TUTORING TEAM

Diese ProbeKlausur darf während der Corona Krise digital ausgegeben werden.

TUTORING TEAM

Hochschule RheinMain

Fachbereich DCSM
Prof. Dr. Adrian Ulges

Probeklausur zur Veranstaltung
Algorithmen und Datenstrukturen
03.07.2018

Name: Ulges Vorname: Adrian

Matrikelnummer: _____ Unterschrift: _____

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die Anmerkungen unten zur Kenntnis genommen, die Aufgaben eigenständig gelöst, sowie nur die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe.

- Die Klausurdauer beträgt **90 Minuten**.
- Bitte legen Sie **Studierendenausweis** und **Lichtbildausweis** auf Ihren Tisch.
- Bitte schreiben Sie **deutlich**. Unleserliche Lösungen werden nicht gewertet. Die **Bindung** der Blätter dieser Klausur **darf nicht entfernt** werden. Sie dürfen auch die **Rückseiten** der Blätter verwenden (weiteres Schmierpapier befindet sich am Ende).
- Lesen Sie die Aufgabenstellungen **vollständig**. Sollten während der Klausur Unklarheiten bestehen, ist es möglich kurze **Fragen** zu stellen.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen. Entfernen Sie Mobiltelefone, Vorlesungsmitschriften, sonstige lose Blätter und Bücher von Ihrem Tisch.
- Täuschungsversuche aller Art werden mit der **Note 5** geahndet.
- Beachten Sie insbesondere, dass **elektronische Geräte** (z.B. Mobiltelefone, Smartwatches oder Kameras) **unerlaubte Hilfsmittel** sind! Bereits das **Berühren** eines nicht erlaubten Hilfsmittels während der Prüfung stellt einen Täuschungsversuch dar.
- **Toilettengänge** während der Prüfung kosten Ihre Zeit und schaffen für alle Unruhe. Erledigen Sie sie möglichst vor der Prüfung. Wenn es trotzdem sein muss: Es darf immer nur einer gleichzeitig. Melden Sie sich bei der Aufsicht an und warten Sie auf das OK.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Erreichte Punkte	13	15	15	16	18	14	9	100
Erreichbare Punkte								
Note								

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1 (2+4+7 = 13 Punkte)

```
# Eingabe
# a: ein Array von Zahlen
# n: die Länge des Arrays
1    s = 0;
2    for (int i=0; i<n; i+=1) {
3        s += a[i];
4    }
5    avg = s/n;
6    s = 0;
7    for (int i=0; i<n; i+=1) {
8    if (a[i]<= a[0]) {
9            s += 2 * avg;
10       } else {
11           s += 2 * a[i];
12       }
13   }
14   return s;
```

} immer n Feldzugriffe (a)

} immer 2·n Feldzugriffe (b)

} (*)

a) Der obige Algorithmus wird auf einem Array a der Länge $n \geq 1$ ausgeführt. Terminiert der Algorithmus für alle möglichen Eingabe-Arrays? Ist der Algorithmus deterministisch? Begründen Sie jeweils kurz.

- Terminiert? Ja! In beiden Schleifen (2,7) erreicht die Variable i nach n Durchläufen den Wert n, und die Schleife wird verlassen.
- Deterministisch? Ja! Wird dasselbe Array a übergeben, werden exakt dieselben Schritte durchlaufen.

b) Berechnen Sie nachvollziehbar die genaue Anzahl der Feldzugriffe in Abhängigkeit von n, und zwar für den Best Case und den Worst Case. Geben Sie abschließend auch noch für beide Fälle die zugehörige Aufwandsklasse in O-Notation an.

- Immer: Schleife (a) → n Feldzugriffe
  " " (b) → 2n "
- Best Case: else (*) wird nur für i=0 ausgeführt → +1 Feldzugriff
- Worst Case: else (*) wird n-mal ausgeführt → +n " "

⇒ Best Case = $3n+1 \in O(n)$, Worst Case: $4n \in O(n)$

c) Füllen Sie die folgende Tabelle aus: Tragen Sie in die leeren Felder jeweils eine Funktion a_n oder b_n ein, so dass die Bedingungen in den drei rechten Spalten erfüllt sind. Sollte keine solche Funktion existieren, tragen Sie einen Strich ein.
Hinweis: Es ist keine Herleitung erforderlich.

