ראייה אנושית: גישה חישובית — תרגיל 3

אורן סמואל 200170694
דניאל הדר 200380244

עבור כל השאלות, יהיו X,Y,Z מטריצות כמוגדר בשאלה, ו- $m,n\in\mathbb{Z}$ אינדקסים.

שאלה 1

טענה: קונבולוציה מקיימת אסוציאטיביות.

הוכחה: נראה כי $\left((X*Y)*Z\right)[m,n]=\left(X*(Y*Z)\right)[m,n]$ ומכך נסיק כי $(X*Y)*Z=X*(Y*Z)$

מכיוון שהנ"ל מתקיים לכל $m,n\in\mathbb{Z}$.

$$\left((X*Y)*Z\right)[m,n]\overset{definition}{=}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}X[k,l]Y[i-k,j-l]\right)\cdot Z[m-i,n-j]$$

$$\overset{\text{change of }\Sigma\text{'s order}}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}X[k,l]Y[i-k,j-l]Z[m-i,n-j]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}X[k,l]\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}Y[i-k,j-l]Z[m-i,n-j]=\dots$$

כעת נרצה להחליף את משתני הסכימה i,j על מנת להגיע לביטוי עבור $Y*Z$. לשם כך נגדיר את שני המשתנים הבאים: $a=i-k$ ו- $b=j-l$. היות ובגבולות $\pm\infty$ a מתנהג כמו i ו- b מתנהג כמו j (במילים אחרות, כאשר $i\to\infty$ גם $a\to\infty$ וכאשר $i\to-\infty$ גם $a\to-\infty$, וכנ"ל עבור j ו- b בהתאמה), ניתן להחליף את i,j ב- a,b כמשתני סכימה:

$$\dots\underset{\substack{m-i=m-a-k\\ n-j=n-b-l}}{\overset{\substack{a=i-k\\ b=j-l}}{=}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}X[k,l]\sum_{a=-\infty}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty}Y[a,b]Z\left[(m-k)-a,(n-l)-b\right]$$

$$\overset{definition}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}X[k,l](Y*Z)[m-k,n-l]\overset{definition}{=}\left(X*(Y*Z)\right)[m,n]$$

שאלה 2

יהיו a,b סקלרים.

טענה: $X*(aY+bZ)=aX*Y+bX*Z$.

הוכחה: נראה כי $\left(X*(aY+bZ)\right)[m,n]=(aX*Y+bX*Z)[m,n]$ ומכך נסיק כי

$X*(aY+bZ)=aX*Y+bX*Z$ מכיוון שהנ"ל מתקיים לכל $m,n\in\mathbb{Z}$.

$$\left(X*(aY+bZ)\right)[m,n]\overset{definition}{=}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}X[i,j](aY+bZ)[m-i,n-j]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}X[i,j]\left(aY[m-i,n-j]+bZ[m-i,n-j]\right)$$

$$=a\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}X[i,j]Y[m-i,n-j]+b\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}X[i,j]Z[m-i,n-j]$$

$$=aX*Y[m,n]+bX*Z[m,n]=(aX*Y+bX*Z)[m,n]$$

שאלה 3

יהיו נגזרות חלקיות: K_x, K_y של התמונה I. נגדיר את הלפלסיאן שלה: $\nabla^2 I = (I * K_x) * K_x + (I * K_y) * K_y$,

ונגדיר $K_l = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$.

<u>טענה</u>: אם $K_x = 0.5\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$ ו- $K_y = 0.5\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}$ אזי $\nabla^2 I = I * K_l$.

<u>הוכחה</u>: יהיו $K_x = 0.5\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$, $K_y = 0.5\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}$.

$$\nabla^2 I = (I * K_x) * K_x + (I * K_y) * K_y \overset{commutative}{=} I * (K_x * K_x) + I * (K_y * K_y) \overset{linearity}{=} I * \left((K_x * K_x) + (K_y * K_y)\right)$$

$$\overset{definition}{=} I * \left(\left(0.5\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} * 0.5\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\right) + \left(0.5\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix} * 0.5\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}\right)\right) = I * \left(\left(\begin{pmatrix}0.5 & -0.5\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0.5 & -0.5\end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix}0.5 \\ -0.5\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0.5 \\ -0.5\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= I * \left(\begin{pmatrix}0.25 & -0.5 & 0.25\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.25 \\ -0.5 \\ 0.25\end{pmatrix}\right) = I * \begin{pmatrix} & 0.25 & \\ 0.25 & -1 & 0.25 \\ & 0.25 & \end{pmatrix} = I * \frac{1}{4}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = I * K_l$$

שאלה 4

יהיו $\bar{\delta}[i.j] = \begin{cases} 1 & i,j = (0,0) \\ 0 & else \end{cases}$ ו- K_α כך ש- $K_l * K_\alpha = \bar{\delta}$.

<u>טענה</u>: $(\nabla^2 I) * K_\alpha = I$.

<u>הוכחה</u>: בדומה לשאלות 1 ו- 2, נראה כי $\left((\nabla^2 I) * K_\alpha\right)[m,n] = I[m,n]$ ומכך נסיק כי $(\nabla^2 I) * K_\alpha = I$

מכיוון שהנ"ל מתקיים לכל $m,n \in \mathbb{Z}$.

$$\left((\nabla^2 I) * K_\alpha\right)[m,n] \underset{\text{true for all pixels}}{\overset{q3}{=}} \left((I * K_l) * K_\alpha\right)[m,n] \overset{commutative}{=} \left(I * (K_l * K_\alpha)\right)[m,n] = \left(I * \bar{\delta}\right)[m,n]$$

$$\overset{conv\ definition}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I[i,j]\bar{\delta}[m-i, n-j] = \sum_{\substack{i=-\infty \\ m-i\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ n-j\neq 0}}^{\infty} I[i,j]\bar{\delta}[m-i, n-j] + I[m,n]\bar{\delta}[0,0]$$

$$\overset{\bar{\delta}\ definition}{=} \sum_{\substack{i=-\infty \\ m-i\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ n-j\neq 0}}^{\infty} I[i,j]\cdot 0 + I[m,n] = I[m,n]$$