1. Probeklausur

1 Seien A, B und C Aussagen.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Umformungen:

$$[(\neg A) \wedge (\neg B)] \to B \;\equiv\; A \vee B.$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitswertetafel:

$$A \wedge (B \oplus C) \equiv (A \wedge B) \oplus (A \wedge C).$$

(c) Untersuchen Sie, ob gilt: $A \vee (B \oplus C) = (A \vee B) \oplus (A \vee C)$.

(d) Ein logischer Ausdruck f(x, y, z) soll genau dann wahr sein, wenn genau 2 der Einzelausagen x, y, z falsch sind. Bestimmen Sie die disjunktive Normalform dieses Ausdrucks. [Sie müssen den Ausdruck nicht vereinfachen.]

2 Es seien die folgenden Aussageformen über den natürlichen Zahlen gegeben:

p(x) = „x ist eine Primzahl“, z(x) = „x ist durch 2 teilbar“,
d(x) = „x ist durch 3 teilbar“, s(x) = „x ist durch 6 teilbar“.

(a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen verbal und geben Sie ihren Wahrheitswert an:

(1) $\forall x \in \mathbf{N}\ (z(x) \to \neg p(x))$
(2) $\exists x \in \mathbf{N}\ (\neg z(x) \wedge \neg d(x) \wedge p(x))$
(3) $\forall x \in \mathbf{N}\ (p(x) \to (\neg z(x) \oplus (x = 2))$

(b) Formulieren Sie folgende verbalen Aussagen mit Hilfe von Quantoren, Junktoren und obigen Aussageformen:

(4) Für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl t, so dass gilt: Wenn n durch 6 teilbar ist, dann ist $n = 6 \cdot t$.
(5) Jede natürliche Zahl n ist genau dann durch 6 teilbar, wenn n durch 2 und durch 3 teilbar ist.
(6) Es gibt eine gerade Primzahl.

3 (a) Im Universum $U = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 10\}$ seien die folgenden Mengen gegeben:

$A = \{x \in U \mid x \text{ ist ungerade und } x > 4\}$,
$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
$C = \{x \in U \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$.

Bestimmen Sie die Mengen

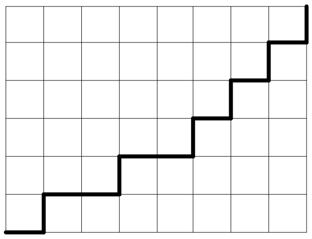
(1) A	(2) $B \cap C$
(3) $A \setminus (B \cup C)$	(4) $\overline{C}$
(5) $A \cap B \cap C$	(6) $\overline{A \cup B}$
(7) $(A \cup C) \setminus (A \cap C)$	(8) $A \times (B \setminus \{0, 3, 4\})$.

(b) Für zwei Mengen A und B sei der Operator ♥ definiert als $A ♥ B = \overline{A \cap B}$.
Beweisen Sie mit Hilfe der bekannten Rechengesetze für Mengen:

$$(A ♥ A) ♥ (B ♥ B) = A \cup B.$$

4 (a) Von 200 Autos, die überprüft wurden, hatten 78 Mängel an den Bremsen, 72 Mängel an dem Motor und 56 Mängel an der Lichtanlage. Genau 20 Fahrzeuge hatten Probleme an Bremsen und Motor, 19 hatten Mängel an Motor und Lichtanlage und 26 Fahrzeuge an Bremsen und der Lichtanlage. 12 Autos hatten Probleme in allen drei untersuchten Bereichen. Finden Sie mit Hilfe eines Venn-Diagramms heraus, wie viele Fahrzeuge keine Mängel hatten.

(b) Auf einem $m \times n$-Gitter startet ein Roboter links unten. Er kann nur nach rechts und nach oben gehen. Auf wie viele Weisen kann er den Punkt rechts oben erreichen? Die folgende Zeichnung zeigt einen möglichen Weg auf einem 6×8-Gitter.



(c) Berechnen Sie $\binom{14}{8}$.

5 Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$ und $C = \{a, b\}$. Bestimmen Sie für die Relationen

$$R = \{(1, x), (2, x), (1, y), (2, z)\} \text{ und } S = \{(x, a), (z, b)\}$$

(a) die Umkehrrelationen R^{-1} und S^{-1},

(b) die Komposition $R \circ S$,

(c) das Komplement von S in $B \times C$.

(d) Wie viele unterschiedliche Relationen $R \subseteq A \times B$ gibt es?

6 Auf der Menge der reellen Zahlen sei folgende Relation definiert:

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x - y \in \mathbf{Z}\}.$$

(a) Geben Sie drei Elemente von R an.

(b) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Geben Sie drei verschiedene Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[\pi]_R$ an.

Viel Erf☺lg!

Korrigieren Sie sich selbst! Die Lösungen finden Sie demnächst bei StudIP.
Bei jeder Aufgabe können 10 P. erreicht werden. Werten Sie die besten 5 Aufgaben.