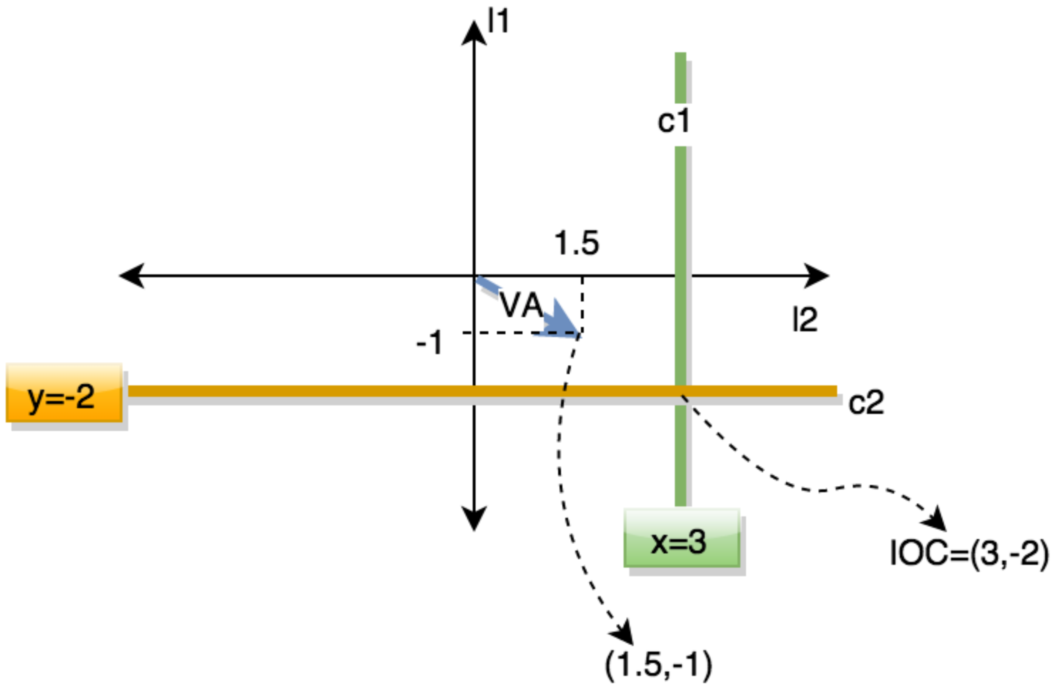
ראייה אנושית: גישה חישובית — תרגיל 1

אורן סמואל 200170694
דניאל הדר 200380244

שאלה 1

יהיו l_1, l_2 קו מאונך וקו מאוזן הזזים במהירות $v_1 = (3,2), v_2 = (1,-2)$, בהתאמה. נגדיר את ראשית הצירים להיות נקודת החיתוך ביניהם. נשים לב כי וקטורי המהירויות הנורמליות שלהם הם: $v_1^\perp = (3,0), v_2^\perp = (0,-2)$, ומתוך כך קווי האילוץ שלהם הם: $c_2 \equiv y = -2$, $c_1 \equiv x = 3$ (בהתאמה).

ולכן, $IOC = (3,-2)$ ו- $VA = \frac{1}{2}\left(v_1^\perp + v_2^\perp\right) = \frac{1}{2}\left((3,0)+(0,-2)\right) = (1.5,-1)$:



שאלה 2

יהיו שני קווים l_1, l_2 עם זוויות θ_1, θ_2 ומהירויות v_1, v_2 (כך ש- $v_2 = v_2^\perp + v_2^\theta$ ו- $v_1 = v_1^\perp + v_1^\theta$). נגדיר את ראשית הצירים להיות נקודת החיתוך ביניהם (כלומר בין הקווים), ובהתאמה נקבל כי כיוונם ביחס למערכת הצירים שהתקבלה הוא: $\left(\cos\theta_2, \sin\theta_2\right)$ ו- $\left(\cos\theta_1, \sin\theta_1\right)$. על-פי הפורום ניתן להשתמש ברכיבי הכיוון של המהירות, נגדיר: $v_2 = \left(v_2^x, v_2^y\right)$ ו- $v_1 = \left(v_1^x, v_1^y\right)$.

