יהא x מ"מ רנדומלי כנתון בשאלה: $x \sim N\left(\mu_p, \sigma_p^2\right)$ ו- y מדידתו הרועשת, כך ש- $y | x \sim N\left(x, \sigma_y^2\right)$.

כעת ניגש לפתח את הביטוי $\hat{x} = \arg\max_x p(x|y)$. נסתכל בביטוי $p(y|x)$:

$$p(x|y) \overset{\text{bayes' theorem}}{=} \frac{p(x)\cdot p(y|x)}{p(y)} \overset{(1)}{=} p(x)\cdot p(y|x) \overset{(2)}{=} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}}\cdot e^{\frac{-(x-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}}}_{p(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}\cdot e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_y^2}}}_{p(y|x)} = \frac{1}{2\pi\sigma_p\sigma_y}\cdot e^{\frac{-(x-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}+\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_y^2}} \overset{(3)}{=} e^{\frac{-(x-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}+\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_y^2}}$$

(1) היות ואנו מעוניינים ב- x שממקסם את הביטוי, $p(y)$ הינו קבוע (אי שלילי, ע"פ תחום הגדרת פונקציית ההסתברות) ביחס ל- x, ולכן ניתן לוותר על $1/p(y)$ מבלי להשפיע על מקסימיזציית הביטוי.

(2) הגדרת ההתפלגות הנורמלית.

(3) בדומה ל- (1), $\frac{1}{2\pi\sigma_p\sigma_y}$ הוא קבוע אי שלילי ביחס ל- x, לכן ניתן לוותר עליו מבלי להשפיע על מקסימיזציית הביטוי.

כלומר –

$$\hat{x} = \arg\max_x p(x|y) = \arg\max_x \left(e^{\frac{-(x-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}+\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_y^2}} \right) = \ldots$$

היות ו- $\ln$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש, הפעלת $\ln$ אינה פוגעת במקסימיזציה של הביטוי:

$$\ldots = \arg\max_x \left(\ln\left(e^{\frac{-(x-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}+\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_y^2}} \right)\right) = \arg\max_x \left(\frac{-(x-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2} + \frac{-(y-x)^2}{2\sigma_y^2} \right)$$

כדי למצוא את x הממקסם את הביטוי, נגזור אותו לפי x, נשווה לאפס ונחלץ את x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-(x-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2} + \frac{-(y-x)^2}{2\sigma_y^2} \right) = \frac{-2(x-\mu_p)}{2\sigma_p^2} + \frac{2(y-x)}{2\sigma_y^2} = \frac{y-x}{\sigma_y^2} - \frac{x-\mu_p}{\sigma_p^2} = \underbrace{\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{\mu_p}{\sigma_p^2} - x\left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_p^2}\right)}_{*}$$

$$\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{\mu_p}{\sigma_p^2} - x\left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_p^2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{\mu_p}{\sigma_p^2} = x\left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_p^2}\right) \;\Rightarrow\; x = \frac{\frac{1}{\sigma_p^2}\mu_p + \frac{1}{\sigma_y^2}y}{\frac{1}{\sigma_p^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}}$$

מצאנו נקודת קיצון. כדי לוודא שהיא באמת נקודת מקסימום נשתמש בנגזרת שנייה. נגזור את $(*)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{\mu_p}{\sigma_p^2} - x\left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_p^2}\right)\right) = -\left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_p^2}\right) \overset{\sigma_y^2>0,\ \sigma_p^2>0}{<} 0$$

ואכן הנגזרת השנייה קטנה מאפס, כלומר קיבלנו:

$$\hat{x} = \arg\max_x p(x|y) = \frac{\frac{1}{\sigma_p^2}\mu_p + \frac{1}{\sigma_y^2}y}{\frac{1}{\sigma_p^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}}$$