung**
  - **"geringe" Störung →**
    Decodierung der ursprünglichen Nachricht ist möglich,
    der aufgetretene Fehler wird *maskiert* (d.h. tritt nach außen nicht in Erscheinung).
  - **"stärkere" Störung →**
    Decodierung der ursprünglichen Nachricht ist nicht möglich,
    aber Vorhandensein eines Fehlers wird erkannt.
  - **"sehr starke" Störung →**
    Decodierung führt zu einer fehlerhaften ursprünglichen Nachricht (Katastrophe).

Hamming-Gewicht, Hamming-Abstand

Def

- Sei c:A→{0,1}* ein binärer Code. Das ***Hamming-Gewicht*** g(w) eines Codewortes w∈{0,1}* ist die Anzahl der Stellen des Codeworts mit dem Wert "1".
  - Beispiel: g(01000101) = 3

- Seien a,b∈{0,1}^{n} zwei n-stellige Codewörter. Der ***Hamming-Abstand*** oder die ***Hamming-Distanz*** h(a,b) von a und b gibt die Anzahl der Stellen an, in denen sich die Codewörter a und b unterscheiden.
  - Beispiel: h(01000101, 00010111) = 3

01000101
00010111

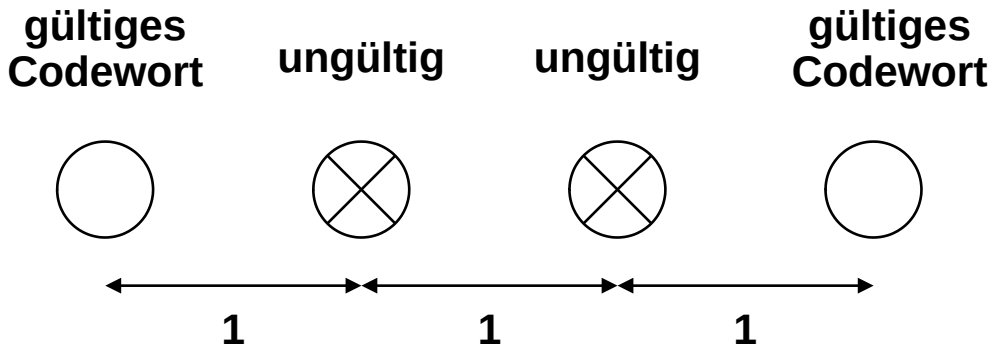
- Sei c:A→{0,1}^{n} ein binärer Blockcode. Der ***Hamming-Abstand des Codes c*** ist als der kleinste Hamming-Abstand h(a,b) zwischen zwei verschiedenen Codewörtern a und b definiert.

Hamming-Abstand von Codes

- **Beispiele (Hamming-Abstand von Codes):**
  - **ASCII-Code: 1**
  - **jeder dichte Code 1**
  - **BCD-Code 1 , auch wenn Redundanz vorhanden.**
  - **2-aus-5-Code 2**

4.5.2 Fehlererkennende Codes

- **<u>Satz:</u>**
  Hat ein Code den Hamming-Abstand d, so können alle Störungen, die höchstens d-1 Bits betreffen, sicher erkannt werden.
- **Beispiel: d = 3**



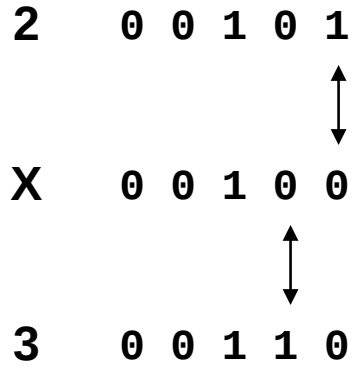
⇨ **Dichte Codes mit Hamming-Abstand 1 können keine Fehler erkennen.**

⇨ **Zur Erkennung von 1-Bit-Fehlern ist mindestens ein Hamming-Abstand von d=2 erforderlich.**

Beispiel: 2-aus-5-Code

- **Hamming-Abstand: d=2**

	7	4	2	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	1	0	0	0	1
8	1	0	0	1	0
9	1	0	1	0	0



⇨ **1-Bit-Fehler werden sicher erkannt**

Paritätsbit

- Ein ungesicherter Code (d=1) kann durch die Hinzunahme eines Prüfbits (**Paritätsbit**, *parity bit*) auf d=2 erweitert werden. Diese Erweiterung eines Codewortes wird auch ***Querparität*** oder ***Zeichenparität*** genannt.

  ⇨ 1-Bit-Fehler werden erkannt.