a_n	b_n	$a_n \in O(b_n)$	$b_n \in \Theta(a_n)$	$a_n \in \Omega(b_n)$
$2 \cdot n^2 + 100$	/	ja	ja	nein
$3n^3 + 4$	n^4	ja	nein	nein
$log(n)$	1	nein	nein	ja
$3n^2$	$\frac{n^3+3}{n+5}$	ja	ja	ja
/	$log(n) \cdot 2^n$	nein	nein	nein
$n^4 + 4^n$	5^n	ja	nein	nein
$n^2 \cdot 2^n$	3^n	ja	nein	nein
$n^3 - n^2$	/	ja	nein	ja
$n \cdot log(n) - n$	n	nein	nein	ja

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Sind die folgenden Behauptungen korrekt? Kreuzen Sie an. Geben Sie (falls ja) eine knappe Begründung oder (falls nein) ein Gegenbeispiel an.

a) Gilt $a_n \in O(b_n)$, gilt auch $a_n \in \Theta(b_n)$. ☐ gilt ☒ gilt nicht

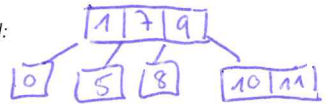
Begründung/Gegenbeispiel:

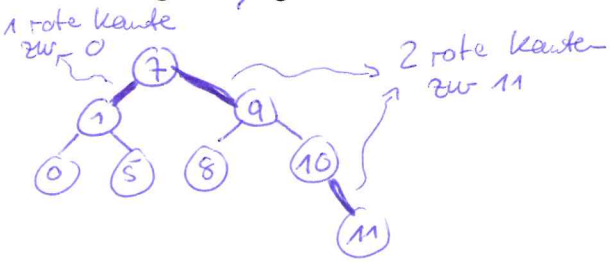
$a_n = n$, $b_n = n^2$ (wächst nicht gleich schnell)

---

b) In einem Red-Black-Tree ist die Anzahl der roten Kanten von der Wurzel zu allen Blättern gleich. ☐ gilt ☒ gilt nicht

Begründung/Gegenbeispiel:





---

c) Bei gleicher Tabellengröße und Eingabedaten benötigt Hashing mit Verkettung immer mindestens so viel Speicher wie Hashing mit Sondierung. ☒ gilt ☐ gilt nicht

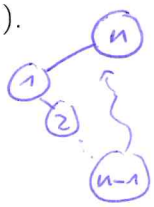
Begründung/Gegenbeispiel:

Es wird zusätzlicher Platz für Listen benötigt.

---

d) Das Entfernen der Wurzel eines Suchbaums mit n Elementen hat immer den Aufwand $O(1)$. ☐ gilt ☒ gilt nicht

Begründung/Gegenbeispiel:



$O(n)$, denn Element $n-1$ muss gefunden und bewegt werden.

---

e) Das Quicksort-Verfahren besitzt für alle Arrays der Länge n einen Aufwand von $O(n \cdot log(n))$. ☐ gilt ☒ gilt nicht

Begründung/Gegenbeispiel:

Daten aufsteigend sortiert
$\rightarrow \Theta(n^2)$

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 3 (6+3+6 = 15 Punkte)

a) Sortieren Sie das folgende Array aufsteigend mit **RadixExchangeSort**. Führen Sie die Vertauschungen gemäß dem Schema aus der Veranstaltung durch. Überführen Sie die Zahlen hierzu zunächst in **Binärdarstellung (4 Bit)**. Behandeln Sie in **jeder Zeile** eine Binärziffer (ein Bit).

2	9	6	11	3	1

Binärdarstellung:

0010	1001	0110	1011	0011	0001

1. Bit

0010	0001	0110	0011	1011	1001

2. Bit

0010	0001	0011	0110	1011	1001

3. Bit

0001	0010	0011	0110	1001	1011

4. Bit

0001	0010	0011	0110	1001	1011

Endergebnis:

1	2	3	6	9	11

Matrikelnummer: _____

Die folgende Abbildung zeigt den Zustand einer externen Sortierung mittels N-Wege-Mischen. Die initiale Blockgröße betrug 2, es wurde bisher ein Mischvorgang durchgeführt.

d1																		
d2																		
d3	4	6	8	9	1	2	2	7	2	8								
d4	1	3	3	5	4	5	6	6										

b) Handelt es sich um 2-Wege-Mischen, 3-Wege-Mischen, oder 4-Wege-Mischen? Begründen Sie knapp.

