Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Marc Zschiegner
B.Sc. Jens Möhrstedt

TUTORING TEAM

22. Dezember 2020

TUTORING TEAM **Diese ProbeKlausur darf während der Corona Krise digital ausgegeben werden.**

ProbeKlausur WS 2020 / 2021

zur Vorlesung

Diskrete Strukturen

Nachname: ________________________ Vorname: ___________________________

Matrikelnummer: _________________ Unterschrift: __________________________

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die Anmerkung unten zur Kenntnis genommen, die Aufgaben eigenständig bearbeitet, sowie nur zugelassene Hilfsmittel verwendet habe.

- Die Klausurdauer beträgt **90 Minuten**
- Bitte legen Sie **Studierendenausweis** und **Lichtbildausweis** auf Ihren Tisch.
- Bitte schreiben Sie **deutlich.** Unleserliche Lösungen werden nicht gewertet. Die **Bindung** der Blätter dieser Klausur darf **nicht entfernt** werden. Sie dürfen auch die **Rückseiten** der Blätter verwenden (weiteres Schmierpapier befindet sich am Ende).
- Lesen Sie die Aufgabenstellung **vollständig**. Sollten während der Klausur Unklarheiten bestehen, ist es möglich kurze **Fragen** zu stellen.
- Hilfsmittel: **keine**
- Täuschungsversuche aller Art werden mit der **Note 5** geahndet und ziehen einen Vermerk in der Studienakte (sowie im Wiederholungsfall eine Zwangsexmatrikulation) nach sich.
- Beachten Sie insbesondere, dass **elektronische Geräte** (z.B. Mobiltelefone, Smartwatches oder Kameras) **unerlaubte Hilfemittel** sind! Bereits das **Berühren** eines nicht erlaubten Hilfesmittels während der Prüfung stellt einen Betrugsversuch dar.
- **Toilettengänge** während der Prüfung kostet Ihre Zeit und schaffen für alle Unruhe. Erledigen Sie sie möglichst vor der Prüfung. Wenn es trotzdem sein muss: Es darf immer nur eine Person gleichzeitig. Melden Sie sich bei der Aufsicht an und warten Sie auf das OK.
- **Bewertung:** Bei jeder Aufgabe können **10 Punkte** erreicht werden. Die **besten 5** Aufgaben werden gewertet.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Note

Viel Erf☺lg!

Aufgabe 1 (Logik)

(5 Punkte)

1. Gegeben sei die Formel $H = (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$. Füllen Sie die folgende Wahrheitswertetabelle korrekt aus. Verwenden Sie die Wahrheitswerte 1 (wahr) und 0 (falsch). Leserlich auf dem roten Feld eintragen.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \to x_2$	$x_2 \vee x_3$	H
0	0	0	1		
0	0	1	1		
0	1			1	
	1			1	
		0		0	
1		1		1	
1	1	0	1	1	
1	1	1	1	1	

(1 Punkt)

2. Kreuzen Sie an, was eine korrekte logische Äquivalenz ist.

- ❒ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- ❒ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- ❒ $A \wedge A \wedge B \wedge B \equiv A \wedge B$
- ❒ $A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$
- ❒ $C \wedge (A \vee B) \equiv (C \vee A) \wedge (C \vee B)$

(4 Punkte)

3. Bilden Sie für die folgenden Aussagen jeweils eine Negation und geben Sie die Wahrheitswerte der Aussage und Ihrer Negation an.

(a)
$\forall x \in N \quad \forall y \in N \quad \exists z \in N \quad x + y = z$

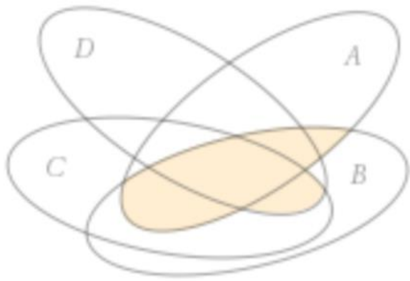
(b)
$\exists z \in N \quad \forall x \in N \quad \forall y \in N \quad x + y = z$

2. Aufgabe (Mengen)

(3 Punkte)

1. Gegeben seien vier Mengen A, B, C und D. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Formeln die eingefärbte Fläche beschreiben.