- Alternativen zur Festlegung des Paritätsbits:
  - gerade Parität (*even parity*): Das Codewort wird auf ein gerades Gewicht (gerade Anzahl von 1-Bits) erweitert.
  - ungerade Parität (*odd parity*): Das Codewort wird auf ein ungerades Gewicht (ungerade Anzahl von 1-Bits) erweitert.

Paritätsbit (2)

- **Fehlererkennung durch Paritätsprüfung auf Empfängerseite (*parity check*):**
  - **Bildung der Quersumme modulo 2 über das gesamte Datenwort einschließlich Paritätsbit.**
  - **Dabei Addition modulo 2 (Restklassenaddition):**
    0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0 (XOR)

⇨ **Jede ungeradzahlige Anzahl von 1-Bit-Fehlern wird erkannt, keine geradzahlige Anzahl von Bitfehlern wird erkannt.**

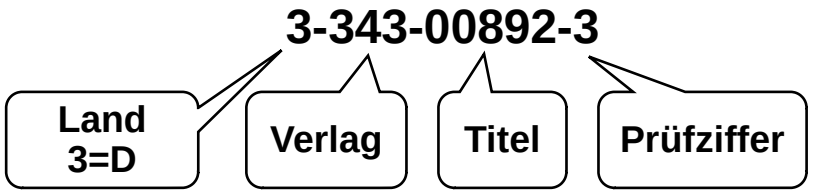
Beispiele:

- **ASCII-Code (vgl. Kap. 3.4.2)**
  - **7-Bit-Zeichen**
  - **MSB zur Speicherung des Paritätsbits**
  - **gerade oder ungerade Parität möglich**
  - **Beispiel (gerade Parität):**
    - **Codewort: "A": 1000001 "W": 1010111**
      Paritätsbit: 0 1
      Erweit. Codewort: 01000001 11010111

- **Arbeitsspeicher mit Parität**
  - **je Byte ein Parity-Bit**
  - **gerade oder ungerade Parität möglich**
  - **bei PCs für den Massenmarkt aus Kostengründen häufig weggelassen, Fehlererkennung als nebensächlich angesehen.**

Allgemeine Prüfziffern

- **Praxisproblem: Ziffernvertauschungen bei Eingabe können durch einfache Quersummenbildung nicht erkannt werden.**
- **Abhilfe: Quersummenbildung mit gewichtetem Code**
- **Beispiel (Internationale ISBN-Buchnummern):**



Werner et al:
Taschenbuch der Informatik,
Fachbuchverlag Leipzig

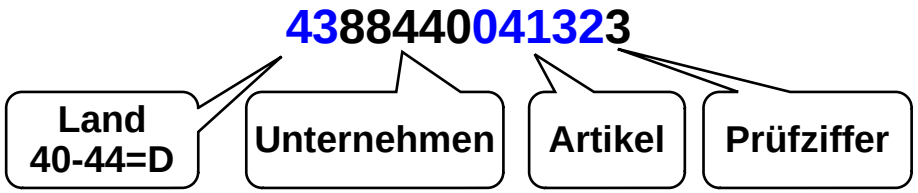
  - **Prüfziffernbestimmung:**
    - **Wichtung der Stellen von rechts beginnend mit 1, 2, 3, ...**
    - **Prüfziffer: gewichtete Quersumme modulo 11 = 0**
    - **Der mögliche Rest 10 wird codiert durch die Prüfziffer X.**
  - **Probe:**

	3	3	4	3	0	0	8	9	2	3
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Gewichte

3*10+3*9+4*8+3*7+0*6+0*5+8*4+9*3+2*2+3 = 176 176:11 = 16 Rest 0 ⇨ gültig!

Allgemeine Prüfziffern (2)

- **Beispiel GTIN (Global Trade Item Number, früher „EAN“):**



Quelle: EAN / GS1

  - **Prüfziffernbestimmung:**
    - **Wichtung der Stellen von rechts beginnend mit 1, 3, 1, 3, 1, ...**
    - **Prüfziffer: gewichtete Quersumme modulo 10 = 0**

  - **Probe:**

	4	3	8	8	4	4	0	0	4	1	3	2	3
	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
	4	9	8	4	4	2	0	0	4	3	3	6	3

Gewichte

Produkte modulo 10

4 + 9 + 8 + 4 + 4 + 2 + 0 + 0 + 4 + 3 + 3 + 6 + 3 = 50. 50:10 = 5 Rest 0 ⇨ gültig!

