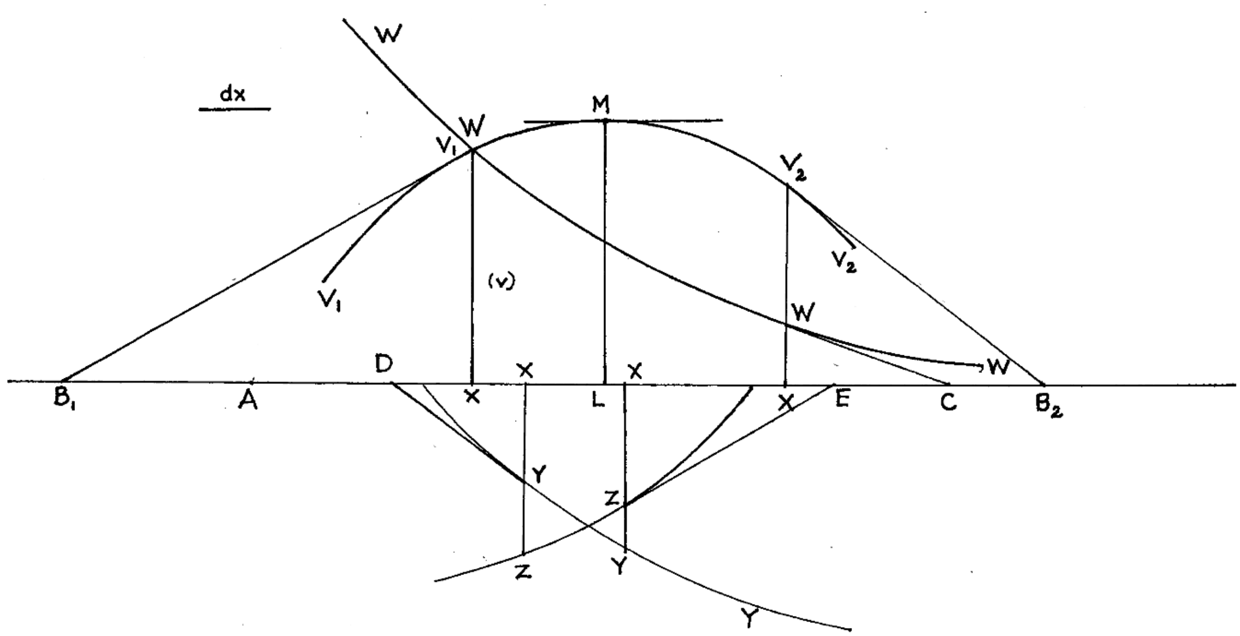
Readings and Notes for Junior Mathematics



St. John's College, Annapolis

Fall Semester, 2022

Contents

Selections from Aristotle's *Physics* to read with Galileo's *Two New Sciences*

The following four passages on the infinite and continuity from Aristotle's *Physics* may be useful in reading Galileo's *Two New Sciences*, pages 77–93. The translations are by Joe Sachs (*Aristotle's Physics: A Guided Study*, 1995).

Book III, 206a7–b28 That, then, there is no actually infinite body, is clear from these things. But that, if there is no infinite simply, many impossible things follow, is clear. For there will be a beginning and an end of time, as well as magnitudes not divisible into magnitudes, and number will not be infinite. But, whenever such a distinction has been made and neither way seems possible, there is a need for discrimination, and it is clear that in one way the infinite is, and in another way it is not. Now being is said of what is potentially or of what is in complete activity, and there is an infinite by addition or by division. And that there is no magnitude actually infinite has been said, but there is magnitude that is infinite by division; for it is not difficult to refute indivisible lines. What is left, then is that the infinite is as potentiality. But it is necessary | not to take the being-potentially in the same way as if something were potentially a statue, since this will also *be* a statue, and thus there would also be an infinite which would be at-work. But since there are many ways of being, just as day is, or the athletic games which always come about one after the other, so also with the infinite. (For also with these things there is both being-potentially and being-at-work; for there are Olympic games both in the sense that the games are capable of happening and that they are happening.) And this is evident in different ways in time, in human beings, and in the division of magnitudes. In general the infinite is in this way: it is in what is taken always one after the other, while what is taken is | always finite, but always another and another. So being is meant in many ways, and the infinite must not be taken as a *this,* such as a man or a house, but in the way that day or the games are meant, to which being belongs not as to a thing, but in a constant coming into being and passing away, finite, but always other and other. But in magnitudes what is taken | remains, while with time and human beings it is always perishing in such a way as not to run out.

But the infinite by addition is in some way the same as that by division, for the latter comes about in the finite by addition turned back the other way. For where a division is seen to be to infinity, there is obviously an addition to what is cut off. For if someone taking a marked-off part of a finite magnitude keeps taking from it in the same ratio (not including the piece of the whole magnitude already taken), the pieces will not exhaust the finite thing. | But if in the same way one increases the ratio so as always to include the same amount, they do exhaust it, through the whole finite thing's being used up by whatever part is marked off. So it is in

no other way, but in this way there is an infinite, in potentiality and by exhaustion (but it is also at-work, in the way we say day and the games to be). And it *is* thus in the way material is, potentially, and not on its own in the way the finite is. And the infinite by addition is surely in potentiality in the same way, which we say is in a certain way the same as that by division. For there will always be something outside to take, and it will not exceed | every magnitude, just as in the division it does go 206b20
beyond every marked-off piece and there will always be a smaller piece.

Therefore to exceed everything by addition is not even possible potentially, unless there is accidentally an actual infinite, as the writers on nature say that which is outside the body of the cosmos, being of air or some other such thing, is infinite. But if it is impossible for there to be an actually infinite sensible body in this way, it is clear that not even potentially could there be one by addition, other than in the way described, by a reversed division.

Book III, 206b.33–207a.10 The infinite turns out to be the opposite of the way people speak of it. For this is the infinite: not that outside of which there is nothing, but that outside of which there is always something. Here is a sign: people speak of rings which do not have stone-settings as endless because there is always something beyond to take, speaking in accordance with a likeness though not strictly. For it is necessary both that this condition be present and that at no time the same part be taken; but in the circle it does not happen that way, but only the succeeding part is always different. Infinite, then, is that of which, to those taking it by quantities, there is always something beyond to take. That of which nothing is outside is complete and whole; that is how we define the whole, as that of which nothing is absent, as a whole human being or box.

Book V, 227a.10–17 That which, being next in series to something, is touching it, is next to it. The continuous is that which is next to something, but I call them continuous only when the limits at which they are touching become one and the same, and, as the name [συνεχής] ιμπλιες, ηολδ τογετηερ [συνέχειν]. Ανδ τηις ις νοτ ποσσιβλε ιφ τηε εξτρεμιτιες αρε τωο. Ανδ ιτ ις ςλεαρ φρομ τηις δεφινιτιον τηατ τηε ςοντινυους ις αμονγ τηοσε τηινγς ουτ οφ ωηιςη σομε ονε τηινγ νατυραλλψ ςομες ιντο βεινγ ας α ρεσυλτ οφ τηειρ υνιτινγ. Ανδ ιν ωηατεερ ωαψ τηε ςοντινυους βεςομες ονε, σο τοο ωιλλ τηε ωηολε βε ονε, συςη ας βψ α βολτ ορ γλυε ορ α μορτισε ϑοιντ, ορ βψ γροωινγ ιντο ονε ανοτηερ.

Booϰ ῞I, 232β.24–25 I ςαλλ ςοντινυους τηατ ωηιςη ις αλωαψς διισιβλε ιντο διισιβλε παρτς.

Αν Αππροαςη το τηε Αριτημετις οφ Ινφινιτες: ωηερε ωε αλσο σηοω τηατ α γρεατεστ νυμβερ ορ αν ινφινιτε νυμβερ οφ αλλ νυμβερς ις ιμποσσιβλε ορ νοτηινγ· ανδ σηοω βψ εξαμπλες τηατ σομε τηινγς τηατ αρε ηελδ το βε αξιομς ςαν βε δεμονστρατεδ

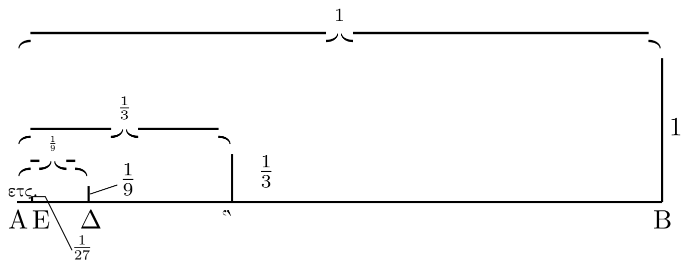
Ιτ ηας βεεν εσταβλισηεδ τηατ τηε σςιενςε οφ τηε λεαστ ανδ τηε γρεατεστ, ορ οφ τηε ινδιισιβλε ανδ τηε ινφινιτε, ις αμονγ τηε γρεατεστ πιεςες οφ ειδενςε ωηιςη τηε ηυμαν μινδ υσες ιν λαψινγ ςλαιμ το ιτς οων ινςορπορεαλιτψ. Ωηο ινδεεδ, φολλοωινγ ηις σενσες, ςουλδ περσυαδε ημσελφ τηατ τηερε ςαν βε *γιεν* νο λινε σο σηορτ τηατ ιτ δοες νοτ ςονταιν βοτη ινφινιτελψ μανψ ποιντς ανδ αλσο ινφινιτελψ μανψ λινες (ανδ αςςορδινγλψ αςτυαλλψ ςονταινς αν ινφινιτε νυμβερ οφ παρτς, αλλ σεπαρατεδ φρομ εαςη οτηερ) ηαινγ α φινιτε ρατιο το τηε *γιεν* λινε, ιφ δεμονστρατιονς διδ νοτ ςομπελ ημ; Ανδ ηοω τρυλψ ωονδερφυλ ιτ ις το ςαλςυλατε τηε συμ οφ ινφινιτελψ μανψ δεςρεασινγ χυαντιτιες! ορ το πρεσςριβε λιμιτς το χυαντιτιες ινςρεασινγ ορ δεςρεασινγ ιν α φινιτε σπαςε! ορ το γενερατε φινιτε φιγυρες ανδ δεμονστρατε τηειρ προπορτιονς βψ μυλτιπλψινγ ινφινιτες βψ ονε ανοτηερ! Νοτε 1, παγε 15

Αρςημεδες λονγ αγο υσεδ τηε αριτημετις οφ ινφινιτες ανδ τηε γεομετρψ οφ ινδιισιβλες, ας ωελλ ας ινσςριβεδ ανδ ςιρςυμσςριβεδ φιγυρες, ιν *Τηε Μεασυρεμεντ οφ τηε ῎ιρςλε*, *Ον τηε Σπηερε ανδ τηε ῟ψλινδερ*, ανδ *Τηε Χυαδρατυρε οφ τηε Παραβολα*. Ιν ουρ τιμε, ῞αλιερι ηας ρειεδ τηε γεομετρψ οφ ινδιισιβλες (ωηιλε Γαλιλεο σερεδ ας ηις μιδωιφε ανδ γαε ηις αππροαλ), Ωαλλις τηε αριτημετις οφ ινφινιτες, ανδ Θαμες Γρεγορψ ινσςριβεδ ανδ ςιρςυμσςριβεδ φιγυρες. Ανδ ςερταινλψ, ιφ α νεω λιγητ φρομ ινδιισιβλες ανδ ινφινιτες δοες νοτ σηινε ον ιτ ανδ τηε αρτ οφ αναλψσις δοες νοτ προγρεσ, τηερε ις νο ηοπε οφ γρεατ προγρεσ ιν γεομετρψ.

Τηε ανςιεντς ηαε γιεν υς α ρυλε φορ ςαλςυλατινγ α συμ οφ φραςτιονς ορ ρατιος δεςρεασινγ ινδεφινιτελψ ιν α γεομετρις προγρεσσιον. Φορ ιφ α χυαντιτψ, εξηιβιτεδ βψ τηε λινε AB [σεε τηε διαγραμ βελοω], ις γιεν, ανδ τηις λινε ις ςοντινυαλλψ ςυτ ανδ ρεςυτ σο τηατ τηε ρατιο οφ α συβσεςτιον, συςη ας AD, το α σεςτιον, συςη ας AC, ις ας τηε ρατιο οφ τηε σεςτιον AC το τηε ωηολε, AB, ορ σο τηατ τηε ρατιος $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$, ετς., αρε εχυαλ· τηεν, τηε ρατιο οφ CB (τηε ρεμαινδερ ωηεν τηε σεςτιον AC ις τακεν αωαψ φρομ τηε ωηολε AB) το τηε ωηολε AB ωιλλ βε τηε σαμε ας τηε ρατιο οφ τηε ωηολε AB το α ωηολε ςομποσεδ οφ τηε ωηολε ανδ ιν αδδιτιον φιρστ τηε σεςτιον, τηεν τηε σεςτιον οφ τηε σεςτιον, ετς., αλλ τακεν σιμυλτανεουσλψ· τηατ ις,

$$\frac{CB}{AB} = \frac{AB}{AB + AC + AD + AE + \text{ετς.}}.$$

Ι ηαε σεεν α δεμονστρατιον οφ τηις ρυλε αττεμπτεδ βψ ςερταιν λεαρνεδ μεν, βυτ Ι ηαε νοτ σεεν αν αβσολυτε δεμονστρατιον· Ι νοτ ονλψ δεμονστρατε ιτ φρομ α υνιερσαλ πρινςιπλε βυτ αλσο δραω φρομ ιτ αν ελεγαντ ςονσεχυενςε, ναμελψ: ιφ ωε τακε ςοντινυαλλψ δεςρεασινγ φραςτιονς ωηοσε νυμερατορς αρε υνιτψ, βυτ ωηοσε Νοτε 2, παγε 16



δενομινατορς αρε τηε τερμς ιν α ςερταιν γεομετρις προγρεσσιον, τηεν τηε συμ οφ αλλ τηε φραςτιονς οφ τηε γιεν προγρεσσιον ωιλλ βε τηε φιρστ φραςτιον οφ τηε πρεςεδινγ γεομετρις προγρεσσιον, σο τηατ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\text{ ετς.} &= \frac{1}{1},\text{ ανδ}\\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\text{ ετς.} &= \frac{1}{2},\text{ ανδ}\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\text{ ετς.} &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

Νοτε 3, παγε 17

ανδ σο ον.

Βυτ τηις ις νοτ ενουγη· λετ υς γο ον το σομε τηινγς φορ ωηιςη τηερε αρε ας ψετ νο ρυλες. Ι τηουγητ τηατ Ι σηουλδ ωριτε δοων φορ ψου, μοστ διστινγυισηεδ μαν,[1] σομε ιδεας τηατ ςαμε το μψ μινδ αβουτ ηελπινγ τηε αριτημετις οφ ινφινιτες γροω.

Ωηεν Ι ονςε τολδ τηε Ιλλυστριους Ηυψγενς τηατ Ι ηαδ ςερταιν ωαψς οφ συμμινγ α φεω σεριες τηατ δεςρεασεδ ινδεφινιτελψ, ανδ ωηοσε ςομπυτατιον ηαδ νοτ ψετ βεεν πυβλισηεδ, ηε προποσεδ τηε φολλοωινγ το με: ηε τολδ με το λοοκ φορ τηε συμ οφ τηε φραςτιονς ωηοσε νυμερατορς αρε υνιτψ, βυτ ωηοσε δενομινατορς αρε τηε τριανγυλαρ νυμβερς $0^1 1^2 3^3 6^4 10^5 15^6 21^7 28$ ετς., ναμελψ, τηε νυμβερς ωηοσε

Νοτε 4, παγε 18

διφφερενςες αρε νατυραλ νυμβερς. Ηε σαιδ τηατ ονςε, ωηεν ηε ωας τηινκινγ αβουτ ςαλςυλατιονς φορ διςε ανδ οτηερ γαμες οφ ςηανςε, ηε νεεδεδ τηις συμ ανδ ηαδ φουνδ ιτ, βυτ ιτ ωας νοτ ψετ πυβλισηεδ. Ι λοοκεδ, ανδ φουνδ τηατ τηε συμ ις βιναρψ, τηατ ις, $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$ ετς. $= 2$. Αφτερ Ι ηαδ σηοων τηις το Ηυψγενς, ηε αδμιττεδ τηατ ιτ ις τρυε ανδ αλσο αγρεες ωιτη ηις οων ςαλςυλατιον.

Ι, ηοωεερ, ηαδ φουνδ ατ τηε σαμε τιμε α υνιερσαλ μετηοδ οφ συμμινγ σεριες οφ φραςτιονς ορ ρατιος νοτ ονλψ οφ τηις προγρεσσιον οφ *τριανγυλαρς*, ωηερε τηε διφφερενςες οφ τερμς αρε νατυραλ νυμβερς, βυτ αλσο οφ *πψραμιδαλς*, ωηερε τηε διφφερενςες οφ τερμς αρε τριανγυλαρ νυμβερς, ανδ οφ *τριανγυλο-τριανγυλαρς*, ωηερε τηε διφφερενςες αρε πψραμιδαλ, ανδ οφ *τριανγυλο-πψραμιδαλς*, ωηερε τηε διφφερενςες αρε τριανγυλο-τριανγυλαρ, ανδ οφ *πψραμιδο-πψραμιδαλς*, ωηερε τηε

Νοτε 5, παγε 18

διφφερενςες αρε τριανγυλο-πψραμιδαλ, ανδ σο ον ινδεφινιτελψ. Εξαμινε Ταβλε 1.

[1] Λειβνιζ ιντενδεδ το σενδ τηις μανυσςριπτ το Θεαν Γαλλοις, τηε εδιτορ οφ τηε Θουρναλ δες Σςαανς.

Ταβλε 1

ζερο	υνιτς	νατυραλς	τριανγυλαρς	πψραμιδαλς	τριανγυλο-τριανγυλαρς	τριανγυλο-πψραμιδαλς	πψραμιδο-πψραμιδαλς
0							
	1						
0		1					
	1		1				
0		2		1			
	1		3		1		
0		3		4		1	
	1		6		5		1
0		4		10		6	
	1		10		15		7
0		5		20		21	
	1		15		35		28
0		6		35		56	
	1		21		70		84
		7		56		126	
			28		126		210
				84		252	
					210		462
						462	
							924

Ανδ τηεσε αρε τηε νυμβερς ωηοσε σεριες σομε ςαλλ νυμεριςαλ ορδερς, οτηερς ςομβινατορις ορδερς, ανδ οτηερς τηε νυμβερς οφ α σψμμετρις προγρεσσιον. Πασςαλ σετ φορτη τηειρ μανψ υσες ιν *Τηϵ Αριτημϵτις Τριανγλϵ*, τηε τρεατισε ηε ωροτε τηατ ις δεδιςατεδ το τηεμ.[2] Ι υσυαλλψ ςαλλ τηεμ τηε νυμβερς οφ α *ρϵπλιςατϵδ αριτημϵτις προγρϵσσιον·* φορ ανψ νυμβερς ωηατεερ (φορ εξαμπλε, βιναρψ ορ τερναρψ νυμβερς) ςαν βε συβστιτυτεδ φορ τηε υνιτς, ωηιλε αρβιτραρψ νυμβερς οφ αν αριτημετις προγρεσσιον βεγιννινγ φρομ ιτς οων διφφερενςε ςαν βε συβστιτυτεδ φορ τηε νατυραλ νυμβερς (φορ εξαμπλε, 2, 4, 6, 8 ετς., φορ 1, 2, 3, 4, ετς.), ανδ τηε ταβλε ωιλλ βε προπορτιοναλλψ τηε σαμε· ινδεεδ, ιφ τηε γενερατορ ις βιναρψ, ωε σιμπλψ δουβλε αλλ τηε τερμς, ανδ ιφ ιτ ις τερναρψ, ωε τριπλε τηεμ, ετς. Μορεοερ, ωε ςαν μακε α υνιερσαλ ρυλε φορ τηε συμς οφ φραςτιονς, ωηατεερ τηε γενερατορ μαψ βε, ιφ ονλψ ωε υνδερστανδ τηε νυμερατορ οφ τηε φραςτιονς το βε τηε γενερατορ· φορ εξαμπλε, ιφ τηε γενερατορ ις 2, ωε σηουλδ συβστιτυτε $\frac{2}{2}+\frac{2}{6}+\frac{2}{12}$ ετς. φορ $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ετς. Ανδ αφτερ ωε διιδε αλλ τηε νυμβερς ιν τηε φορμερ σεριες βψ τηε γενερατορ, ιτ ις τηε σαμε ας τηε λαττερ.

Βυτ ας Ι ωας σαψινγ, τηερε ωιλλ βε α ρυλε φορ φινδινγ συμς [σεε Ταβλε 2, βελοω]: τηε συμ οφ α σεριες οφ φραςτιονς ωηοσε νυμερατορς αρε τηε γενερατορ, ανδ ωηοσε δενομινατορς αρε τηε τερμς οφ α ςερταιν ρεπλιςατεδ αριτημετις προγρεσσιον, ορ, ωηατ αμουντς το τηε σαμε τηινγ, τηε συμ οφ ρατιος ωηοσε αντεςεδεντς αρε υνιτψ, ανδ ωηοσε ςονσεχυεντς αρε τηε τερμς οφ α ςερταιν ρεπλιςατεδ αριτημετις προγρεσσιον ηαινγ υνιτψ ας ιτς γενερατορ—τηις συμ, Ι σαψ, ις τηε φραςτιον ορ ρατιο ωηοσε νυμερατορ ορ αντεςεδεντ ις τηε εξπονεντ οφ τηε ιμμεδιατελψ πρεςεδινγ σεριες, τηατ ις, τηε πενυλτιματε σεριες (τακινγ τηε γιεν σεριες ας τηε υλτιματε σεριες), βυτ ωηοσε δενομινατορ ορ ςονσεχυεντ ις τηε εξπονεντ οφ τηε σεριες ιμμεδιατελψ πρεςεδινγ τηε πρεςεδινγ σεριες, τηατ ις, οφ τηε αντεπενυλτιματε σεριες. Βψ *ϵξπονϵντ* Ι μεαν ηερε τηε νυμβερ οφ τηε σεριες ορ τηε ορδιναλ νυμβερ οφ ιτς ρεπλιςατιον, ναμελψ, τηε νυμβερ τηατ εξπρεσσες τηε πλαςε οφ ιτς ρεπλιςατιον ιν τηε σεριες οφ ρεπλιςατιονς. Τηυς τηε εξπονεντ ιν τηε φιρστ σεριες, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, ετς., ις 1, ανδ τηε εξπονεντ ιν τηε σεςονδ σεριες, 1, 2, 3, 4, ετς., ις 2. Φορ ωηιλε ιν τηε φιρστ σεριες ονλψ τηε υνιτ γενερατορ ις ρεπεατεδ, ιν τηε σεςονδ τηε ρεπλιςατιονς τηεμσελες ορ τηε ρεπετιτιονς αρε ρεπλιςατεδ, ανδ ιν τηε τηιρδ, 1, 3, 6, 10, ετς., τηε ρεπλιςατιονς οφ τηε ρεπλιςατιονς αρε ρεπεατεδ· βυτ ιφ τηε γενερατορ ις τηε υνιτ, τηε νυμβερ οφ α σεριες ορ τηε εξπονεντ οφ ιτς δεγρεε ςοινςιδες ωιτη τηε φιρστ νυμβερ ιν ιτ αφτερ τηε υνιτ. Ι ςαλλ τηε νυμβερ οφ τηε σεριες ιτς *ϵξπονϵντ* βεςαυσε Ι αμ φολλοωινγ τηε εξαμπλε οφ τηε γεομετρις προγρεσσιον· ιν α γεομετρις προγρεσσιον τηε εξπονεντ οφ τηε ροοτς ις 1, τηε εξπονεντ οφ τηε σχυαρες ις 2, τηε εξπονεντ οφ τηε ςυβες ις 3, ετς., ϑυστ ας ιν τηις ςασε τηε εξπονεντ οφ τηε γενερατορς ις 1, τηε εξπονεντ οφ τηε νατυραλς ις 2, τηε εξπονεντ οφ τηε τριανγυλαρς ις 3, ετς.

Τηερεφορε ιτ φολλοως τηατ τηε συμ οφ τηε σεριες οφ τριανγυλαρ φραςτιονς

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}\ \text{ετς.}$$

[2]Αν εξςερπτ οφ τηις τρεατισε ις τρανσλατεδ ιντο Ενγλιση βψ Αννα Σαιτσκψ ιν Δ. Ε. Σμιτη'ς *Α Σουρςϵ Βοοκ ιν Ματηϵματιςς*, 1929, παγες 67–79. Τηε ωηολε ωορκ, ιν Λατιν ανδ Φρενςη, ις ινςλυδεδ Πασςαλ'ς *Οϵυρϵς*, Μεσναρδ εδ., ολ. ΙΙ, ππ. 1166–1332, Δεσςλέε δε Βρουωερ, Παρις, 1970.

Ταβλε 2: Σεριες οφ φραστιονς οφ α ρεπλιςατεδ αριτημετις προγρεσσιον

0	1	2	3	4	5	6	7	ετς.	εξπονεντς
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$		Σεριες οφ φραστιονς οφ α ρεπλιςατεδ αριτημετις προγρεσσιον ωιτη υνιτ γενερατορ
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{84}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{210}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{462}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{462}$	$\frac{1}{924}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	ετς.	συμς

ις

$$= \frac{2}{1};$$

φορ τηε σεριες πρεςεδινγ τηε σεριες 1, 3, 6 ετς., ναμελψ 1, 2, 3 ετς., ηας εξπονεντ 2, ανδ τηε σεριες πρεςεδινγ *τηις* σεριες, ναμελψ 1, 1, 1 ετς., ηας εξπονεντ 1· ηενςε ωε γετ $\frac{2}{1}$ ορ 2. Ανδ τηε συμ οφ τηε σεριες οφ πψραμιδαλ φραστιονς

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} \text{ ετς.}$$

ις

$$= \frac{3}{2},$$

ορ τηε ρατιο οφ τηε εξπονεντ οφ τηε τριανγυλαρς το τηε εξπονεντ οφ τηε νατυραλς.

Τηις ις εασιερ το σεε βψ λοοκινγ ατ Ταβλε 2.

Βυτ σινςε συςη α μετηοδ οφ φινδινγ ανδ δεμονστρατινγ ις χυιτε λενγτηψ ανδ ρεχυιρες μανψ λεμμας, Ι ωιλλ ωαιτ υντιλ Ι ηαε μορε τιμε το πυτ ιτ ιν ορδερ βεφορε Ι πυβλιση ιτ, αλονγ ωιτη μανψ οτηερ τηινγς οφ τηε σαμε κινδ. Νοτε 6, παγε 20

Ψετ Ι ςαννοτ πασς υπ ηερε α ςηανςε Ι ηαε το μακε α ςερταιν ποιντ αβουτ τηε νατυρε οφ τηε *ινφινιτε νυμβερ οφ αλλ νυμβερς*. Γαλιλεο[3] ςομπαρες ιτ το τηε *υνιτ*, ανδ ηε ρεασονεδ ας φολλοως: εερψ νυμβερ ινδεφινιτελψ ηας ιτς οων σχυαρε, ιτς οων ςυβε, ετς· φορ ιφ ιτ ις μυλτιπλιεδ βψ ιτσελφ, ιτς σχυαρε, ςυβε, ετς. ις

[3] Ιν τηε *Τωο Νεω Σςιενςες*, Φιρστ Δαψ, ον παγε 83 ιν ὃλυμε ὝΙΙΙ οφ Γαλιλεο'ς *Οπερε*, εδιτεδ βψ Α. Φααρο· ον Παγε 45 ιν Στιλλμαν Δρακε'ς τρανσλατιον, Τοροντο, 1989.

προδυςεδ· τηερεφορε τηερε αρε ας μανψ ςυβες ανδ ας μανψ σχυαρες ας τηερε αρε ροοτς ορ σιμπλε νυμβερς, ωηιςη ις ιμποσσιβλε· φορ τηερε αρε αλωαψς μανψ οτηερ νον-σχυαρες πλαςεδ βετωεεν τηε σχυαρε νυμβερς, ανδ στιλλ μορε νον-ςυβες βετωεεν τηε ςυβες. Ωηατ τηεν; Δο τηε αττριβυτες ‘εχυαλ’ ανδ ‘γρεατερ’ ορ ‘λεσσ’ ηαε νο πλαςε ιν τηε ινφινιτε; Ηε αλσο συγγεστς τηατ, ιφ ανψ νυμβερ ις ινφινιτε, τηε υνιτ ις· φορ ιτ ηας τηατ προπερτψ τηατ τηε ινφινιτε νυμβερ οφ αλλ νυμβερς νεεδς το ηαε: τηατ τηερε αρε ας μανψ ροοτς ιν ιτ ας σχυαρες ανδ ςυβες· φορ τηε σχυαρε ανδ ςυβε ετς. οφ τηε υνιτ ις τηε υνιτ. Ι, ηοωεερ, ςονςλυδε τηατ ιφ τηερε ις ανψ συςη ινφινιτε νυμβερ, ιτ ις ζερο ορ νοτηινγ, ορ, ωηατ αμουντς το τηε σαμε τηινγ, τηατ συςη α νυμβερ ις νοτηινγ ορ = 0.

Συςη αν ινφινιτε νυμβερ ηας νοτ ονλψ τηε προπερτψ τηατ Γαλιλεο οβσερεδ ιν ιτ —τηατ τηερε αρε ας μανψ ποωερς οφ εερψ κινδ ιν ιτ ας τηερε αρε ροοτσ—βυτ αλσο τηε προπερτψ τηατ τηερε αρε ιν ιτ ας μανψ νυμβερς τακεν σιμπλψ, τηατ ις, βοτη εενς ανδ οδδς τογετηερ, ας τηερε αρε εεν νυμβερς. Φορ τηε εεν νυμβερς αρε τηε δουβλες οφ τηε νυμβερς τακεν σιμπλψ, ψετ τηερε αρε ας μανψ σιμπλε νυμβερς ας τηερε αρε δουβλες οφ τηεμ. Ιν τηε σαμε ωαψ ωε ςονςλυδε τηατ τηερε αρε νοτ ονλψ ας μανψ νυμβερς τακεν σιμπλψ ας τηερε αρε εεν νυμβερς (βιναριες), βυτ αλσο ας μανψ ας τηερε αρε τερναριες (τριπλες οφ νυμβερς τακεν σιμπλψ), ανδ ας τηερε αρε χυατερναριες, ετς., ανδ τριανγυλαρς, πψραμιδαλς, ετς. Ιν τηε σαμε ωαψ ωε προε τηατ τηερε αρε ας μανψ νυμβερς τακεν σιμπλψ ας τηερε αρε νυμβερς οφ ανψ γιεν προγρεσσιον, αριτημετις, γεομετρις, ορ μιξεδ, ορ οφ ανψ ρεπλιςατεδ προγρεσσιον γοινγ ον ινδεφινιτελψ· αλτηουγη ιτ ις μορε τηαν μανιφεστ τηατ βετωεεν τηε βιναριες ορ εενς τηερε αρε οτηερ, οδδ, νυμβερς, ανδ τηατ τηερε αρε στιλλ μορε νον-τερναρψ νυμβερς βετωεεν τηε τερναριες. Τηερεφορε, σινςε ιν συςη αν ινφινιτε νυμβερ τηερε αρε ας μανψ εεν νυμβερς ας τηερε αρε οδδ ανδ εεν νυμβερς τογετηερ, τηατ ις, ας μανψ ας τηερε αρε νυμβερς τακεν σιμπλψ, ιτ φολλοως τηατ ιν συςη αν ινφινιτε νυμβερ τηε αξιομ τηατ τηε ωηολε ις γρεατερ τηαν τηε παρτ φαιλς (ϑυστ ας Γρεγορψ οφ Στ. ἵνςεντ ςοντενδς τηατ ιτ φαιλς φορ τηε ανγλε οφ ςονταςτ[4]). Βυτ ιτ ις ιμποσσιβλε φορ τηις αξιομ το φαιλ, ορ, ωηατ αμουντς το τηε σαμε τηινγ, συςη αν αξιομ νεερ φαιλς, τηατ ις, ιτ φαιλς φορ *νοτηινγ*. Τηερεφορε συςη αν ινφινιτε νυμβερ ις ιμποσσιβλε—νοτ ονε, νοτ ωηολε, βυτ νοτηινγ. Τηερεφορε συςη αν ινφινιτε νυμβερ = 0. Ανδ ιν 0 ορ ζερο ωε ςερταινλψ φινδ νοτ ονλψ τηε προπερτψ νοτιςεδ βψ Γαλιλεο ιν τηε υνιτ, βυτ αλσο αλλ τηε ρεστ· φορ τηε σχυαρε ανδ ςυβε οφ 0 ις 0, ανδ τηε δουβλε ανδ τριπλε οφ 0 ις 0, ανδ $0 + 0$ ις $= 0$, τηε ωηολε το τηε παρτ. Ανδ, σο ας νοτ το σεεμ το διγρεσς τοο φαρ φρομ τηε ματτερ ατ ηανδ, Ι ςονφιρμ τηις βψ γατηερινγ ιντο α συμ α σεριες τηατ προγρεσσες ινδεφινιτελψ· φορ ωηεν ωε συμ τηε φραςτιονς οφ α γεομετρις προγρεσσιον ιτ ις ςερταιν τηατ τηε συμ οφ ανψ σεριες ις τηε φιρστ φραςτιον οφ τηε πρεςεδινγ σεριες, ανδ $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$ ετς. $=\frac{1}{2}$, ανδ λικεωισε $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ ετς. $=1$, ανδ τηερεφορε $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}$ ετς. $=0$. Νοω $1+1+1$ ετς. ςονστιτυτες τηε ινφινιτε νυμβερ οφ αλλ νυμβερς. Τηε σαμε τηινγ ηαππενς ιν τηε αβοε ταβλε οφ τηε φραςτιονς οφ α ρεπλιςατεδ αριτημετις προγρεσσιον, ωηερε ιτ ις ςλεαρ τηατ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ ετς. $=\frac{1}{0}$

[4]Γρεγορψ αππαρεντλψ αργυεδ τηατ τηε ανγλε φορμεδ βψ α διαμετερ οφ α ςιρςλε ανδ α ταγγεντ ατ ιτς ενδποιντ ις νοτ γρεατερ τηαν τηε ςυριλινεαλ ανγλε φορμεδ βψ τηε σαμε διαμετερ ανδ τηε ςιρςυμφερενςε. Ιν τηε διαγραμ το Ευςλιδ’ς *Ελεμεντς*, Προποσιτιον III 16, Γρεγορψ ωουλδ σαψ τηατ τηε ωηολε ριγητ ανγλε BAE ις νοτ γρεατερ τηαν ιτς παρτ, τηε ςυριλινεαλ ανγλε $BAHC$.