- ☐ $A \cup \overline{B} \cup (C \cap D)$
- ☐ $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cap D$
- ☐ $(A \setminus B) \cup (C \cap D) \setminus B$
- ☐ $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cup D$
- ☐ $(A \cup B) \cap (C \cup D)$
- ☐ $(A \cap B) \cup (C \cap B) \cap D$



(2 Punkte)

2. Gegeben seien zwei Mengen A = { 2, 4, 6 } und B = { 1, 3, 5}. Erzeugen Sie ein neue Menge C, indem Sie das Kreuzprodukt von A und B bilden.

C = {

}

(2 Punkte)

3. Gegeben sei die Menge D = { 2, 4, 5}. Bilden Sie die Potenzmenge P(D).

P(D) = {

}

(3 Punkte)

4. Sie haben die Menge C in der Aufgabe 2.2 gebildet. Gegeben zu Ihrer Menge C sei folgende Menge noch gegeben E = { (2,1), (2,5), (4,1), (4,3), (6,6) }. Bilden Sie eine neue Menge F, indem Sie die Schnittmenge von C und E ermitteln.

F = {

}

TUTORING
TEAM

3. Aufgabe (Relationen und Funktionen)

(3 Punkte)

1. Gegeben seien die Mengen A = { 1, 2, 3 } , B = { a, b, c } und C = { 8, 9}.
Bestimmen Sie für die Relationen

R^{-1} = { (a,1), (a,2), (b,3), (c,3) } und S = { (a,8), (c,9) }

a) von der Umkehrrelation R^{-1} die Relation R,

b) die Komposition R o S

(5 Punkte)

2. Welche der Eigenschaften „reflexiv, symmetrisch, transitiv“ gelten ? Geben Sie für reflexiv = r , symmetrisch = s und für transitiv = t an. Liegt eine Äquivalenzrelation vor, geben Sie bitte zusätzlich noch ein Ä an.
Andere Buchstaben oder Lösungen, welche von oben abweichen, werden nicht gewertet !!!

a) Die Person x und y sind im selben Bus. ______________________________

b) Person x hat mit Person y ein gemeinsames Hobby. ____________________

c) Student x und Student y sind in derselben Hochschule. _________________

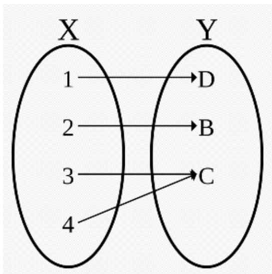
d) Für zwei reelle Zahlen gilt: X ≤ Y. ___________________________________

e) Person x ist der Bruder von Person y. ________________________________

(2 Punkte)

3. Kreuzen Sie an: Die abgebildete Funktion X → Y ist

- ❑ injektiv,
- ❑ surjektiv,
- ❑ bijektiv,
- ❑ nichts von alledem.



4.Aufgabe (Beweise)

(5 Punkte)

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzip, dass es unter je neun natürlichen Zahlen mindestens zwei gibt, deren Differenz durch 8 teilbar ist.

(5 Punkte)

2. Beweisen Sie mit einer vollständigen Induktion das $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt.

5. Aufgabe (Graphen)

(4 Punkte)

1. Gegeben sei der ungerichtete Graph G_6 = ({a,b,c,d,e,f}, {(a,b), (a,c), (c,d), (b,d), (d,e), (d,f)})

a) Geben Sie eine graphische Repräsentation von G_6 an:

b) Hat G_6 einen Kreis, wenn ja begründen Sie Ihre Aussage !