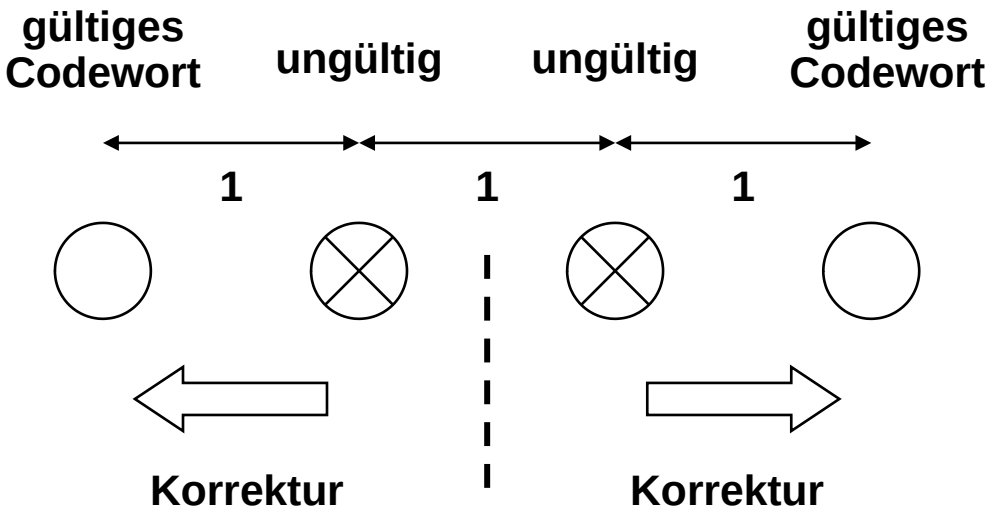
Codewort-Verdopplung

- **Ein Code mit Hamming-Abstand d wird durch Verdoppeln der Codewörter (w→w||w) zu einem Code mit Hamming-Abstand 2*d.**
  - ⇨ **Für d=1 werden damit 1-Bit-Fehler erkannt.**

- **Bemerkungen:**
  - **Anwendungsbeispiel: Wiederholung von Zahlen in Telegrammen.**
  - **In Rechensystemen relativ unüblich, bei der Verarbeitung von Information als Zeitredundanz (zweimalige Nacheinanderausführung) vorkommend.**
  - **Einfach, aber u.U. verschwenderisch**

4.5.3 Fehlerkorrigierende Codes

- **<u>Satz</u>:**
  Hat ein Code den Hamming-Abstand d = 2*k+1, so können alle Störungen, die höchstens k Bits betreffen, sicher korrigiert werden.
- **Beispiel:**
  d = 3 k = 1

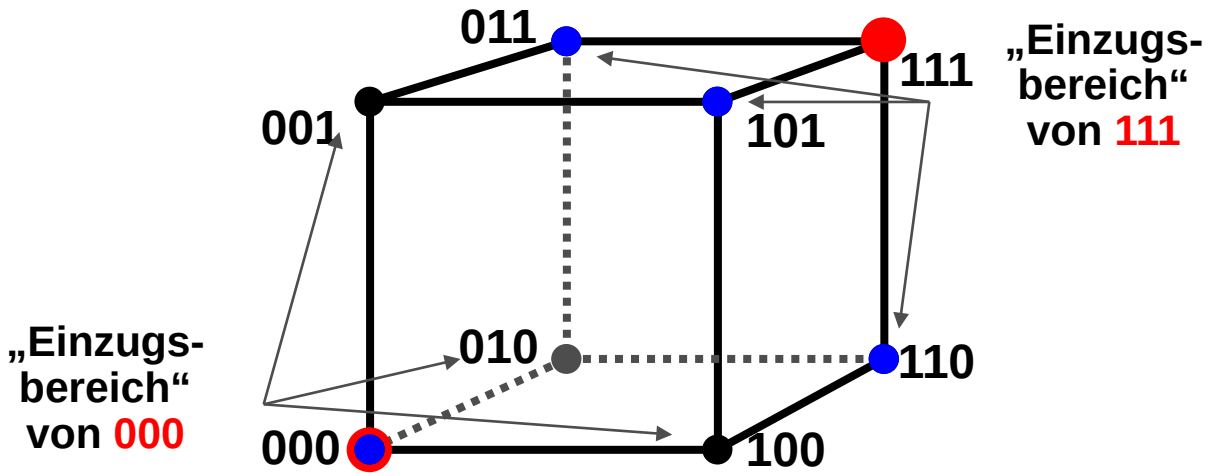


Zur Korrektur von 1-Bit-Fehlern ist ein Hamming-Abstand von d=3 notwendig.