ανδ $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}$ ετς. $= \frac{0}{0} = 0$.

Τηε σαμε τοπις σηουλδ ρεμινδ υς τηατ, ιφ ωε αρε γοινγ το βε ριγορους, ιφ πηιλοσοπηψ ις το βε περφεςτεδ, ωε σηουλδ αςςεπτ νο προποσιτιον υνλεσς ιτ ειτηερ αγρεες ωιτη αν ιμμεδιατε σενσε-οβσερατιον ορ ις δεμονστρατεδ φρομ ςλεαρ ανδ διστινςτ ιμαγινατιον, τηατ ις, φρομ αν *ιδεα*, ορ φρομ α δεφινιτιον (ωηιςη ις ωηατ ιδεα σιγνιφιες). Οβιουσλψ τηε δεφινιτιονς τηεμσελες νεεδ νοτ βε δεμονστρατεδ, σινςε, ας τηε ρεστορερ οφ πηιλοσοπηψ Γαλιλεο ηας εμπηασιζεδ σο μανψ τιμες ιν ηις ωριτινγς, τηεψ αρε αρβιτραρψ, ανδ ςαννοτ βε ςηαργεδ ωιτη φαλσιτψ, βυτ ονλψ ωιτη υνσυιταβιλιτψ ανδ οβσςυριτψ.

Σινςε συςη α προποσιτιον—τηατ τηε ωηολε ις γρεατερ τηαν τηε παρτ—ηας βεεν δουβτεδ βψ τηε γρεατεστ γεομετερς, ινςλυδινγ Γαλιλεο ανδ Γρεγορψ οφ Στ. ῞ινςεντ, σηαλλ ωε ςοντινυε το προςλαιμ τηατ τηερε αρε οτηερ προποσιτιονς τηατ αρε κνοων τηρουγη τηεμσελες;

Γαλιλεο ςερταινλψ βελιεεδ τηατ αν ινφινιτε νυμβερ ις σομετηινγ ορ ονε ωηολε, φορ ηε ςομπαρες ιτ το α υνιτ· βυτ νεερτηελεσς ηε δενιες τηατ βεινγ γρεατερ ανδ βεινγ λεσς ηαε ανψ πλαςε ιν ιτ· φορ ηε δενιες τηατ τηερε αρε μορε νυμβερς τακεν σιμπλψ, τηατ ις, σχυαρες ανδ τηε νον-σχυαρες, τηαν τηερε αρε σχυαρε νυμβερς, ορ τηατ τηε ωηολε ις γρεατερ τηαν τηε παρτ.

Ηοββες ερρεδ ιν ςονςλυδινγ τηατ τηε τρυτη οφ αλλ προποσιτιονς ςομες φρομ ηυμαν δεςισιον.[5] Φορ, φιρστ οφ αλλ, ωε σηουλδ λεαε ουτ τηοσε προποσιτιονς ωηιςη αρε εσταβλισηεδ βψ σενσε-περςεπτιον, συςη ας τηε προποσιτιον τηατ Ι αμ *σενσεδ* βψ μψσελφ ας σενσινγ· βυτ ωε σηουλδ αλσο λεαε ουτ τηοσε προποσιτιονς τηατ ωε δεμονστρατε βψ αππλψινγ δεφινιτιονς το ωηατ ωε κνοω—φορ εξαμπλε, ωηεν ωε δεμονστρατε φρομ τηε πρεςεδινγ προποσιτιον τηατ Ι *σενσε* ορ τηινκ, ανδ λικεωισε τηατ Ι *αμ*. Φορ ιτ ις ςερταιν βψ σενσε-περςεπτιον τηατ Ι αμ σενσεδ βψ μψσελφ ας σενσινγ, ανδ τηερεφορε τηατ *Ι, ας σενσινγ* αμ σενσεδ ιμμεδιατελψ (ωιτηουτ ανψ μεδιυμ)· φορ βετωεεν μψσελφ ανδ με, ιν τηε μινδ, τηερε ις νο μεδιυμ. Ωηατεερ ις ιμμεδιατελψ σενσεδ ις ιμμεδιατελψ σενσιβλε. Ωηατεερ ις ιμμεδιατελψ σενσιβλε ις σενσιβλε ωιτηουτ ερρορ (φορ αλλ ερρορ ις φρομ α μεδιυμ οφ σενσατιον—Ι αμ συπποσινγ τηις ας σομετηινγ τηατ ις το βε δεμονστρατεδ ελσεωηερε). Ωηατεερ ις σενσιβλε ωιτηουτ ερρορ, ις· ηενςε ιτ φολλοως τηατ *Ι αμ σενσινγ*, τηατ ις, τηατ τηε προποσιτιον, 'Ι αμ *σενσινγ*,' ις τρυε. ὃνσεχυεντλψ Ι ρεφλεςτ: '*Ι αμ σενσινγ*.' Ωε σηουλδ αλσο λεαε ουτ ιδεντιςαλ προποσιτιονς ορ τηε αφφιρματιον οφ τηε σαμε τηινγ αβουτ τηε σαμε τηινγ ωιτη τηε σαμε ωορδς. Βυτ ωηεν ωε σαψ τηε σαμε τηινγ αβουτ τηε σαμε τηινγ ωιτη εχυιαλεντ ωορδσ—φορ εξαμπλε, ωηεν ωε σαψ τηε δεφινιτιον οφ σομετηινγ, ορ ωηεν ωε τακε διφφερεντ δεφινιτιονς οφ τηε σαμε τηινγ ανδ αππλψ τηεμ το εαςη οτηερ ιν τυρν, ορ ωηεν ωε τακε α παρτ οφ ονε δεφινιτιον οφ σομετηινγ ανδ αππλψ ιτ το τηατ τηινγ ορ το σομε οτηερ δεφινιτιον οφ ιτ—ιτ ις μανιφεστ τηατ τηε τρυτη οφ ουρ προποσιτιον ις βψ ηυμαν δεςισιον· φορ δεφινιτιον ις βψ ηυμαν δεςισιον. Ανδ αλλ αξιομς τηατ δο νοτ δεπενδ ον σενσε-περςεπτιον—ινδεεδ αλλ τηεορεμς ιν τηε σςιενςες τηατ αρε ινδεπενδεντ οφ σενσε περςεπτιον ανδ εξπεριενςε—αρε προποσιτιονς οφ τηις σορτ, ας Αριστοτλε αλσο νοτιςεδ, ωηο σετ δοων *δεφινιτιον* ας τηε υνιχυε πρινςιπλε οφ δεμονστρατιον.[6] Ανδ ιν φαςτ αλλ τηε

[5] Ηοββες ςονςλυδες σομετηινγ λικε τηις ιν *Ον Βοδψ* (τηε φιρστ παρτ οφ ηις *Ελεμεντς οφ Πηιλοσοπηψ*), ῝απτερ 3, Παραγραπη 8.

[6] Σεε *Ποστεριορ Αναλψτιςς* ΙΙ 3, 90β25.

αξιομς τηατ Ευςλιδ πυτς ατ τηε βεγιννινγ οφ ηις ελεμεντς αρε δεμονστραβλε φρομ δεφινιτιονς. ‘Τηεν,’ ψου ωιλλ σαψ, ‘ωηατ αρε ωε λεαρνινγ ωηεν ωε ινεστιγατε τηε τηεορεμς οφ συςη σςιενςες;’ Νοτηινγ, I ωουλδ σαψ, εξςεπτ ηοω το τηινκ μορε χυιςκλψ ανδ διστινςτλψ φορ πραςτιςαλ πυρποσες, ορ ηοω το υσε ςερταιν φιττινγ σψμβολς το ορδερ τηουγητς ωε ηαε ηαδ ανδ ιδεας ωε ηαε ρεςειεδ τηρουγη ουρ σενσες. (Τηεσε σψμβολς μαψ βε ειτηερ ναμες ορ ςηαραςτερς.) ὂνσιδερ, φορ εξαμπλε, νυμβερς· ωηο δοες νοτ σεε τηατ ωε λεαρν νοτηινγ νεω ιν αλλ οφ αριτημετις εξςεπτ τηε ναμες οφ νυμεραλς ανδ τηειρ αριους ρεςυρσιονς, ωηιςη βεςομε ηαρμονις ιφ τηεψ αρε ινερτεδ· φρομ ηερε ωε δραω ουτ εχυατιονς ας τηεορεμς ανδ ιτ τηεν βεςομες ερψ ςλεαρ ηοω υσεφυλ ςηαραςτερς αρε, ωηεν βψ υσινγ τηε σψμβολς ωε ηαε μαδε ωε ςαν νοτιςε μυςη τηατ ωε ωουλδ νοτ οτηερωισε ηαε σεεν—φορ εξαμπλε, ωηεν ωε εασιλψ ςαλςυλατε τηε συμ οφ αν εντιρε προγρεσσιον. Ανδ τηις ις μοστ αππαρεντ ιν αλγεβρα, ωηερε νο ονε δοες νοτ σεε τηατ ωε δο εερψτηινγ βψ μεανς οφ σψμβολς αριουσλψ τρανσποσεδ, ανδ ρεαπ α προδιγιους ηαρεστ, νοτ βεςαυσε ωε λεαρν νεω τηινγς, βυτ βεςαυσε τηινγς αρε σηοων νακεδ το τηε μινδ. Ιν τηε σαμε ωαψ, ιφ ωε ωερε το ηαε α πηιλοσοπηιςαλ λανγυαγε ορ ατ λεαστ α πηιλοσοπηιςαλ ωριτινγ, ωηιςη I σποκε αβουτ ιν τηε *ὂμβινατορις Αρτ*,[7] ανδ ωηιςη ωουλδ υσε τηε ελεμεντς οφ τηινκινγ ινστεαδ οφ αν αλπηαβετ, ωε ςουλδ ωριτε τηινγς δοων βψ μεανς οφ τηειρ δεφινιτιονς. Ανδ ϑυστ ας ιν αλγεβρα τηερε αρε εχυατιονς εερψωηερε, ηερε τηερε ωουλδ βε τηεορεμς εερψωηερε, ανδ ωε ςουλδ προποσε ανδ σολε ινφινιτελψ μανψ προβλεμς ανδ δεμονστρατε τηεορεμς ωιτη νο τρουβλε, ανδ ιτ ωουλδ βε ιμποσσιβλε φορ ανψονε ωηο δοες νοτ υνδερστανδ τηινγς το υσε τηις ωριτινγ, ανδ εερψονε ωουλδ βε αβλε το ρεασον ωιτηουτ ερρορ, ας ιν αριτημετις. Ανδ αλγεβρα, βοτη νυμεριςαλ ανδ σπεςιους, ις ονλψ α παρτ ορ αν εξαμπλε οφ τηις υνιερσαλ ωριτινγ ορ πηιλοσοπηις ςηαραςτερισμ· I ωονδερ ωηψ τηις ηας νοτ βεεν συφφιςιεντλψ νοτιςεδ βψ τηε γρεατεστ μεν. I, ηοωεερ, αμ πρεπαρινγ αν εξαμπλε ιν μοραλιτψ ορ ϑυστιςε, ιν ορδερ τηατ ιτ μαψ αππεαρ—

Σινςε I ηαε ασςερταινεδ τηατ εερψ ωηολε ις γρεατερ τηαν ιτς παρτ, I βολδλψ ςονςλυδε τηατ συςη αν ινφινιτε νυμβερ ορ γρεατεστ νυμβερ ορ συμ οφ αλλ ποσσιβλε υνιτς, ωηιςη ψου μαψ αλσο ςαλλ μοστ ινφινιτε ορ τηε νυμβερ οφ αλλ νυμβερς, ις 0 ορ νοτηινγ. Ανδ ωε ςαν γιε α νεω δεμονστρατιον, φορ ινστανςε βψ υσινγ τηε φαςτ τηατ α γρεατεστ νυμβερ ις τηε συμ οφ αλλ υνιτς ορ τηε νυμβερ οφ αλλ νυμβερς. Ανδ τηε συμ οφ αλλ νυμβερς ις νεςεσσαριλψ γρεατερ τηαν τηε νυμβερ οφ νυμβερς (ας $1+2+3$ ετς. ις γρεατερ τηαν $1+1+1$ ετς.). Τηερεφορε, τηε γρεατεστ νυμβερ ις νοτ τηε γρεατεστ νυμβερ, τηατ ις, τηε γρεατεστ νυμβερ ις 0, αλτηουγη I ωουλδ νοτ τηερεφορε στραιγηταωαψ δενψ τηατ τηερε αρε ινφινιτελψ μανψ παρτς ιν τηε ςοντινυυμ ορ τηατ τηερε ις αν ινφινιτε μαγνιτυδε ιν τιμε ορ σπαςε.

Ηενςε ιτ αππεαρς τηατ συςη προποσιτιονς ας: τηατ τηινγς εχυαλ το τηε σαμε τηινγ αρε αλσο εχυαλ το εαςη οτηερ· τηατ εχυαλς αδδεδ το ορ τακεν αωαψ φρομ εχυαλς μακε εχυαλς· τηατ τηε ωηολε ις γρεατερ τηαν τηε παρτ· τηατ εχυιμυλτιπλες αρε ας σιμπλες· τηατ ιφ προπορτιοναλς αρε αδδεδ ορ τακεν αωαψ φρομ προπορτιοναλς, προπορτιοναλς αρε προδυςεδ, ετς.–σινςε τηεσε αλλ ςαν βε δουβτεδ, τηεψ μυστ βε δεμονστρατεδ, ανδ αςςορδινγλψ, ιφ τηεψ αρε τρυε, τηεψ αρε δεμονστρα-

[7]Α ωορκ Λειβνιζ πυβλισηεδ ιν 1666. Ιτ ις ρεπριντεδ ιν ὅλυμε 1 οφ Σεριες ῞Ι τηε Βερλιν Αςαδεμψ εδιτιον οφ Λειβνιζ΄ς ςολλεςτεδ ωορκς. Τηε ρελεαντ πασσαγε ις ιν σεςτιονς 89 ανδ 90.

βλε (φρομ τερμς ορ δεφινιτιονς, οφ ςουρσε). Ανδ τηε σςηολαστιςς ωισηεδ τηατ φιρστ τρυτης μιγητ βεςομε κνοων τηρουγη ινσπεςτιον οφ τερμς, τηατ ις τηατ τηεψ μιγητ βε εασψ το δεμονστρατε ανδ αλμοστ δεφινιτιονς· ον τηε οτηερ ηανδ τηερε αρε τηοσε ωηο τηινκ τηατ τηεσε φιρστ τρυτης αρε κνοων τηρουγη τηεμσελες, βψ μεανς οφ Ι κνοω νοτ ωηατ νατυραλ λιγητ. Φορ ιτ ις ωελλ κνοων τηατ σομε τηινγς αρε πλαςεδ βψ σομε μεν αμονγ τηε τηινγς κνοων τηρουγη τηεμσελες, ωηιλε τηε σαμε τηινγς αρε ρεϑεςτεδ ανδ διστινγυισηεδ φρομ τηεμ βψ οτηερς, ανδ τηατ μεν ηαε νο ςριτεριον το δεςιδε ωηατ ις κνοων τηρουγη ιτσελφ, εξςεπτ περηαπς ςομμον οπινιον, ωηιςη, βεσιδες βεινγ εξποσεδ το δουβτ, ωουλδ σετ δοων προβαβλε τηινγς ας τηε φουνδατιονς οφ δεμονστρατιονς, ωηιςη ις το γιε ωαψ το τηε Πψρρηονιστς.

‘Βυτ ινδεεδ,’ σομεονε ωιλλ σαψ, ‘ιφ αλλ αξιομς αρε δεμονστραβλε φρομ δεφινιτιονς οφ ναμες, αλλ τρυτης ωιλλ δεπενδ ον ηυμαν δεςισιον, σινςε τηε δεφινιτιονς οφ ναμες αρε αρβιτραρψ· βυτ τηις οπινιον ιν Ηοββες ις ςονδεμνεδ βψ τηε λεαρνεδ.’ Ι ρεπλψ τηατ προποσιτιονς δεπενδ ον δεφινιτιονς το τηε εξτεντ τηατ τηεψ αρε εξπρεσσεδ βψ ωορδς ανδ οτηερ σψμβολς, βυτ ασψμβολις τηουγητς, τηατ ις, τηε ςοννεξιονς οφ τηε ιδεας τηεμσελες, αρε ειτηερ φρομ σενσε περςεπτιον ορ φρομ διστινςτ ιμαγινατιον. (Ωε ηαε α διστινςτ ιμαγινατιον ωηεν ωε διστινγυιση α συβϑεςτ ματτερ ιντο παρτς βψ εξαμινινγ ιτ ανδ ςονσιδερινγ ιτ τηρουγη ιτς ςιρςυμστανςες, ας λονγ ας νοτηινγ νεω ηαππενς τηατ ις ρελεαντ το τηε ματτερ ατ ηανδ.) Ηενςε τηε τηεορεμς ςηανγε ας ρελατιονς ςηανγε, ϑυστ ας τηε σαμε ςιτψ ςηανγες ιτς σηαπε δεπενδινγ ον ωηιςη σιδε ωε σεε ιτ φρομ. Ιτ τηερεφορε σεεμς το με τηατ ονε μυστ διστινγυιση βετωεεν προποσιτιονς· φορ τηε τρυτη οφ σομε, συςη ας τηοσε τηατ αρε βασεδ ον εξπεριμεντς ανδ οβσερατιονς οφ νατυρε, δεπενδς υπον σενσε-περςεπτιον, ωηιλε τηε τρυτη οφ οτηερς, συςη ας τηε τηεορεμς οφ αριτημετις ανδ γεομετρψ, δεπενδς υπον α ςλεαρ ανδ διστινςτ ιμαγινατιον ορ ιδεας ορ, ιφ ψου πρεφερ, δεφινιτιονς (φορ δεφινιτιον ις νοτηινγ οτηερ τηαν τηε σιγνιφιςατιον οφ ‘ιδεα’). Τηερεφορε σιγνς ανδ σψμβολς, ωηετηερ τηεψ αρε ωορδς ορ ςηαραςτερς, αρε αρβιτραρψ, βυτ αλλ νατιονς ηαε τηε σαμε ιδεας. Ψετ ιν ρεασονινγ αβουτ ερψ ςομπλεξ τηινγς ωε αρε αςςυστομεδ το υσε σψμβολς, ωιτηουτ ςονσιδερινγ τηε ιδεας τηεμσελες. Τηεσε *τηουγητς* αρε *βλινδ*, σινςε ιν τηεμ ωε αρε ςοντεντ ωιτη αν αναλογψ ωιτη σμαλλ ανδ σιμπλε τηουγητς διστινςτλψ ςομπρεηενδεδ. Φορ εξαμπλε, ωηεν ωε σαψ ‘100,000,’ νο ονε φορμς αλλ ιτς υνιτς ιν ηις μινδ· φορ ηε κνοως τηατ βψ δοινγ τηις ηε ςαν λεαε τηεμ βεηινδ τηε σψμβολς. Ανδ τηε αρτ οφ δεισινγ σψμβολς ςονσιστς ιν τηις: τηατ τηεψ βε βριεφερ τηαν τηε ιδεας τηεμσελες ανδ ψετ φρεε φρομ ςονφυσιον ανδ συιτεδ το ρεεαλινγ (το τηε εξτεντ τηατ τηις ις ποσσιβλε) προπορτιονς οφ εερψ κινδ ιν τηοσε ερψ ιδεας νο λεσς εασιλψ τηαν ιφ τηεψ ηαδ βεεν ρεσολεδ ιντο υλτιματε ελεμεντς ορ ηαδ βεεν ςλεαρλψ ανδ διστινςτλψ υνδερστοοδ. Ανδ τηε δεςιμαλ προγρεσσιον δοες τηις χυιτε ωελλ φορ νυμβερς· φορ ωιτηουτ α προγρεσσιον λικε τηις ιτ ωουλδ ηαε βεεν τοο τεδιους φορ μορταλς το ςουντ υπ ηυγε νυμβερς. Αλγεβρα δοες τηε σαμε τηινγ φορ γεομετρψ, σο τηατ εεν ωηεν ωε ασσυμε ιμποσσιβιλιτιες, συςη ας διμενσιονς βεψονδ τηε τηιρδ ανδ συρδ[8] νυμβερς ανδ νυμβερς λεσς τηαν νοτηινγ, ιτ νεερτηελεσς συςςεεδς.

Τηερεφορε, σινςε ωηεν ωε ηαε φουνδ συιταβλε σψμβολς τηεψ συππορτ ουρ

[8]Συρδ νυμβερς αρε ιρρατιοναλ νυμβερς, τηατ ις, νυμβερς τηατ αρε νοτ εχυαλ το φραςτιονς ωηερε βοτη τηε νυμερατορ ανδ δενομινατορ αρε ωηολε νυμβερς. $\sqrt{2}$ ις αν εξαμπλε οφ α συρδ νυμβερ. Τηε Λατιν ωορδ ‘συρδυς,’ ωηιςη Λειβνιζ υσες ηερε, λιτεραλλψ μεανς μυτε.

μινδ λικε σπιριτυαλ μαςηινες, βυτ τηοσε σψμβολς ωε ηαε νοω, εξςεπτ ιν τηε πυρε ματηεματιςαλ σςιενςες (αλτηουγη εεν τηερε Ι ςουλδ ωιση φορ μορε), αρε νειτηερ σιμπλε, νορ ςομπλετε, νορ ορδερεδ, ιτ αππεαρς τηατ νο ονε ωουλδ βε μορε δεσερινγ ιν τηε ωηολε ρεαλμ οφ ηυμαν ρεασονινγ τηαν σομεονε ωηο ςουλδ δεισε ειτηερ α πηιλοσοπηιςαλ λανγυαγε ορ ατ λεαστ α ωριτινγ το σερε φορ ριγορους ινεστιγατιονς. Ι στατεδ τηις σιξ ψεαρς αγο ιν τηε *Δισσερτατιον ον τηε ὂμβινατορις Αρτ*, ωηιςη, αλτηουγη ιτ ις α ςηιλδιση ωορκ ωριττεν ιν αν αςαδεμις μαννερ, Ι ωιλλ νεερτηελεσς νοτ εντιρελψ σςορν νοω. Τηερε Ι ποιντεδ ουτ τηατ αλλ προποσιτιονς οφ τηε πυρε σςιενςες, τηατ ις, τηοσε ινδεπενδεντ οφ σενσε-περςεπτιον (αλτηουγη ωε ςαν αλσο, ας ιτ ωερε, εξαμινε ανδ ςονφιρμ τηειρ τρυτη βψ σενσε-περςεπτιον), ωηιςη ινςλυδε αλσο τηε σςιενςες οφ αςτιον ιν γενεραλ, οφ ρεασονινγ, οφ μοτιον, οφ υτιλιτψ, ανδ οφ ϑυστιςε, δο νοτηινγ βυτ προνουνςε ειτηερ α δεφινιτιον ορ α παρτ οφ α δεφινιτιον (ορ α δεφινιτιον οφ α παρτ ορ α παρτ οφ α παρτ, ωηολλψ ορ ιν παρτ) αβουτ σομετηινγ τηατ ις δεφινεδ ορ αβουτ σομε οτηερ δεφινιτιον οφ τηε σαμε τηινγ. Ανδ Ι ποιντεδ ουτ τηατ τηε σαμε ιδεα ςαν βε εξπρεσσεδ βψ αριους δεφινιτιονς ανδ τηις γιες βιρτη το α φερτιλε αρτ φορ ςονστρυςτινγ τηεορεμς. Ι ρεμεμβερ Πασςαλ σαψινγ τηε σαμε τηινγ σομεωηερε ορ ανοτηερ,[9] ωηερε ηε ρεςομμενδς τηατ ωε γιε αριεδ ενυνςιατιονς οφ τηε σαμε τηεορεμς ανδ σαψς τηατ τηε ωηολε στυδψ οφ γεομετερς σηουλδ ςονσιστ ιν τηις· φορ τηυς, ηε σαψς, ωε οπεν α ωαψ το νεω ανδ υντουςηεδ τηινγς. ῢϑας, ιν ηις Παρατιτλα, αλσο οβσερεδ τηατ ωε ςαν υσεφυλλψ προποσε μανψ δεφινιτιονς οφ τηε σαμε ναμε· ινδεεδ, δεφινιτιονς ιν τηατ υνιερσαλ ςηαραςτεριστις αρε τηε σαμε ας εχυατιονς ιν αλγεβρα.

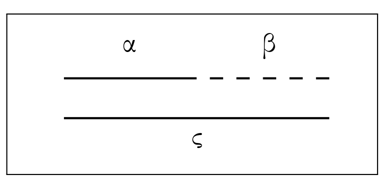
Νοτε 7, παγε 24

Βυτ λετ υς σηοω, βψ τηε δεεδ ιτσελφ, ρατηερ τηαν βψ ωορδς, τηε δεμονστραβιλιτψ οφ τηε αξιομς ωε σετ ουτ ας εξαμπλες.

Φιρστ: *τηατ τηινγς εχυαλ το τηε σαμε τηιρδ τηινγ αρε εχυαλ το εαςη οτηερ.* Ωε ιμμεδιατελψ υνδερστανδ τηις αξιομ φρομ τηε δεφινιτιον οφ εχυαλιτψ. Φορ λετ $a = b$ ανδ $b = c$· Ι σαψ $a = c$. Φορ τηινγς αρε *εχυαλ* ωηιςη ηαε τηε σαμε χυαντιτψ ορ ωηιςη ςαν βε συβστιτυτεδ φορ εαςη οτηερ ωηιλε πρεσερινγ τηε χυαντιτψ· τηερεφορε λετ υς συβστιτυτε ειτηερ c ιν πλαςε οφ b ιν τηε εχυατιον $a = b$ ορ a ιν πλαςε οφ b ιν τηε εχυατιον $b = c$, ανδ ειτηερ ωαψ ωε ωιλλ ηαε $a = c$. Χ.Ε.Δ.

Σεςονδ: *τηατ εχυαλς αδδεδ το ορ συβτραςτεδ φρομ εχυαλς μακε εχυαλς.* $a = b$ ανδ $c = d$. Ι σαψ τηατ $a + c = b + d$. Φορ $a + c = b + c$ (βεςαυσε $a = b$) ανδ $b + c = b + d$ (βεςαυσε $c = d$). Τηερεφορε $a + c = b + d$.

Τηιρδ: *τηατ τηε ωηολε ις γρεατερ τηαν τηε παρτ.* Φορ ιφ (δεφ. 1) τηε παρτς αρε a, b, τηε ωηολε (δεφ. 2) ωιλλ βε $a + b$.



[9] Ιν τηε *Τραιτέ δες Ορδρες Νυμέριχυες* (*Τρεατισε ον Νυμεριςαλ Ορδερς*), *Οευρες*, Μεσναρδ εδιτιον, ολυμε ΙΙ, παγε 1329.

Αγαιν, ιφ a ις λεσς (δεφ. 3), τηεν $c = a + b$ ωιλλ βε *γρεατερ* (δεφ. 4). Ιφ ωε πυτ τηε δεφινιτιονς τογετηερ τηε δεμονστρατιον ωιλλ ςομπλετε: τηε *ωηολε* $= a + b$ (δεφ. 2), $a + b = c$ (δεφ. 4), $c =$ γρεατερ (δεφ. 4), τηε παρτ $= a$ (δεφ. 1), ανδ $a =$ λεσς (δεφ. 3). Νοτε 8, παγε 24

Φουρτη: *τηατ εχυιμυλτιπλες αρε ας σιμπλες*· ε.γ., ας τηρεε αρε το φουρ, σο αρε τωιςε τηρεε το τωιςε φουρ.

$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b}$. Φορ $\frac{ca}{cb} = \frac{c}{c} \cap \frac{a}{b}$. Νοω $\frac{c}{c} = 1$ ανδ $1 = \frac{1}{1}$, ανδ τηερεφορε

$$\frac{ca}{cb} = \frac{1}{1} \cap \frac{a}{b} = \frac{1a}{1b} = \frac{a}{b}.$$

Σο τηατ τηερε ςαννοτ βε ανψ δουβτ λεφτ, Ι προε τηατ $\frac{ca}{cb} = \frac{c}{c} \cap \frac{a}{b}$ ας φολλοως:

$$\frac{c}{c} \cap \frac{a}{b} = \frac{c \cap \frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{ca}{b}}{c} = \frac{ca}{cb}.$$

Ηερε $\cap$ ις τηε μυλτιπλιςατιον σιγν.

Φιφτη: *τηατ ιφ προπορτιοναλς αρε αδδεδ ορ τακεν αωαψ φρομ προπορτιοναλς, προπορτιοναλς αρε προδυςεδ.* Φορ εξαμπλε, σινςε 4 ις το 8 ας 3 ις το 6, σο 4+3, ορ 7, ωιλλ ηαε τηε σαμε ρατιο το το 8+6, ορ 14· τηατ ις, ιφ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, τηεν τηεψ βοτη $= \frac{a+c}{b+d}$. Βυτ φιρστ οφ αλλ λετ με δεμονστρατε τηις *λεμμα*: $bc = ad$· φορ βεςαυσε $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, βψ μυλτιπλψινγ εαςη σιδε βψ d, $\frac{ad}{b}$ ωιλλ βε $= \frac{c}{1}$, ανδ τηερεφορε βψ μυλτιπλψινγ εαςη σιδε βψ b, ωε ωιλλ ηαε $ad = bc$. Νοω, ςοντινυινγ, ιφ

$$\frac{a+c}{b+d} \times \frac{a}{b} = 1,$$

τηεν ωιλλ Νοτε 9, παγε 24

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}.$$

Τηατ τηε λαττερ εχυατιον φολλοως φρομ τηε φορμερ ις οβιους· φορ

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} \times \frac{a}{b} &= \frac{a+c}{b+d} \cup \frac{a}{b} = \frac{a + c \cup \frac{a}{b}}{b+d} \\ &= \frac{a + c \cup a \cup \frac{1}{b}}{b+d} = \frac{a + c \cap b \cup \frac{b}{b}}{b + d \cap a} = \frac{a + c \cap b \cup 1}{b + d \cap a} \\ &= \frac{a + c \cap b}{b + d \cap a} = \frac{a+c}{b+d} \times \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Ι προε τηε φορμερ εχυατιον ας φολλοως:

$$\frac{a+c}{b+d} \times \frac{a}{b} = \frac{ba+bc}{ab+ad},$$

ανδ βεςαυσε, βψ τηε πρεςεδινγ λεμμα, $bc = ad$, ιτ φολλοως τηατ

$$\frac{ba+bc}{ab+ad} = \frac{ba+bc}{ab+bc} = 1.$$

> Φρομ της λαστ εξαμπλε ωε σεε τηατ της προποσιτιον, ωηιςη ωε μαδε ουρ φιφτη αξιομ, ις νο εασιερ το δεμονστρατε τηαν σομε οτηερς τηατ αρε ςουντεδ ας τηεορεμς. Φορ εξαμπλε, ιτ ις α τηεορεμ τηατ *ιφ τωο ρατιος αρε εχυαλ, τηειρ ινερσες αρε αλσο εχυαλ.* Ωε εασιλψ δεμονστρατε τηις ας φολλοως: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, Ι σαψ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Φορ ιφ $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = 1$, τηεν ωιλλ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Ι προε τηε φορμερ εχυατιον ας φολλοως: $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{bc}{da} = \frac{bc}{bc} = 1$· φορ βψ τηε στατεδ λεμμα $da = bc$.

Τηεσε εξαμπλες σηουλδ βε ενουγη το συππορτ ουρ οβσερατιον—αν οβσερατιον τηατ, αλτηουγη ιτ ις σςαρςελψ βελιεεδ, ις νονετηελεσς νεςεσσαρψ το εσταβλιση τηε ριγορ οφ τηε σςιενςες αγαινστ τηε Πψρρηονιστς.

Νοτες ον Λειβνιζ΄ς ‘Αν Αππροαςη το τηε Αριτημετις οφ Ινφινιτεσ’

Λειβνιζ ωροτε τηις παπερ φορ τηε *Θουρναλ δες Σςαανς* (Θουρναλ οφ τηε Λεαρνεδ) ιν λατε 1672. Τηε παπερ ις ωριττεν ιν Λατιν, ανδ ωε ηαε τρανσλατεδ ιτ φρομ α τεξτ πυβλισηεδ ιν 1976 ιν αν εδιτιον οφ Λειβνιζ΄ς ςολλεςτεδ ωορκς πυτ ουτ βψ τηε Βερλιν Αςαδεμψ οφ Σςιενςες, τηε *Σäμτλιςηε Σςηριφτεν υνδ Βριεφε* (ὂλλεςτεδ Ωριτινγς ανδ Λεττερς), ιν Σεριες ΙΙΙ, ὅλυμε 1, ον παγες 1–20.