נתחיל במציאת משוואה אנליטית ל- VA. לשם כך נמצא את $v_1^\perp, v_2^\perp$. נתחיל במציאת ביטוי כללי עבור $v_i^\perp$, ולאחר מכן נציב עבור כל $i \in \{1,2\}$. לשם כך נחשב את כיוונו ואת גודלו של $v_i^\perp$:

[כיוון] מההגדרה, $v_i^\perp$ הוא בכיוון מאונך ל- l_i, כלומר כיוונו הוא: $\left(-\sin\theta_i, \cos\theta_i\right)$

[גודל] מההגדרה, זהו ההיטל של v_i בכיוון $v_i^\perp$, כלומר: $\left(-\sin\theta_i, \cos\theta_i\right) \cdot \left(v_i^x, v_i^y\right)$

ולכן:

$$v_i^\perp = \left(-\sin\theta_i, \cos\theta_i\right) \cdot \left(\left(-\sin\theta_i, \cos\theta_i\right) \cdot \left(v_i^x, v_i^y\right)\right) = \left(-\sin\theta_i, \cos\theta_i\right) \cdot \left(-v_i^x \cdot \sin\theta_i + v_i^y \cdot \cos\theta_i\right)$$
$$= \left(\left(v_i^x \cdot \sin^2\theta_i - v_i^y \cdot \sin\theta_i \cos\theta_i\right), \left(-v_i^x \cdot \sin\theta_i \cos\theta_i + v_i^y \cos^2\theta_i\right)\right)$$

נציב ונקבל:

$$v_1^\perp == \left(\left(v_1^x \cdot \sin^2\theta_1 - v_1^y \cdot \sin\theta_1 \cos\theta_1\right), \left(-v_1^x \cdot \sin\theta_1 \cos\theta_1 + v_1^y \cos^2\theta_1\right)\right)$$

$$v_2^\perp == \left(\left(v_2^x \cdot \sin^2\theta_2 - v_2^y \cdot \sin\theta_2 \cos\theta_2\right), \left(-v_2^x \cdot \sin\theta_2 \cos\theta_2 + v_2^y \cos^2\theta_2\right)\right)$$

ונסיים בכך ש:

$$VA = \frac{1}{2}\left(v_1^\perp + v_2^\perp\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(v_1^x \cdot \sin^2\theta_1 - v_1^y \cdot \sin\theta_1 \cos\theta_1 + v_2^x \cdot \sin^2\theta_2 - v_2^y \cdot \sin\theta_2 \cos\theta_2\right) \\ \left(-v_1^x \cdot \sin\theta_1 \cos\theta_1 + v_1^y \cos^2\theta_1 - v_2^x \cdot \sin\theta_2 \cos\theta_2 + v_2^y \cos^2\theta_2\right) \end{pmatrix}$$

כעת נעבור למציאת משווה אנליטית ל- IOC. לשם כך נמצא את קווי האילוץ של l_1, l_2 (נסמנם: c_{l_1}, c_{l_2}) ונמצא את נקודת החיתוך שלהם:

$$c_{l_1} = \begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}, \; c_{l_2} = \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{intersection at IOC} \\ \text{i.e. } c_1 = c_2}}{\Rightarrow} \begin{cases} v_1^x + t_1 \cos\theta_1 = v_2^x + t_2 \cos\theta_2 \\ v_1^y + t_1 \sin\theta_1 = v_2^y + t_2 \sin\theta_2 \end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} t_1 = \dfrac{v_2^x - v_1^x + t_2 \cos\theta_2}{\cos\theta_1} \\ t_1 = \dfrac{v_2^y - v_1^y + t_2 \sin\theta_2}{\sin\theta_1} \end{cases}$$