- **Der Hamming-Abstand 2*k+1 ist minimal zur Korrektur von k-Bit-Fehlern.**

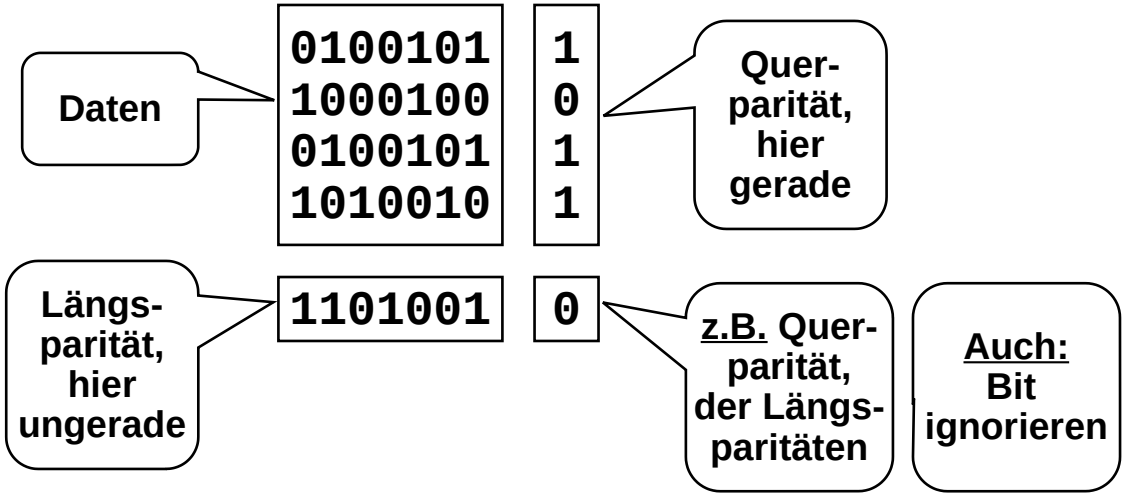
Fehlerkorrigierende Codes (2)

- **Visualisierung am n-Würfel**
  - **Beispiel: Die Code-Wörter des Code c:A→{0,1}^{n} für n=3 entsprechen den Ecken eines Würfels.**
  - **Liegt zwischen je zwei Codewörtern (blau) jeweils mindestens eine „ungenutzte“ Ecke, so gilt d=2 und (d-1=) 1-Bit-Fehler lassen sich erkennen.**
  - **Liegen mindestens zwei ungenutzte Ecken zwischen den Codewörtern (rot), gilt d=3 = 2*k+1 für k=1, also: 1-Bit-Fehler lassen sich korrigieren:**



Binärer Rechteck-Code

- **Rechteck-Code:**
  - **Binärer Block-Code als Ausgangsbasis**
  - **Paritätsbit je Codewort (Querparität) wie bisher**
  - **Paritätsbit je Spalte für einen Block von Codewörtern (z.B. 16 oder 64) (Längsparität)**



- **Hamming-Abstand für einen Codewort-Block wird auf 3 erhöht.**

⇨ **1-Bit-Fehler für den Codewort-Block können korrigiert werden.**

Beispiel

1 **Gesendet werde:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101001	0

2 **Empfangen werde:**

0100101	1
1000100	0
0110101	1
1010010	1
1101001	0

3 **Kontrollbestimmung der Quer- und Längsparität:**

0100101	1
1000100	0
0110101	0
1010010	1
1111001	1

verschiedener Wert

verschiedener Wert

3 **Vergleich: gesendet - empfangen**

4 **Rückschluss auf verfälschte Bitstelle und Korrektur:**

0100101	1
1000100	0
0110101	0
1010010	1
1111001	1

verfälschte Stelle: 1→0

Beispiel (2)

1 **Gesendet werde:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101001	0

2 **Empfangen werde:**

0100101	1
1000100	0
0100101	0
1010010	1
1101001	0

3 **Kontrollbestimmung der Quer- und Längsparität:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101001	0

verschiedener Wert

Alle Längsparitäten stimmen!