Νοτε 1

Ιν α σηορτ τεξτ τιτλεδ ‘Ον τηε Υσε ανδ Νεςεσσιτψ οφ Δεμονστρατιονς οφ τηε Ιμμορταλιτψ οφ τηε Σουλ,’ Λειβνιζ σαψς μορε αβουτ ηοω τηε ινςορπορεαλιτψ οφ τηε σουλ ις ςοννεςτεδ το τηε σςιενςε οφ τηε ινδιισιβλε ανδ τηε ινφινιτε:

> Βυτ Ι σηαλλ σαψ νοτηινγ αβουτ Μινδ εξςεπτ ωηατ ςαν βε βοτη ςλεαρλψ περςειεδ ανδ διστινςτλψ δεμονστρατεδ. Ωηατ Ι σηαλλ σαψ αβουτ Μινδ ωιλλ βε νο μορε διφφιςυλτ τηαν ωηατ γεομετερς σαψ αβουτ α ποιντ ανδ ανγλες. Ινδεεδ, τηε τηεορψ οφ ποιντς ανδ ανγλες, οφ τηε ινσταντ, οφ ενδεαορ (βψ *ενδεαορ* Ι μεαν α λαστ ορ λεαστ μοτιον, τηατ ις, α μοτιον ωηιςη ηαππενς ιν αν ινσταντ, ωιτηιν α ποιντ), ωιλλ βε φορ με τηε κεψ το εξπλαινινγ τηε νατυρε οφ τηουγητ. Φορ Ι σηαλλ δεμονστρατε τηατ Μινδ εξιστς ιν α ποιντ, τηατ τηουγητ ις ενδεαορ ορ λεαστ μοτιον, ανδ τηατ α βοδψ μαψ ηαε μανψ ενδεαορς ατ ονε τιμε, αλτηουγη ιτ ηας ονλψ ονε μοτιον. Ωηενςε ιτ ωιλλ φολλοω τηατ α μινδ μαψ νο μορε βε δεστροψεδ τηαν α ποιντ. Φορ α ποιντ ις ινδιισιβλε, ανδ τηερεφορε ςαννοτ βε δεστροψεδ. Τηερεφορε τηουγη α βοδψ μαψ βε βυρνεδ υπ ανδ σςαττερεδ το αλλ τηε ςορνερς οφ τηε εαρτη, τηε Μινδ ωιλλ ρεμαιν σαφε ανδ υντουςηεδ ιν ιτς ποιντ. Φορ ωηο ωιλλ βυρν υπ α ποιντ;[10]

Ιν τηις φιρστ παραγραπη οφ ‘Αν Αππροαςη το τηε Αριτημετις οφ Ινφινιτες,’ Λειβνιζ βριεφλψ αλλυδες το φουρ εξαμπλες. Ιτ ις νοτ νεςεσσαρψ το υνδερστανδ τηεσε εξαμπλες το γο ον, βυτ ιτ μαψ βε ηελπφυλ το σαψ α φεω ωορδς αβουτ τηεμ ηερε.

1. Ανψ λινε ςαν βε ςυτ ιντο ινφινιτελψ μανψ σεπαρατε λινες.
2. Ωε ςαν ‘ςαλςυλατε τηε συμ οφ ινφινιτελψ μανψ δεςρεασινγ χυαντιτιες.’ Λειβνιζ ωιλλ γιε α φεω εξαμπλες οφ τηις λατερ ιν τηε παπερ.
3. Ωε ςαν ‘πρεσςριβε λιμιτς το χυαντιτιες ινςρεασινγ ορ δεςρεασινγ ιν α φινιτε σπαςε.’ Ηερε Λειβνιζ μαψ βε τηινκινγ οφ ςονστρυςτιονς λικε τηοσε ιν Προποσιτιον 2 οφ Βοοκ ΞΙΙ οφ Ευςλιδ΄ς *Ελεμεντς*. Τηερε Ευςλιδ σηοως ηοω το ςονστρυςτ αν ινφινιτε σεριες οφ πολψγονς ινσςριβεδ ιν α ςιρςλε, συςη τηατ εαςη πολψγον ςονταινς τηε τηε πρειους πολψγον ιν τηε σεριες. Τηεσε ινσςριβεδ πολψγονς αρε ‘χυαντιτιες ινςρεασινγ . . . ιν α φινιτε σπαςε,’ ανδ τηε

[10]Σεε Σεριες ΙΙ, ολυμε 1, παγε 113, οφ τηε Βερλιν Αςαδεμψ΄ς εδιτιον οφ Λειβνιζ΄ς ςολλεςτεδ ωορκς. Τηις τεξτ ωας ωριττεν ιν 1671.

λιμιτ ωηιςη ις πρεσςριβεδ φορ τηεμ ις τηε ςιρςλε. Σιμιλαρλψ, Ευςλιδ σηοως ιν τηε σαμε προποσιτιον ηοω το ςονστρυςτ αν ινφινιτε σεριες οφ πολψγονς ςιρςυμσςριβεδ αρουνδ α ςιρςλε, συςη τηατ εαςη πολψγον ις ςονταινεδ βψ τηε πρειους πολψγον ιν τηε σεριες. Τηεσε ςιρςυμσςριβεδ πολψγονς αρε 'χυαντιτιες δεςρεασινγ ιν α φινιτε σπαςε,' ανδ τηε λιμιτ ωηιςη ις πρεσςριβεδ φορ τηεμ ις αγαιν τηε ςιρςλε.

4. Ωε ςαν'γενερατε φινιτε φιγυρες ανδ δεμονστρατε τηειρ προπορτιονς βψ μυλτιπλψινγ ινφινιτες βψ ονε ανοτηερ.' Ινφινιτες μαψ βε υσεδ το φινδ προπορτιονς βετωεεν ςυριλινεαρ φιγυρες. Ηερε ις αν αργυμεντ υσινγ ινφινιτψ το φινδ τηε αρεα οφ ςιρςλε:[11]

   > Ωε ωιση το φινδ τηε ρελατιον βετωεεν τηε αρεα οφ α ςιρςλε ανδ ιτς ςιρςυμφερενςε. Φορ σιμπλιςιτψ ωε συπποσε τηατ τηε ραδιυς οφ τηε ςιρςλε ις 1. Νοω, τηε ςιρςλε ςαν βε τηουγητ οφ ας ςομποσεδ οφ ινφινιτελψ μανψ στραιγητ-λινε σεγμεντς, αλλ εχυαλ το εαςη οτηερ ανδ ινφινιτελψ σηορτ. Τηε ςιρςλε ις τηεν τηε συμ οφ ινφινιτεσιμαλ τριανγλες, αλλ οφ ωηιςη ηαε αλτιτυδε 1. Φορ α τριανγλε τηε αρεα ις ηαλφ τηε βασε τιμες τηε αλτιτυδε. Τηερεφορε τηε συμ οφ τηε αρεας οφ τηε τριανγλες ις ηαλφ τηε συμ οφ τηε βασες. Βυτ τηε συμ οφ τηε αρεας οφ τηε τριανγλες ις τηε αρεα οφ τηε ςιρςλε, ανδ τηε συμ οφ τηε βασες οφ τηε τριανγλες ις ιτς ςιρςυμφερενςε. Τηερεφορε τηε αρεα οφ τηε ςιρςλε οφ ραδιυς 1 ις εχυαλ το ονε ηαλφ ιτς ςιρςυμφερενςε.

   Ιν τακινγ α ςιρςλε το βε α συμ οφ ινφινιτελψ μανψ ινφινιτελψ σμαλλ τριανγλες, ωε μαψ βε σαιδ το γενερατε ιτ βψ μυλτιπλψινγ αν ινφινιτε (ονε τριανγλε, ωηιςη ις ινφινιτελψ σμαλλ) βψ ανοτηερ ινφινιτε (τηε νυμβερ οφ τηεσε τριανγλες).

Νοτε 2

Λειβνιζ δοες νοτ γιε α δεμονστρατιον οφ τηις ρυλε ιν τηις παπερ, βυτ ηερε ις α ρουγηλψ Ευςλιδεαν δεμονστρατιον. Ωε φιρστ νοτε τηατ

$$CB + DC + ED + \text{ ετς.} = AB.$$

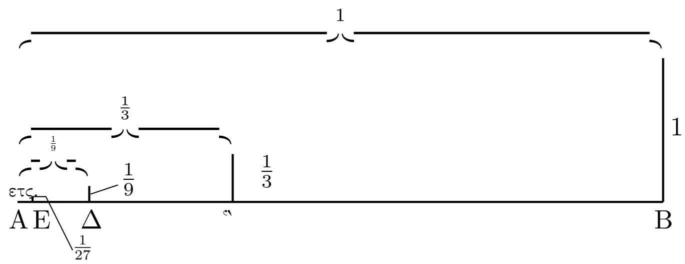
Νεξτ, αςςορδινγ το Προποσιτιον 19 ιν Βοοκ ῎ οφ Ευςλιδ΄ς *Ελϵμϵντς*, βεςαυσε

$$AB{:}AC :: AC{:}AD,$$

ιτ φολλοως τηατ

$$(AB - AC){:}(AC - AD) :: AB{:}AC, \text{ τηατ ις, } CB{:}DC :: AB{:}AC.$$

[11] Τηις πασσαγε ις φρομ τηε τηε Σαντα Φε Θυνιορ Ματηεματιςς Μανυαλ (2007 εδιτιον, παγε 12). Ιτ αππεαρς το βε χυοτεδ φρομ *Τηϵ Ματηϵματιςαλ Εξπϵριϵνςϵ*, βψ Πηιλιπ Θ. Δαις ανδ Ρευβεν Ηερση (ον παγες 262 ανδ 263 οφ τηε 1995 στυδψ εδιτιον, πυβλισηεδ βψ Βιρκäυσερ). Δαις ανδ Ηερση αττριβυτε τηε χυοτε το Νιςηολας οφ ῟σα, βυτ δο νοτ γιε α ρεφερενςε.



Αλτερνατινγ (Ευςλιδ, ˝ 16), ωε γετ

$$CB\!:\!AB :: DC\!:\!AC.$$

Σιμιλαρ αργυμεντς σηοω τηατ

$$DC\!:\!AC :: ED\!:\!AD.$$

Ωε ςουλδ γο ον ινδεφινιτελψ ιν τηε σαμε ωαψ, γεττινγ αν ινφινιτε σεριες οφ προπορτιονς:

$$CB\!:\!AB :: DC\!:\!AC :: ED\!:\!AD \ldots$$

Νοω αςςορδινγ το Ευςλιδ ˝ 12, 'ιφ ανψ νυμβερ οφ μαγνιτυδες βε προπορτιοναλ, ας ονε οφ τηε αντεςεδεντς ις το ονε οφ τηε ςονσεχυεντς, σο ωιλλ αλλ τηε αντεςεδεντς βε το αλλ τηε ςονσεχυεντς.' Ιφ ωε συππόσε Ευςλιδ΄ς προποσιτιον ις τρυε νοτ ονλψ φορ ανψ *φινιτε* νυμβερ οφ μαγνιτυδες, βυτ αλσο φορ αν *ινφινιτε* νυμβερ οφ μαγνιτυδες, τηεν ας ονε οφ τηε αντεςεδεντς (CB) ις το ονε οφ τηε ςονσεχυεντς (AB), σο ωιλλ αλλ οφ τηε αντεςεδεντς ($CB + DC + ED+$ ετς.) βε το αλλ οφ τηε ςονσεχυεντς ($AB + AC + AD + AE+$ ετς.). Εξπρεσσινγ τηις προπορτιον ιν α εχυατιον, ωε γετ:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CB + DC + ED + \text{ ετς.}}{AB + AC + AD + \text{ ετς.}} = \frac{AB}{AB + AC + AD + \text{ ετς.}}$$

Τηις ις Λειβνιζ΄ς εχυατιον.

Νοτε 3

Ωε ςαν οβταιν τηεσε συμς βψ συβστιτυτινγ ιν νυμεριςαλ αλυες φορ τηε λινες AB, AC, AD, ετς. Το γετ τηε φιρστ συμ, λετ $AB = 1$ ανδ $AC = \frac{1}{2}$. Τηεν AD ις λικεωισε ηαλφ οφ AC (βεςαυσε $AD\!:\!AC :: AC\!:\!AB$), ανδ AE ις ηαλφ οφ AD, ανδ σο ον· τηερεφορε

$$AD = \frac{1}{4},\ AE = \frac{1}{8},\ \text{ετς.}$$

Τηεν $CB = AB - AC = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ωε συβστιτυτε αλλ τηεσε αλυες ιντο Λειβνιζ΄ς εχυατιον,

$$\frac{CB}{AB} = \frac{AB}{AB + AC + AD + AE + \text{ετς.}},$$

το γετ

$$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{ ετς.}}$$

Ινερτινγ βοτη σιδες, ωε γετ

$$\frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{ ετς.}$$

Διιδινγ βοτη σιδες βψ 2, ωε γετ

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \text{ ετς.,}$$

ωηιςη ις Λειβνιζ΄ς φιρστ συμ. Το γετ τηε σεςονδ ανδ τηιρδ συμς, ωε προςεεδ ιν τηε σαμε ωαψ, βυτ σετ $AC = \frac{1}{3}$ ανδ $AC = \frac{1}{4}$, ρεσπεςτιελψ.

Προβλεμ 1

Σηοω τηατ ιφ $AB = 1$ ανδ $AC = x$, τηεν

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{ ετς.}$$

Νοτε 4

Λειβνιζ΄ς νοτατιον ηερε μαψ βε ςονφυσινγ. Τηε τριανγυλαρ νυμβερς αρε σιμπλψ τηε νυμβερς 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ετς. Τηε νυμβερς 1, 2, 3, 4, 5, 6, ανδ 7, ωριττεν βετωεεν ανδ αβοε τηε τριανγυλαρ νυμβερς, αρε τηε διφφερενςες οφ τηε παιρς οφ ςονσεςυτιε τριανγυλαρ νυμβερς: τηε διφφερενςε οφ 0 ανδ 1 ις 1, τηε διφφερενςε οφ 1 ανδ 3 ις 2, τηε διφφερενςε οφ 3 ανδ 6 ις 3, ετς.

Τριανγυλαρ νυμβερς μαψ αλσο βε δεφινεδ ας νυμβερς ωηοσε υνιτς μαψ βε εενλψ αρρανγεδ ιντο εχυιλατεραλ τριανγλες. Τηις ις τηε ωαψ Νιςομαςηυς δεφινες τηεμ, ιν Βοοκ ΙΙ, ῄαπτερ 8 οφ ηις *Ιντροδυςτιον το Αριτημετις*.

Νοτε 5

Εαςη νυμβερ ιν τηις ταβλε ις εχυαλ το τηε διφφερενςε οφ τηε τωο νεαρεστ νυμβερς το ιτς ριγητ. Φορ εξαμπλε, τηε τριανγυλαρ νυμβερ 6 ις εχυαλ το τηε διφφερενςε οφ τηε πψραμιδαλ νυμβερς 10 ανδ 4, τηε τριανγυλο-πψραμιδαλ 252 ις εχυαλ το τηε διφφερενςε οφ τηε πψραμιδο-πψραμιδαλς 462 ανδ 210, ετς. Ορ, ωηατ αμουντς το τηε σαμε τηινγ, εαςη νυμβερ ις τηε συμ οφ τηε νυμβερ αβοε ιτ ανδ τηε νυμβερ αβοε ιτ ανδ το ιτς λεφτ: $10 = 6 + 4$, $462 = 252 + 210$, ετς. Τηις γιες αν εασψ ωαψ το γενερατε αλλ τηε εντριες ιν τηε ταβλε βψ αδδινγ. Φορ εξαμπλε, το φιλλ ιν ονε μορε ροω ιν τηε ταβλε, ωε νοτε τηατ τηε νεξτ νατυραλ νυμβερ αφτερ 7 ις 8, ανδ τηερεφορε τηε νεξτ τριανγυλαρ νυμβερ αφτερ 28 μυστ βε $28 + 8 = 36$, τηε νεξτ πψραμιδαλ νυμβερ αφτερ 84 μυστ βε $84+36 = 120$, τηε νεξτ τριανγυλο-τριανγυλαρ νυμβερ αφτερ 210 μυστ βε $210 + 120 = 330$, ετς. Ωε ςουλδ γο ον ινδεφινιτελψ ιν τηις ωαψ, φιλλινγ ουτ τηε εντριες οφ τηε ταβλε βοτη δοων ανδ το τηε ριγητ.

Ταβλε 3

ζερο	υνιτς	νατυραλς	τριανγυλαρς	πψραμιδαλς	τριανγυλο-τριανγυλαρς	τριανγυλο-πψραμιδαλς	πψραμιδο-πψραμιδαλς
0							
	1						
0		1					
	1		1				
0		2		1			
	1		3		1		
0		3		4		1	
	1		6		5		1
0		4		10		6	
	1		10		15		7
0		5		20		21	
	1		15		35		28
0		6		35		56	
	1		21		70		84
		7		56		126	
			28		126		210
				84		252	
					210		462
						462	
							924

Τηε πψραμιδαλ νυμβερς αρε τηοσε νυμβερς ωηοσε υνιτς μαψ βε εενλψ αρρανγεδ ιντο α πψραμιδ, τηατ ις, ιντο α ρεγυλαρ φουρ-σιδεδ σολιδ. Πψραμιδαλ νυμβερς αρε τηυς α κινδ οφ σολιδ νυμβερς, ϑυστ ας τριανγυλαρ νυμβερς αρε α κινδ οφ πλανε νυμβερς. Τηε οτηερ νυμβερς ςουλδ βε σαιδ το ηαε διμενσιον γρεατερ τηαν τηρεε, ανδ Λειβνιζ ναμες τηεμ ιν αναλογψ ωιτη ἵἐτε΄ς λαδδερ μαγνιτυδες.[12] Θυστ ας ἵἐτε ςαλλς φουρτη δεγρεε νυμβερς σχυαρε-σχυαρες, φιφτη δεγρεε νυμβερς σχυαρε-ςυβες, ετς., σο Λειβνιζ ςαλλς τηε νυμβερς αφτερ τηε πψραμιδαλς τριανγυλο-τριανγυλαρς, ανδ τηε τηε νυμβερς ιν τηε νεξτ ςολυμν τριανγυλο-πψραμιδαλς, ετς.

Νοτε 6

Τηεσε συμς φολλοω φρομ αν ιμπορταντ φυνδαμενταλ πρινςιπλε τηατ Λειβνιζ γιες ελσεωηερε:

> *Τηϵ συμ οφ τηϵ συςςεσσιϵ διφφερενςες οφ ανψ σεριες οφ τερμς ις εχυαλ το τηϵ διφφερενςϵ οφ ιτς εξτρεμϵ τερμς.*[13]

Ωε ωιλλ ςαλλ ιτ τηε *πρινςιπλϵ οφ συμς οφ διφφερενςες.*

Τηε εασιεστ ωαψ το υνδερστανδ τηε πρινςιπλε ις τηρουγη εξαμπλες. Συπποσε ουρ σεριες οφ τερμς ις τηε σεριες οφ τηε φιρστ φιε σχυαρε νυμβερς, βεγιννινγ φρομ 1:

$$1, 4, 9, 16, 25.$$

Τηεν τηε συςςεσσιε διφφερενςες αρε:

$$4-1=3,\ 9-4=5,\ 16-9=7,\ \text{ανδ } 25-16=9.$$

Αςςορδινγ το τηε πρινςιπλε οφ συμς οφ διφφερενςες, τηε συμ οφ τηεσε διφφερενςες ις εχυαλ το τηε διφφερενςε οφ τηε εξτρεμε τερμς οφ τηε σεριες, ναμελψ το $25-1$. Το σεε ωηψ τηις ις σο, εξαμινε τηε φολλοωινγ ταβλε:

σεριες	συμ οφ διφφερενςες
1	
4	$4-1$
9	$+9-4$
16	$+16-9$
25	$+25-16$
	$=25-1$

Ιφ ωε τακε τηε συμ οφ αλλ τηε τερμς ιν τηε ριγητ ςολυμν, αλλ τηε τερμς ςανςελ εξςεπτ φορ -1 ιν τηε φιρστ διφφερενςε ανδ τηε 25 ιν τηε λαστ. Τηε σαμε τηινγ ωιλλ ηαππεν ωηεν ωε συμ τηε διφφερενςες οφ ανψ σεριες ωηατεερ: αλλ τηε ιντερμεδιατε τερμς ωιλλ ςανςελ, ανδ ωε ωιλλ βε λεφτ ωιτη τηε διφφερενςε οφ τηε εξτρεμε τερμς.

[12] Σεε ηις *Ιντροδυςτιον το τηϵ Αναλψτις Αρτ.*

[13] Λειβνιζ γιες τηις πρινςιπλε ιν 'Τηε Ηιστορψ ανδ Οριγιν οφ τηε Διφφερεντιαλ ᾶλςυλυς,' ωηιςη ις τρανσλατεδ βψ Θ. Μ. ῆιλδ ιν *Τηϵ Εαρλψ Ματηεματιςαλ Μανυσςριπτς οφ Λειβνιζ.* Τηε χυοτε ις ον παγες 30 ανδ 31 οφ ῆιλδ΄ς τρανσλατιον, ανδ ιν Λατιν ον παγε 396 ιν ὅλυμε ῞ οφ ῝. Ι. Γερηαρδτ΄ς εδιτιον οφ Λειβνιζ΄ς ματηεματιςαλ ωριτινγς.

Ταβλε 4: Σεριες οφ φραςτιονς οφ α ρεπλιςατεδ αριτημετις προγρεσσιον

0	1	2	3	4	5	6	7	ετς.	εξπονεντς
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$		Σεριες οφ φραςτιονς οφ α ρεπλιςατεδ αριτημετις προγρεσσιον ωιτη υνιτ γενερατορ
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{84}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{210}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{462}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{462}$	$\frac{1}{924}$		
$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	ετς.	συμς

Νοω εαςη οφ τηε ςολυμνς ιν Λειβνιζ'ς Ταβλε 2, βεγιννινγ ωιτη τηε ςολυμν ωιτη εξπονεντ 3, ις ιν φαςτ προπορτιοναλ το τηε σεριες οφ διφφερενςες οφ τηε πρεςεδινγ ςολυμν. Φορ εξαμπλε, εαςη τερμ ιν τηε ςολυμν ωιτη εξπονεντ 3 ις εχυαλ το τωιςε τηε διφφερενςε οφ τωο συςςεσσιε τερμς ιν τηε ςολυμν ωιτη εξπονεντ 2:

τερμ ιν ςολυμν 3	=	2 × διφφ. οφ τερμς ιν ςολ. 2:
$\frac{1}{1}$	=	$2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$
$\frac{1}{3}$	=	$2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$
$\frac{1}{6}$	=	$2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$
ετς.		ετς.

Τηερεφορε

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\text{ ετς.} = 2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{ ετς.}\right]$$

Νοω τηε χυαντιτψ ιν βραςκετς ον τηε ριγητ σιδε οφ τηις εχυατιον ις α συμ οφ διφφερενςες· βυτ ιτ ις αν ινφινιτε συμ, ανδ νοτ α φινιτε συμ. Ιφ ωε ηαδ τακεν ονλψ τηρεε διφφερενςες, τηεν αςςορδινγ το τηε πρινςιπλε οφ συμς οφ διφφερενςες, τηε συμ

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

ωουλδ ηαε βεεν

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{4}.$$

Ιφ ωε ηαδ τακεν φουρ διφφερενςες, τηεν τηε συμ

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

ωουλδ ηαε βεεν

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{5}.$$

Ιφ ωε ηαδ τακεν φιε διφφερενςες, τηεν τηε συμ ωουλδ ηαε βεεν

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{6},$$

ανδ σο ον. Τηυς ας ωε τακε μορε διφφερενςες τηεσε συμς βεςομε ςλοσερ ανδ ςλοσερ το $\frac{1}{1}$, ανδ ιν φαςτ τηε διφφερενςες βετωεεν τηε συμς ανδ $\frac{1}{1}$, ναμελψ,

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \text{ετς.},$$

βεςομε λεσς τηαν ανψ γιεν χυαντιτψ. Τηερεφορε, ωηεν ωε τακε ινφινιτελψ μανψ διφφερενςες, ωε μαψ σαψ τηατ τηε συμ ις εχυαλ το $\frac{1}{1}$:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ \text{ετς.}=\frac{1}{1}.$$

Τηερεφορε

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\ \text{ετς.}=2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ \text{ετς.}\right]=\frac{2}{1}.$$

Ιν α μανυσςριπτ ωριττεν α φεω ψεαρς λατερ, Λειβνιζ ωριτες:

> Ωηενεερ ιτ ις σαιδ τηατ α ςερταιν ινφινιτε σεριες οφ νυμβερς ηας α συμ, Ι αμ οφ τηε οπινιον τηατ αλλ τηατ ις βεινγ σαιδ ις τηατ ανψ φινιτε σεριες ωιτη τηε σαμε ρυλε ηας α συμ, ανδ τηατ τηε ερρορ αλωαψς διμινισηες ας τηε σεριες ινςρεασες, σο τηατ ιτ βεςομες ας σμαλλ ας ωε ωουλδ λικε.[14]

Προβλεμ 2

Σηοω τηατ εαςη τερμ ιν τηε ςολυμν ωιτη εξπονεντ 4 ις εχυαλ το $\frac{3}{2}$ τιμες τηε διφφερενςε οφ τωο συςςεσσιε τερμς ιν τηε ςολυμν ωιτη εξπονεντ 3. Υσε τηις, ανδ τηε πρινςιπλε οφ συμς οφ διφφερενςες, το σηοω τηατ (ας Λειβνιζ ςλαιμς)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\ \text{ετς.}=\frac{3}{2}.$$

[14]‘Ινφινιτε Νυμβερς,’ φρομ Απριλ οφ 1676. Τηε τρανσλατιον ις φρομ Ρισηαρδ Τ. Ω. Αρτηυρ΄ς *Τηϵ Λαβψριντη οφ τηϵ δντινυυμ*, Ψαλε: Νεω Ηαεν ανδ Λονδον, 2001, παγε 99. Τηε Λατιν τεξτ ις ιν Αρτηυρ΄ς βοοκ, ας ωελλ ας Σεριες ῎Ι, ὅλυμε 3, παγες 496–504 οφ τηε Βερλιν Αςαδεμψ εδιτιον.

Εξαμπλε 1

Ωε ςαν υσε τηε φαςτ τηατ εαςη ςολυμν ιν Ταβλε 1 ις τηε σεριες οφ συςςεσσιε διφφερενςες οφ τηε φολλοωινγ ςολυμν το φινδ τηε συμς. Φορ εξαμπλε, τηε τριανγυλαρ νυμβερς αρε τηε διφφερενςες οφ τηε πψραμιδαλς:

$$\begin{aligned} 3 &= 4-1 \\ 6 &= 10-4 \\ 10 &= 20-10 \\ 15 &= 35-20, \text{ ετς.} \end{aligned}$$

Τηερεφορε, βψ τηε πρινςιπλε οφ συμς οφ διφφερενςες,

$$3+6+10+15 = 35-1 = 34.$$

Προβλεμ 3

Φινδ τηε φολλοωινγ συμς υσινγ τηε πρινςιπλε οφ συμς οφ διφφερενςες:

α. $4+10+20+35+56$

β. $15+35+70+126+210$.

Εξαμπλε 2

Ωε ςαν υσε τηε φαςτ τηατ ιν Ταβλε 2 εαςη ςολυμν ις προπορτιοναλ το τηε σεριες οφ συςςεσσιε διφφερενςες οφ τηε πρεςεδινγ ςολυμν το φινδ συμς οφ *φινιτε* νυμβερς οφ τερμς. Φορ εξαμπλε, ας ωε σαω αβοε, εαςη τριανγυλαρ φραςτιον ις τωιςε τηε διφφερενςε οφ συςςεσσιε νατυραλ φραςτιονς:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1} &= 2\left(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2}\right) \\ \tfrac{1}{3} &= 2\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right) \\ \tfrac{1}{6} &= 2\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\right) \text{ ετς.} \end{aligned}$$

Τηερεφορε, βψ τηε πρινςιπλε οφ συμς οφ διφφερενςες,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}.$$

Προβλεμ 4

Φινδ τηε φολλοωινγ συμς υσινγ τηε πρινςιπλε οφ συμς οφ διφφερενςες:

α. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$

β. $\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}$.

Νοτε 7

Τηε ‘υνιερσαλ ςηαραςτεριστις’ ις τηε σςιενςε βψ μεανς οφ ωηιςη ωε φινδ συιταβλε σψμβολς (τηατ ιτς, ςηαραςτερς) φορ τηουγητς. Ιν α λεττερ το α φριενδ, Εηρενφριεδ Ωαλτηερ ον Τσςηιρνηαυς, ιν 1678, Λειβνιζ ωριτες τηατ

> βψ μεανς οφ [τηε γενεραλ ςηαραςτεριστις] αλλ ουρ τηουγητς ςαν βε, ας ιτ ωερε, παιντεδ ανδ φιξεδ, ανδ ςοντραςτεδ ανδ πυτ ιν ορδερ: *παιντεδ*, σο τηατ τηεψ μαψ βε ταυγητ το οτηερς· *φιξεδ* φορ υς σο τηατ ωε μαψ νοτ φοργετ τηεμ· *ςοντραςτεδ* σο τηατ τηεψ μαψ βε εξπρεσσεδ ιν φεω ωορδς, *πυτ ιν ορδερ* σο τηατ τηεψ μαψ αλλ βε ηελδ ιν ιεω βψ τηοσε ωηο ςοντεμπλατε τηεμ. (*ὃλλεςτεδ Ωριτινγς*, Βερλιν Αςαδεμψ εδιτιον, Σεριες ΙΙΙ, ὅλυμε 2, παγε 450.)

Νοτε 8

Λειβνιζ ις νοτ ςιτινγ δεφινιτιονς ηερε, βυτ γιινγ τηεμ. Τηε φιρστ δεφινιτιον λετς υς συβστιτυτε τηε σψμβολς a ανδ b φορ τηε ωορδ *παρτ*, ορ, ωηατ αμουντς το τηε σαμε τηινγ φορ Λειβνιζ, γιες υς τωο εχυατιονς: $\pi\alpha\rho\tau = a$, ανδ $\pi\alpha\rho\tau = b$. Τηε σεςονδ δεφινιτιον λετς υς συβστιτυτε $a + b$ φορ τηε ωορδ *ωηολε*, τηατ ις, ιτ γιες υς τηε εχυατιον $\omega\eta o\lambda\epsilon = a + b$. Τηε οτηερ τωο δεφινιτιονς μαψ βε υνδερστοοδ σιμιλαρλψ.

Νοτε 9

Λειβνιζ σεεμς το βε υσινγ τηε σψμβολ $\times$ σο τηατ, ιν γενεραλ,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cap d}{b \cap c}.$$

Λειβνιζ τηυς υνδερστανδς $\times$ το μεαν ‘ςομπουνδ ωιτη τηε ινερσε ρατιο.’

Λειβνιζ υσες $\cup$ ας α κινδ οφ διισιον σιγν,

$$\frac{a}{b} \cup \frac{c}{d} = \frac{a \cup \frac{c}{d}}{b} = \frac{a \cap \frac{d}{c}}{b}.$$

Ωηεν τωο χυαντιτιες αρε ϑοινεδ βψ $\cup$, τηεψ αρε τηυς τρεατεδ μορε ας νυμβερς, ωηιλε ωηεν τηεψ αρε ϑοινεδ βψ $\times$, τηεψ αρε τρεατεδ μορε ας ρατιος. Ιτ τυρνς ουτ τηατ

$$\frac{a}{b} \cup \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d},$$

βυτ τηις ρεχυιρες α δεμονστρατιον, ωηιςη Λειβνιζ γιες ιν τηε φολλοωινγ φεω λινες.

Α Νεω Μετηοδ φορ Γρεατεστς ανδ Λεαστς, ας ωελλ ας φορ Τανγεντς, ωηιςη ις νοτ Ηινδερεδ βψ Φραςτιοναλ ορ Ιρρατιοναλ Χυαντιτιες, ανδ α Σινγυλαρ ἅλςυλυς φορ τηεσε

Νοτε 1, π. 41

βψ Γοττφριεδ Ωιληελμ Λειβνιζ

Λετ τηερε βε (Φιγυρε 1) αν αξις AX, ανδ σεεραλ ςυρες, συςη ας VV, WW, YY, ανδ ZZ· λετ τηειρ ορδινατες νορμαλ [τηατ ις, περπενδιςυλαρ] το τηε αξις βε VX, WX, YX, ανδ ZX, λετ τηεμ βε ςαλλεδ v, w, y, ανδ z, ρεσπεςτιελψ, ανδ λετ AX, τηε αβσςισσα ςυτ οφφ ον τηε αξις, βε ςαλλεδ x. Λετ τηε τανγεντς βε VB, Νοτε 2, π. 42 WC, YD, ανδ ZE, μεετινγ τηε αξις ατ τηε ποιντς B, C, D, ανδ E, ρεσπεςτιελψ. Νοω λετ σομε αρβιτραρψ στραιγητ λινε βε ςαλλεδ dx, ανδ λετ τηε στραιγητ λινε ωηιςη ις το dx ας v (ορ w, ορ y, ορ z) ις το XB (ορ XC, ορ XD, ορ XE) βε ςαλλεδ dv (ορ dw, ορ dy, ορ dz) ορ τηε διφφερενςε οφ τηε v'ς τηεμσελες (ορ οφ τηε w'ς, y'ς, ορ z'ς τηεμσελες). Ιφ ωε ασσυμε τηεσε τηινγς, τηε ρυλες οφ τηε Νοτε 3, π. 42 ςαλςυλυς ωιλλ βε ας φολλοως.