2-Wege-Mischen, denn es wird aus zwei Dateien (d1 und d2) in zwei Dateien (d3 und d4) gemischt.

c) Führen Sie (ausgehend von der Abbildung oben) die Sortierung bis zum Ende durch. Skizzieren Sie den Zustand der Dateien nach jedem Mischvorgang.

d1	1	3	3	4	5	6	8	9	2	8								
d2	1	2	2	4	5	6	6	7										
d3																		
d4																		

d1																		
d2																		
d3	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	8	9		
d4	2	8																

d1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
d2																		
d3																		
d4																		

Matrikelnummer: _____

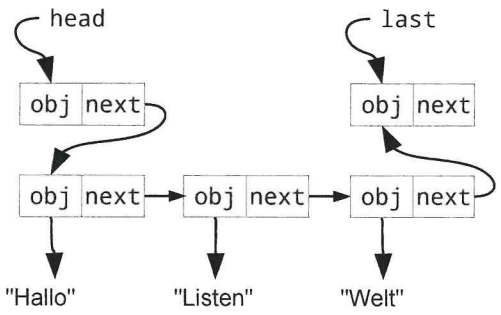
Aufgabe 4 (12+4 = 16 Punkte)

```
class LinkedList<T> {

  private Node head;
  private Node last;

  private class Node {
    T obj;
    Node next;
  }

  ...
}
```

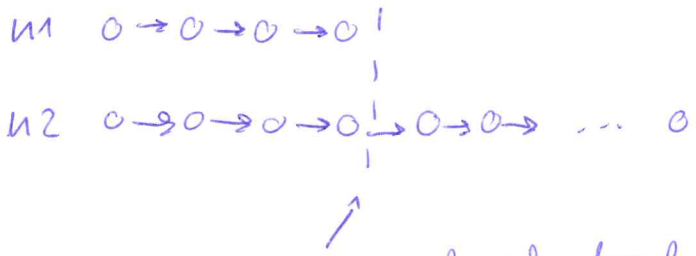


Verkettete Listen bestehen aus Knoten (`Nodes`) und besitzen für Anfang und Ende separate Knoten `head` und `last`. Jeder Knoten referenziert seinen Nachfolger (`next`).

a) Implementieren Sie eine Methode `isLongerThan(LinkedList<T> other)`, die eine Liste mit einer anderen Liste `other` vergleicht und genau dann `true` zurückliefert, wenn die Liste `this` mehr Knoten enthält als `other`. Vermeiden Sie es wenn möglich, die Länge beider Listen zu berechnen.

```
boolean isLongerThan(LinkedList<T> other) {
    Node n1 = this.head;
    "    n2 = other.head;
    while (n1 != null && n2 != null) {
        n1 = n1.next;
        n2 = n2.next;
    }
    return (n1 != null);   // n2 muss null sein
                           // ⇝ Ende von other erreicht!
}
```

b) Geben Sie die Aufwandsklasse Ihrer Methode `isLongerThan()` in Abhängigkeit der Listenlängen n_1 (`this`) und n_2 (`other`) an. Begründen Sie Ihre Antwort.



Hier wird abgebrochen
(Ende der kürzeren Liste erreicht)

- # Schleifendurchläufe: $\min(n_1, n_2)$
- pro Durchlauf : $O(1)$

insgesamt: $O(\min(n_1, n_2))$

Matrikelnummer: _____

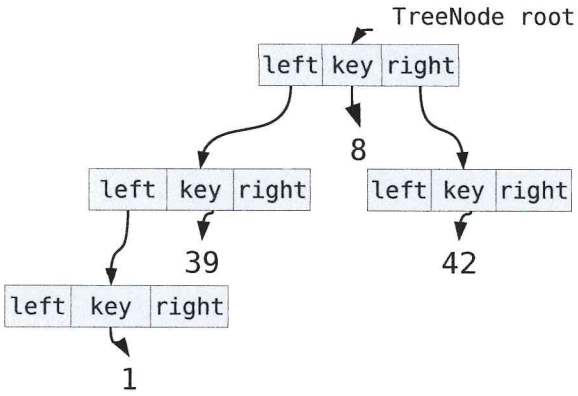
Aufgabe 5 (9+9 = 18 Punkte)

```
class TreeNode {

  int key;
  TreeNode left;
  TreeNode right;

  int maxKey();

  ...
}
```



Binäre Bäume seien Knoten (`Nodes`) mit `int`-Schlüsseln und Referenzen auf ein linkes und rechtes Kind (siehe oben).