3 **Vergleich: gesendet - empfangen**

4 **Rückschluss auf verfälschte Bitstelle und Korrektur:**

0100101	1
1000100	0
0100101	0
1010010	1
1101001	0

verfälschte Stelle: 0→1

Beispiel (3)

1 **Gesendet werde:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101001	0

2 **Empfangen werde:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101011	0

3 **Kontrollbestimmung der Quer- und Längsparität:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101001	1

Alle Querparitäten stimmen

3 Vergleich: gesendet - empfangen

Verschiedene Werte

4 **Rückschluss auf verfälschte Bitstelle und Korrektur:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101001	0

verfälschte Stelle: 1→0

Lineare Codes, systematische Codes

Def

- Es seien ausschließlich Binär-Codes betrachtet. Ein *linearer* Code oder *Gruppencode* ist ein Blockcode der Länge n, der 2^m, $m \leq n$, Codewörter besitzt.
- Lineare Algebra als Math. Grundlage
  - hier naiverer Zugang
- *Systematische lineare Codes* sind solche, bei denen jede der n Codewortstellen eindeutig als eine der m *Informationsstellen* oder als eine der r:=n-m *Prüfstellen* identifiziert werden kann.
- Systematische lineare Codes werden auch als *(n,m,d)-Codes* mit d als Hamming-Distanz des Codes bezeichnet.

Hamming-Code

Def

- **Ein *Hamming-Code* ist ein systematischer linearer Code, der k Bit-Fehler bei minimaler Redundanz korrigieren kann.**
  Im engeren Sinne sind Hamming-Codes solche, die 1-Bit-Fehler korrigieren können.
- **Grundidee:**
  - **Den m Datenbits eines Codeworts werden r Prüfbits zugeordnet.**
    Codewortlänge: n=m+r Bits. Bedingung für r: $2^{r-1} < m+r < 2^r$
  - **Prüfbits werden an den Positionen $1=2^0$, $2=2^1$, $4=2^2$, ..., 2^{r-1} angenommen, Datenbits dazwischen und danach.**
  - **Jedes Prüfbit enthält damit in der dualen Darstellung seiner Position genau eine 1.**
  - **Jedes Prüfbit ist das Paritätsbit (gerade Parität, Addition modulo 2) für alle Datenbits, deren Position an dieser Stelle eine 1 besitzt.**
- **Vorteil:**
  - **Aufwand für Prüfbits wächst nur logarithmisch!**

Details am Beispiel

- (7,4,3)-Hamming Code
  - 4 Daten- und 3 Prüfbits, Hamming-Abstand = 3
  - betrachtetes Datenwort sei 1011

P	P		P			
001	010	011	100	101	110	111
		1		0	1	1

- Bestimmung der Prüfbits
  - $P_{100} = D_{101} + D_{110} + D_{111} = 0+1+1 = 0$
  - $P_{010} = D_{011} + D_{110} + D_{111} = 1+1+1 = 1$
  - $P_{001} = D_{011} + D_{101} + D_{111} = 1+0+1 = 0$

P	P		P			
001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	0	0	1	1

Details am Beispiel (2)

- Störung führe zu verfälschtem Codewort (Fehler in Datenbit)
  - 1-Bit-Fehler an Stelle 110

P	P		P			
001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	0	0	0	1
					~~1~~	

- Bestimmung des *Fehlersyndroms* aus Prüfbit und zugehörigen Datenbits (Quersumme modulo 2) nach Auslesen/Übertragung
  - $S_{100} = P_{100} + D_{101} + D_{110} + D_{111} = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$
  - $S_{010} = P_{010} + D_{011} + D_{110} + D_{111} = 1 + 1 + 0 + 1 = 1$
  - $S_{001} = P_{001} + D_{011} + D_{101} + D_{111} = 0 + 1 + 0 + 1 = 0$
- Entscheidung:
  - Ist das Fehlersyndrom $(S_{100}S_{010}S_{001})=000$, liegt kein Fehler vor.
  - Andernfalls gibt $(S_{100}S_{010}S_{001})_2$ als Dualzahl die verfälschte Stelle an.
  - Hier: 110_2 ist die verfälschte Stelle.

Details am Beispiel (3)

- Störung führe zu verfälschtem Codewort (Fehler in Prüfbit)
  - 1-Bit-Fehler an Stelle 010

P	P		P			
001	010	011	100	101	110	111
0	0	1	0	0	1	1
	~~1~~					

- Bestimmung des *Fehlersyndroms*
  - $S_{100} = P_{100} + D_{101} + D_{110} + D_{111} = 0 + 0 + 1 + 1 = 0$
  - $S_{010} = P_{010} + D_{011} + D_{110} + D_{111} = 0 + 1 + 1 + 1 = 1$
  - $S_{001} = P_{001} + D_{011} + D_{101} + D_{111} = 0 + 1 + 0 + 1 = 0$
- Entscheidung:
  - Gleiches Verfahren.
  - 010_2 ist die verfälschte Stelle.