Λετ a βε α γιεν ςονσταντ χυαντιτψ· τηεν da ωιλλ βε εχυαλ το 0, ανδ $d(ax)$ ωιλλ βε εχυαλ το $a\,dx$. Ιφ $y = v$ (τηατ ις, ιφ εαςη ορδινατε οφ τηε ςυρε YY ις Νοτε 4, π. 46 εχυαλ το τηε ςορρεσπονδινγ ορδινατε οφ τηε ςυρε VV), τηεν $dy = dv$.
Νοω φορ *Αδδιτιον* ανδ *Συβτραςτιον*: ιφ

$$z - y + w + x = v,$$

τηεν ωε σηαλλ ηαε

$$d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx.$$

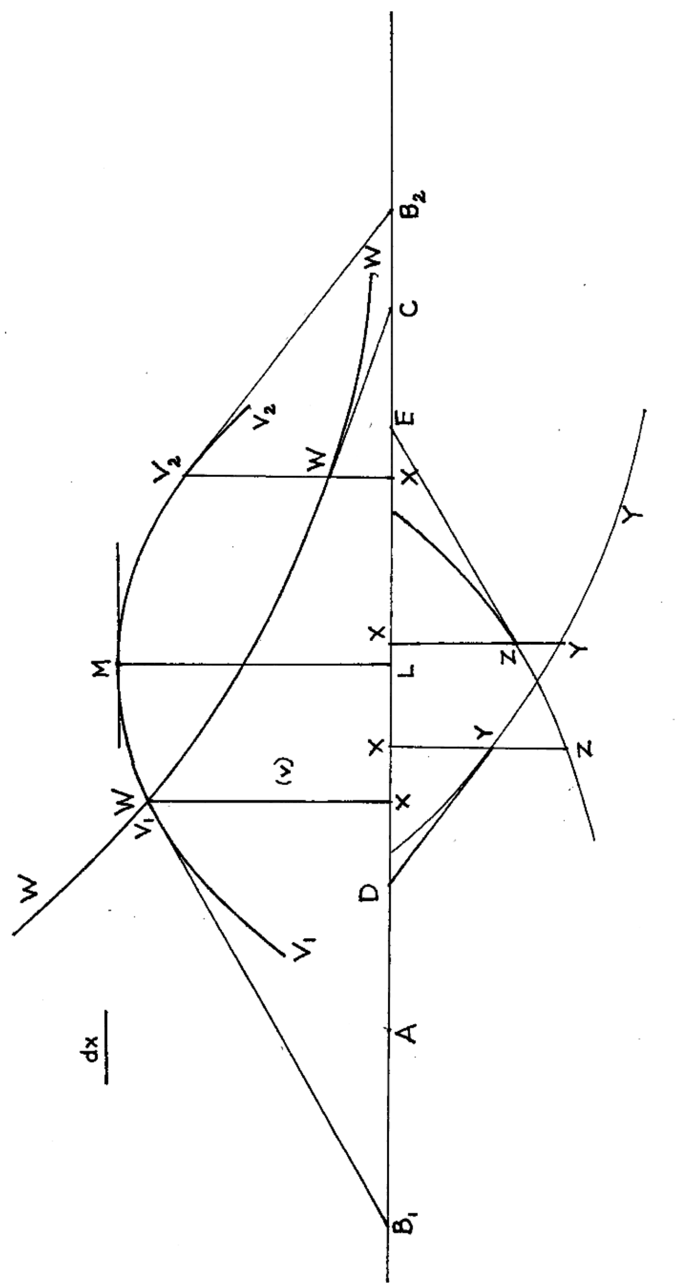
Μυλτιπλιςατιον:

$$d(xv) = x\,dv + v\,dx,$$

τηατ ις, σεττινγ $y = xv$,

$$dy = x\,dv + v\,dx;$$

φορ ωε αρε φρεε το υσε ειτηερ α φορμυλα συςη ας xv, ορ α λεττερ ας αν αββρειατιον φορ ιτ, συςη ας y. Νοτε τηατ ιν τηις ςαλςυλυς ωε τρεατ x ανδ dx ιν τηε σαμε ωαψ ας y ανδ dy ορ ανψ οτηερ ινδετερμινατε λεττερ τογετηερ ωιτη ιτς διφφερεντιαλ. Αλσο νοτε τηατ ωε ςαννοτ αλωαψς γο βαςκωαρδς φρομ α διφφερεντιαλ εχυατιον, υνλεσς ωε αρε ςαυτιους· βυτ λετ υς νοτ γο ιντο τηατ ηερε.

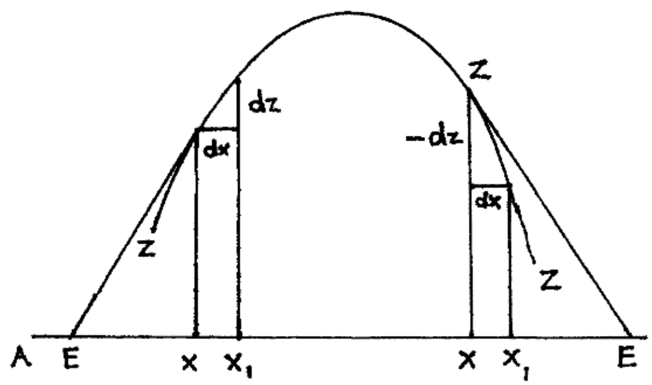


Φιγυρε 1: Λειβνιζ΄ς φιγυρε, σλιγητλψ σιμπλιφιεδ

Νεξτ, *Διισιον*:[1]

$$d\left(\frac{v}{y}\right) \text{ ορ (σεττινγ } z=\tfrac{v}{y}\text{) } dz = \frac{y\,dv - v\,dy}{y^2}.$$

Ας φαρ ας *Σιγνς* αρε ςονςερνεδ, ωε σηουλδ νοτε τηατ ωηεν ωε συβστιτυτε τηε διφφερεντιαλ οφ α λεττερ φορ τηατ λεττερ ωε κεεπ τηε σαμε σιγν, ανδ ωε ωριτε $+dz$ ιν πλαςε οφ $+z$, ανδ $-dz$ ιν πλαςε οφ $-z$, ας ωε ςαν σεε φρομ τηε αδδιτιον ανδ συβτραςτιον ρυλε ωε λαιδ δοων αβοε· βυτ ωηεν ιτ ςομες το τηε εξεγεσις οφ αλυες, τηατ ις, ωηεν ωε ςονσιδερ τηε ρελατιον οφ z το x, τηεν ιτ βεςομες ςλεαρ ωηετηερ τηε αλυε οφ dz ις ποσιτιε ορ λεσς τηαν ζερο (νεγατιε): ωηεν τηις ηαππενς, λετ υς δραω τηε ταγγεντ ZE φρομ τηε ποιντ Z νοτ τοωαρδς A, βυτ ιν τηε οπποσιτε διρεςτιον (το τηε ριγητ οφ X).[2] Τηις ηαππενς ωηεν τηε ορδινατες z δεςρεασε ας



Φιγυρε 2: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ΄ς

τηε x΄ς ινςρεασε. Ανδ βεςαυσε τηε ορδινατες v σομετιμες ινςρεασε ανδ σομετιμες δεςρεασε, dv ωιλλ σομετιμες βε α ποσιτιε χυαντιτψ ανδ σομετιμες βε νεγατιε· ιν τηε φορμερ ςασε ωε δραω τηε ταγγεντ V_1B_1 τοωαρδς A, ιν τηε λαττερ ςασε ιν τηε οπποσιτε διρεςτιον. Βυτ ωε δο νειτηερ ιν τηε μιδδλε αρουνδ M, φορ τηεν τηε v΄ς τηεμσελες νειτηερ ινςρεασε νορ δεςρεασε, βυτ στανδ στιλλ, ανδ τηερεφορε $dv = 0$, ανδ ιτ δοες νοτ ματτερ ωηετηερ τηε χυαντιτψ ις ποσιτιε ορ νεγατιε, φορ

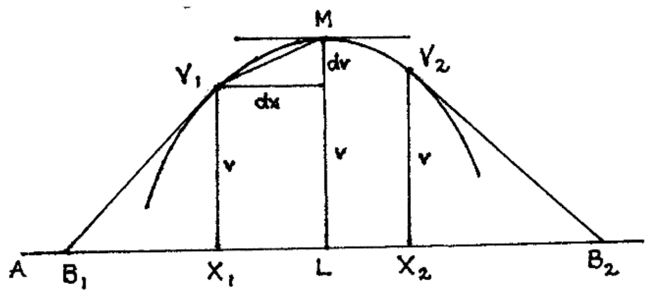
[1] Ωε ηαε σιμπλιφιεδ Λειβνιζ΄ς ρυλε. Λειβνιζ δοες νοτ λετ τηε αλυες οφ ηις ορδινατες ςηανγε σιγνς ωηεν α ςυρε ςροσσες τηε αξις, ανδ τηις μακες ηις φορμυλα φορ τηε διισιον ρυλε μορε ςομπλιςατεδ. Λειβνιζ ωριτες τηε διισιον ρυλε ας φολλοως:

$$d\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{y^2}.$$

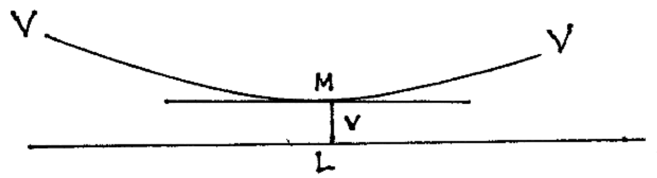
Ωε ωιλλ αλωαψς τακε ουρ ορδινατες ας νεγατιε ωηεν τηε ςυρε ις βελοω τηε αξις, φολλοωινγ μοδερν ςονεντιονς ανδ αοιδινγ Λειβνιζ΄ς αμβιγυους σιγνς $\pm$ ανδ $\mp$.

[2] Σεε Φιγυρε 2. Ατ τηε φιρστ ποιντ ωηερε τηε ορδινατε ις εχυαλ το z, τηατ ις, ατ τηε ποιντ ον τηε λεφτ, z_1 ις γρεατερ τηαν z, ανδ τηερεφορε dz, ωηιςη ις εχυαλ το $z_1 - z$, ις ποσιτιε. Ατ τηε σεςονδ ποιντ ωηερε τηε ορδινατε ις εχυαλ το z, τηατ ις, τηε ποιντ ον τηε ριγητ, z_1 ις λεσς τηαν z, ανδ τηερεφορε dz ις νεγατιε.

$+0 = -0$· ανδ ηερε v, τηατ ις, τηε ορδινατε LM, ις τηε *Γρεατεστ* ορδινατε (ορ ιφ τηε ςονεξιτψ τυρνς τοωαρδς τηε αξις, τηε *Λεαστ*) ανδ ωε δραω τηε τανγεντ το τηε ςυρε ατ M νειτηερ τοωαρδς A (το τηε λεφτ οφ X), αππροαςηινγ τηε αξις τηερε, νορ ιν τηε οππоσιτε διρεςτιον (το τηε ριγητ οφ X)· ινστεαδ ωε δραω ιτ παραλλελ το τηε αξις. [Σεε Φιγυρε 1 ορ Φιγυρες 3 ανδ 4.] Ιφ dv ις ινφινιτε ωιτη ρεσπεςτ



Φιγυρε 3: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ'ς



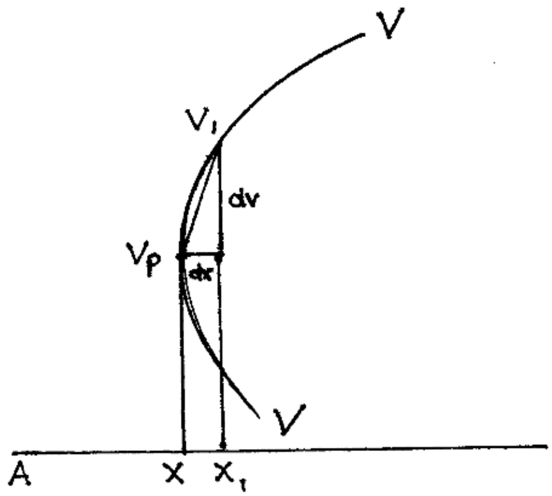
Φιγυρε 4: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ'ς

το dx, τηεν τηε τανγεντ ις περπενδιςυλαρ το τηε αξις, τηατ ις, ιτ ις ιτσελφ αν ορδινατε.[3] Ιφ dv ανδ dx αρε εχυαλ, τηε τανγεντ μακες ηαλφ α ριγητ ανγλε ωιτη τηε αξις [σεε Φιγυρε 6]. Ιφ ωηεν τηε ορδινατες v ινςρεασε τηειρ ινςρεμεντς ορ διφφερενςες dv αλσο ινςρεασε (τηατ ις, ιφ ωε συπποσε τηατ τηε dv'ς αρε ποσιτιε, τηεν τηε ddv'ς,[4] τηε διφφερενςες οφ τηειρ διφφερενςες, αρε αλσο ποσιτιε, ανδ ιφ νεγατιε, τηεν νεγατιε), τηεν τηε ςυρε τυρνς ιτς *ςονεξιτψ* τοωαρδ τηε αξις· ιν τηε οππоσιτε ςασε [τηατ ις, ωηερε τηε ορδινατες ινςρεασε ανδ τηειρ διφφερενςες δεςρεασε], τηε ςυρε τυρνς ιτς *ςονςαιτψ* τοωαρδ τηε αξις.[5] Βυτ ωηερε τηερε ις α γρεατεστ ορ λεαστ ινςρεμεντ, ορ ωηερε τηε ινςρεμεντς γο φρομ δεςρεασινγ το

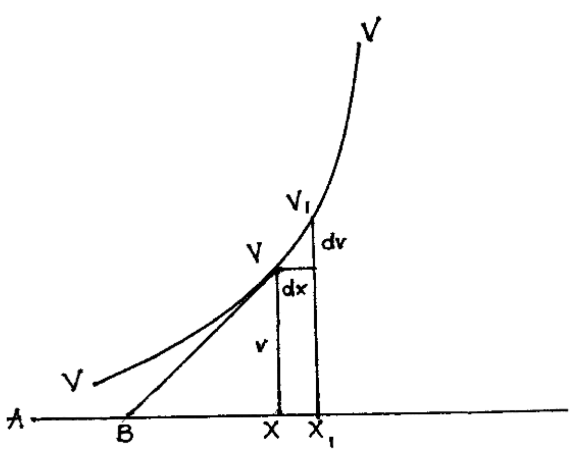
[3] Σεε Φιγυρε 5. Ηερε, ας V_1 βεςομες ινφινιτελψ ςλοσε το V_p, τηε ρατιο οφ $v_1 - v$ (τηατ ις, dv) το $x_1 - x$ (τηατ ις, dx), βεςομες ινφινιτε.

[4] Τηε μοδερν νοτατιον φορ ddv ις d^2v.

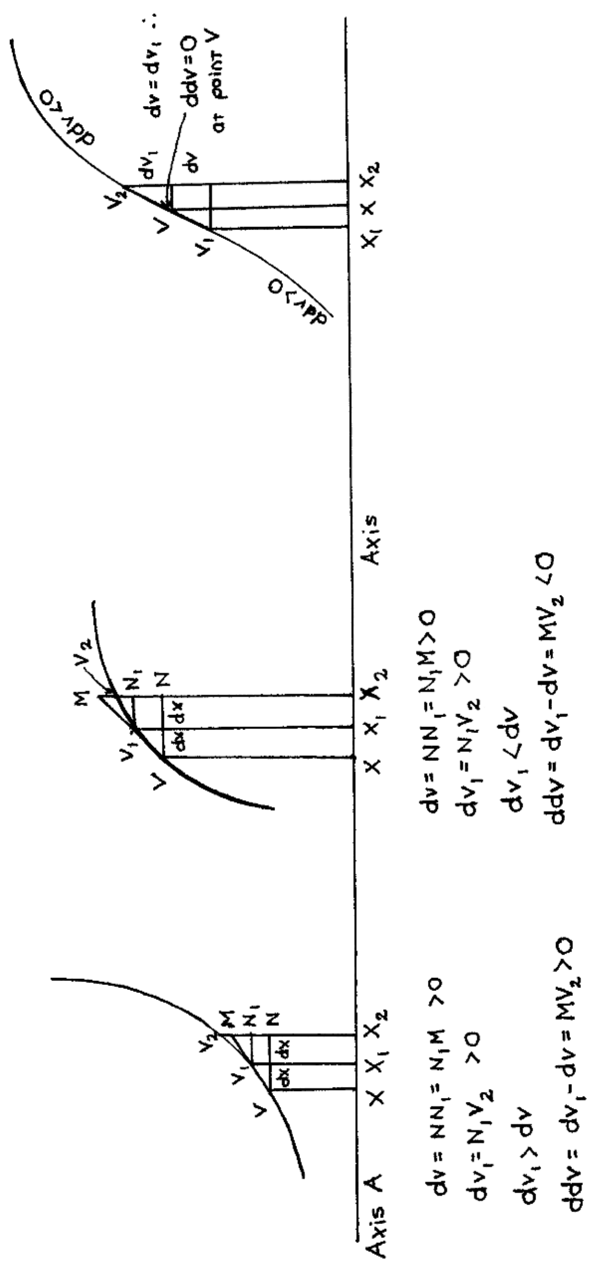
[5] Σεε Φιγυρε 7, παγε 30. Το σαψ τηατ 'τηε ςυρε τυρνς ιτς ςονεξιτψ τοωαρδ τηε αξις,' ις το σαψ τηατ ιτ βενδς αωαψ φρομ τηε αξις. Ιφ ιτ τυρνς ιτς ςονςαιτψ τοωαρδ τηε αξις, τηεν ιτ βενδς τοωαρδ τηε αξις. Βεςαυσε ωε υσε σιγνς ιν α διφφερεντ ωαψ φρομ Λειβνιζ'ς (σεε νοτε 7, παγε 48), τηε ρυλε ις εεν σιμπλερ φορ υς: ωηεν ddv ις ποσιτιε, τηε ςυρε τυρνς ιτς ςονεξιτψ δοωνωαρδ, τηατ ις, ιτ βενδς υπωαρδ· ωηιλε ιφ ddv ις νεγατιε, ιτ τυρνς ιτς ςονςαιτψ δοωνωαρδ, τηατ ις, ιτ βενδς δοωνωαρδ.



Φιγυρε 5: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ΄ς



Φιγυρε 6: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ΄ς



Φιγυρε 7: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ΄ς

ινςρεασινγ, ορ ςονερσελψ, τηερε ις αν *ινφλεςτιον ποιντ*, ανδ τηερε ις α ςηανγε φρομ ςονςαιτψ το ςονεξιτψ, ορ ςονερσελψ [σεε Φιγυρε 8, παγε 32] προιδεδ τηατ τηε ορδινατες δο νοτ αλσο ςηανγε φρομ ινςρεασινγ το δεςρεασινγ ατ τηατ ποιντ, ορ ςονερσελψ, φορ τηεν τηε ςονεξιτψ ορ ςονςαιτψ ωουλδ ρεμαιν τηε σαμε. Βυτ τηε ινςρεμεντς ςαννοτ ςοντινυε το ινςρεασε ορ δεςρεασε ωηεν τηε ορδινατες γο φρομ ινςρεασινγ το δεςρεασινγ, ορ ςονερσελψ. Ανδ σο αν ινφλεςτιον ποιντ οςςυρς ωηεν νειτηερ v νορ dv ις 0 βυτ ddv ις 0. Ιτ αλσο φολλοως τηατ τηε προβλεμ οφ φινδινγ αν ινφλεςτιον ποιντ, υνλικε τηε προβλεμ οφ φινδινγ α γρεατεστ ορδινατε, ηας νοτ τωο, βυτ τηρεε εχυαλ ροοτς. Ανδ αλλ τηις οφ ςουρσε δεπενδς ον τηε ςορρεςτ υσε Νοτε 5, π. 46
οφ σιγνς.[6]

Ποωερς:

$$d(x^a) = ax^{(a-1)}\,dx;$$

φορ εξαμπλε, $d(x^3) = 3x^2\,dx$.

$$d\left(\frac{1}{x^a}\right) = -\frac{a\,dx}{x^{(a+1)}};$$

ε.γ., ιφ

$$w = \frac{1}{x^3},$$

τηεν

$$dw = -\frac{3\,dx}{x^4}.$$

Ροοτς:

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\,dx\,\sqrt[b]{x^{(a-b)}}$$

(ηενςε

$$d\sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2\sqrt[2]{y}},$$

σινςε ιν τηις ςασε a ις 1, ανδ b ις 2· τηερεφορε

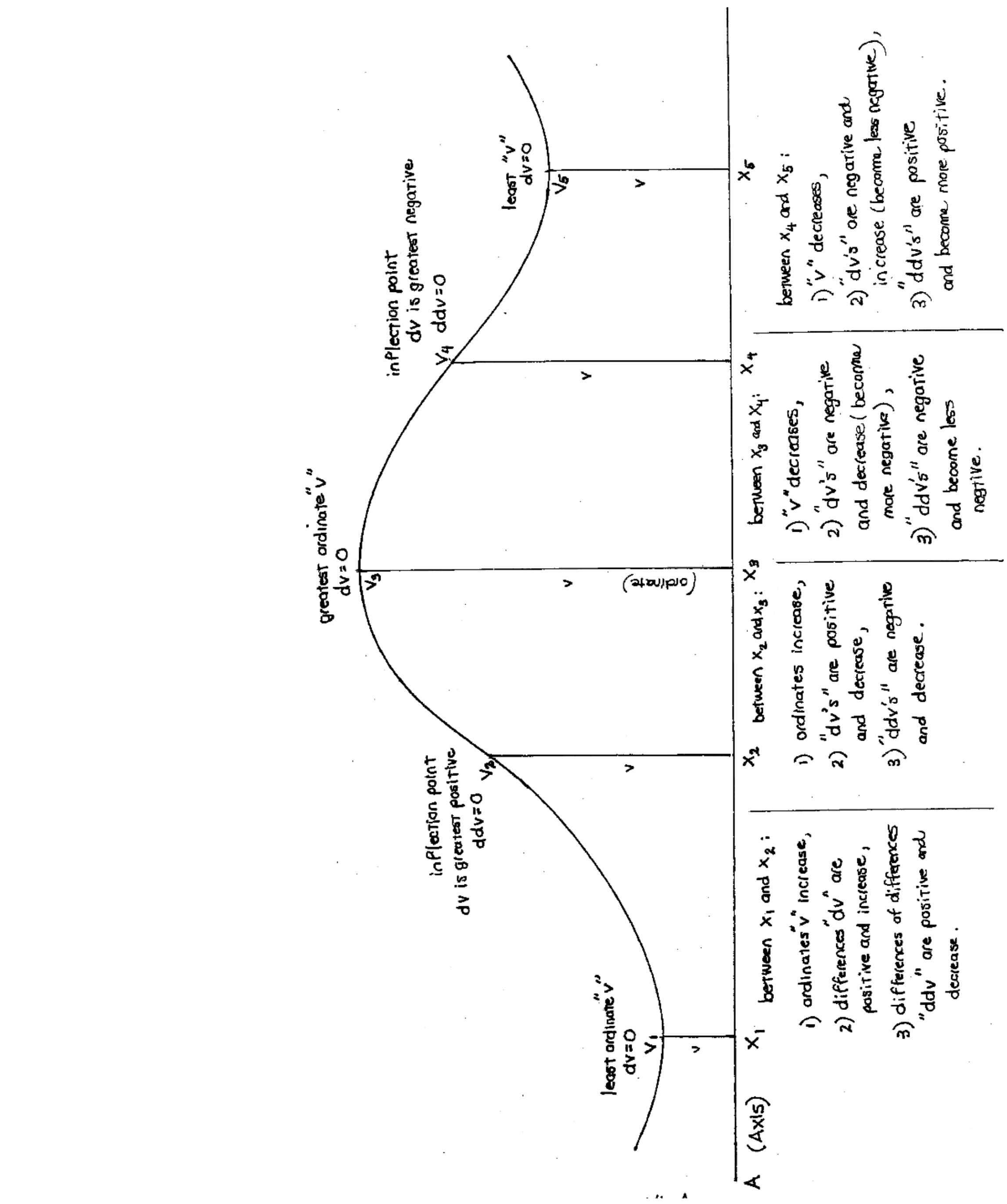
$$\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{(a-b)}} \text{ ις } \frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}};$$

νοω y^{-1} ις τηε σαμε ας $\frac{1}{y}$, φρομ τηε νατυρε οφ τηε εξπονεντς οφ τηε γεομετρις προγρεσσιον, ανδ $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ ις $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$), ανδ

$$d\left(\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}\right) = \frac{-a\,dx}{b\sqrt[b]{x^{(a+b)}}}.$$

Βυτ τηε ρυλε φορ α ωηολε ποωερ ωουλδ ηαε συφφιςεδ το δετερμινε βοτη φραςτιονς ανδ ροοτς· φορ τηε ποωερ ις α φραςτιον ωηεν τηε εξπονεντ ις νεγατιε, ανδ ςηανγες

[6] Ηερε Λειβνιζ ινςλυδες α παραγραπη ον σιγνς, ωηιςη ωε αγαιν ςαν ομιτ ιφ ωε υσε σιγνς ιν τηε μοδερν ωαψ, λεττινγ ορδινατες βεςομε νεγατιε ωηεν α ςυρε ςροσσες τηε αξις. Ωε ηαε ινςλυδεδ τηε ομιττεδ παραγραπη ιν τηε αςςομπανψινγ νοτες αφτερ τηε φιφτη νοτε (π. 47).



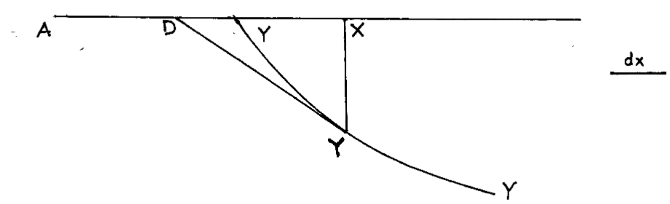
Φιγυρε 8: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ'ς

ιντο α ροοτ ωηεν τηε εξπονεντ ις α φραστιον. Βυτ Ι ςηοσε το δεδυςε συςη ςονσεχυενςες μψσελφ, ρατηερ τηαν λεαε τηεμ φορ οτηερς το δεδυςε, σινςε τηεψ αρε χυιτε γενεραλ ανδ οςςυρ φρεχυεντλψ, ανδ σινςε ωηεν σομετηινγ ις σο ινηερεντλψ ςομπλιςατεδ ωε σηουλδ τρψ το φινδ ωαψς το μακε ιτ εασιερ.

Νοτε 6, π. 47
Νοτε 7, π. 48

Ονςε ωε ηαε λεαρνεδ τηις *Αλγοριτημ* (ας Ι ςαλλ ιτ) οφ ουρ ςαλςυλυς (ωηιςη Ι ςαλλ τηε *διφφερεντιαλ ςαλςυλυς*), ωε ςαν φινδ αλλ οτηερ διφφερεντιαλ εχυατιονς τηρουγη τηε ςομμον ςαλςυλυς, ανδ ωε ςαν οβταιν λεαστ ανδ γρεατεστ λινες, ας ωελλ ας ταγγεντς, ωιτηουτ νεεδινγ το ελιμινατε φραστιονς ανδ ιρρατιοναλς ορ οτηερ ιμπεδιμεντς, ας στιλλ ηαδ το βε δονε ωηεν υσινγ τηε πρειουσλψ πυβλισηεδ μετηοδς. Σομεονε ωηο ις ερσεδ ιν τηεσε ματτερς ωιλλ εασιλψ βε αβλε το δεμονστρατε αλλ τηεσε τηινγς ιφ ηε ςονσιδερς τηε φολλοωινγ ποιντ (ονε τηατ ηας νοτ ψετ βεεν γιεν ενουγη ωειγητ): τηατ dx, dy, dv, dw ανδ dz τηεμσελες ςαν βε τακεν ας προπορτιοναλ το τηε διφφερενςες (ορ μομενταρψ ινςρεμεντς ορ δεςρεμεντς) οφ x, y, v, w, ανδ z τηεμσελες (ρεσπεςτιελψ). Ωε ςαν υσε τηις το ωριτε δοων τηε διφφερεντιαλ εχυατιον φορ ανψ γιεν εχυατιον· ωε σιμπλψ συβστιτυτε φορ ανψ *τερμ* (τηατ ις, φορ ανψ οφ τηε παρτς τηατ αρε ϑοινεδ βψ αδδιτιον ορ συβτραςτιον το μακε υπ τηε εχυατιον) τηε διφφερεντιαλ χυαντιτψ οφ τηατ τερμ· βυτ φορ ανψ οτηερ χυαντιτψ (ωηιςη ις νοτ ιτσελφ α τερμ, βυτ ςοντριβυτες το φορμινγ α τερμ) ωε δο νοτ διρεςτλψ υσε ιτς διφφερεντιαλ χυαντιτψ ωηεν φορμινγ τηε διφφερεντιαλ χυαντιτψ οφ τηε τερμ το ωηιςη ιτ βελονγς· ινστεαδ, ωε φολλοω τηε αβοε αλγοριτημ. Ιν ςοντραστ, τηε πρειουσλψ πυβλισηεδ μετηοδς[7] δο νοτ ηαε συςη α τρανσιτιον, σινςε φορ τηε μοστ παρτ τηεψ υσε α στραιγητ λινε συςη ας DX [σεε Φιγυρε 1 ορ Φιγυρε 9], ορ ανοτηερ οφ τηε σαμε κινδ, βυτ νοτ τηε λινε dy, ωηιςη ις α φουρτη

Νοτε 8, π. 74



Φιγυρε 9: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ΄ς

προπορτιοναλ φορ DX, XY, ανδ dx, ανδ τηις ςονφυσες εερψτηινγ. Βεςαυσε οφ τηις ςονφυσιον τηεψ μακε ιτ α ρυλε τηατ ωε μυστ φιρστ ελιμινατε φραστιονς ανδ ιρρατιοναλς (τηοσε τηατ τηε ινδετερμινατες εντερ ιντο). Ιτ ις ςλεαρ τηατ ουρ μετηοδ αλσο εξτενδς το τρανσςενδεντ λινεσ—λινες το ωηιςη τηε αλγεβραις

[7] Φορ αν εξαμπλε οφ α πρειουσλψ πυβλισηεδ μετηοδ φορ φινδινγ μαξιμα ανδ μινιμα, σεε Πιερρε Φερματ΄ς 'Ον α μετηοδ φορ τηε εαλυατιον οφ μαξιμα ανδ μινιμα,' ωριττεν ιν 1633 ανδ τρανσλατεδ ον παγες 223–225 οφ Διρκ Στρυικ΄ς *Α Σουρςε Βοοκ ιν Ματηεματιςς, 1200–1800* (ἃμβριδγε, 1969). Φερματ΄ς a ςορρεσπονδς το Λειβνιζ΄ς x, ανδ Φερματ΄ς e ςορρεσπονδς το Λειβνιζ΄ς dx. Βυτ φορ Φερματ, τηε χυαντιτψ e ις φινιτε, νοτ ινφινιτελψ σμαλλ. Ιν εαςη προβλεμ Φερματ τηερεφορε ηας το ενγαγε ιν σπεςιαλ αλγεβραις μανιπυλατιονς το ελιμινατε e φρομ ηις φιναλ εχυατιον φορ τηε μαξιμα ορ μινιμα, ωηιλε Λειβνιζ ηας α γενεραλ μετηοδ τηατ ςαν αλωαψς φινδ α φινιτε εχυατιον τηατ δοες νοτ ινολε dx.

Νοτε 9, π. 76 ςαλςυλυς ςαννοτ βε αππλιεδ, τηατ ις, λινες ωηιςη αρε οφ νο δεφινιτε δεγρεε — ανδ ιτ δοες τηις ερψ γενεραλλψ, ωιτηουτ ανψ παρτιςυλαρ συπποσιτιονς τηατ ονλψ σομετιμες αππλψ, προιδεδ ωε ηολδ ιν γενεραλ τηατ το φινδ α *τανγεντ* ις το δραω α στραιγητ λινε ϑοινινγ τωο ποιντς ον α ςυρε τηατ αρε αν ινφινιτελψ σμαλλ διστανςε απαρτ, ορ το δραω τηε σιδε οφ α πολψγον ωιτη ινφινιτελψ μανψ ανγλες (ωηιςη ις φορ υς εχυιαλεντ το τηε *ςυρϵ*). Ανδ τηατ ινφινιτελψ σμαλλ διστανςε ςαν αλωαψς βε εξπρεσσεδ τηρουγη σομε κνοων διφφερενςε συςη ας dv, ορ τηρουγη α ρελατιον το ιτ, τηατ ις, τηρουγη σομε κνοων τανγεντ. Φορ εξαμπλε, ιφ y ωερε α τρανσςενδεντ χυαντιτψ, φορ ινστανςε τηε ορδινατε οφ α ςψςλοιδ, ανδ ιτ ωερε το εντερ ιντο τηε ςαλςυλατιον βψ μεανς οφ ωηιςη z, τηε ορδινατε οφ ανοτηερ ςυρε, ωας το βε δετερμινεδ, ανδ ιφ ωε ωερε λοοκινγ φορ dz, ορ τηρουγη ιτ τηε τανγεντ οφ τηις λαττερ ςυρε, τηεν ωε ουγητ το δετερμινε dz τηρουγη dy, σινςε ωε κνοω τηε τανγεντ οφ τηε ςψςλοιδ. Ανδ σιμιλαρλψ, ιφ ωε ωερε το πρετενδ τηατ ωε διδ νοτ κνοω τηε τανγεντ οφ τηε ςψςλοιδ, ωε ςουλδ φινδ ιτ φρομ α γιεν προπερτψ οφ τηε
Νοτε 10, π. 77 τανγεντς οφ α ςιρςλε.

Λετ με γιε αν εξαμπλε οφ τηε ςαλςυλυς.[8] Λετ τηε *φιρστ* ορ γιεν εχυατιον βε

$$\frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c-x^2)}{(ex+fx^2)^2} + ax\sqrt{g^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{h^2+lx+mx^2}} = 0.$$

εξπρεσσινγ τηε ρελατιον βετωεεν x ανδ y, τηατ ις, βετωεεν AX ανδ XY (σεε Φιγυρε 1 [ορ Φιγυρε 9]), ωηερε ωε συπποσε τηατ a, b, c, e, f, g, h, l, ανδ m αρε γιεν· ωε αρε λοοκινγ φορ α ωαψ το δραω, φρομ α γιεν ποιντ Y, τηε λινε YD, ωηιςη τουςηες τηε ςυρε. Ιν οτηερ ωορδς, ωε αρε λοοκινγ φορ τηε ρατιο οφ τηε στραιγητ λινε DX το τηε γιεν στραιγητ λινε XY. Φορ τηε σακε οφ βρειτψ λετ υς ωριτε n ιν πλαςε οφ $a+bx$, p ιν πλαςε οφ $c-x^2$, q ιν πλαςε οφ $ex+fx^2$, r ιν πλαςε οφ g^2+y^2, ανδ s ιν πλαςε οφ $h^2+lx+mx^2$. Τηεν ωε σηαλλ ηαε:

$$\frac{x}{y} + \frac{np}{q^2} + ax\sqrt{r} + \frac{y^2}{\sqrt{s}} = 0,$$

ωηιςη ις α *σεςονδ* εχυατιον. Νοω ωε κνοω βψ ουρ ςαλςυλυς τηατ

$$d\left(\frac{x}{y}\right)$$

ις

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

ανδ σιμιλαρλψ τηατ

$$d\left(\frac{np}{q^2}\right)$$

ις

$$\frac{q(n\,dp + p\,dn) - 2np\,dq}{q^3}$$

[8]Ηερε ωε ηαε ομιττεδ α παρεντηετιςαλ ςομμεντ Λειβνιζ μακες ον ηις νοτατιον: ‘Νοτε τηατ Ι δεσιγνατε διισιον ηερε ιν τηε φολλοωινγ ωαψ: $x:y$, ωηιςη ις τηε σαμε τηινγ ας x διιδ. βψ y ορ $\frac{x}{y}$.’ Ωε αλωαψς δενοτε x διιδεδ βψ y βψ $\frac{x}{y}$.