נשווה בין המשוואות:

$$\frac{v_2^x - v_1^x + t_2\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{v_2^y - v_1^y + t_2\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_1\left(v_2^x - v_1^x + t_2\cos\theta_2\right) = \cos\theta_1\left(v_2^y - v_1^y + t_2\sin\theta_2\right)$$

$$\Rightarrow t_2\left(\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2\right) = \cos\theta_1\left(v_2^y - v_1^y\right) - \sin\theta_1\left(v_2^x - v_1^x\right)$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{\cos\theta_1\left(v_2^y - v_1^y\right) - \sin\theta_1\left(v_2^x - v_1^x\right)}{\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2} \stackrel{(**)}{=} \frac{\cos\theta_1\left(v_2^y - v_1^y\right) - \sin\theta_1\left(v_2^x - v_1^x\right)}{\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)}$$

נציב ונקבל:

$$IOC = \begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} + \frac{\cos\theta_1\left(v_2^y - v_1^y\right) - \sin\theta_1\left(v_2^x - v_1^x\right)}{\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

נתייחס למקרים הפרטיים בהם יש חלוקה באפס:

(**) במקרה הפרטי בו $\theta_1 = \theta_2$ המשוואה אינה מוגדרת ונטפל בו בנפרד. נשים לב כי הישרים מקבילים (או במילים אחרות $\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2 = 0$), ולכן או שאין להם נקודת חיתוך (ולכן IOC אינו מוגדר, וסיימנו) או שיש להם אינסוף נקודות חיתוך.

(*) אחרת, אם $\cos\theta_1 = 0$ אזי $IOC = \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} - \frac{v_2^x - v_1^x}{\cos\theta_2}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$,

(*) ואם $\sin\theta_1 = 0$ אזי $IOC = \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} - \frac{v_2^y - v_1^y}{\sin\theta_2}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$.

שאלה 3

יהיו שני קווים l_1,l_2 עם זוויות θ_1,θ_2 כך ש- l_1 נע במהירות v ו- l_2 סטטי. נגדיר את ראשית הצירים להיות נקודת החיתוך ביניהם (כלומר בין הקווים), ובהתאמה נקבל כי כיוונם ביחס למערכת הצירים שהתקבלה הוא: $(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$ ו- $(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$. בדומה לשאלה 2 נגדיר: $v=(v^x,v^y)$.

כדי למצוא משוואה אנליטית לווקטור מהירות החיתוך בין שני הישרים (נסמן: VOI) נבחין כי זהו וקטור שמתחיל בראשית הצירים (מתוך ההגדרה שלנו למערכת הצירים) ומסתיים ב- IOC לאחר יחידת זמן אחת, הווה אומר ברגע $t=1$, $VOI=IOC$:

$$VOI=IOC_{\substack{v_1=v\\ v_2=(0,0)}}=\left(\frac{v^x\sin\theta_1-v^y\cos\theta_1}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\right)\begin{pmatrix}\cos\theta_2\\ \sin\theta_2\end{pmatrix}=\frac{|v^\perp|}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta_2\\ \sin\theta_2\end{pmatrix}$$

נתייחס למקרים הפרטיים כנ"ל:

$(**)$ אם $\theta_1=\theta_2$ אזי הישרים מקבילים ולכן יהיה רגע אחד שבו יהיו אינסוף נקודות חיתוך ובשאר הזמן לא יהיו, כלומר $VOI=0$.