Optimalität des Hamming-Codes

- **<u>Satz</u>: Für einen Block-Code mit m Datenbits und r Prüfbits und Hamming-Distanz d ≥ 3 gilt: $m+r+1 \leq 2^r$.**
- **Da der Hamming-Code die Bedingung erfüllt ($m+r < 2^r$), stellt er einen optimalen Code mit minimal notwendiger Anzahl von Prüfbits für die Korrektur von 1-Bit-Fehlern dar.**
- **Satz ist einsichtig, denn:**
  - **Codewortlänge: n=m+r Bits**
  - **Es gibt also 2^m Datenwörter, eingebettet in 2^{m+r} Codewörter**
  - **Jedes Datenwort hat n=m+r Nachbarn mit Hamming-Abstand 1. Keiner dieser Nachbarn kann Nachbar eines anderen Datenworts sein (sonst gäbe es Codeworte mit Hamming-Distanz kleiner als 3).**
  - **Also belegt jedes Datenwort mitsamt seinen Nachbarn m+r+1 Codeworte.**
  - **Also gilt insgesamt für die Anzahl der Datenworte:**
    $2^m (m+r+1) \leq 2^{m+r}$ und damit $m+r+1 \leq 2^r$

Beispiel von vorhin:
m=4, r=3
$\rightarrow$ n = m+r=7
m+r+1 = 4+3+1 = 8
$\leq 2^r = 2^3 = 8$ ✓

SEC/DED-Codes

- SEC/DED: Single Error Correction / Double Error Detection
- Erweiterung von Hamming-Codes auf Hamming-Distanz d=4 durch weiteres Paritätsbit P über alle Stellen.

⇨ Korrektur aller 1-Bit-Fehler und Erkennung aller 2-Bit-Fehler.

- Unterscheidung in der Decodierung
  - Syndrom und P korrekt ⇨ kein Fehler
  - Syndrom und P falsch ⇨ 1-Bit-Fehler korrigierbar
  - Syndrom falsch und P korrekt ⇨ 2-Bit-Fehler erkannt, nicht korrigieren.
- Anwendung:
  - Basis für betriebssichere Arbeitsspeicher von Rechensystemen

Maintenance (M)-Codes

- Varianten von SEC/DED-Hamming-Codes
- zusätzliche Ziele:
  - möglichst geringer technischer Aufwand, z.B. möglichst wenige Stellen nehmen an der Quersummenprüfung teil.
  - Überprüfung der korrekten Funktion der Erzeugung der Prüfbits.
  - Erweiterbarkeit auf verschiedene Maschinenwortlängen (Kaskadierbarkeit der Logik-Schaltkreise).
- Basis des käuflichen ECC Memory (Error Correcting Code) für hochverfügbare Rechensysteme
- Typische M-Codes (n,m,d) für die üblichen Maschinenwortlängen:
  - (13,8,4)
  - (22,16,4)
  - (39,32,4)
  - (72,64,4)

Prüfen Sie die Bedingung $2^{r-1} < m+r < 2^r$ an diesen Werten nach!

Überführung von k-Bit-Fehler in 1-Bit-Fehler

- **Hamming-Codes sind unbrauchbar zur Behandlung von Burst-Fehlern, wie sie z.B. bei der Datenübertragung auftreten.**

- **Idee: Vertauschung der Übertragungsreihenfolge**
  - **k Worte werden mit Hamming-Codierung für 1-Bit-Fehler-Korrektur zeilenweise in eine Tabelle geschrieben.**
  - **Die Tabelle wird spaltenweise gesendet.**
  - **Tritt während der Übertragung ein k-Burst-Fehler auf (der k aufeinander folgende Bits betrifft), so liegt in jeder Zeile nur ein 1-Bit-Fehler vor.**
  - **Aufgrund des Hamming-Codes ist eine vollständige Korrektur aller k Worte beim Empfänger möglich.**

4.5.4 Zyklische Codes

- **Die in 4.5.3 besprochenen Codes erkennen und korrigieren Einzelfehler oder eine geringe Anzahl von Fehlern (z.B. SEC/DED).**
- **In bestimmten Anwendungsbereichen, wie**
  - **Datenübertragung durch serielle Bitströme (z.B. Modem, LAN),**
  - **serielle Datenspeicherung auf magnetisierten Oberflächen (z.B. Diskette, Festplatte),**

  treten im Falle einer Störung aber Burst-Fehler, d.h. Folgen verfälschter Bitstellen, auf.
- **Zur Sicherung gegenüber solchen Fehlern werden *zyklische Codes* eingesetzt (auch *Polynom-Codes* genannt).**
- **Zyklische Codes sind die Basis der zyklischen Blocksicherung *CRC* (*Cyclic Redundancy Check*).**
- **Einfache technische Realisierung mittels Schieberegisterschaltungen möglich.**