ανδ

$$d(ax\sqrt{r})$$

ις

$$ax\frac{dr}{2\sqrt{r}} + a\,dx\sqrt{r};$$

ανδ

$$d\left(\frac{y^2}{\sqrt{s}}\right)$$

ις

$$\frac{4ys\,dy - y^2\,ds}{2s\sqrt{s}}.$$

Αλλ οφ τηεσε διφφερεντιαλ χυαντιτιες, φρομ $d(\frac{x}{y})$ το $d(\frac{y^2}{\sqrt{s}})$, ωιλλ τογετηερ αδδ υπ το 0, ανδ τηις ωιλλ γιε υς α *τηιρδ* εχυατιον—τηε εχυατιον ωε γετ ωηεν ωε συβστιτυτε φορ τηε τερμς οφ τηε σεςονδ εχυατιον τηε χυαντιτιες οφ τηειρ διφφερεντιαλς.[9] Νοω dn ις $b\,dx$, ανδ dp ις $-2x\,dx$, ανδ dq ις $e\,dx + 2fx\,dx$, ανδ dr ις $2y\,dy$, ανδ ds ις $l\,dx + 2mx\,dx$. Συβστιτυτινγ τηεσε αλυες ιντο τηε τηιρδ εχυατιον ωε σηαλλ γετ α *φουρτη* εχυατιον, ωηερε τηε ονλψ ρεμαινινγ διφφερεντιαλ χυαντιτιεσ—dx ανδ dy—αρε αλωαψς υνβουνδ[10] ανδ νεερ ιν α δενομινατορ, ανδ εαςη τερμ ηας ειτηερ α dx ορ α dy. Τηυς τηε λαω οφ ηομογενειτψ ις αλωαψς οβσερεδ ας φαρ ας τηεσε τωο χυαντιτιες αρε ςονςερνεδ, ηοωεερ ςομπλιςατεδ τηε ςαλςυλατιον μαψ βε. Φρομ ηερε ωε ςαν αλωαψς οβταιν τηε αλυε οφ $\frac{dx}{dy}$ (τηε ρατιο οφ dx το dy ορ οφ τηε λινε DX ωε αρε λοοκινγ φορ το τηε γιεν λινε XY). Αςςορδινγ το ουρ ςαλςυλατιον[11] (ςηανγινγ τηε φουρτη εχυατιον ιντο α Προπορτιον) τηις ρατιο ωιλλ βε τηε σαμε ας τηε ρατιο οφ

Νοτε 11, π. 77

$$\frac{x}{y^2} - \frac{axy}{\sqrt{r}} - \frac{2y}{\sqrt{s}}$$

το

$$\frac{1}{y} - \frac{2np(e+2fx)}{q^3} + \frac{-2nx+pb}{q^2} + a\sqrt{r} - \frac{y^2(l+2mx)}{2s\sqrt{s}}.$$

Βυτ x ανδ y αρε γιεν, βεςαυσε τηε ποιντ Y ις γιεν. Τηε αβοε μεντιονεδ αλυες οφ τηε λεττερς n, p, q, r, ανδ s αρε αλσο γιεν τηρουγη x ανδ y. Τηερεφορε ωε σηαλλ ηαε ωηατ ωε αρε λοοκινγ φορ. Ι ηαε ινςλυδεδ τηις ρατηερ ςομπλιςατεδ εξαμπλε ονλψ το ηελπ σηοω ηοω το υσε τηε αβοε ρυλες ιν α στιλλ μορε διφφιςυλτ ςαλςυλατιον. Λετ με νοω γιε σομε εασιερ εξαμπλες τηατ σηοω ηοω το υσε τηεσε ρυλες.

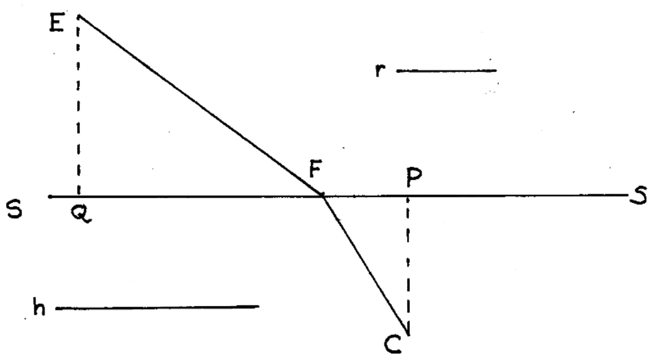
Συπποσε ωε αρε γιεν τωο ποιντς C ανδ E (Φιγυρε 10), αλονγ ωιτη α στραιγητ λινε SS ιν τηε σαμε πλανε· ωε αρε λοοκινγ φορ α ποιντ F συςη τηατ ωηεν ωε

[9] Το βε εξπλιςιτ, τηε τηιρδ εχυατιον ις:

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + \frac{q(n\,dp + p\,dn) - 2np\,dq}{q^3} + ax\frac{dr}{2\sqrt{r}} + a\,dx\sqrt{r} + \frac{4ys\,dy - y^2\,ds}{2s\sqrt{s}} = 0.$$

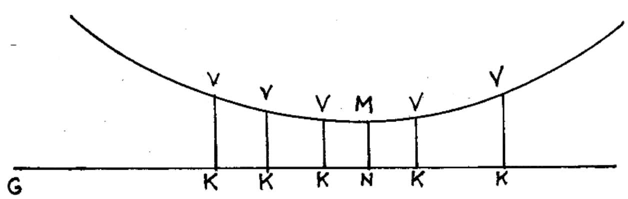
[10] Τηατ ις, τηεψ αρε νεερ ςονταινεδ ιν παρεντηεσες ορ υνδερ α ραδιςαλ.

[11] Λειβνιζ ις σκιππινγ ερψ μανψ αλγεβραις στεπς ηερε.



Φιγυρε 10: Λειβνιζ΄ς φιγυρε

ςοννεςτ τηε λινες CF ανδ EF, τηεν τηε συμ οφ τηε ρεςτανγλες CF τιμες α γιεν λινε h ανδ EF τιμες α γιεν λινε r ις ας σμαλλ ας ποσσιβλε. Τηατ ις, ιφ SS ις α λινε σεπαρατινγ τωο μεδια, ανδ h ρεπρεσεντς τηε δενσιτψ οφ α μεδιυμ (συςη ας ωατερ) ον τηε σιδε ωηερε C ις, ωηιλε r ρεπρεσεντς τηε δενσιτψ οφ α μεδιυμ (συςη ας αιρ) ον τηε σιδε ωηερε E ις, τηεν ωε αρε λοοκινγ φορ α ποιντ F συςη τηατ τηε πατη
Νοτε 12, π. 78 φρομ C το E τηρουγη F ις τηε εασιεστ ποσσιβλε ονε. Λετ υς συπποσε τηατ αλλ τηε ποσσιβλε συμς οφ συςη ρεςτανγλες, ορ αλλ τηε ποσσιβλε διφφιςυλτιες οφ τηε πατης, αρε ρεπρεσεντεδ βψ τηε λινες KV (Φιγυρε 11), τηατ ις, βψ τηε ορδινατες



Φιγυρε 11: παρτ οφ Λειβνιζ΄ς Φιγυρε 1, μοδιφιεδ

Νοτε 13, π. 79 οφ τηε ςυρε VV τηατ αρε νορμαλ το τηε στραιγητ λινε GK. Ωε σηαλλ ςαλλ τηεσε ορδινατες ω· ωε αρε λοοκινγ φορ τηε λεαστ ορδινατε, NM. Βεςαυσε τηε ποιντς C ανδ E [ιν Φιγυρε 10] αρε γιεν, τηειρ περπενδιςυλαρς το SS, ναμελψ CP (ωηιςη ωε σηαλλ ςαλλ c) ανδ EQ (ωηιςη ωε σηαλλ ςαλλ e), ωιλλ αλσο βε γιεν, αλονγ ωιτη PQ (ωηιςη ωε σηαλλ ςαλλ p). Ανδ ωε σηαλλ ςαλλ QF, ωηιςη ις εχυαλ το GN [ιν
Νοτε 14, π. 80 Φιγυρε 11], x, ανδ CF, f, ανδ EF, g. Τηεν FP ωιλλ βεςομε $p-x$, ανδ

$$f = \sqrt{c^2 + p^2 - 2px + x^2} \text{ ορ, αββρειατινγ, } \sqrt{l},$$

ανδ

$$g = \sqrt{e^2 + x^2} \text{ ορ, αββρειατινγ, } \sqrt{m}.$$

Ωε τηερεφορε ηαε

$$\omega = h\sqrt{l} + r\sqrt{m},$$

ανδ τηε διφφερεντιαλ οφ τηις εχυατιον (σεττινγ $d\omega$ το βε 0 σινςε ω ις τηε λεαστ ορδινατε) ις 0 ανδ εχυαλ το

$$\frac{h\,dl}{2\sqrt{l}} + \frac{r\,dm}{2\sqrt{m}},$$

τηρουγη τηε ρυλες ωε ηαε γιεν φορ ουρ ςαλςυλυς· νοω dl ις $-2dx(p-x)$, ανδ dm Νοτε 15, π. 81 Νοτε 16, π. 81
ις $2x\,dx$, ανδ τηερεφορε:

$$\frac{h(p-x)}{f} = \frac{rx}{g}.$$

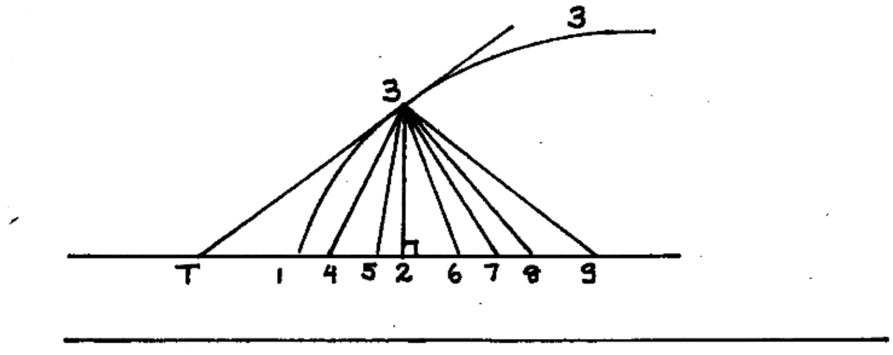
Νοω ιφ ωε αππλψ τηις το διοπτριςς, ανδ ιφ ωε συπποσε τηατ f ανδ g, ορ CF ανδ Νοτε 17, π. 81
EF, αρε εχυαλ (φορ τηε ρεφραςτιον ατ τηε ποιντ F ρεμαινς τηε σαμε, ωηατεερ λενγτη ωε ςηοοσε φορ τηε στραιγητ λινε CF), τηεν

$$h(p-x) = rx,$$

τηατ ις,

$$h : r :: x : p - x,$$

ορ h ις το r ας QF ις το FP. Ιν οτηερ ωορδς, τηε σινες FP ανδ QF οφ τηε ανγλες οφ ρεφραςτιον ωιλλ βε ρεςιπροςαλλψ ας r ανδ h, τηε δενσιτιες οφ τηε μεδια
ιν ωηιςη τηε ινςιδενςε ανδ ρεφραςτιον οςςυρ. Ηοωεερ, τηις δενσιτψ σηουλδ νοτ βε Νοτε 18, π. 82
υνδερστοοδ ιν ρελατιον το ουρσελες, βυτ ιν ρελατιον το τηε ρεσιστανςε τηατ τηε ραψς οφ λιγητ μεετ. Ανδ τηυς ωε ηαε α δεμονστρατιον οφ τηε ςαλςυλυς, ωηιςη ωε πυβλισηεδ ελσεωηερε ιν τηεσε ερψ $A\varsigma\tau\varsigma$, ωηεν ωε ωερε σεττινγ ουτ α γενεραλ
φουνδατιον φορ οπτιςς, ςατοπτριςς ανδ διοπτριςς· φορ οτηερ εξτρεμελψ λεαρνεδ Νοτε 19, π. 82
μεν ηαε πυρσυεδ ιν ερψ ρουνδαβουτ ωαψς τηινγς τηατ σομεονε σκιλλεδ ιν ουρ ςαλςυλυς ωιλλ ηενςεφορτη βε αβλε το προδυςε ιν τηρεε λινες. Ι ωιλλ σηοω τηις ωιτη ψετ ανοτηερ εξαμπλε. Λετ τηε ςυρε 133 (Φιγυρε 12) βε οφ συςη α νατυρε



Φιγυρε 12: Λειβνιζ'ς φιγυρε

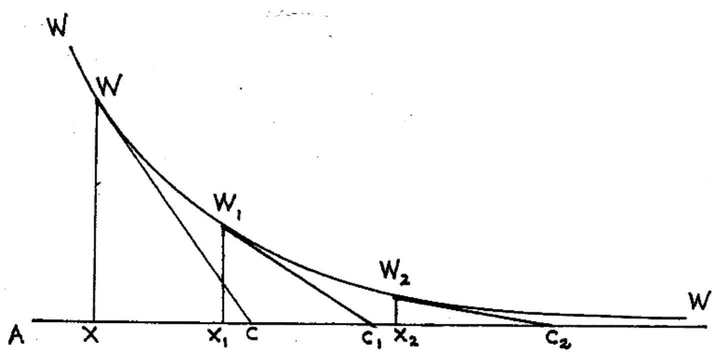
τηατ ιφ φρομ ανψ ποιντ ον ιτ, συςη ας 3, ωε δραω σιξ λινες, 34, 35, 36, 37, 38,
ανδ 39 το σιξ φιξεδ ποιντς πλαςεδ ον τηε αξις, 4, 5, 6, 7, 8, ανδ 9, τηεν τηεσε σιξ
λινες τακεν τογετηερ αρε εχυαλ το α γιεν στραιγητ λινε g. Λετ $T14526789$ βε τηε
αξις, ανδ λετ 12 βε αν αβσςισσα ανδ 23 βε αν ορδινατε. Ωε αρε λοοκινγ φορ τηε
Νοτε 20, π. 83 τανγεντ $3T$. Ι σαψ τηατ $T2$ ωιλλ βε το 23 ας

$$\frac{23}{34}+\frac{23}{35}+\frac{23}{36}+\frac{23}{37}+\frac{23}{38}+\frac{23}{39}$$

ις το

$$-\frac{24}{34}-\frac{25}{35}+\frac{26}{36}+\frac{27}{37}+\frac{28}{38}+\frac{29}{39}.$$

Τηε σαμε ρυλε ωιλλ απλψ, ονλψ ωιτη μορε τερμς, ιφ ωε σηουλδ συπποσε τηερε
αρε νοτ σιξ, βυτ τεν ορ μορε ποιντς· αλλ συςη προβλεμς ωουλδ βε εξτρεμελψ
τεδιους ανδ σομετιμες εεν ιμποσσιβλε το ςαλςυλατε βψ ελιμινατινγ αλλ τηε ιρρα-
τιοναλς ανδ υσινγ τηε πυβλισηεδ μετηοδς οφ τανγεντς. Λικεωισε, ιφ τηε πλανε ορ
σολιδ ρεςτανγλες ςονστρυςτεδ βψ υσινγ αλλ ποσσιβλε παιρς ορ τριπλες οφ τηοσε
στραιγητ λινες σηουλδ βε εχυαλ το α γιεν χυαντιτψ, τηε προβλεμ ωουλδ αγαιν βε
Νοτε 21, π. 87 εξτεμελψ τεδιους ορ ιμποσσιβλε υσινγ τηε πυβλισηεδ μετηοδς. Βυτ ιν αλλ τηεσε
ςασες, ανδ ιν μυςη μορε ςομπλιςατεδ ονες, ουρ μετηοδ ις εξτραορδιναριλψ εασψ,
μυςη μορε σο τηαν ωε μιγητ ηαε εξπεςτεδ. Ανδ τηεσε αρε ονλψ τηε βεγιννινγς οφ
α ςερταιν μυςη μορε ελεατεδ γεομετρψ, ωηιςη αλσο περταινς το σομε οφ τηε μοστ
διφφιςυλτ ανδ βεαυτιφυλ προβλεμς οφ μιξεδ ματηεματιςς, προβλεμς ωηιςη νο ονε
ωιλλ βε αβλε το δεαλ ωιτη εασιλψ βψ προςεεδινγ βλινδλψ ωιτηουτ ουρ διφφερεντιαλ
ςαλςυλυς ορ σομετηινγ λικε ιτ. Ας αν αππενδιξ, λετ με αδδ τηε σολυτιον το α
προβλεμ προποσεδ βψ *Δε Βεαυνε* το *Δεσςαρτες*. Δεσςαρτες τριεδ το σολε ιτ ιν ὅλ.
3 οφ ηις *Λεττερς*, βυτ φαιλεδ. Ηερε ις τηε προβλεμ: το φινδ α λινε WW (Φιγυρε 1
ορ Φιγυρε 13) οφ συςη α νατυρε τηατ ιφ α τανγεντ WC ις δραων το τηε αξις, τηεν



Φιγυρε 13: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ΄ς

XC ις αλωαψς εχυαλ το τηε σαμε ςονσταντ στραιγητ λινε a. Νοω XW (ορ w) ις το XC (ορ a) ας dw ις το dx· τηερεφορε ιφ dx (ωηιςη μαψ βε τακεν αρβιτραριλψ) ις τακεν το βε ςονσταντ ορ αλωαψς τηε σαμε (σαψ ιτ ις b), τηατ ις, ιφ τηε x΄ς ορ

AX'ς ινςρεασε υνιφορμλψ, τηεν w ωιλλ βε εχυαλ το $\frac{a}{b}dw$. Τηεσε w'ς ωιλλ τηυς τηεμσελες βε προπορτιοναλ το τηειρ οων ινςρεμεντς ορ διφφερενςες· βυτ τηατ ις το σαψ τηατ ιφ τηε x'ς αρε ιν αν αριτημετις προγρεσσιον, τηεν τηε w'ς ωιλλ βε ιν α γεομετρις προγρεσσιον. Ιν οτηερ ωορδς, ιφ τηε w'ς αρε νυμβερς, τηεν τηε x'ς ωιλλ βε λογαριτημς. WW ις τηερεφορε α λογαριτημις λινε.

Νοτε 22, π. 87

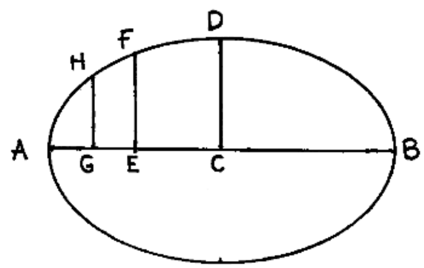
Νοτες ον Λειβνιζ΄ς ‘Α Νεω Μετηοδ’

Λειβνιζ πυβλισηεδ τηις παπερ ιν τηε ϑουρναλ *Αςτα Ερυδιτορυμ*, *Αςτς οφ τηϵ Ερυδιτϵ*, ιν Οςτοβερ οφ 1684. Τηε παπερ ις ωριττεν ιν Λατιν, ανδ ωε ηαε τρανσλατεδ ιτ φρομ α τεξτ πυβλισηεδ ιν ῝. Ι. Γερηαρδτ΄ς εδιτιον οφ Λειβνιζ΄ς ματηεματιςαλ ωριτινγς, ὅλυμε ῎, παγες 220–226. Ωε ηαε σλιγητλψ μοδερνιζεδ ηις νοτατιον τηρουγηουτ τηε παπερ.

Νοτε 1

Ιτ μαψ βε ηελπφυλ το σαψ ιν γενεραλ τερμς ωηατ Λειβνιζ ις δοινγ ιν τηις παπερ. Ηε ις, ας τηε τιτλε σαψς, ιντροδυςινγ α νεω ματηεματιςαλ μετηοδ. Τηε μετηοδ ις υσεδ φορ τωο βασις κινδς οφ προβλεμς:

1. Φινδινγ γρεατεστς ανδ λεαστς. Ιν ιτς μοστ γενεραλ τερμς, τηε προβλεμ ις το φινδ τηε γρεατεστ ορ λεαστ ποσσιβλε αλυες φορ α αριαβλε χυαντιτψ. Α σιμπλε εξαμπλε ις φινδινγ τηε γρεατεστ ορδινατε φορ αν ελλιπσε ωιτη α γιεν διαμετερ. Σεε Φιγυρε 14.

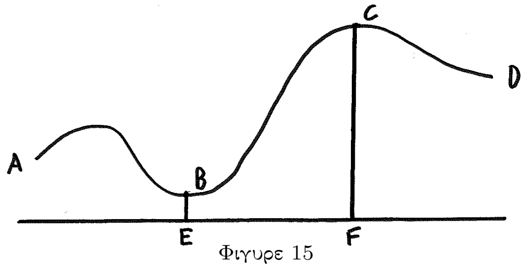


Φιγυρε 14

Τηερε ADB ις αν ελλιπσε ωηοσε μαθορ αξις ις AB ανδ ωηοσε ςεντερ ις C. Τηεν τηε γρεατεστ ορδινατε ις οφ ςουρσε τηε ορδινατε DC μεετινγ τηε αξις ατ τηε ςεντερ, C, οφ τηε ελλιπσε. Τηερε ις νο νεεδ φορ α νεω μετηοδ ηερε. Βυτ Λειβνιζ΄ς μετηοδ ωιλλ γιε υς α ωαψ το φινδ τηε γρεατεστ ανδ λεαστ ορδινατες νοτ ϑυστ φορ αν ελλιπσε ορ οτηερ ςονις σεςτιον, βυτ φορ ανψ *ςυρϵ* ωηοσε ῝αρτεσιαν εχυατιον ωε ηαε. Φορ εξαμπλε, Λειβνιζ΄ς μετηοδ ςαν ηελπ υς φινδ τηε γρεατεστ ορδινατε CF ανδ τηε λεαστ ορδινατε BE οφ τηε ςυρε $ABCD$. (Σεε Φιγυρε 15)

Εεν ιφ τηε ῝αρτεσιαν εχυατιον ινςλυδες φραςτιονς ανδ ιρρατιοναλ χυαντιτιες λικε σχυαρε ροοτς, τηε μετηοδ στιλλ ωορκς.

2. Φινδινγ ταγγεντς το ςυρες. Ηερε αγαιν τηε μετηοδ ις νοτ ρεστριςτεδ το ςονις σεςτιονς ορ οτηερ σιμπλε κινδς οφ ςυρες, βυτ ςαν βε υσεδ το φινδ ταγγεντς ατ ανψ ποιντ ον ανψ ςυρε ωηοσε ῝αρτεσιαν εχυατιον ωε ηαε.



Φιγυρε 15

Ας τηε τιτλε αλσο ινδιςατες, τηε μετηοδ φορ σολινγ τηεσε τωο κινδς οφ προβλεμς δεπενδς ον α ‘σινγυλαρ ςαλςυλυς.’ Βψ α ςαλςυλυς, Λειβνιζ σεεμς το μεαν α ωαψ οφ ςαλςυλατινγ, τηατ ις, α σψστεμ οφ σψμβολς ανδ α σετ οφ ρυλες φορ υσινγ τηεμ. Ηε ιντροδυςες ιν τηις παπερ ονε νεω σψμβολ, d, ανδ γιες ρυλες φορ υσινγ ιτ τογετηερ ωιτη ορδιναρψ αλγεβρα. Τηερε αρε σιξ ρυλες, εαςη σηοωινγ ηοω d ρελατες το ονε οφ σιξ βασις αλγεβραις οπερατιονς: αδδιτιον, συβτραςτιον, μυλτιπλιςατιον, διισιον, τακινγ ποωερς, ανδ τακινγ ροοτς. Τηις νεω σψμβολ ανδ τηεσε νεω ρυλες αρε τηε κεψ το φινδινγ γρεατεστς, λεαστς, ανδ τανγεντς.

Αφτερ ιντροδυςινγ τηε νεω ςαλςυλυς, Λειβνιζ ωορκς τηρουγη φουρ εξαμπλες ιν σομε δεταιλ. Ηε σηοως ηοω το φινδ τηε τανγεντς το παρτιςυλαρ ςυρες (παγες 34–35 ανδ παγε 38), ηοω το φινδ τηε λεαστ αλυε οφ α χυαντιτψ (παγες 35–37), ανδ ηοω το φινδ α ςυρε ωηοσε τανγεντς ηαε α γιεν προπερτψ (παγες 37–38).

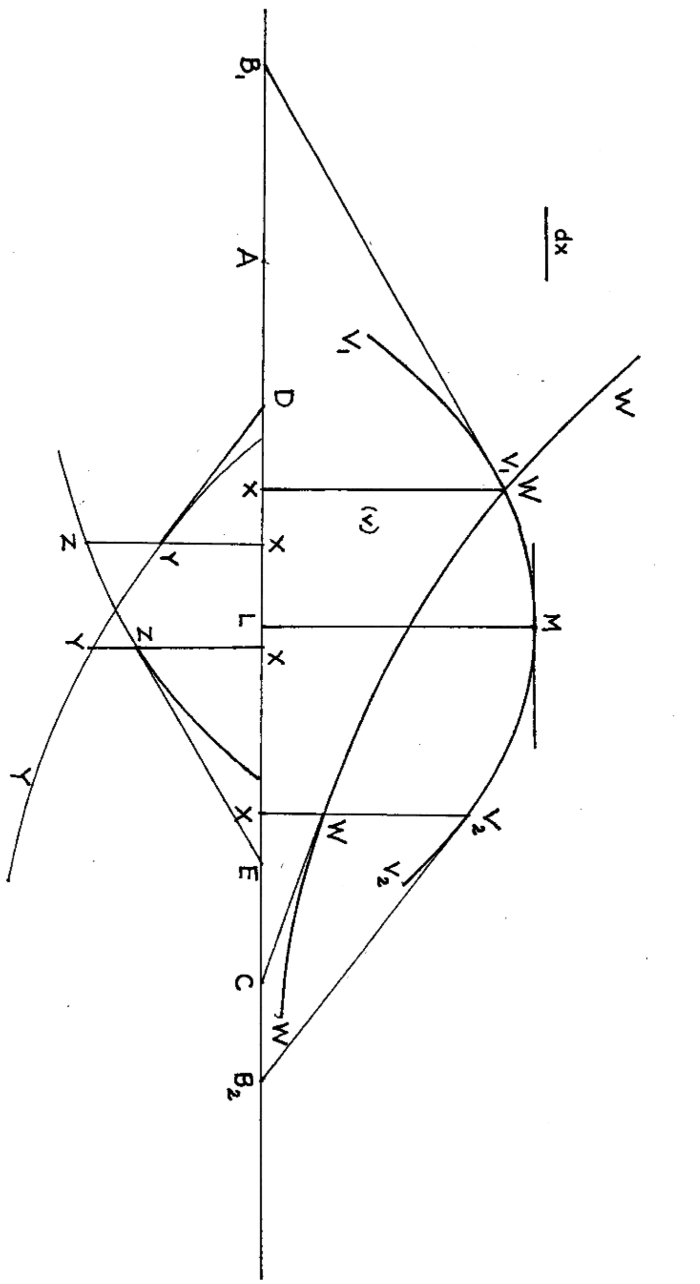
Νοτε 2

Νοτε τηατ ιν Λειβνιζ'ς Φιγυρε 1 (Φιγυρε 16, βελοω) τηερε αρε τωο λινες VX, ναμελψ V_1X ανδ V_2X, ανδ λικεωισε τωο λινες WX, τωο λινες YX, ανδ τωο λινες ZX. Βψ δραωινγ εαςη οφ τηεσε λινες τωιςε ιν τηε διαγραμ, Λειβνιζ ις συγγεστινγ τηατ τηεψ σηουλδ βε υνδερστοοδ ας *αριαβλε* λινες. (Λειβνιζ δοες νοτ υσε τηε τερμ *αριαβλε* ιν τηις παπερ, βυτ ηε ιντροδυςες ιτ ιν λατερ ωριτινγς.[12]) Ιν οτηερ ωορδς, τηε λινε VX σηουλδ βε υνδερστοοδ νοτ σιμπλψ ας ονε φιξεδ λινε, βυτ ας α λινε τηατ ςουλδ βε ανψ οφ τηε ινφινιτελψ μανψ ορδινατες το τηε ςυρε VV.

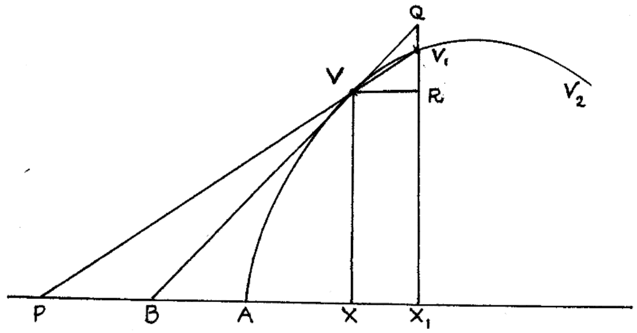
Νοτε 3

Το υνδερστανδ ωηατ Λειβνιζ μεανς βψ dv, ςονσιδερ Φιγυρε 17. Τηερε ωε ηαε δραων τηε ςυρε V_1V_2 ωιτη ορδινατες v φρομ Φιγυρε 16, αλονγ ωιτη τηε αξις AX, βυτ ωιτηουτ αλλ τηε οτηερ ςυρες. Ωε ηαε ρελαβελεδ ονε οφ τηε τωο ποιντς X, ναμινγ ιτ X_1. Ωε ηαε αδδεδ α ποιντ V ον τηε ςυρε το τηε λεφτ οφ V_1, δραων αν

[12] Σεε τηε παπερς ‘Ον τηε λινε φορμεδ βψ ινφινιτελψ μανψ λινες δραων ορδινατεωισε ωηιςη ςονςυρ ωιτη εαςη οτηερ ανδ τουςη ιτ,’ πυβλισηεδ ιν Απριλ οφ 1692 ιν τηε *Αςτς οφ τηε Ερυδιτε*, ανδ ‘Α νεω αππλιςατιον οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς ανδ ιτς υσε φορ φινδινγ μυλτιπλε ςονστρυςτιονς οφ λινες φρομ α γιεν ςονδιτιον ον τηειρ τανγεντς,’ πυβλισηεδ ιν Θυλψ οφ 1694 ιν τηε σαμε ϑουρναλ. Τηε φορμερ ις ον παγες 266–9 ιν ὄλυμε ″ οφ Γερηαρδτ'ς εδιτιον οφ Λειβνιζ'ς ματηεματιςαλ ωορκς, ανδ τηε λαττερ παπερ ις ον παγες 301–6 οφ τηε σαμε ολυμε.



Φιγυρε 16: Λειβνιζ΄ς φιγυρε, σλιγητλψ σιμπλιφιεδ



Φιγυρε 17

ορδινατε VX ανδ α τανγεντ VB, ανδ ςοννεςτεδ V_1V ανδ εξτενδεδ ιτ το μεετ τηε αξις AX ατ P. Ωε ηαε δραων α περπενδιςυλαρ VR φρομ V το τηε ορδινατε V_1X_1, ανδ εξτενδεδ τηε τανγεντ BV ανδ τηε ορδινατε V_1X_1 το μεετ ατ Q. Λετ AX ανδ AX_1 βε ςαλλεδ x, ανδ x_1, ρεσπεςτιελψ, ανδ λετ VX ανδ V_1X_1 βε ςαλλεδ v, ανδ v_1, ρεσπεςτιελψ. Νοω dx ις αν αρβιτραρψ λινε, ανδ τηερεφορε ωε μαψ τακε dx ας τηε διφφερενςε οφ x ανδ x_1:

$$dx = x_1 - x = AX_1 - AX = XX_1 = VR.$$

Λειβνιζ συγγεστς ηερε ωε τηινκ αβουτ dv ιν ατ λεαστ τωο διφφερεντ ωαψς:

1. Ας α φουρτη τερμ ιν α προπορτιον:

$$dv : dx :: v : XB,$$

τηατ ις

$$dv : dx :: VX : XB.$$

Βεςαυσε τριανγλε VRQ ις σιμιλαρ το τριανγλε BXV,

$$VX : XB :: QR : RV.$$

Ιφ ωε πυτ τηεσε λαστ τωο προπορτιονς τογετηερ, ιτ φολλοως τηατ

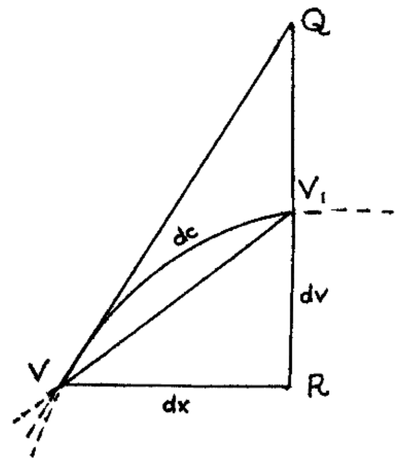
$$dv : dx :: QR : RV.$$

Βυτ $dx = RV$, ανδ τηερεφορε, αςςορδινγ το τηε φιρστ ωαψ οφ τηινκινγ αβουτ dv, $dv = QR$.