(6 Punkte)

2. Untersuchen Sie die vollständig bipartiten Graphen $K_{m,n}$ wie folgt.

a) Zeichnen Sie $K_{3,4}$.

b) Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat $K_{3,4}$?

c) Gegeben sei ein Graph $K_{3,3}$. Berechnen Sie mit der eulerschen Polyederformel, wieviele Gebiete dieser Graph haben müsste, wenn er planar wäre.

6. Aufgabe (Algebraische Grundstrukturen)

(6 Punkte)

1. Allgemeine Fragen: Kreuzen Sie die **richtigen Aussagen** an:

- ❑ Eine Gruppe besitzt das Gesetz der Abgeschlossenheit
- ❑ Eine Gruppe besitzt nicht das Gesetz des inversen Elements
- ❑ Abelsche Gruppen haben keine weiteren Eigenschaften zu Gruppen
- ❑ Abelsche Gruppen besitzen die Eigenschaft der Kommutativität
- ❑ 15 mod 5 = 0
- ❑ 21 mod 4 = 1
- ❑ Ein Ring besitzt nur eine Verknüpfung
- ❑ Ein Ring besitzt zwei Verknüpfungen
- ❑ Ein Ring hat folgende Gesetze: Addition, Multiplikation, Division
- ❑ Ein Ring hat folgende Gesetze: Addition, Multiplikation, Distributivgesetze

(4 Punkte)

2. Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus

a) ggT(225, 34)
b) ggT(125,12)

*

Ab

hier

die

Lösung!

TUTORING TEAM

TUTORING TEAM

Aufgabe 1 (Logik)

(5 Punkte

1. Gegeben sei die Formel $H = (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$. Füllen Sie die folgende Wahrheitswertetabelle korrekt aus. Verwenden Sie die Wahrheitswerte 1 (wahr) und 0 (falsch). Leserlich auf dem roten Feld eintragen.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \to x_2$	$x_2 \vee x_3$	H
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

(1 Punkt)

2. Kreuzen Sie an, was eine korrekte logische Äquivalenz ist.

- ☒ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- ❐ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- ☒ $A \wedge A \wedge B \wedge B \equiv A \wedge B$
- ❐ $A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$
- ❐ $C \wedge (A \vee B) \equiv (C \vee A) \wedge (C \vee B)$

(4 Punkte)

3. Bilden Sie für die folgenden Aussagen jeweils eine Negation und geben Sie die Wahrheitswerte der Aussage und Ihrer Negation an.

(a)

$\forall x \in N \quad \forall y \in N \quad \exists z \in N \quad x + y = z$

Negation: $\exists x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$

$x + y \neq z \quad$ (f)

(b)

$\exists z \in N \quad \forall x \in N \quad \forall y \in N \quad x + y = z$

Negation: $\forall z \in N \quad \exists x \in N \quad \exists y \in N$

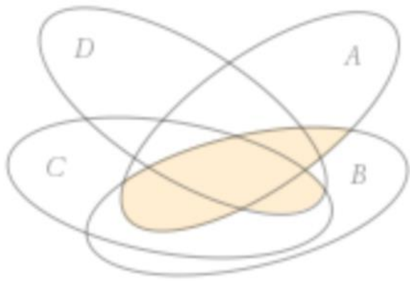
$x + y \neq z \quad$ (w)

2. Aufgabe (Mengen)

(3 Punkte)

1. Gegeben seien vier Mengen A, B, C und D. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Formeln die eingefärbte Fläche beschreiben.

- ☐ $A \cup \overline{B} \cup (C \cap D)$
- ☒ $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cap D$
- ☐ $(A \setminus B) \cup (C \cap D) \setminus B$
- ☐ $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cup D$
- ☐ $(A \cup B) \cap (C \cup D)$
- ☒ $(A \cap B) \cup (C \cap B) \cap D$



(2 Punkte)

2. Gegeben seien zwei Mengen A = { 2, 4, 6 } und B = { 1, 3, 5}. Erzeugen Sie ein neue Menge C, indem Sie das Kreuzprodukt von A und B bilden.