Grundlage: Polynomdivision

- Die n Bits eines Datenblocks B der Länge n werden als Koeffizienten eines Polynoms P(x) vom Grad n-1 interpretiert.
- Beispiel:

  B=1011 $P(x) = 1*x^3 + 0*x^2 + 1*x^1 + 1*x^0 = x^3+x+1$

- Polynom-Addition modulo 2
  - Addition der Koeffizienten gleicher Exponenten modulo 2
  - Rechenregeln: 0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0 (XOR)
  - Subtraktion entspricht hier Addition (!)
- Beispiel:

B=1011 $P(x) = 1*x^3 + 0*x^2 + 1*x^1 + 1*x^0 = x^3 +x+1$
C=1101 $Q(x) = 1*x^3 + 1*x^2 + 0*x^1 + 1*x^0 = x^3+x^2 +1$
Σ=0110
$P(x)+Q(x) = 0*x^3 + 1*x^2 + 1*x^1 + 0*x^0 = x^2+x$

Grundlage: Polynomdivision (2)

- **Polynom-Division modulo 2**
  - P(x) = D(x)*Q(x) + R(x)
  - Restpolynom R(x) besitzt einen Grad, der kleiner als der von Q(x) ist
  - Für CRC interessiert nur R(x), nicht D(x)
- **Beispiel:**

$$P(x) = 1*x^5+0*x^4+1*x^3+1*x^2+0*x^1+1*x^0 = x^5 + x^3+x^2 + 1$$
$$Q(x) = 1*x^3+1*x^2+0*x^1+1*x^0 = x^3+x^2 + 1$$

$$P(x):Q(x) = (x^5 + x^3+x^2 + 1) : (x^3+x^2 + 1) = x^2+x$$
$$x^5+x^4 + x^2$$
$$\text{----------}$$
$$x^4+x^3$$
$$x^4+x^3 + x$$
$$\text{----------}$$
$$x+1$$

⇨ $D(x) = x^2+x, \quad R(x) = x+1$

Vorgehensweise

- **Ein zyklischer Code mit m Datenbits und r CRC-Prüfbits wird durch ein Generator-Polynom G(x) vom Grad r festgelegt.**
- **Codierung:**
  - **Der Nutzdatenblock definiert ein Polynom M(x) vom Grad ≤ m-1**
  - **An die Nutzinformation werden r Nullbits angehängt. Die Nachricht einschließlich CRC-Feld ist dann n=m+r Bits lang und entspricht dem Polynom $x^r * M(x)$.**
  - **Dieses Polynom wird durch das Generator-Polynom G(x) dividiert. Es entsteht ein Restpolynom R(x) vom Grad ≤ r-1, das die Gleichung**

    $$x^r * M(x) = D(x) * G(x) + R(x)$$

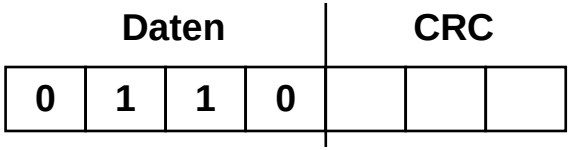
    erfüllt.
  - **Die Koeffizienten von R(x) werden in das CRC-Feld eingetragen. Das gesendete Codewort aus Nutzdatenblock und CRC-Feld entspricht damit dem Polynom $P(x) = x^r * M(x) + R(x)$.**
  - **P(x) ist nach Konstruktion durch G(x) ohne Rest teilbar! (Beachte: $x^r * M(x) + R(x) = x^r * M(x) - R(x)$ wg. Addition modulo 2).**

Vorgehensweise (2)

- **Überprüfung/Fehlererkennung:**
  - **Auf Empfängerseite wird P(x) wieder durch G(x) mit Rest R'(x) dividiert.**
  - **Fehlerfreiheit $\Leftrightarrow$ Restpolynom R'(x)=0**

Beispiel

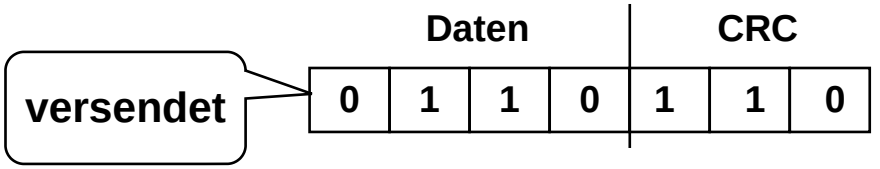
- Generator-Polynom $G(x)=x^3+1$ vom Grad r=3
- Datenblock mit m=4: 0110, d.h. $M(x)=x^2+x$