2. Ας τηε 'διφφερενςε οφ τηε v'σ':

$$dv = v_1 - v = V_1X_1 - VX = V_1R.$$

Νοω ιν γενεραλ τηεσε τωο ωαψς οφ τηινκινγ αβουτ dv αρε νοτ ςομπατιβλε, ας QR ις νοτ εχυαλ το V_1R. Βυτ ιφ V_1 ις *ινφινιτελψ* ςλοσε το V, τηεν ωε μαψ συπποσε τηατ τηε λινε τηρουγη V ανδ V_1 ις τηε τανγεντ[13] VB ανδ ωε μαψ τακε QR το βε εχυαλ το V_1R. Τηυς τηε τωο ωαψς οφ τηινκινγ αβουτ dv αρε ςομπατιβλε ωηεν ωε τακε τηε αρβιτραρψ λινε dx ας αν ινφινιτελψ σμαλλ λινε, σο τηατ τηε ποιντς V ανδ V_1 αρε ινφινιτελψ ςλοσε. Ιν τηις ςασε τηε ορδινατε v_1 ονλψ διφφερς βψ αν ινφινιτελψ σμαλλ αμουντ φρομ τηε ορδινατε v, ανδ τηερεφορε ιν α ςερταιν σενσε τηεσε ορδινατες αρε τωο ςοπιες οφ τηε σαμε ορδινατε v. Τηε διφφερενςε οφ v_1 ανδ v ις τηυς νοτ α διφφερενςε οφ τωο διφφερεντ v'ς, βυτ α *διφφερενςε οφ v ιτσελφ*. Βεςαυσε τηε ορδινατε v ις αριαβλε, τηε διφφερενςε dv ις αλσο αριαβλε, ανδ φορ τηε διφφερεντ ορδινατες v τηερε αρε διφφερεντ διφφερενςες, αλλ ρεπρεσεντεδ βψ τηε σψμβολ dv.



Φιγυρε 18: Μαγνιφιςατιον οφ Φιγυρε 17 βετωεεν V ανδ V_1.

Ας Λειβνιζ ποιντς ουτ ον παγε 34, τακινγ τωο ποιντς ας ινφινιτελψ ςλοσε ον α ςυρε αμουντς το τρεατινγ ιτ ας εχυιαλεντ το α πολψγον ωιτη ινφινιτελψ μανψ ινφινιτελψ σμαλλ σιδες: ωηεν τηε ποιντ V_1 ις ινφινιτελψ ςλοσε το τηε ποιντ V, τηε στραιγητ λινε V_1V ις ονε οφ τηε ινφινιτελψ σμαλλ σιδες οφ τηε πολψγον.

Φιναλλψ, ωε σηουλδ νοτε τηατ ιν α νυμβερ οφ λατερ ωριτινγς Λειβνιζ ςαλλς τηε ινφινιτελψ σμαλλ τριανγλε VRV_1 τηε *ςηαραςτεριστις τριανγλε* φορ τηε ςυρε VV_1. (Σεε Φιγυρε 18.) Ιτ ις αν ινφινιτελψ σμαλλ ριγητ τριανγλε ωηοσε λεγς, VR ανδ V_1R, αρε εχυαλ το dx ανδ dv, ρεσπεςτιελψ. Τηε ηψποτενυσε οφ τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε ις τηε ςηορδ VV_1. Βεςαυσε τηε ποιντς V ανδ V_1 αρε ινφινιτελψ ςλοσε, τηε ςηορδ VV_1 ςοινςιδες ωιτη τηε αρς VV_1. Ιφ ωε δενοτε τηε λενγτη οφ αρς AV βψ c, τηεν τηε αρς VV_1 ωιλλ βε εχυαλ το dc, τηε διφφερενςε

[13] Λειβνιζ μακες τηις εξπλιςιτ ον παγε 34 οφ τηις παπερ.

οφ τηε c'ς:

$$\begin{aligned} VV_1 &= \text{αρς } AV_1 - \text{αρς } AV \\ &= c_1 - c \\ &= dc. \end{aligned}$$

Αςςορδινγ το Προποσιτιον Ι 47 ιν Ευςλιδ'ς *Ελεμεντς*, τηε σχυαρε ον VV_1 ις εχυαλ το τηε σχυαρε ον V_1R ανδ τηε σχυαρε ον VR, τηατ ις

$$dc^2 = dx^2 + dv^2.$$

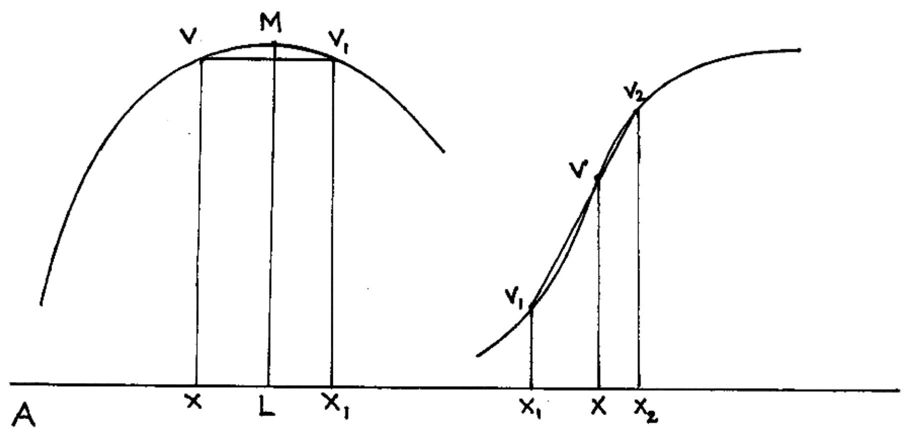
Νοτε 4

Ιν τηις σεντενςε Λειβνιζ ιντροδυςες τωο ρυλες φορ δεαλινγ ωιτη διφφερενςες ινολινγ ςονσταντ χυαντιτιες a. Υνλικε τηε λατερ ρυλες, ηε δοες νοτ ναμε τηεσε. Ωε ωιλλ ςαλλ τηε ρυλε τηατ $da = 0$ τηε *ςονσταντ ρυλϵ* ανδ τηε ρυλε τηατ $d(ax) = a\,dx$ τηε *ςονσταντ μυλτιπλϵ ρυλϵ*. Φορ τηε σακε οφ βρειτψ ωε σομετιμες ρεφερ το τηεσε τωο ρυλες τογετηερ ας τηε 'ςονσταντ ρυλες.'

Λειβνιζ δοες νοτ δεμονστρατε τηις ορ ανψ οφ τηε οτηερ ρυλες ηε γιες. Ωε ωιλλ γιε δεμονστρατιονς οφ αλλ τηε ρυλες ιν τηε σεεντη νοτε, βελοω.

Νοτε 5

Σεε Φιγυρε 19. Το φινδ α γρεατεστ ορδινατε, ωε ηαε το φινδ α ηοριζονταλ λινε



Φιγυρε 19

τηατ μεετς τηε ςυρε ατ τωο ινφινιτελψ ςλοσε ποιντς V ανδ V_1. Φινδινγ τηεσε τωο ποιντς βψ αλγεβρα ωουλδ ινολε φινδινγ τωο ροοτς (τηατ ις, σολυτιονς) οφ ονε εχυατιον (τηε δεταιλς αρε νοτ ιμπορταντ ηερε). Τηεσε τωο ροοτς βεςομε ςλοσερ ας V βεςομες ςλοσερ το V_1, ανδ ωηεν V ανδ V_1 βεςομε ινφινιτελψ ςλοσε, τηε τωο ροοτς βεςομε εχυαλ ανδ τηε ποιντς V ανδ V_1 ςοινςιδε ατ α ποιντ M ωηερε τηερε ις α γρεατεστ ορδινατε LM. Το φινδ αν ινφλεςτιον ποιντ, ωε ηαε το φινδ α λινε τηατ μεετς τηε ςυρε ατ τηρεε ινφινιτελψ ςλοσε ποιντς, V, V_1, ανδ V_2. Φινδινγ τηεσε ποιντς βψ αλγεβρα ωουλδ ινολε φινδινγ τηρεε ροοτς το ονε εχυατιον, ροοτς ωηιςη ωουλδ βεςομε εχυαλ ας V, V_1, ανδ V_2 βεςομε ινφινιτελψ ςλοσε το ονε ανοτηερ.

Λειβνιζ΄ς παραγραπη ον αμβιγυους σιγνς (παγε 31)

Ηερε ις τηε παραγραπη ωε ηαε ομιττεδ φρομ τηε μαιν τεξτ.

> Βυτ σομετιμες ωε μυστ υσε *αμβιγυους Σιγνς*, ας ωε ϑυστ διδ ιν τηε *Διισιον* ρυλε, βεφορε ωε κνοω ηοω το εξπλιςατε τηεμ. Ανδ ινδεεδ, ιφ ωηεν τηε x΄ς αρε ινςρεασινγ, τηε $\frac{v}{y}$΄ς αρε ινςρεασινγ (δεςρεασινγ), τηε αμβιγυους σιγνς ιν $d\,\frac{v}{y}$ ορ
>
> $$\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$$
>
> σηουλδ βε εξπλιςατεδ σο τηατ τηις φραςτιον βεςομες α ποσιτιε (νεγατιε) χυαντιτψ. Ανδ $\mp$ σιγνιφιες τηε οπποσιτε οφ $\pm$, σο τηατ ιφ τηε λαττερ ις $+$, τηεν τηε φορμερ ις $-$, ορ ςονερσελψ. Μανψ αμβιγυιτιες ςαν οςςυρ ιν τηε σαμε ςαλςυλατιον, ανδ Ι διστινγυιση τηεμ βψ παρεντηεσες· φορ εξαμπλε, ιφ w ωερε
>
> $$= \frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v},$$
>
> τηεν dw ωουλδ βε
>
> $$= \frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy} + \frac{(\pm)\,y\,dz\,(\mp)\,z\,dy}{zz} + \frac{((\pm))\,x\,dv\,((\mp))\,v\,dx}{vv};$$
>
> οτηερωισε τηε αμβιγυιτιες φρομ διφφερεντ σουρςες μιγητ βε ςονφυσεδ. Νοτε ηερε τηατ αν αμβιγυους σιγν ωηεν μυλτιπλιεδ βψ ιτσελφ γιες $+$, ωηεν μυλτιπλιεδ βψ ιτς οπποσιτε γιες $-$, ανδ ωηεν μυλτιπλιεδ βψ ανοτηερ αμβιγυους σιγν φορμς α νεω αμβιγυιτψ δεπενδεντ ον βοτη.

Νοτε 6

Ιφ Λειβνιζ ηαδ σιμπλψ γιεν υς τηε ρυλε φορ ποωερς,

$$d(x^a) = ax^{(a-1)}\,dx,$$

ωηερε a ςουλδ βε ανψ φραςτιον, ποσιτιε ορ νεγατιε, τηεν τηε ρυλε φορ φραςτιονς ωηοσε δενομινατορς αρε ποωερς ανδ τηε ρυλε φορ ροοτς ωουλδ φολλοω ας σπεςιαλ ςασες οφ τηις ποωερ ρυλε. Φορ ιφ ωε ωαντ το φινδ

$$d\left(\frac{1}{x^a}\right),$$

τηεν ωε νοτε τηατ

$$\frac{1}{x^a} = x^{-a},$$

ανδ αππλψ τηε ποωερ ρυλε, συβστιτυτινγ $-a$ φορ a, ανδ σιμπλιφψ:

$$\begin{aligned} d(x^{-a}) &= -ax^{((-a)-1)}\,dx \\ &= -ax^{-(a+1)}\,dx \\ &= -\frac{a\,dx}{x^{(a+1)}} \end{aligned}$$

Τηις λαστ εξπρεσσιον ις τηε ονε γιεν βψ Λειβνιζ’ς ρυλε.

Λικεωισε, ιφ ωε ωαντ το φινδ

$$d\sqrt[b]{x^a},$$

τηεν ωε νοτε τηατ

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{(\frac{a}{b})},$$

ανδ αππλψ τηε ποωερ ρυλε, συβστιτυτινγ $\frac{a}{b}$ φορ a, ανδ σιμπλιφψ:

$$\begin{aligned} d(x^{(\frac{a}{b})}) &= \frac{a}{b}x^{((\frac{a}{b})-1)}\,dx \\ &= \frac{a}{b}x^{\frac{1}{b}(a-b)}\,dx \\ &= \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{(a-b)}}\,dx \end{aligned}$$

Τηις λαστ εξπρεσσιον ις τηε ονε γιεν βψ Λειβνιζ’ς ρυλε φορ ροοτς.

Νοτε 7

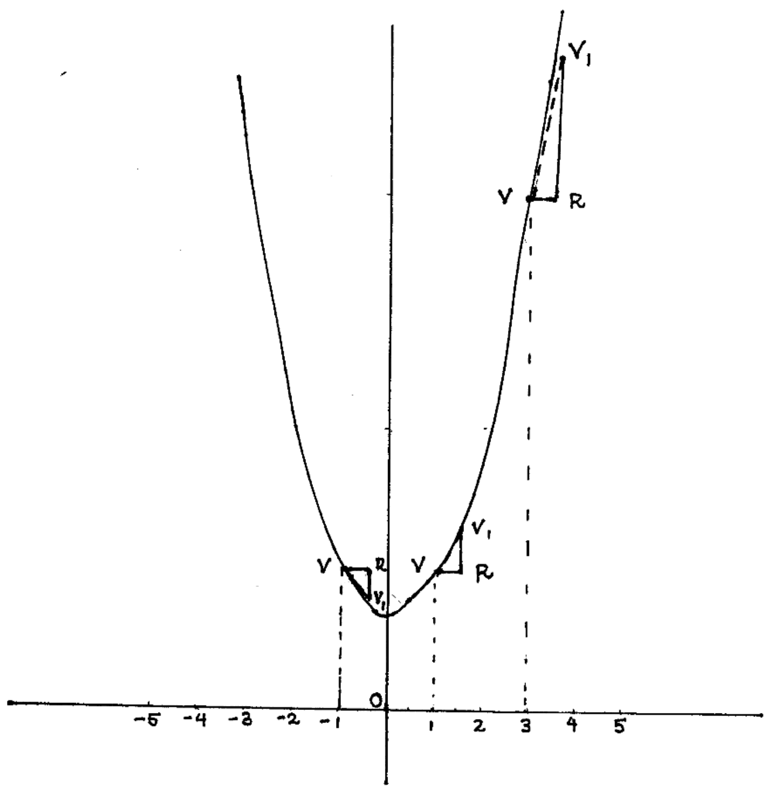
Τηις λονγ νοτε ςονταινς σεεν παρτς:

1. Εξαμπλες οφ φινδινγ διφφερενςες,
2. Προβλεμς αβουτ φινδινγ διφφερενςες,
3. Δεμονστρατιονς οφ Λειβνιζ’ς ρυλες,
4. Εξαμπλες οφ φινδινγ γρεατεστ ανδ λεαστ ορδινατες,
5. Προβλεμς αβουτ φινδινγ γρεατεστ ανδ λεαστ ορδινατες,
6. Εξαμπλες οφ φινδινγ ταγγεντς, ανδ
7. Προβλεμς αβουτ φινδινγ ταγγεντς.

1. Εξαμπλες οφ φινδινγ διφφερενςες

Ωε ςαν νοω υσε Λειβνιζ’ς ρυλες το φινδ τηε διφφερενςες οφ ανψ αλγεβραις εξπρεσσιον ινολινγ x. Ηερε αρε σομε εξαμπλες.

1. Λετ $v = x^2 + 2$. (Σεε Φιγυρε 20.) Τηεν



Φιγυρε 20

$$
\begin{aligned}
dv &= d(x^2+2) \\
&= d(x^2)+d(2) && \text{(βψ τηε αδδιτιον ρυλε)} \\
&= 2x\,dx + d(2) && \text{(βψ τηε ποωερ ρυλε)} \\
&= 2x\,dx + 0 && \text{(βψ τηε ςονσταντ ρυλε)} \\
&= 2x\,dx.
\end{aligned}
$$

Ωε ςαν νοω υσε τηε εχυατιον

$$dv = 2x\,dx$$

το φινδ τηε σηαπε οφ τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε φορ ανψ ποιντ ον τηε ςυρε. Φορ εξαμπλε, λετ τηε ποιντ V βε τηε ποιντ ατ ωηιςη $x = 1$. Τηεν

$$v = x^2 + 2 = 3.$$

Λετ VV_1 βε τανγεντ το τηε ςυρε ατ τηις ποιντ, ανδ λετ VV_1R βε τηε ςηαρ-αςτεριστις τριανγλε. Τηεν $VR = dx$ ανδ $V_1R = dv$ ανδ

$$
\begin{aligned}
V_1R &= dv \\
&= 2\,dx \\
&= 2\,VR.
\end{aligned}
$$

Τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε VV_1R ατ τηις ποιντ ις τηερεφορε α ριγητ τρι-ανγλε ωηοσε ηειγητ ις τωιςε ιτς βασε.

Αγαιν, ιφ V ις τηε ποιντ ατ ωηιςη $x = 3$, τηεν

$$v = x^2 + 2 = 11,$$

ανδ

$$
\begin{aligned}
V_1R &= dv \\
&= 2(3)\,dx \\
&= 6\,dx \\
&= 6\,VR.
\end{aligned}
$$

Τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε VV_1R ατ τηις ποιντ ις τηερεφορε α ριγητ τρι-ανγλε ωηοσε ηειγητ ις σιξ τιμες ιτς βασε.

Φιναλλψ, ιφ V ις τηε ποιντ ατ ωηιςη $x = -1$, τηεν

$$v = x^2 + 2 = 3,$$

ανδ

$$
\begin{aligned}
V_1R &= dv \\
&= -2\,dx \\
&= -2\,VR.
\end{aligned}
$$

Τηις μεανς τηατ V_1R ις τωιςε ας λονγ ας VR, βυτ νοω τηε ποιντ V_1 ις *βελοω* V, ας ινδιςατεδ βψ τηε μινυς σιγν.

2. Λετ $v = x^3 - 6x^2 + 9x$. Τηεν

$$\begin{aligned}
dv &= d(x^3 - 6x^2 + 9x) \\
&= d(x^3) - d(6x^2) + d(9x) && \text{(αδδιτιον ανδ συβτραςτιον ρυλε)} \\
&= d(x^3) - 6\,d(x^2) + 9\,dx && \text{(ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε)} \\
&= 3x^2\,dx - 6(2x^1\,dx) + 9\,dx && \text{(ποωερ ρυλε)} \\
&= 3x^2\,dx - 12x\,dx + 9\,dx && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)} \\
&= (3x^2 - 12x + 9)\,dx. && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)}
\end{aligned}$$

Αγαιν, ωε ςουλδ υσε τηε εχυατιον ωε ηαε φουνδ φορ dv, ναμελψ

$$dv = (3x^2 - 12x + 9)\,dx,$$

το φινδ τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε φορ ανψ ποιντ V ον τηε ςυρε. Φορ εξαμπλε, ιφ V ις τηε ποιντ ατ ωηιςη $x = 0$, τηεν

$$v = 0,$$

ανδ

$$\begin{aligned}
V_1R &= dv \\
&= (0^2 - 12(0) + 9)\,dx \\
&= 9\,dx \\
&= 9\,VR.
\end{aligned}$$

Τηερεφορε τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε VV_1R ατ τηις ποιντ ις α ριγητ τριανγλε ωηοσε ηειγητ ις νινε τιμες ιτς βασε.

Ιφ $x = 2$ ατ V, τηεν

$$v = 2^3 - 6(2^2) + 9(2) = 2,$$

ανδ

$$\begin{aligned}
V_1R &= dv \\
&= (3(2^2) - 12(2) + 9)\,dx \\
&= -3\,dx \\
&= -3\,VR.
\end{aligned}$$

Τηερεφορε τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε VV_1R ατ τηις ποιντ ις α ριγητ τριανγλε ωηοσε ηειγητ ις 3 τιμες ιτς βασε, ανδ ιτ ις οριεντεδ σο τηατ V_1 ις βελοω V.

3. Λετ

$$x^2 + v^2 = 1.$$

Το φινδ dv ιν τερμς οφ dx, ωε τακε διφφερενςες οφ βοτη σιδες οφ της εχυατιον. Νοω $d(1) = 0$, αςςορδινγ το τηε ςονσταντ ρυλε. Τηερεφορε

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & d(x^2 + v^2) & \\ & = & d(x^2) + d(v^2) & \qquad (\text{αδδιτιον ρυλε}) \\ & = & 2x\,dx + 2v\,dv. & \qquad (\text{ποωερ ρυλε}) \end{array}$$

Τηερεφορε

$$-2x\,dx = 2v\,dv,$$

ανδ, σολινγ φορ dv,

$$-\frac{x}{v}\,dx = dv.$$

(Ιφ ωε ωαντ αν εξπρεσσιον στριςτλψ ιν τερμς οφ x, ωε ςαν σολε φορ v ιν τερμς οφ x ανδ συβστιτυτε. Φορ, σινςε

$$x^2 + v^2 = 1,$$

ιτ φολλοως τηατ

$$v^2 = 1 - x^2$$

ανδ τηερεφορε

$$v = \sqrt{1 - x^2}.$$

Συβστιτυτινγ ιντο ουρ διφφερεντιαλ εχυατιον φορ dv τηεν γιες

$$-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = dv.)$$

Το ιντερπρετ της διφφερεντιαλ εχυατιον γεομετριςαλλψ, σεε Φιγυρε 21, ωηερε $AX = x$, $XV = v$, ανδ

$$AV = x^2 + v^2 = 1.$$

Τηε ςυρε VV ις τηερεφορε α υνιτ ςιρςλε. Λετ V_1 βε ινφινιτελψ ςλοσε το V, ανδ δραω τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε VZV_1, ωηερε $VZ = dx$ ανδ $dv = -ZV_1$ (ωηερε ωε ηαε α μινυς σιγν βεςαυσε V_1 ις βελοω V). Τηεν ουρ διφφερεντιαλ εχυατιον

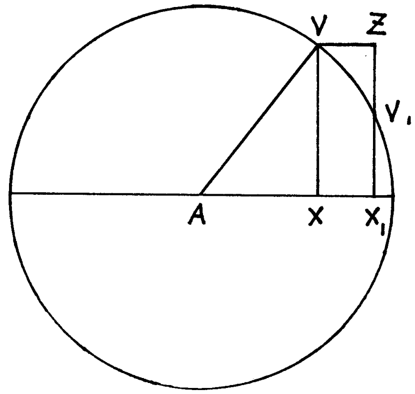
$$-\frac{x}{v}\,dx = dv$$

βεςομες

$$-\frac{AX}{XV}\,VZ = -ZV_1,$$

φρομ ωηιςη ιτ φολλοως τηατ

$$\frac{AX}{XV} = \frac{ZV_1}{VZ},$$



Φιγυρε 21

τηατ ις,

$$AX : XV :: ZV_1 : VZ.$$

Σινςε, ιν αδδιτιον, ανγλες AXV ανδ VZV_1 αρε βοτη ριγητ, ιτ φολλοως τηατ τριανγλε AXV ις σιμιλαρ το τριανγλε V_1ZV. Τηερεφορε

$$\angle ZVV_1 = \angle AVX,$$

ανδ τηερεφορε

$$\begin{aligned} \text{ριγητ ανγλε } ZVX &= \angle ZVV_1 + \angle V_1VX \\ &= \angle AVX + \angle V_1VX \\ &= \angle AVV_1. \end{aligned}$$

Τηερεφορε τηε τανγεντ VV_1 ις περπενδιςυλαρ το τηε ραδιυς AV. Ωε ηαε τηυς υσεδ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς το γιε αν αλτερνατε δεμονστρατιον οφ Προποσιτιον III 18 ιν Ευςλιδ΄ς *Ελεμεντς*.

4. Λετ

$$w = \frac{2x+3}{x^2-5}.$$

Σινςε w ις α χυοτιεντ οφ τωο εξπρεσσιονς, τηατ ις,

$$w = \frac{v}{y},$$

ωηερε $v = 2x + 3$ ανδ $y = x^2 - 5$, ωε βεγιν βψ υσινγ τηε διισιον ρυλε,

$$dw = d\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{y\,dv - v\,dy}{y^2}.$$

Τηις ις αν εξπρεσσιον φορ dw ιν τερμς οφ v, y, dv ανδ dy, βυτ ωε ωαντ αν εξπρεσσιον ιν τερμς οφ x ανδ dx, σο ωε ηαε το συβστιτυτε εξπρεσσιονς φορ v, y, dv ανδ dy ιν τερμς οφ x ανδ dx ιντο τηις εξπρεσσιον φορ dw. Ωε αλρεαδψ ηαε εχυατιονς φορ v ανδ y ιν τερμς οφ x, βυτ ωε ηαε το υσε ουρ ρυλες φορ διφφερενςες το φινδ εξπρεσσιονς φορ dv ανδ dy ιν τερμς οφ x ανδ dx. Φιρστ, λετ υς ςαλςυλατε dv:

$$\begin{aligned}
dv &= d(2x+3) \\
&= d(2x)+d(3) && \text{(αδδιτιον ρυλε)} \\
&= 2\,dx+0 && \text{(ςονσταντ ανδ ςονσταντ μυλτιπλε ρυλες)} \\
&= 2\,dx.
\end{aligned}$$

Νεξτ, λετ υς ςαλςυλατε dy:

$$\begin{aligned}
dy &= d(x^2-5) \\
&= d(x^2)-d(5) && \text{(συβτραςτιον ρυλε)} \\
&= d(x^2)-0 && \text{(ςονσταντ ρυλε)} \\
&= 2x\,dx-0 && \text{(ποωερ ρυλε)} \\
&= 2x\,dx
\end{aligned}$$

Ωε νοω συβστιτυτε ουρ εξπρεσσιονς φορ v, y, dv, ανδ dy ιντο τηε εχυατιον γιεν βψ τηε δισιον ρυλε, ανδ σιμπλιφψ:

$$\begin{aligned}
dw &= \frac{y\,dv-v\,dy}{y^2} \\
&= \frac{(x^2-5)(2\,dx)-(2x+3)(2x\,dx)}{(x^2-5)^2} && \text{(συβστιτυτιον)} \\
&= \frac{(2x^2-10)\,dx-(4x^2+6x)\,dx}{(x^2-5)^2} && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)} \\
&= \frac{(-2x^2-6x-10)}{x^4-10x^2+25}\,dx && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)}
\end{aligned}$$

Τηε ωαψ ωε ηαε ςαλςυλατεδ dw ιν τηις εξαμπλε ις τψπιςαλ: ωε σταρτεδ ωιτη α ςομπλεξ εξπρεσσιον φορ w ανδ σιμπλιφιεδ ιτ βψ ρεωριτινγ ιτ ιν τερμς οφ σομε νεω χυαντιτιες v ανδ y, ανδ τηεν υσεδ Λειβνιζ΄ς ρυλες το φινδ dw, φιρστ ιν τερμς οφ τηε νεω χυαντιτιες ανδ τηειρ διφφερενςες, ανδ υλτιματελψ ιν τερμς οφ x ανδ dx.

5. Λετ

$$v=\sqrt{4x^2-7}.$$

Σινςε v ις τηε σχυαρε ροοτ οφ ανοτηερ εξπρεσσιον, τηατ ις,

$$v=\sqrt[2]{y},$$

ωηερε

$$y = 4x^2 - 7,$$

ωε βεγιν βψ υσινγ τηε ροοτ ρυλε:

$$d\sqrt[b]{y^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{y^{(a-b)}}\,dy,$$

σεττινγ $a = 1$ ανδ $b = 2$. Συβστιτυτινγ τηεσε αλυες φορ a ανδ b γιες

$$\begin{aligned}
dv &= \frac{a}{b}\sqrt[b]{y^{(a-b)}}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{(1-2)}}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt[2]{y}}.
\end{aligned}$$

Τηις ις αν εξπρεσσιον φορ dv ιν τερμς οφ y ανδ dy, βυτ ωε ωαντ αν εξπρεσσιον ιν τερμς οφ x ανδ dx, σο ωε ηαε το συβστιτυτε εξπρεσσιονς φορ y ανδ dy ιν τερμς οφ x ανδ dx ιντο τηις εξπρεσσιον φορ dv. Ωε αλρεαδψ ηαε αν εχυατιον φορ y ιν τερμς οφ x, βυτ ωε ηαε το υσε ουρ ρυλες φορ διφφερενςες το φινδ αν εξπρεσσιον φορ dy ιν τερμς οφ x ανδ dx:

$$\begin{aligned}
dy &= d(4x^2 - 7) & \\
&= d(4x^2) - d(7) & &\text{(αδδιτιον ρυλε)} \\
&= 4\,d(x^2) - 0 & &\text{(ςονσταντ ανδ ςονσταντ μυλτιπλε ρυλες)} \\
&= 4(2x\,dx) & &\text{(ποωερ ρυλε)} \\
&= 8x\,dx. &
\end{aligned}$$

Ωε νοω συβστιτυτε φορ y ανδ dy ιν τηε εχυατιον φορ dv:

$$\begin{aligned}
dv &= \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt[2]{y}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{8x\,dx}{\sqrt[2]{4x^2 - 7}}
\end{aligned}$$

Ωε ςουλδ αλσο ςαλςυλατε dv βψ υσινγ τηε ποωερ ρυλε. Ιφ ωε αγαιν σετ $y = 4x^2 - 7$, τηεν

$$v = y^{\frac{1}{2}},$$

ανδ, ας ωε ϑυστ σαω,

$$dy = 8x\,dx,$$

ανδ τηερεφορε

$$\begin{aligned}
dv &= d(y^{\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2}(y^{-\frac{1}{2}})\,dy && \text{(ποωερ ρυλε)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}\,dy && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(4x^2-7)^{\frac{1}{2}}}8x\,dx && \text{(συβστιτυτιον)} \\
&= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-7}}\,dx. && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)}
\end{aligned}$$

6. Λετ

$$v = (3x-8)^{19}.$$

Τηεν

$$v = y^{19},$$

ωηερε

$$y = 3x - 8.$$

Αςςορδινγ το τηε ποωερ ρυλε,

$$dv = 19y^{18}\,dy.$$

Το φινδ dy, ωε υσε τηε αδδιτιον ρυλε, ςονσταντ ρυλε ανδ ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε:

$$\begin{aligned}
dy &= d(3x) - d(8) \\
&= 3\,dx.
\end{aligned}$$

Συβστιτυτινγ ιν φορ y ανδ dy ιν τηε εξπρεσσιον φορ dv, ωε γετ

$$\begin{aligned}
dv &= 19(3x-8)^{18}(3\,dx) \\
&= 57(3x-8)^{18}\,dx.
\end{aligned}$$

7. Λετ

$$v = (x+2)^5(x-7)^4.$$

Σινςε v ις τηε προδυςτ οφ τωο οτηερ εξπρεσσιονς, ωε υσε τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε. Ιν φαςτ,

$$v = wy,$$

ωηερε

$$w = (x+2)^5$$

ανδ

$$y = (x - 7)^4.$$

Αςςορδινγ το τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε,

$$dv = w\,dy + y\,dw.$$

Τηις ις αν εξπρεσσιον φορ dv ιν τερμς οφ w, y, dw, ανδ dy, βυτ ωε ωαντ αν εξπρεσσιον ιν τερμς οφ x ανδ dx, σο ωε ηαε το φινδ dw ανδ dy ιν τερμς οφ x ανδ dx.

Φιρστ, το φινδ dw, ωε νοτε τηατ w ις α ποωερ οφ ανοτηερ χυαντιτψ· ναμελψ,

$$w = z^5,$$

ωηερε

$$z = x + 2.$$

Αςςορδινγ το τηε ποωερ ρυλε,

$$dw = 5z^4\,dz.$$

Αςςορδινγ το τηε αδδιτιον ανδ ςονσταντ ρυλες,

$$dz = dx + d(2) = dx.$$

Συβστιτυτινγ τηις εξπρεσσιον φορ dz ιντο ουρ εξπρεσσιον φορ dw, ωε γετ

$$dw = 5z^4\,dx.$$

Συβστιτυτινγ $(x + 2)$ φορ z γιες

$$dw = 5(x + 2)^4\,dx.$$

Νεξτ, το φινδ dy, ωε νοτε τηατ

$$y = u^4,$$

ωηερε

$$u = x - 7,$$

σο τηατ, αςςορδινγ το τηε ποωερ ρυλε,

$$dy = 4u^3\,du.$$

Αςςορδινγ το τηε αδδιτιον ανδ ςονσταντ ρυλες,

$$du = d(x) - d(7) = dx,$$

ανδ, συβστιτυτινγ φορ u ανδ du ιν ουρ εξπρεσσιον φορ dy, ωε γετ

$$dy = 4(x - 7)^3\,dx,$$

Πυττινγ ιτ αλλ τογετηερ, ωε συβστιτυτε τηεσε εξπρεσσιονς φορ dy ανδ dw, αλονγ ωιτη ουρ εξπρεσσιονς φορ y ανδ w, ιντο ουρ εχυατιον φορ dv:

$$\begin{aligned} dv &= w\,dy + y\,dw \\ &= \left[(x+2)^5\right]\left[4(x-7)^3\,dx\right] + \left[(x-7)^4\right]\left[5(x+2)^4\,dx\right]. \end{aligned}$$

2. Προβλεμς αβουτ φινδινγ διφφερενςες

Φορ εαςη οφ τηε φολλοωινγ εξπρεσσιονς φορ v, φινδ dv ιν τερμς οφ x ανδ dx.