C = { (2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5), (6,1), (6,3), (6,5) }

(2 Punkte)

3. Gegeben sei die Menge D = { 2, 4, 5}. Bilden Sie die Potenzmenge P(D).

P(D) = { ∅, {2}, {4}, {5}, {2,4}, {2,5}, {4,5}, {2,4,5} }

(3 Punkte)

4. Sie haben die Menge C in der Aufgabe 2.2 gebildet. Gegeben zu Ihrer Menge C sei folgende Menge noch gegeben E = { (2,1), (2,5), (4,1), (4,3), (6,6) }. Bilden Sie eine neue Menge F, indem Sie die Schnittmenge von C und E ermitteln.

F = { (2,1), (2,5), (4,1), (4,3) }

3. Aufgabe (Relationen und Funktionen)

(3 Punkte)

1. Gegeben seien die Mengen A = { 1, 2, 3 } , B = { a, b, c } und C = { 8, 9}.
Bestimmen Sie für die Relationen

R^{-1} = { (a,1), (a,2), (b,3), (c,3) } und S = { (a,8), (c,9) }

a) von der Umkehrrelation R^{-1} die Relation R,

$R = \{ (1,a), (2,a), (3,b), (3,c) \}$

b) die Komposition R o S

$R \circ S = \{ (1,8), (2,8), (3,9) \}$

(5 Punkte)

2. Welche der Eigenschaften „reflexiv, symmetrisch, transitiv" gelten ? Geben Sie für reflexiv = r , symmetrisch = s und für transitiv = t an. Liegt eine Äquivalenzrelation vor, geben Sie bitte zusätzlich noch ein Ä an.
Andere Buchstaben oder Lösungen, welche von oben abweichen, werden nicht gewertet !!!

a) Die Person x und y sind im selben Bus. r, s, t , Ä

b) Person x hat mit Person y ein gemeinsames Hobby. r, s

c) Student x und Student y sind in derselben Hochschule. r, s, t , Ä

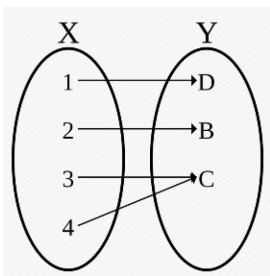
d) Für zwei reelle Zahlen gilt: X ≤ Y. r, t

e) Person x ist der Bruder von Person y. t

(2 Punkte)

3. Kreuzen Sie an: Die abgebildete Funktion X → Y ist

- ☐ injektiv,
- ☒ surjektiv,
- ☐ bijektiv,
- ☐ nichts von alledem.



4.Aufgabe (Beweise)

(5 Punkte)

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzip, dass es unter je neun natürlichen Zahlen mindestens zwei gibt, deren Differenz durch 8 teilbar ist.

Schubfachprinzip:

K_0	K_1	K_2	K_3
K_4	K_5	K_6	K_7

Objekte = 9 natürliche Zahlen. Diese werden in 8 Kategorien $K_0, K_1, \dots, K_7$ eingeteilt:

- K_0 = alle Zahlen die Vielfache von 8 sind, Division durch 8 den Rest 0 ergeben.
- K_1 = alle Zahlen, die bei Division durch 8 den Rest 1 ergeben.
- K_2 = alle Zahlen, die bei Division durch 8 den Rest 2 ergeben.
- K_3 = alle Zahlen, die bei Division durch 8 den Rest 3 ergeben.

⋮

- K_7 = alle Zahlen, die bei Division durch 8 den Rest 7 ergeben.

Dann ist jede Zahl in mindestens einer dieser 8 Kategorien enthalten. Nach dem Schubfachprinzip gibt es genau eine Kategorie mit zwei Objekten. Das bedeutet:

- Es gibt zwei Zahlen, die bei Division durch 8 denselben Rest ergeben.
- Wenn wir die Differenz dieser Zahlen bilden, „hebt sich der Rest weg"
  D.h. Wenn man die Differenz dieser Zahlen durch 8 teilt, geht diese ohne Rest auf. Die Differenz ist durch 8 teilbar.