- $x^r * M(x) = x^5+x^4$
- $x^r * M(x) : G(x)$

$$(x^5+x^4) : (x^3+1) = x^2+x$$
$$x^5 + x^2$$
$$x^4 + x^2$$
$$x^4 + x$$
$$x^2+x$$

⇨ $R(x) = x^2+x$



Beispiel (2)

- **Überprüfung beim Empfänger: (a) ohne Verfälschung**

Daten				CRC		
0	1	1	0	1	1	0

- **P(x) : G(x)**

$$(x^5+x^4 \quad +x^2+x \quad) : (x^3 \quad +1) = x^2+x$$

$$x^5 \quad +x^2$$

$$\text{----------}$$

$$x^4 \quad +x$$

$$x^4 \quad +x$$

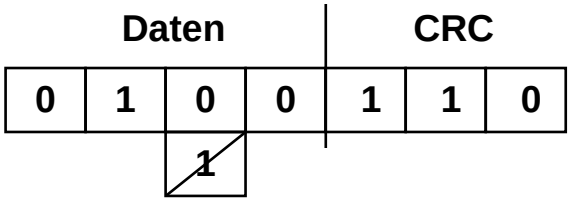
$$\text{----------}$$

$$0$$

- **R(x) = 0 ⇨ Daten unverfälscht.**

Beispiel (3)

- **Überprüfung beim Empfänger: (b) mit Verfälschung**



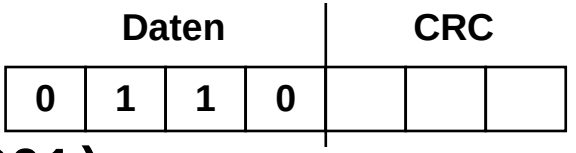
- **P(x) : G(x)**

$$x^5 + x^2 + x \;:\; x^3 + 1 = x^2$$
$$x^5 + x^2$$
$$\text{----------}$$
$$x$$

- **R(x) = x ≠ 0 ⇨ Fehler erkannt. Daten verfälscht!**

Beispiel (Notation mittels Koeffizienten)

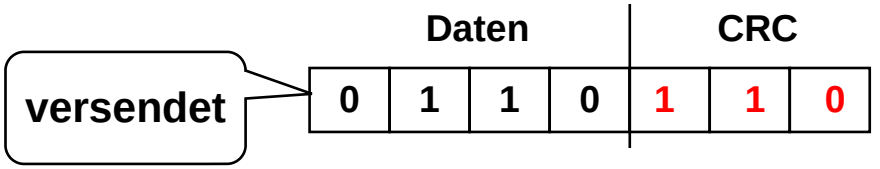
- Generator-Polynom $G(x)=x^3+1$ vom Grad r=3
- Datenblock mit m=4: 0110, d.h. $M(x)=x^2+x$



- $x^r * M(x) = x^5+x^4 =$ (110000), $x^3+1 =$ (1001)
- $x^r * M(x) : G(x)$

```
1 1 0 0 0 0 : 1 0 0 1 = 1 1 0
1 0 0 1
-----------
  1 0 1 0 0
  1 0 0 1
  ----------
      1 1 0
```

⇨ $R(x) = x^2+x$



Anmerkungen

- **Erkannte Fehler:**
  - **Sei F(x) ein Fehlerpolynom, und P'(x) = P(x) + F(x) werde empfangen. Der zyklische Code mit Generator-Polynom G(x) erkennt einen Fehler genau dann, wenn G(x) das Fehlerwort F(x) nicht ohne Rest teilt.**
  - **Wenn der Grad des Fehlerpolynoms kleiner ist als der Grad r des erzeugenden Polynoms G(x), ist G(x) kein Teiler von F(x).**

    ⇨ **Eine beliebige Störung im CRC-Feld wird erkannt, da der Grad des Restpolynoms R(x) ≤ r-1 ist.**

    ⇨ **Bei einem r-Bit-CRC werden (r-1)-Burst-Fehler immer erkannt, längere Fehler können bei geeigneter Wahl des Generator-Polynoms mit hoher Wahrscheinlichkeit erkannt werden.**

Standardisierte Generator-Polynome

- **CRC-16:** $x^{16}+x^{15}+x^2+1$
- **CRC-CCITT:** $x^{16}+x^{12}+x^5+1$ **(auch ISO 2111, ISO 3309)**
- **CRC-32:** $x^{32}+x^{26}+x^{23}+x^{22}+x^{16}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^8+x^7+x^5+x^4+x^2+x+1$ **(Ethernet)**