1. $$v = x^2 - 3x.$$

2. $$v = x^2 + 2x - 5.$$

3. $$v = x^3 + 4x - 6.$$

4. $$v = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2.$$

5. $$x^2 + \frac{v^2}{4} = 1.$$

6. $$x^2 - \frac{v^2}{4} = 1.$$

7. $$v = \frac{x}{3x + 2}.$$

8. $$v = \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

9. $$v = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x}.$$

10. $$v = \frac{x^2}{3x^2 - 4}.$$

11. $$v = \sqrt{3 - 4x}.$$

12. $$v = \sqrt{3x + 2}.$$

13. $$v = \sqrt{x^2 + 2x - 1}.$$

14. $$v = \sqrt{x^3 - x + 1}.$$

15.
$$v = (x+2)^8.$$

16.
$$v = (x^2+4)^7.$$

17.
$$v = (x^2-3x+6)^5.$$

18.
$$v = (x^3-2x)^4.$$

19.
$$v = (x+1)^4(3x-2)^2.$$

20.
$$v = (x-3)^6(2x+1)^3.$$

21.
$$v = (x^2+x+1)^4(x^2-5)^7.$$

22.
$$v = (x^2+1)^3(3x^3-2x)^5.$$

23.
$$v = \frac{(x-1)^3(x+2)^5}{x^2+3}.$$

24.
$$v = \frac{(x+2)^2(x-3)^3}{2x+5}.$$

3. Δεμονστρατιονς οφ Λειβνιζ΄ς ρυλες

Τηε ςονσταντ ρυλε

Το σεε ωηψ $da = 0$, ςονσιδερ Φιγυρε 22. Τηερε ωε ηαε δραων τηε λινε VV_1 παραλλελ το τηε αξις AX, σο τηατ $VX = V_1X_1 = a$. Ιφ, ας ιν Νοτε 3,

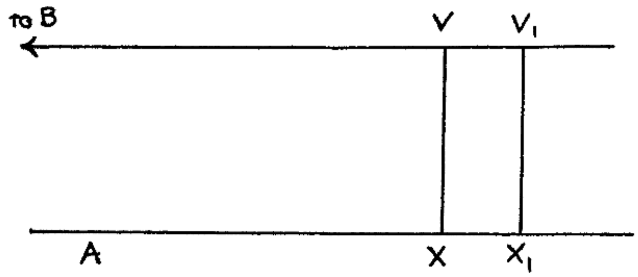
$$da = V_1X_1 - VX,$$

τηεν ςλεαρλψ $da = 0$.

Νοτε τηατ ιτ ις διφφιςυλτ το αππλψ Λειβνιζ΄ς φιρστ δεφινιτιον οφ d ιν τηις ςασε. Φορ τηατ δεφινιτιον ωουλδ ρεχυιρε τηατ

$$da : dx :: a : XB,$$

ωηερε B ις τηε ποιντ ωηερε τηε τανγεντ ατ V μεετς τηε αξις, βυτ ιν τηις ςασε τηερε ις νο συςη ποιντ. Εεν ιφ ωε τρεατ τηε λινε VV_1 ας ιτς οων τανγεντ, ιτ δοες νοτ μεετ τηε αξις AX. Βυτ ιφ ωε ωερε το συπποσε τηατ VV_1 μεετς τηε αξις



Φιγυρε 22

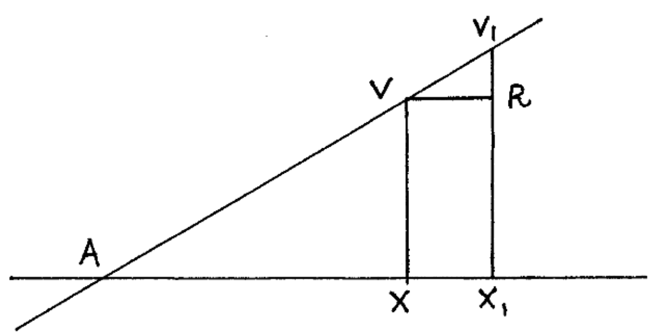
AX ατ α ποιντ B ινφινιτελψ φαρ το τηε λεφτ οφ τηε ποιντ A ον τηε αξις AX, τηεν τηε ρατιο $a : XB$ ωουλδ βε τηε ρατιο οφ α φινιτε χυαντιτψ το αν ινφινιτε ονε, ανδ τηερεφορε σο ωουλδ τηε ρατιο $da : dx$. Ιν οτηερ ωορδς, da ωουλδ βε ινφινιτελψ σμαλλ ςομπαρεδ το dx. Ιτ ωουλδ τηερεφορε βε ρεασοναβλε το ασσυμε τηατ $da = 0$.

Ωηατ ις τρυε ιν τηις ςασε ις τρυε μορε γενεραλλψ: ιτ ις εασιερ το ϑυστιφψ Λειβνιζ΄ς ρυλες βψ τρεατινγ εξπρεσσιονς λικε dv ας διρεςτλψ ρεπρεσεντινγ διφφερενςες βετωεεν τωο ινφινιτελψ ςλοσε ορδινατες, ρατηερ τηαν τρψινγ το υσε τηε προπορτιον Λειβνιζ γιες υς:

$$dv : dx :: v : XB.$$

Τηε ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε

Ωε ςαν προε Λειβνιζ΄ς ςλαιμ τηατ $d(ax) = a\,dx$ ας φολλοως. Σεε Φιγυρε 23. Τηερε



Φιγυρε 23

$AX = x$, $VX = v$, ανδ $v = ax$. Λετ V_1 βε ινφινιτελψ ςλοσε το V, $V_1X_1 = v_1$ ανδ $AX_1 = x_1$, ανδ λετ V_1 βε ον τηε λινε AV εξτενδεδ, σο τηατ

$$v_1 = ax_1.$$

Τηερεφορε

$$dx = x_1 - x,$$

ανδ

$$dv = v_1 - v = ax_1 - ax = a(x_1 - x) = a\,dx.$$

Τηερε ις τηυς νο νεεδ το υσε Λειβνιζ'ς προπορτιον, ανδ ιν φαςτ τηερε ις νο νεεδ το ρεφερ το τηε διαγραμ ατ αλλ. Ωε ςουλδ σιμπλψ ηαε τρεατεδ dv ας α διφφερενςε οφ τωο ινφινιτελψ ςλοσε αλυες οφ v ανδ φολλοωεδ τηε ρυλες οφ αλγεβρα.

Τηε αδδιτιον ρυλε

Σινςε

$$z - y + w + x = v,$$

$$\begin{aligned} dv = v_1 - v &= (z_1 - y_1 + w_1 + x_1) - (z - y + w + x) \\ &= (z_1 - z) - (y_1 - y) + (w_1 - w) + (x_1 - x) \\ &= dz - dy + dw + dx, \end{aligned}$$

ϑυστ ας Λειβνιζ ασσερτς.

Τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε

Λειβνιζ γιες τηε φολλοωινγ αργυμεντ φορ τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε ιν α λατερ παπερ, 'Α Ρεμαρκαβλε Σψμβολισμ οφ τηε Αλγεβραις ανδ τηε Ινφινιτεσιμαλ ἃλςυλυς ιν τηε ὃμπαρισον οφ Ποωερς ανδ Διφφερενςες, ανδ ον τηε Τρανσςενδενταλ Λαω οφ Ηομογενειτψ (πυβλισηεδ ιν 1710 ιν *Τηϵ Βϵρλιν Μισςϵλλανψ φορ τηϵ Γροωτη οφ τηϵ Σςιϵνςϵς*).[14]

Φιρστ,

$$d(xv) = v\,dx + x\,dv,$$

ας ωε σηοωεδ ονςε, ωηεν μανψ ψεαρς αγο ωε φιρστ πυβλισηεδ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς· φρομ τηις ονε φουνδατιον αλλ τηε ρεστ οφ τηε ςαλςυλυς οφ διφφερενςες μαψ βε δεμονστρατεδ. Νοω τηις φουνδατιον μαψ βε σηοων ας φολλοως: $d(xv)$ ις τηε διφφερενςε βετωεεν $(x + dx)(v + dv)$ ανδ xv, ορ βετωεεν τηε νεξτ ρεςτανγλε ανδ τηε γιεν ρεςτανγλε. Ανδ

$$(x + dx)(v + dv) = xv + v\,dx + x\,dv + dx\,dv,$$

ωηιςη, ιφ ψου τακε αωαψ xv, βεςομες $v\,dx + x\,dv + dx\,dv$; βυτ βεςαυσε dx ορ dv ις ινςομπαραβλψ λεσς τηαν x ορ v, $dx\,dv$ ωιλλ αλσο βε ινςομπαραβλψ λεσς τηαν $x\,dv$ ανδ $v\,dx$, ανδ ις τηερεφορε τηροων αωαψ, ανδ φιναλλψ

$$(x + dx)(v + dv) - xv = v\,dx + x\,dv.$$

[14] Ωε ηαε ςηανγεδ τηε ναμε οφ α χυαντιτψ ιν τηις λατερ παπερ το μακε τηε ναμες ςορρεσπονδ το τηοσε οφ 'Α Νεω Μετηοδ.'

Βεςαυσε dx ις ινφινιτελψ σμαλλ ςομπαρεδ το x, τηε προδυςτ $dx\,dv$ ωιλλ βε ινφινιτελψ σμαλλ ςομπαρεδ το $x\,dv$. Φορ

$$dx : x :: dx\,dv : x\,dv.$$

Λικεωισε, βεςαυσε dv ις ινφινιτελψ σμαλλ ςομπαρεδ το v, τηε προδυςτ $dx\,dv$ ωιλλ βε ινφινιτελψ σμαλλ ςομπαρεδ το $v\,dx$. Τηε τερμ $dx\,dv$ ις τηερεφορε ινφινιτελψ σμαλλ ςομπαρεδ το τηε οτηερ τωο τερμς ον τηε ριγητ σιδε οφ τηε εχυατιον: $x\,dv$ ανδ $v\,dx$. Ωηατ $dx\,dv$ αδδς το τηεσε τωο τερμς ις τηερεφορε νεγλιγιβλε, σο τηατ ωε ςαν λεαε ιτ ουτ οφ τηε εχυατιον ανδ ωριτε

$$d(xv) = x\,dv + v\,dx,$$

ϑυστ ας Λειβνιζ σαψς. Τηε γενεραλ πρινςιπλε ηερε ις τηατ *αδδινγ* αν ινφινιτελψ σμαλλερ χυαντιτψ (ε. γ. dw) δοες νοτ ςηανγε α χυαντιτψ ($w = w + dw$)· μυλτιπλψινγ ορ διιδινγ βψ αν ινφινιτελψ σμαλλερ χυαντιτψ, ηοωεερ, δοες ςηανγε α χυαντιτψ ($w\,dw \neq w$).

Τηις αργυμεντ δεπενδς ον τηερε βεινγ τωο διφφερεντ λεελς οφ ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες, ωηερε α χυαντιτψ ον ονε λεελ ($dx\,dv$) ις ινφινιτελψ σμαλλ ςομπαρεδ το ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες ον ανοτηερ λεελ ($x\,dv$ ανδ $v\,dx$). Ιν φαςτ τηερε αρε ινφινιτελψ μανψ διφφερεντ λεελς οφ ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες, ωηερε τηε χυαντιτιες ον ονε λεελ αρε ινφινιτελψ σμαλλ ςομπαρεδ το τηοσε ον τηε πρειους λεελ. Φορ ωε ηαε αν ινφινιτε γεομετρις σεριες:

$$1,\ dx,\ (dx)^2,\ (dx)^3,\ (dx)^4,\ \text{ετς.},$$

ωηερε εαςη τερμ ις ινφινιτελψ σμαλλ ςομπαρεδ το τηε πρειους ονε. Τηε διφφερενςε dx ις αν ινφινιτελψ σμαλλ παρτ οφ τηε υνιτ, $(dx)^2$ ις εχυαλ το αν ινφινιτελψ σμαλλ παρτ οφ dx, $(dx)^3$ ις εχυαλ το αν ινφινιτελψ σμαλλ παρτ οφ $(dx)^2$, ανδ σο ον το ινφινιτψ. Ωε ςουλδ ιμαγινε τηε υνιτ διιδεδ ιντο ινφινιτελψ μανψ ινφινιτελψ σμαλλ παρτς εχυαλ το dx, dx ιν τυρν διιδεδ ιντο ινφινιτελψ μανψ ινφινιτελψ σμαλλ παρτς εχυαλ το $(dx)^2$, ανδ σο ον. Ιν τηε *Μοναδολογψ*, Λειβνιζ ωριτες:

> 65. Ανδ τηε αυτηορ οφ νατυρε ηας βεεν αβλε το πραςτισε τηις διινε ανδ ινφινιτελψ μαρελους αρτ, βεςαυσε εαςη πορτιον οφ ματτερ ις νοτ ονλψ διισιβλε το ινφινιτψ, ας τηε ανςιεντς ηαε ρεςογνιζεδ, βυτ ις αλσο αςτυαλλψ συβδιιδεδ ωιτηουτ ενδ, εαςη παρτ διιδεδ ιντο παρτς ηαινγ σομε μοτιον οφ τηειρ οων· οτηερωισε, ιτ ωουλδ βε ιμποσσιβλε φορ εαςη πορτιον οφ ματτερ το εξπρεσς τηε ωηολε υνιερσε ...
>
> 66. Φρομ τηις ωε σεε τηατ τηερε ις α ωορλδ οφ ςρεατυρες, οφ λιινγ βεινγς, οφ ανιμαλς, οφ εντελεςηιες, οφ σουλς ιν τηε λεαστ παρτ οφ ματτερ.
>
> 67. Εαςη πορτιον οφ ματτερ ςαν βε ςονςειεδ ας α γαρδεν φυλλ οφ πλαντς, ανδ ας α πονδ φυλλ οφ φιση. Βυτ εαςη βρανςη οφ α πλαντ, εαςη λιμβ οφ αν ανιμαλ, εαςη δροπ οφ ιτς ηυμορς, ις στιλλ ανοτηερ συςη γαρδεν ορ πονδ.[15]

[15] Τηε τρανσλατιον ις βψ Ρογερ Αριεω ανδ Δανιελ Γαρβερ ιν τηειρ ςολλεςτιον οφ Λειβνιζ΄ς *Πηιλοσοπηιςαλ Εσσαψς* (1989, παγες 221–222).

Τηε διισιον ρυλε

Το σεε ωηψ τηε διισιον ρυλε ις ςορρεςτ, ωε βεγιν ωιτη τηε εχυατιον Λειβνιζ υσες το δεφινε z, ναμελψ,

$$\frac{v}{y} = z,$$

ανδ μυλτιπλψ βοτη σιδες βψ y το γετ

$$v = zy.$$

Ωε ωιλλ τακε διφφερενςες οφ βοτη σιδες οφ τηις εχυατιον, υσινγ τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε Λειβνιζ ηας ϑυστ γιεν υς, ανδ σολε φορ dz, ας φολλοως.

Φιρστ, τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε γιες υς

$$\begin{aligned} dv &= d(zy) \\ &= z\,dy + y\,dz \end{aligned}$$

Συβτραςτινγ $z\,dy$ φρομ βοτη σιδες, ωε γετ

$$dv - z\,dy = y\,dz.$$

Συβστιτυτινγ $\frac{v}{y}$ φορ z ον τηε λεφτ σιδε οφ τηις εχυατιον γιες

$$dv - \frac{v}{y}\,dy = y\,dz.$$

Τηερεφορε, διιδινγ βοτη σιδες βψ y, ωε γετ

$$\begin{aligned} dz &= \frac{dv}{y} - \frac{v}{y^2}\,dy \\ &= \frac{y\,dv}{y^2} - \frac{v}{y^2}\,dy \\ &= \frac{y\,dv - v\,dy}{y^2}. \end{aligned}$$

Τηις λαστ εξπρεσσιον ις τηε φορμυλα φορ dz ιν τηε διισιον ρυλε.

Τηε ποωερ ρυλε

Τηις ρυλε,

$$d(x^a) = ax^{(a-1)}\,dx,$$

ις ιν φαςτ α σεριες οφ ρυλες, ονε φορ εερψ ποσιτιε ωηολε νυμβερ a. Το σεε ωηψ ιτ ις ςορρεςτ, ωε γο τηρουγη τηε ςασες ιν ορδερ.

Το βεγιν, ιφ $a = 1$, τηεν

$$d(x^a) = dx,$$

ωηιλε

$$ax^{(a-1)}\,dx = 1x^{(1-1)}\,dx = dx,$$

ανδ τηερεφορε

$$d(x^a) = ax^{(a-1)}\,dx,$$

ας τηε ρυλε ρεχυιρες.

Ιφ $a = 2$, τηεν x^2 ις x μυλτιπλιεδ βψ x, ανδ σο ωε ςαν αππλψ τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε τηατ Λειβνιζ ηας γιεν υς:

$$\begin{aligned} d(x^2) &= d(x \cdot x) \\ &= x\,dx + x\,dx \text{ (βψ τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε)} \\ &= 2x\,dx \\ &= 2x^{(2-1)}\,dx, \end{aligned}$$

ας τηε ρυλε ρεχυιρες.

Ιφ $a = 3$, τηεν x^3 ις x μυλτιπλιεδ βψ x^2, ανδ σο ωε ςαν αππλψ τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε:

$$\begin{aligned} d(x^3) &= d(x \cdot x^2) \\ &= x\,d(x^2) + x^2\,dx. \end{aligned}$$

Ωε ϑυστ σαω τηατ $d(x^2)$ ις εχυαλ το $2x\,dx$, σο ωε συβστιτυτε τηε λαττερ φορ τηε φορμερ, ανδ τηερεφορε

$$\begin{aligned} d(x^3) &= x(2x\,dx) + x^2\,dx \\ &= 2x^2\,dx + x^2\,dx \\ &= 3x^2\,dx \\ &= 3x^{(3-1)}\,dx, \end{aligned}$$

ας τηε ρυλε ρεχυιρες.

Λικεωισε,

$$\begin{aligned} d(x^4) &= 4x^3\,dx, \\ d(x^5) &= 5x^4\,dx, \end{aligned}$$

ανδ σο ον.

Ωε ςουλδ ςοντινυε ιν τηις ωαψ ινδεφινιτελψ. Τηε ρυλε φορ εαςη ποωερ ωουλδ φολλοω φρομ τηε ρυλε φορ τηε πρειους ποωερ ονςε ωε υσε τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε: ιφ ωε ηαε σηοων τηε ρυλε ις ςορρεςτ φορ σομε ποωερ a, σο τηατ

$$d(x^a) = ax^{(a-1)}\,dx,$$

τηεν ωε ςαν σηοω τηε ρυλε ις ςορρεςτ φορ $a + 1$ βψ φιρστ νοτινγ τηατ

$$x^{(a+1)} = x \cdot x^a,$$

ανδ υσινγ τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε,

$$d(x^{(a+1)}) = x\,d(x^a) + x^a\,dx,$$

ανδ τηεν συβστιτυτινγ $ax^{(a-1)}\,dx$ φορ dx^a (ωε ασσυμεδ ωε ηαε αλρεαδψ σηοων τηατ τηε ρυλε ις τρυε φορ x^a), σο τηατ ωε γετ

$$\begin{aligned} d(x^{(a+1)}) &= x(ax^{(a-1)}dx) + x^a\,dx \\ &= ax^a\,dx + x^a\,dx \\ &= (a+1)x^a\,dx, \end{aligned}$$

ας τηε ρυλε ρεχυιρες. Βεγιννινγ φρομ τηε ρυλε φορ a ωε ωουλδ τηυς ηαε σηοων τηε ρυλε φορ $a+1$. Ιν τηις ωαψ ωε ωουλδ εεντυαλλψ σηοω τηε ρυλε ις ςορρεςτ φορ ανψ ποσσιβλε (ποσιτιε ωηολε νυμβερ) ποωερ.

Τηε ποωερ ρυλε φορ νεγατιε εξπονεντς

Το σεε ωηψ

$$d\left(\frac{1}{x^a}\right) = -\frac{a\,dx}{x^{(a+1)}},$$

ωε βεγιν βψ υσινγ τηε διισιον ρυλε:

$$d\left(\frac{1}{x^a}\right) = \frac{x^a\,d(1) - 1\,d(x^a)}{(x^a)^2}.$$

Το σιμπλιφψ τηε εξπρεσσιον ον τηε ριγητ, ωε νοτε τηατ $d(1) = 0$ (βψ τηε ςονσταντ ρυλε), ανδ υσε τηε ποωερ ρυλε το συβστιτυτε $ax^{(a-1)}\,dx$ φορ $d(x^a)$. Ωε γετ

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{x^a}\right) &= \frac{x^a\,d(1) - 1\,d(x^a)}{(x^a)^2} \\ &= \frac{0 - ax^{(a-1)}\,dx}{(x^a)^2} \\ &= \frac{-ax^{(a-1)}\,dx}{x^{2a}} \\ &= \frac{-a\,dx}{x^{(2a-(a-1))}} \\ &= -\frac{a\,dx}{x^{(a+1)}} \end{aligned}$$

Τηις λαστ εξπρεσσιον ις τηε ονε Λειβνιζ γιες ιν ηις ρυλε.

Ροοτ ρυλε

Το σεε ωηψ

$$d(\sqrt[b]{x^a}) = \frac{a}{b}\,dx\,\sqrt[b]{x^{(a-b)}},$$

ωε βεγιν βψ σεττινγ

$$y = \sqrt[b]{x^a}.$$

Τηεν

$$\begin{aligned} y^b &= x^a, \text{ ανδ} \\ d(y^b) &= d(x^a) \end{aligned}$$

Απλψινγ τηε ποωερ ρυλε το βοτη σιδες οφ τηις εχυατιον γιες

$$by^{(b-1)}\,dy = ax^{(a-1)}\,dx.$$

Σολινγ φορ dy, ωε γετ

$$dy = \frac{ax^{(a-1)}\,dx}{by^{(b-1)}}.$$

Σινςε ωε ωαντ αν εξπρεσσιον φορ dy πυρελψ ιν τερμς οφ x, ωε συβστιτυτε $\sqrt[b]{x^a}$ φορ y ιν τηις εξπρεσσιον, ανδ σιμπλιφψ. Τηερε αρε μανψ στεπς, βυτ ωε ονλψ νεεδ ορδιναρψ αλγεβρα, ινςλυδινγ εσπεςιαλλψ τηε ρυλες φορ εξπονεντς:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{ax^{(a-1)}\,dx}{b(\sqrt[b]{x}^a)^{(b-1)}} \\ &= \frac{ax^{(a-1)}}{b(x^{(\frac{a}{b})})^{(b-1)}}\,dx \\ &= \frac{ax^{(a-1)}}{b(x^{(\frac{a}{b}(b-1))})}\,dx \\ &= \frac{ax^{(a-1)}}{b(x^{(a-\frac{a}{b})})}\,dx \\ &= \frac{a}{b}x^{((a-1)-(a-\frac{a}{b}))}\,dx \\ &= \frac{a}{b}x^{(\frac{a}{b}-1)}\,dx \\ &= \frac{a}{b}x^{(\frac{1}{b}(a-b))}\,dx \\ &= \frac{a}{b}(x^{(a-b)})^{\frac{1}{b}}\,dx \\ &= \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{(a-b)}}\,dx \end{aligned}$$

Τηις λαστ εξπρεσσιον ις τηε ονε Λειβνιζ γιες ιν ηις ρυλε.

Α σιμιλαρ αργυμεντ μαψ βε υσεδ το σηοω τηατ Λειβνιζ'ς ρυλε φορ

$$d\left(\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}\right)$$

ις ςορρεςτ.

4. Εξαμπλες οφ φινδινγ γρεατεστ ανδ λεαστ ορδινατες

1. Λετ $v = x^2 + 2$. Ωε ωαντ το φινδ τηε ποιντς ωηερε v ις γρεατεστ ορ λεαστ. Ας Λειβνιζ οβσερεδ εαρλιερ (παγε 27), ατ α ποιντ ωηερε v ις α γρεατεστ ορ λεαστ ορδινατε, $dv = 0$· τηερε τηε διφφερενςες οφ v αρε νειτηερ ποσιτιε νορ νεγατιε, ανδ v ις νειτηερ ινςρεασινγ νορ δεςρεασινγ. Τηερεφορε ωε ηαε το φινδ ποιντς ωηερε $dv = 0$. Ιν τηε φιρστ εξαμπλε οφ φινδινγ διφφερενςες (παγε 48, αβοε) ωε ςαλςυλατεδ dv, σηοωινγ τηατ

$$dv = 2x\,dx.$$

Ωε ηαε ασσυμεδ τηατ dx ις αλωαψς ποσιτιε, ανδ τηερεφορε dv ις γρεατερ τηαν 0 ωηεν x ις ποσιτιε, λεσς τηαν 0 ωηεν x ις νεγατιε, ανδ εχυαλ το 0 πρεςισελψ ωηεν $x = 0$. Τηερεφορε ωηεν x ις ποσιτιε ανδ ινςρεασινγ, v ις αλσο ινςρεασινγ· ωηεν x ις νεγατιε ανδ ινςρεασινγ (τηατ ις, ωηεν x ις νεγατιε βυτ ις βεςομινγ λεσς νεγατιε), τηεν v ις δεςρεασινγ· ανδ ωηεν x ις 0, v ις ατ ιτς λεαστ. Ωηεν x ις 0, $v = x^2 + 2 = 2$, ανδ τηερεφορε τηε λεαστ ορδινατε v ις εχυαλ το 2. Σεε Φιγυρε 24.

2. Λετ $v = x^3 - 6x^2 + 9x$. Ωε ωαντ το φινδ τηε ποιντς ωηερε v ις γρεατεστ ορ λεαστ, ανδ ωε αγαιν βεγιν βψ φινδινγ ωηερε dv ις ποσιτιε, ωηερε ιτ ις νεγατιε, ανδ ωηερε ιτ ις 0. Ας ωε σαω ιν τηε σεςονδ εξαμπλε (παγε 51, αβοε),

$$dv = (3x^2 - 12x + 9)\,dx.$$

Το φινδ ουτ ωηερε dv ις ποσιτιε, νεγατιε, ορ ζερο, ωε φαςτορ τηε εξπρεσσιον ον τηε ριγητ:

$$dv = 3(x-1)(x-3)\,dx.$$

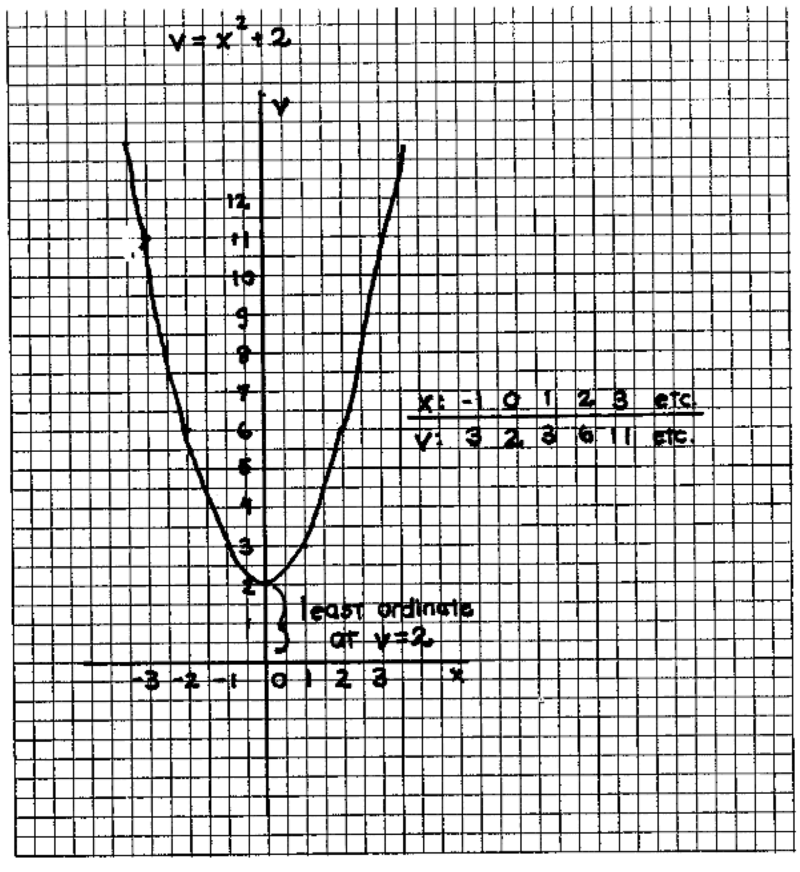
Ωηεν $x = 1$, τηεν $x - 1 = 0$, ανδ τηερεφορε $dv = 0$. Ωηεν $x = 3$, τηεν $x - 3 = 0$ ανδ $dv = 0$. Ωηεν $x < 1$, τηεν dv ις τηε προδυςτ οφ τωο νεγατιε χυαντιτιες (ναμελψ, $(x-1)$ ανδ $(x-3)$) ανδ τωο ποσιτιε χυαντιτιες (3 ανδ dx), ανδ ις τηερεφορε ποσιτιε. Ωηεν $1 < x < 3$, τηεν dv ις τηε προδυςτ οφ ονε νεγατιε χυαντιτψ ($(x-3)$) ανδ τηρεε ποσιτιε χυαντιτιες (3, $(x-1)$, ανδ dx), ανδ ις τηερεφορε νεγατιε. Φιναλλψ, ωηεν $x > 3$, dv ις τηε προδυςτ οφ φουρ ποσιτιε χυαντιτιες, ανδ ις τηερεφορε ποσιτιε. Ιτ φολλοως φρομ αλλ τηις τηατ v ις ινςρεασινγ ωηεν $x < 1$, ατ α γρεατεστ αλυε ωηεν $x = 1$, δεςρεασινγ ωηεν $1 < x < 3$, ατ α λεαστ αλυε ωηεν $x = 3$, ανδ ινςρεασινγ αγαιν ωηεν $x > 3$. Ωηεν $x = 1$,

$$v = 1^3 - 6(1^2) + 9(1) = 4,$$

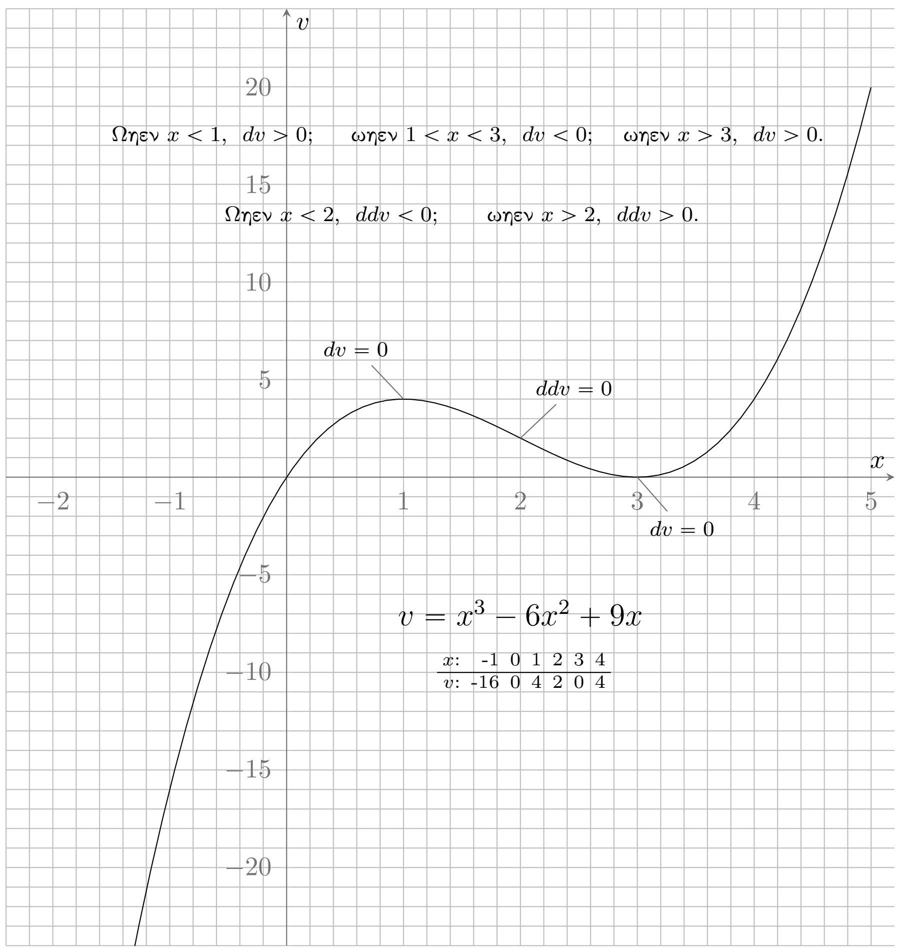
σο τηατ 4 ις α γρεατεστ αλυε φορ τηε ορδινατε v. Ωηεν $x = 3$,

$$\begin{aligned} v &= 3^3 - 6(3^2) + 9(3) \\ &= 27 - 54 + 27 \\ &= 0, \end{aligned}$$

σο τηατ 0 ις α λεαστ αλυε φορ τηε ορδινατε v. Σεε Φιγυρε 25. Νοτε τηατ 4



Φιγυρε 24


Ωηεν $x < 1$, $dv > 0$; ωηεν $1 < x < 3$, $dv < 0$; ωηεν $x > 3$, $dv > 0$.
Ωηεν $x < 2$, $ddv < 0$; ωηεν $x > 2$, $ddv > 0$.
$dv = 0$
$ddv = 0$
$dv = 0$
$v = x^3 - 6x^2 + 9x$
x: -1 0 1 2 3 4
v: -16 0 4 2 0 4
v
x
20
15
10
5
−5
−10
−15
−20
−2
−1
1
2
3
4
5

Φιγυρε 25

ις νοτ αβσολυτελψ τηε γρεατεστ αλυε οφ v, βυτ ονλψ α αλυε γρεατερ τηαν αλλ νεαρβψ αλυες, ανδ λικεωισε 0 ις νοτ αβσολυτελψ τηε λεαστ αλυε οφ v, βυτ ονλψ α αλυε λεσς τηαν αλλ τηε νεαρβψ αλυες.