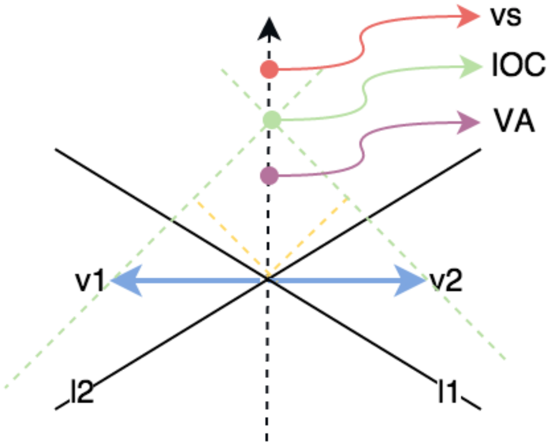
$(*)$ אחרת, אם $\cos\theta_1=0$ אזי $VOI=\left(\frac{v^x}{\cos\theta_2}\right)\begin{pmatrix}\cos\theta_2\\ \sin\theta_2\end{pmatrix}=\left(v^x,\frac{v^x}{\cos\theta_2\sin\theta_2}\right)$,

$(*)$ ואם $\sin\theta_1=0$ אזי $VOI=\left(\frac{v^y}{\sin\theta_2}\right)\begin{pmatrix}\cos\theta_2\\ \sin\theta_2\end{pmatrix}=\left(v^x\cdot\cot\theta_2,\frac{v^y}{\sin^2\theta_2}\right)$.

שאלה 6

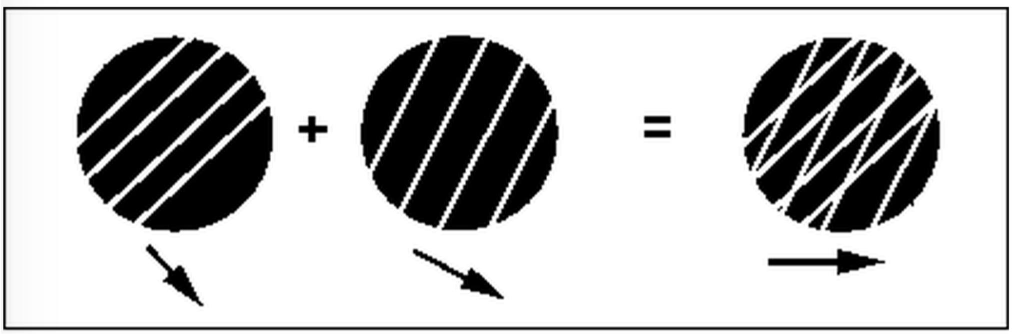
ראשית נשים לב כי כלל ה- vector sum (להלן vs) זהה ל- VA עד כדי גודל המהירות: $vs = 2 \cdot VA$.
לעומת זאת, עבור וקטורי מהירות נורמלית בגדלים שונים נקבל כיוון תנועה משותף שונה בין IOC לבין vs (בדומה לניסוי המשווה בין VA ל- IOC). לכן, נציע את הניסוי הבא:
נציג לכל נבדק שני ישרים לא מקבילים הזזים במהירויות בגודל זהה וכיוון הפוך (בתוך "חלון" עגול, הלוך-חזור מספר פעמים). כך נקבל כי vs, VA, IOC כולם באותו כיוון. נבחר מהירויות כאלה כך ש- $|VA| \neq |IOC|$ וגם $|vs| \neq |IOC|$.

לאחר מכן נציג לנבדקים שלושה גירויים נוספים — קו אופקי הנע בכיוון הנ"ל, בכל פעם באחת מהמהירויות הנ"ל ($|IOC|, |VA|, |vs|$), ונבקש ממנו לבחור בקו הנע במהירות הדומה ביותר לגירוי המקורי. ככל שיותר נבדקים יבחרו ב- vs כך נאשש את הטענה שמערכת הראייה האנושית מתנהגת כך.



איור סכמתי להמחשה

גירוי שסותר את החוק הזה הוא הגירוי הבא: [מקור[1]]



בניסוי זה רוב האנשים ידווחו כי הם רואים את התנועה המשותפת בכיוון ה- IOC (הווה אומר בכיוון החץ ימינה). תוצאה זו סותרת את ההשערה שנבדקים ייראו את התנועה בכיוון vs שכן היא מכילה גם רכיב בכיוון y.

[1] http://www.cs.huji.ac.il/~yweiss/intro/node3.html