(5 Punkte)

2. Beweisen Sie mit einer vollständigen Induktion das $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für jede natürliche Zahl n ≥ 1 gilt.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+3+\dots+n)^2$$

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $1^3 = 1$

rechte Seite: $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

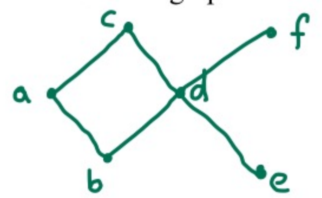
$$= \frac{(n+1)^2 \cdot [n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} \qquad \text{q.e.d.}$$

5. Aufgabe (Graphen)

(4 Punkte)

1. Gegeben sei der ungerichtete Graph G_6 = ({a,b,c,d,e,f}, {(a,b), (a,c), (c,d), (b,d), (d,e), (d,f)})

a) Geben Sie eine graphische Repräsentation von G_6 an:



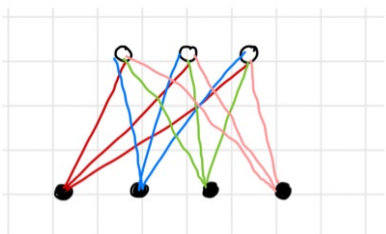
b) Hat G_6 einen Kreis, wenn ja begründen Sie Ihre Aussage !

Ja, G_6 hat einen Kreis, da a und c,
c und d,
d und b,
b und a
einen Kreis bilden.

(6 Punkte)

2. Untersuchen Sie die vollständig bipartiten Graphen $K_{m,n}$ wie folgt.

a) Zeichnen Sie $K_{3,4}$.



b) Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat $K_{3,4}$?

b) $n + m$ Ecken $4+3 = 7$
$n \cdot m$ Kanten $4 \cdot 3 = 12$

c) Gegeben sei ein Graph $K_{3,3}$. Berechnen Sie mit der eulerschen Polyederformel, wieviele Gebiete dieser Graph haben müsste, wenn er planar wäre.

$n - m + g = 2$

$6 - 9 + g = 2$

$-3 + g = 2$ $\qquad \underline{\underline{g = 5}}$

$-3 + 5 \underline{\underline{= 2}}$

6. Aufgabe (Alegbraische Grundstrukturen)

(6 Punkte)

1. Allgemeine Fragen: Kreuzen Sie die **richtigen Aussagen** an:

- ☒ Eine Gruppe besitzt das Gesetz der Abgeschlossenheit
- ☐ Eine Gruppe besitzt nicht das Gesetz des inversen Elements
- ☐ Abelsche Gruppen haben keine weiteren Eigenschaften zu Gruppen
- ☒ Abelsche Gruppen besitzen die Eigenschaft der Kommutativität
- ☒ 15 mod 5 = 0
- ☒ 21 mod 4 = 1
- ☐ Ein Ring besitzt nur eine Verknüpfung
- ☒ Ein Ring besitzt zwei Verknüpfungen
- ☐ Ein Ring hat folgende Gesetze: Addition, Multiplikation, Division
- ☒ Ein Ring hat folgende Gesetze: Addition, Multiplikation, Distributivgesetze

(4 Punkte)

2. Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus

a) ggT(225, 34)
b) ggT(125,12)

a) $ggT(225, 34) = 1$

$$
\begin{aligned}
225 &= 6 \cdot 34 + 21 \\
34 &= 1 \cdot 21 + 13 \\
21 &= 1 \cdot 13 + 8 \\
13 &= 1 \cdot 8 + 5 \\
8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\
5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

b) $ggT(125, 12) = 1$

$$
\begin{aligned}
125 &= 10 \cdot 12 + 5 \\
12 &= 2 \cdot 5 + 2 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$