a) Schreiben Sie eine rekursive Funktion `maxKey()`, die beim Aufruf auf einem Wurzelknoten (z.B. `root.maxKey()`) den größten `key` des gesamten Baums (incl. `root`) zurückliefert.
Hinweis: `maxKey()` *soll für beliebige binäre Bäume funktionieren, nicht nur für Suchbäume!*

```
int maxKey() {
    int result = this.key();
    if (left != null) {
        int l = left.maxKey();
        result = l > result ? l : result;
    }
    if (right != null) {
        int r = right.maxKey();
        result = r > result ? r : result;
    }
    return result;
}
```

b) Fügen Sie zur Klasse `Node` eine rekursive Funktion `IsSearchTree()` hinzu, die prüft, ob ein Baum ein Suchbaum ist. Genau dann soll `true` zurückgeliefert werden.
Hinweis: Sie können die Funktion `maxKey()` aus Aufgabe (a) verwenden. Sie können auch eine analoge Funktion `minKey()` verwenden, die den minimalen Schlüssel zurückliefert. Sie müssen `minKey()` nicht implementieren.

```
boolean isSearchTree() {
    boolean leftOk = ( left == null ||
                       left.isSearchTree() &&
                       left.maxKey() < this.key );
    boolean rightOk = ( right == null ||
                        right.isSearchTree() &&
                        right.minKey() > this.key );
    return leftOk && rightOk;
}
```

Aufgabe 6 (9+5 = 14 Punkte)

a) Gegeben eine Hash-Tabelle T ($N = 9$), führen Sie ein Hashing mit quadratischer Sondierung durch. Fügen Sie nacheinander die Zahlen 11, 2, 21, 38, 3 und 29 ein. Notieren Sie nach jedem Einfügen den Status der Hash-Tabelle (siehe unten) sowie die Anzahl der benötigten Sondierungen.

Füge 11 ein.

i	T[i]	# Sondierungen
0		
1		
2	11	0
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Füge 2 ein.

i	T[i]	# Sondierungen
0		
1		
2	11	0
3	2	1
4		
5		
6		
7		
8		

Füge 21 ein.

i	T[i]	# Sondierungen
0		
1		
2	11	0
3	2	1
4	21	1
5		
6		
7		
8		

Füge 38 ein.

i	T[i]	# Sondierungen
0		
1		
2	11	0
3	2	1
4	21	1
5		
6	38	2
7		
8		

Füge 3 ein.

i	T[i]	# Sondierungen
0		
1		
2	11	0
3	2	1
4	21	1
5		
6	38	2
7	3	2
8		

Füge 29 ein.

i	T[i]	# Sondierungen
0	29	4
1	~~29~~	~~5~~
2	11	0
3	2	1
4	21	1
5		
6	38	2
7	2	2
8		

x	11	2	21	38	3	29
h(x)	2	2	3	2	3	2

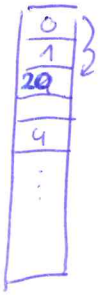
b) Ist diese Aussage wahr: "Hashing mit quadratischer Sondierung benötigt niemals mehr Sondierungen als Hashing mit linearer Sondierung"? Falls ja, begründen Sie. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

Gilt nicht. Gegenbeispiel: N=20

Quadratisch

20 ~~ofo~~ einfügen
→ 3 Sondierungen

Linear



20 einfügen
→ 2 Sondierungen

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 7 (4+5 = 9 Punkte)
Gegeben sei ein **Array a** aus n natürlichen Zahlen. Gesucht ist ein Algorithmus, der die **größte Primzahl** zurückgibt, die sich durch **Summierung von Zahlen des Arrays** bilden lässt (jede Zahl des Arrays darf hierbei maximal einmal vorkommen).
Beispiel: Für dieses Array...

3	9	6	2	4

... lautet die Lösung $9 + 6 + 4 = 19$ (Primzahl!). Es lässt sich keine größere Primzahl bilden (z.B. ist $9 + 6 + 4 + 2 = 21 = 3 \cdot 7$ nicht prim).

a) Alice schlägt den folgenden Pseudo-Code zur Lösung des Problems vor (`istPrim()` prüft ob eine gegebene Zahl eine Primzahl ist). Welchem **Algorithmenmuster** entspricht Alice' Pseudo-Code? Geben Sie eine knappe Begründung.

```
1    summe = 0
2    for pos = 0, ..., n-1:
3        if istPrim(summe + a[pos]):
4            summe = summe + a[pos]
5    return summe
```

Greedy: Versuche mit möglichst wenig lokalen Ergänzungen zur Lösung zu kommen.
↓
(summe + a[pos])

b) Ist Alice' Algorithmus korrekt? Begründen Sie.

Spezifikation: Größte Primzahl.
Algorithmus ist im Allgemeinen nicht korrekt.
Gegenbeispiel siehe oben: Ergebnis 3+2 = 5
Beste Lösung 9+6+4 = 19
↯

Matrikelnummer: _____