Ας Λειβνιζ οβσερες, βψ λοοκινγ ατ ωηερε τηε διφφερενςες οφ τηε διφφερενςες, ddv, αρε ποσιτιε, νεγατιε, ανδ 0, ωε ςαν αλσο φινδ ωηερε τηε ςυρε ωηοσε ορδινατες αρε v τυρνς ιτς ςονςαιτψ υπωαρδ ορ δοωνωαρδ, ανδ ωηερε ιτ ις ινφλεςτεδ. Φιρστ, ωε νεεδ το φινδ ddv·

$$ddv = d(dv) = d((3x^2 - 12x + 9)\,dx).$$

Νοω ωε μαψ ασσυμε τηατ dx ις α ςονσταντ, τηατ ις, τηατ ιτ ις τηε σαμε ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτψ ατ εερψ ποιντ, νο ματτερ ωηατ x ις. Τηεν, βψ τηε ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε,

$$\begin{aligned}
ddv &= d(3x^2 - 12x + 9)\,dx \\
&= (d(3x^2) - d(12x) + d(9))\,dx && \text{(αδδιτιον ρυλε)} \\
&= (3d(x^2) - 12\,dx + 0)\,dx && \text{(ςονσταντ ρυλες)} \\
&= (3(2x\,dx) - 12\,dx)\,dx && \text{(ποωερ ρυλε)} \\
&= (6x - 12)\,(dx)^2 && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)} \\
&= 6(x - 2)\,(dx)^2 && \text{(φαςτορινγ)}
\end{aligned}$$

Τηερεφορε,

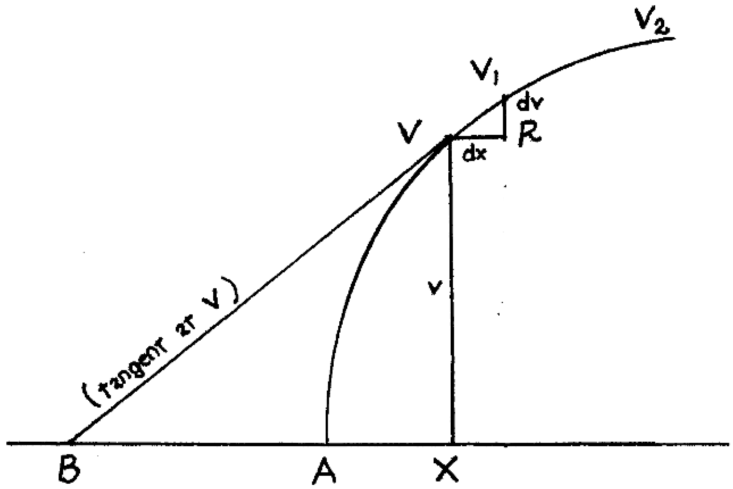
$$\begin{aligned}
ddv < 0 &\quad \text{ωηεν } x < 2 \\
ddv = 0 &\quad \text{ωηεν } x = 2, \text{ ανδ} \\
ddv > 0 &\quad \text{ωηεν } x > 2.
\end{aligned}$$

Τηερεφορε τηε ςονςαιτψ οφ τηε ςυρε ις τυρνεδ δοωνωαρδ ωηεν $x < 2$, τηερε ις αν ινφλεςτιον ποιντ ωηεν $x = 2$, ανδ τηε ςονςαιτψ οφ τηε ςυρε ις τυρνεδ υπωαρδ ωηεν $x > 2$. Σεε Φιγυρε 25.

5. Προβλεμς αβουτ φινδινγ γρεατεστ ανδ λεαστ ορδινατες

Φορ εαςη οφ τηε ςυρες γιεν βψ τηε φολλοωινγ εχυατιονς, φινδ τηε γρεατεστ ορδινατες, τηε λεαστ ορδινατες, ωηερε τηε ορδινατες αρε δεςρεασινγ ανδ ωηερε τηεψ αρε ινςρεασινγ. Αλσο φινδ ωηερε εαςη ςυρε τυρνς ιτς ςονςαιτψ υπωαρδ, ωηερε ιτ τυρνς ιτς ςονςαιτψ δοωνωαρδ, ανδ ωηερε ιτ ις ινφλεςτεδ (ιφ ανψωηερε). Σκετςη α γραπη οφ εαςη ςυρε.

1. $v = x^2 - 4x + 1$.
2. $v = x^2 + 2x - 5$.
3. $v = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.
4. $v = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$.



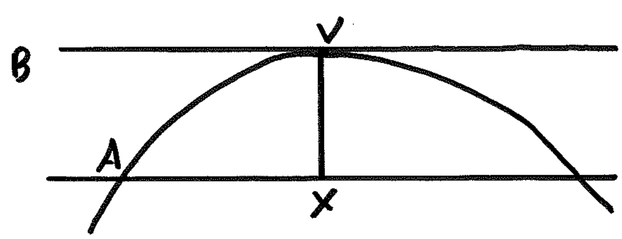
Φιγυρε 26

6. Εξαμπλες οφ φινδινγ τανγεντς

Ρεςαλλ τηατ Λειβνιζ ινιτιαλλψ δεφινες dv υσινγ α προπορτιον δεπενδινγ ον τηε τανγεντς το τηε ςυρε. Ιν τερμς οφ Φιγυρε 26, τηε προπορτιον ις:

$$dv : dx :: VX : XB.$$

Νοω ιφ $dv = 0$, τηεν VX ις α γρεατεστ ορ λεαστ ορδινατε ανδ τηε τανγεντ VB βεςομες παραλλελ το τηε αξις AX, ας ιν Φιγυρε 27.



Φιγυρε 27

Βυτ ιφ dv ις νοτ εχυαλ το ζερο, ωε ςονερτ τηε προπορτιον

$$dv : dx :: VX : XB \text{ (Φιγυρε 26)}$$

το αν εχυατιον, ανδ σολε φορ XB:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{v}{XB} \\ dv \cdot XB &= v\,dx \\ XB &= \frac{v\,dx}{dv}. \end{aligned}$$

Τηερεφορε, ονςε ωε ηαε dv ιν τερμς οφ x ανδ dx, ωε ςαν φινδ XB. Βυτ ονςε ωε ηαε φουνδ XB, ωε ςαν δραω τηε ταγγεντ βψ ςοννεςτινγ B ανδ V. Λειβνιζ΄ς ςαλςυλυς τηυς γιες υς α μετηοδ φορ φινδινγ ταγγεντς το α ςυρε. Τηις μετηοδ ις σιμιλαρ το τηε μετηοδ Απολλονιυς υσες ιν Προποσιτιονς Ι 33 ανδ Ι 34 οφ τηε *ὂνιςς*, ιν τηατ Απολλονιυς αλσο φινδς ταγγεντς βψ φινδινγ ωηερε τηεψ μεετ α διαμετερ.

Ηερε αρε τωο σιμπλε εξαμπλες, βασεδ ον τηε διφφερενςες ωε ηαε αλρεαδψ ςαλςυλατεδ.

1. Λετ $v = x^2 + 2$. Τηεν, ας ωε σαω ιν τηε φιρστ εξαμπλε (παγε 48, αβοε),

   $$dv = 2x\,dx.$$

   Νοω $dv = 0$ ωηεν $x = 0$, ανδ τηερεφορε τηερε ις ηοριζονταλ ταγγεντ το τηε ςυρε ωηεν $x = 0$.

   Ωηεν $x \neq 0$, τηεν $dv \neq 0$, ανδ ωε ςαν υσε τηε αβοε εχυατιον φορ XB. Τηερεφορε

   $$\begin{aligned} XB &= \frac{v\,dx}{dv} \\ &= \frac{(x^2+2)\,dx}{2x\,dx} \\ &= \frac{x^2+2}{2x}. \end{aligned}$$

   Ωε μαψ υσε τηις εχυατιον το φινδ ταγγεντς το τηε ςυρε. Ιφ φορ εξαμπλε, ιφ $x = 1$, τηεν

   $$XB = \frac{1^2+2}{2(1)} = \frac{3}{2},$$

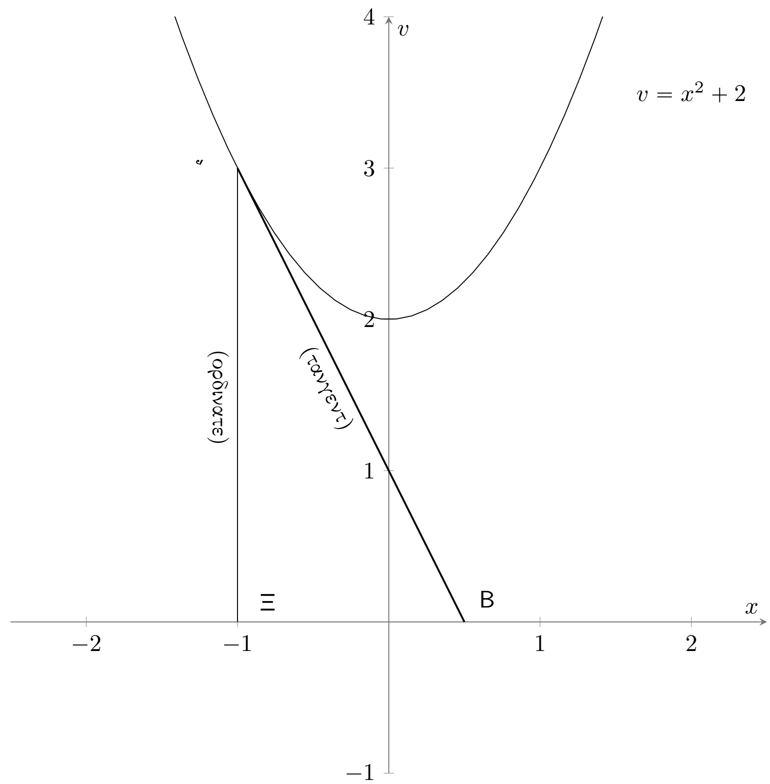
   ωηιλε ιφ $x = -1$, τηεν

   $$XB = \frac{(-1)^2+2}{2(-1)} = -\frac{3}{2}.$$

   Τηε μινυς σιγν μεανς τηατ τηε ποιντ B ις το τηε ριγητ οφ X ιν τηις ςασε. Σεε Φιγυρε 28.

2. Λετ $v = x^3 - 6x^2 + 9x$. Τηεν, ας ωε σαω ιν τηε σεςονδ εξαμπλε (παγε 51, αβοε),

   $$dv = (3x^2 - 12x + 9)\,dx.$$



Φιγυρε 28

Ας ωε σαω ιν τηε σεςονδ εξαμπλε ον παγε 67, $dv = 0$ ονλψ ωηεν $x = 1$ ορ $x = 3$. Τηερεφορε ατ τηεσε ποιντς τηε ςυρε ηας α ηοριζονταλ ταγγεντ.

Βυτ ωηεν $x \neq 1$ ανδ $x \neq 3$, τηεν $dv \neq 0$, ανδ ωε ςαν συβστιτυτε ιντο τηε αβοε εχυατιον φορ XB, γεττινγ

$$\begin{aligned} XB &= \frac{v\,dx}{dv} \\ &= \frac{(x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx}{(3x^2 - 12x + 9)\,dx} \\ &= \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{3x^2 - 12x + 9}. \end{aligned}$$

Ωε μαψ υσε τηις εχυατιον το φινδ ταγγεντς το τηε ςυρε. Ιφ, φορ εξαμπλε, $x = 4$, τηεν

$$\begin{aligned} XB &= \frac{(4)^3 - 6(4)^2 + 9(4)}{3(4)^2 - 12(4) + 9} \\ &= \frac{64 - 96 + 36}{48 - 48 + 9} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Σεε Φιγυρε 29.

7. Προβλεμς αβουτ φινδινγ ταγγεντς

Φορ ςυρες γιεν βψ εαςη οφ τηε φολλοωινγ εχυατιονς, φινδ α γενεραλ εξπρεσσιον φορ τηε λινε XB ςυτ οφφ ον τηε αξις βψ τηε ορδινατε ανδ τηε ταγγεντ, ανδ υσε τηις γενεραλ εξπρεσσιον το φινδ ονε παρτιςυλαρ ταγγεντ.

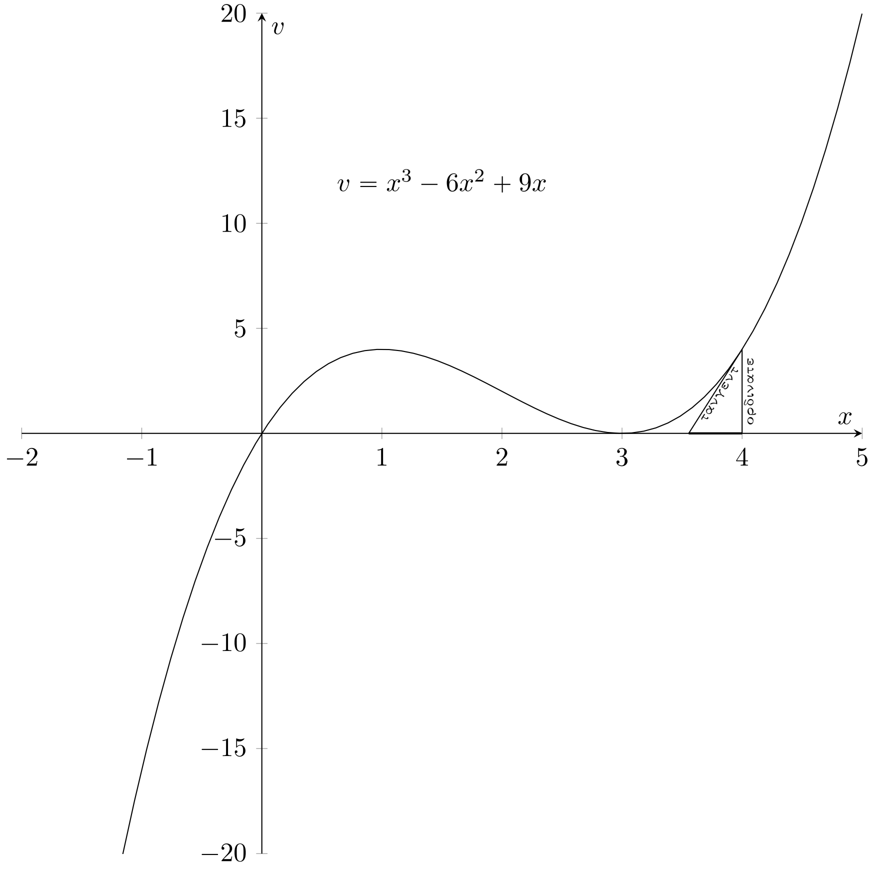
1. $v = x^2 - 4x + 1$.
2. $v = x^2 + 2x - 5$.
3. $v = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.
4. $v = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$.

Νοτε 8

Ηερε ις αν εξαμπλε το σηοω ωηατ Λειβνιζ ις σαψινγ ηερε. Συπποσε τηε γιεν εχυατιον ις

$$2x^2 + 3xy = 1,$$

ανδ ωε ωαντ το φινδ ιτς διφφερεντιαλ εχυατιον. Τηεν τηε *τερμς* οφ τηις εχυατιον αρε $2x^2$, $3xy$, ανδ 1. Το ωριτε δοων τηε διφφερεντιαλ εχυατιον φορ τηις εχυατιον, ωε συβστιτυτε φορ εαςη οφ τηεσε τερμς ιτς διφφερεντιαλ χυαντιτψ· ναμελψ, ωε



Φιγυρε 29

συβστιτυτε $d(2x^2)$ φορ $2x^2$, $d(3xy)$ φορ $3xy$, ανδ $d(1)$ φορ 1. Τηις γιες υς α διφφερεντιαλ εχυατιον:

$$d(2x^2) + d(3xy) = d(1).$$

Νεξτ, φορ χυαντιτιες (2, x, 3, y ανδ 1) ωηιςη αρε νοτ τηεμσελες τερμς, βυτ ςοντριβυτε το φορμινγ τερμς (2 ανδ x, φορ εξαμπλε, ςοντριβυτε το φορμινγ τηε τερμ $2x^2$), ωε δο νοτ διρεςτλψ υσε τηειρ διφφερεντιαλ χυαντιτιες. Ιν οτηερ ωορδς, ωε δο *νοτ* σιμπλψ συβστιτυτε dx φορ x, ανδ δο *νοτ* συβστιτυτε $d(2)d(x)^2$ φορ $d(2x^2)$. Ινστεαδ, ωε υσε Λειβνιζ'ς αλγοριτημ, τηατ ις, ηις σιξ ρυλες φορ φινδινγ διφφερενςες. Ιν τηις ςασε, ωε υσε τηε ποωερ ρυλε, τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε, ανδ τηε ςονσταντ ρυλες το γετ

$$\begin{aligned} d(2x^2) &= 4x\,dx, \\ d(3xy) &= 3x\,dy + 3y\,dx \text{ ανδ} \\ d(1) &= 0. \end{aligned}$$

Ωε υσε τηεσε εχυατιονς το συβστιτυτε ιντο τηε αβοε διφφερεντιαλ εχυατιον, ανδ γετ ουρ φιναλ διφφερεντιαλ εχυατιον:

$$4x\,dx + 3x\,dy + 3y\,dx = 0.$$

Ιφ ουρ οριγιναλ, αλγεβραις, εχυατιον

$$2x^2 + 3xy = 1,$$

ις τηε εχυατιον οφ α ςυρε, τηεν τηε διφφερεντιαλ εχυατιον

$$4x\,dx + 3x\,dy + 3y\,dx = 0$$

ις ανοτηερ εχυατιον φορ τηε σαμε ςυρε, νοω εξπρεσσινγ νοτ τηε υνιερσαλ ρελατιον βετωεεν τωο ορδιναρψ χυανιτιτιες, x ανδ y, βυτ τηε υνιερσαλ ρελατιον βετωεεν τηεσε χυαντιτιες ανδ τηειρ διφφερενςες dx ανδ dy. Θυστ ας ωε ςαν υσε τηε αλγεβραις εχυατιον το σολε γεομετρις προβλεμς, ωε μαψ υσε τηε διφφερεντιαλ εχυατιον το σολε φορ τηε διφφερενςες dx ανδ dy ανδ τηερεβψ φινδ ταγγεντς ορ γρεατεστ ανδ λεαστ λινες.

Νοτε 9

Α σιμπλε εξαμπλε οφ α τρανσςενδεντ λινε ις τηε λινε ωηοσε εχυατιον ις $y = x^x$. Ιτ ις οφ νο δεφινιτε δεγρεε βεςαυσε τηερε ις α αριαβλε ιν αν εξπονεντ: x ςουλδ βε 2, 3, 4, ορ ανψ οτηερ νυμβερ, ανδ σο ωε ςαννοτ σαψ ωηατ τηε δεγρεε οφ τηε τερμ x^x ις. Τηε αλγεβραις ςαλςυλυς ςαννοτ βε αππλιεδ το εχυατιονς λικε τηις βεςαυσε ιτ ονλψ ινςλυδες τηε φιε βασις οπερατιονς Δεσςαρτες μεντιονς ατ τηε βεγιννινγ οφ τηε *Γεομετρψ*: αδδιτιον, συβτραςτιον, μυλτιπλιςατιον, διισιον, ανδ εξτραςτινγ οφ ροοτς. Τηε αλγεβραις ςαλςυλυς δοες νοτ ινςλυδε τακινγ εξπονεντς ωιτη αριαβλε ποωερς, συςη ας x^x. Δεσςαρτες ςαλλς αλλ λινες τηατ ςαν βε ρεπρεσεντεδ βψ τηε αλγεβραις ςαλςυλυς *γεομετρις*, ανδ αλλ οτηερ λινες *μεςηανιςαλ*. (Σεε παγε 16 οφ τηε Στ. Θοην'ς (1998) εδιτιον οφ τηε Γεομετρψ ορ παγε 48 οφ τηε Δοερ (1954) εδιτιον.) Τηε λινες Λειβνιζ ςαλλς *τρανσςενδεντ* ωουλδ τηερεφορε βε ςαλλεδ *μεςηανιςαλ* βψ Δεσςαρτες.

Νοτε 10

Ωε ωιλλ ςομε βαςκ το Λειβνιζ'ς δισςυσσιον οφ ηοω τηε ςαλςυλυς εξτενδς το τρανσςενδεντ λινες ιν τηε φολλοωινγ παπερ, 'Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ.' Ωε δεφινε τηε ςψςλοιδ ανδ φινδ ιτς τρανσςενδεντ εχυατιον ιν τηε νοτες το 'Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ' (παγες 127–129, βελοω).

Νοτε 11

Τηε λαω οφ ηομογενειτψ φορ διφφερεντιαλ χυαντιτιες ρεχυιρες τηατ αλλ τερμς ιν αν εχυατιον βε οφ τηε σαμε λεελ οφ ινφινιτψ (σεε τηε ρεμαρκς αφτερ τηε δεμονστρατιον οφ τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε ον παγε 62, αβοε). Ιφ ονε τερμ οφ αν εχυατιον ις ατ τηε φιρστ λεελ οφ ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες, τηε λεελ οφ σιμπλε διφφερενςες συςη ας dx, τηεν αλλ τερμς μυστ βε ατ τηατ λεελ. Ιφ ονε τερμ οφ αν εχυατιον ις ατ τηε σεςονδ λεελ οφ ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες, συςη ας $(dx)^2$, τηεν αλλ τερμς μυστ βε ατ τηατ λεελ, ανδ σο ον. Τηις λαω τηυς γυαραντεες τηατ νο τερμ ωιλλ βε ινφινιτελψ σμαλλ ορ ινφινιτελψ λαργε ςομπαρεδ το ανψ οτηερ τερμ ιν τηε εχυατιον.

Τηε λαω οφ ηομογενειτψ φορ διφφερεντιαλ χυαντιτιες ωουλδ, ιν γενεραλ, ρεχυιρε τηατ ιν εαςη τερμ οφ αν εχυατιον, τηε συμ οφ τηε εξπονεντς οφ τηε διφφερενςες ις αλωαψς τηε σαμε. Φορ εξαμπλε, ιν τηε τερμ

$$(dx)^2 dy\, dz$$

τηε συμ οφ εξπονεντς ις 4: dx ηας εξπονεντ 2, ωηιλε dy ανδ dz εαςη ηαε εξπονεντ 1 ($dy = dy^1$ ανδ $dz = dz^1$). Συςη α τερμ ωουλδ βε ατ τηε φουρτη λεελ οφ ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες. Ιτ ςουλδ τηερεφορε βε ςομβινεδ ωιτη ανψ οτηερ τερμς φορ ωηιςη τηε συμ οφ εξπονεντς ις 4 το μακε α ηομογενεους διφφερεντιαλ εχυατιον. Φορ εξαμπλε, ωε ςουλδ ςομβινε ιτ ωιτη $(dy)^2(dz)^2$ ανδ $(dx)^4$ το μακε τηε ηομογενεους διφφερεντιαλ εχυατιον

$$(dx)^2 dy\, dz + (dy)^2(dz)^2 = (dx)^4.$$

Νοτε τηατ ονλψ τηε διφφερεντιαλ χυαντιτιες ματτερ φορ Λειβνιζ'ς λαω οφ ηομογενειτψ· ανψ οτηερ φινιτε χυαντιτιες τηατ γο το μακε υπ α τερμ δο νοτ αφφεςτ τηε λεελ οφ ινφινιτψ οφ τηε τερμ. Φορ εξαμπλε, ιν τηε τερμ

$$2x^2(dx)^2 dy\, dz$$

τηε συμ οφ τηε εξπονεντς οφ *διφφερενςες* ις στιλλ 4 (τηε εξπονεντ οφ dx ις 2, ανδ τηε εξπονεντς οφ dy ανδ dz αρε 1), ανδ τηις τερμ ις τηερεφορε ον τηε φουρτη λεελ οφ ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες. Τηε εξπονεντ οφ τηε φινιτε χυαντιτψ x δοες νοτ αφφεςτ τηε λεελ οφ τηε τερμ. Τηις τερμ ςουλδ βε ςομβινεδ ωιτη οτηερ τερμς ον τηε φουρτη λεελ οφ ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες το μακε α ηομογενεους διφφερεντιαλ εχυατιον, συςη ας

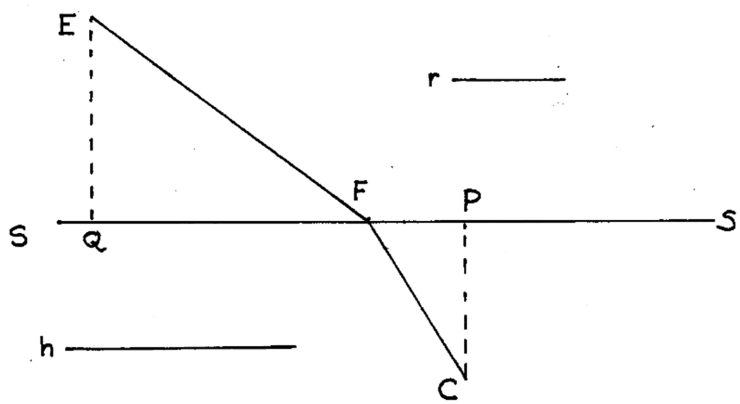
$$2x^2(dx)^2 dy\, dz + z(dy)^2(dz)^2 = (x + 2yz)(dx)^4.$$

Ιν τηε ςασε Λειβνιζ ις δισςυσσινγ ιν τηε τεξτ, ιν εαςη τερμ οφ τηε διφφερεντιαλ εχυατιον τηε συμ οφ τηε εξπονεντς οφ τηε διφφερενςες ις αλωαψς 1: εαςη τερμ ηας ειτηερ dx^1 ορ dy^1, ανδ νο οτηερ διφφερενςες.

Λειβνιζ΄ς λαω οφ ηομογενειτψ ις αναλογους το ῞ιὲτε΄ς αλγεβραις λαω οφ ηομογενειτψ (σεε ῝ηαπτερ III οφ ηις *Ιντροδυςτιον το τηε Αναλψτις Αρτ*), ωηιςη ρεχυιρες τηατ εαςη τερμ οφ αν εχυατιον ρεπρεσεντ α μαγνιτυδε οφ τηε σαμε διμενσιον, ορ ωηατ αμουντς το τηε σαμε τηινγ, τηατ ιν εαςη τερμ τηε συμ οφ τηε εξπονεντς οφ αλλ τηε χυαντιτιες ιν τηατ τερμ βε τηε σαμε.

Νοτε 12

Λειβνιζ ις τηινκινγ οφ σομετηινγ μοινγ φρομ τηε ποιντ C το τηε ποιντ F αλονγ λινε CF (σεε Φιγυρε 30), ανδ τηεν φρομ F το E αλονγ λινε FE. Βψ *δενσιτψ* ηε



Φιγυρε 30

μεανς τηε ποωερ οφ τηε μεδιυμ το ρεσιστ μοτιον, σο τηατ τηε τοταλ διφφιςυλτψ οφ ανψ μοτιον ιν α υνιφορμ μεδιυμ ις εχυαλ το τηε προδυςτ οφ τηε δενσιτψ οφ τηατ μεδιυμ ανδ τηε λενγτη οφ τηε πατη αλονγ ωηιςη τηε μοτιον οςςυρς. (Λειβνιζ αππαρεντλψ ις τρεατινγ δενσιτιες ας λινες, σο τηατ τηε προδυςτ οφ α δενσιτψ ανδ α λινε ις α ρεςτανγλε.) Τηερεφορε, CF τιμες h ις εχυαλ το τηε διφφιςυλτψ οφ τηε μοτιον φρομ C το F, EF τιμες r ις εχυαλ το τηε διφφιςυλτψ οφ τηε μοτιον φρομ F το E, ανδ

$$(CF) \cdot h + (EF) \cdot r$$

ις εχυαλ το τηε τοταλ διφφιςυλτψ οφ τηε μοτιον φρομ C το E. Νοω τηις διφφιςυλτψ ις αριαβλε βεςαυσε τηε ποιντ F ις αριαβλε: F ςουλδ βε ανψωηερε ον τηε λινε SS. Λειβνιζ ωαντς το φινδ ωηερε F ηας το βε φορ τηε μοτιον το βε ας εασψ ας ποσσιβλε, τηατ ις, ηε ωαντς το φινδ τηε ποιντ F σο τηατ

$$(CF) \cdot h + (EF) \cdot r$$

ις ας σμαλλ ας ποσσιβλε.

Ας Λειβνιζ συγγεστς λατερ, τηις εξαμπλε μαψ βε αππλιεδ το οπτιςς. Συπποσε λιγητ μοες φρομ τηε ποιντ C το τηε ποιντ F αλονγ τηε λινε CF, ανδ φρομ τηε ποιντ F το τηε ποιντ E αλονγ τηε λινε FE. Ωε τακε τηε δενσιτψ οφ α μεδιυμ το βε ινερσελψ προπορτιοναλ το τηε σπεεδ ωιτη ωηιςη λιγητ μοες ιν τηατ μεδιυμ, σο τηατ ιφ τηε λιγητ μοες ωιτη σπεεδ v_w ιν τηε ωατερ βελοω SS, ανδ ωιτη σπεεδ v_a ιν τηε αιρ αβοε SS, τηεν τηε δενσιτψ h οφ τηε ωατερ ις εχυαλ το

$$\frac{1}{v_w},$$

ωηιλε τηε δενσιτψ r οφ τηε αιρ ις εχυαλ το

$$\frac{1}{v_a}.$$

Ιφ ωε ςαλλ τηε τιμε τηε λιγητ τακες το μοε αλονγ CF ιν τηε ωατερ t_w, ανδ τηε τιμε ιτ τακες τηε λιγητ το μοε αλονγ FE ιν τηε αιρ t_a, τηεν

$$\begin{aligned} v_w &= \frac{CF}{t_w}, \text{ ανδ} \\ v_a &= \frac{FE}{t_a}. \end{aligned}$$

Τηερεφορε τηε διφφιςυλτψ οφ τηε μοτιον αλονγ CF,

$$\begin{aligned} (CF) \cdot h &= (CF) \cdot \frac{1}{v_w} \\ &= (CF) \cdot \frac{1}{\left(\frac{CF}{t_w}\right)} \\ &= (CF) \cdot \frac{t_w}{CF} \\ &= t_w; \end{aligned}$$

τηατ ις, τηε διφφιςυλτψ οφ τηε μοτιον ις ιν τηις ςασε εχυαλ το τηε τιμε. Λικεωισε, τηε διφφιςυλτψ οφ τηε μοτιον φρομ F το E αλονγ τηε λινε FE ις εχυαλ το τηε τιμε t_a, ανδ τηερεφορε τηε διφφιςυλτψ οφ τηε ωηολε μοτιον φρομ C το E ις εχυαλ το τηε τιμε ιτ τακες. Ιν τηις ςασε Λειβνιζ ις τηερεφορε λοοκινγ φορ τηε πατη λιγητ ςουλδ τακε τηατ ωιλλ τακε τηε λεαστ τιμε το γετ φρομ C το E.

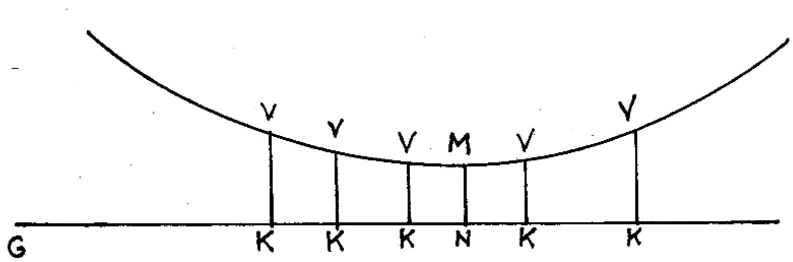
Νοτε 13

Λειβνιζ ις δεφινινγ τηε ςυρε VV σο τηατ ωηεν GK (ιν Φιγυρε 31) ις εχυαλ το τηε λινε QF ιν Φιγυρε 10, τηεν KV (ιν Φιγυρε 11) ις εχυαλ το τηε διφφιςυλτψ οφ τηε πατη φρομ C το E τηρουγη F· τηατ ις, ωηεν

$$GK = QF,$$

τηεν

$$KV = (CF) \cdot h + (EF) \cdot r.$$



Φιγυρε 31

Νοτε 14

Το δεριε Λειβνιζ΄ς εξπρεσσιον φορ f, ωε νοτε τηατ ιτ φολλοως φρομ Προποσιτιον I 47 ιν Ευςλιδ΄ς *Ελεμεντς* τηατ

$$(CF)^2 = (PC)^2 + (FP)^2,$$

ανδ $PC = c$, ωηιλε $FP = p - x$. Συβστιτυτινγ τηεσε εξπρεσσιονς φορ CF, PC, ανδ FP ιντο τηε αβοε εχυατιον, ωε γετ

$$\begin{aligned} f^2 &= c^2 + (p-x)^2 \\ &= c^2 + p^2 - 2px + x^2. \end{aligned}$$

Τακινγ τηε σχυαρε ροοτ οφ εαςη σιδε οφ τηε εχυατιον, ωε γετ Λειβνιζ΄ς εχυατιον:

$$f = \sqrt{c^2 + p^2 - 2px + x^2}.$$

Το δεριε Λειβνιζ΄ς εχυατιον φορ g, ωε αγαιν υσε Προποσιτιον I 47 ιν τηε *Ελεμεντς*, αςςορδινγ το ωηιςη:

$$(EF)^2 = (EQ)^2 + (QF)^2.$$

g ις τηε λινε EF, $EQ = e$, ανδ $QF = x$. Τηερεφορε

$$g^2 = e^2 + x^2,$$

ανδ, αφτερ ωε τακε τηε σχυαρε ροοτ οφ εαςη σιδε,

$$g = \sqrt{e^2 + x^2}.$$

Νοτε 15

Ηερε ις α δεριατιον οφ Λειβνιζ'ς εξπρεσσιον φορ τηε διφφερενςες οφ ω:

$$
\begin{aligned}
d\omega &= d(h\sqrt{l} + r\sqrt{m}) \\
&= d(h\sqrt{l}) + d(r\sqrt{m}) && \text{(αδδιτιον ρυλε)} \\
&= hd(\sqrt{l}) + rd(\sqrt{m}) && \text{(ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε)} \\
&= h\frac{dl}{2\sqrt{l}} + r\frac{dm}{2\sqrt{m}} && \text{(ροοτ ρυλε)} \\
&= \frac{h\,dl}{2\sqrt{l}} + \frac{r\,dm}{2\sqrt{m}} && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)}
\end{aligned}
$$

Νοτε 16

Ηερε ις α δεριατιον οφ Λειβνιζ'ς εξπρεσσιον φορ τηε διφφερενςες οφ l:

$$
\begin{aligned}
dl &= d(c^2 + p^2 - 2px + x^2) \\
&= d(c^2) + d(p^2) - d(2px) + d(x^2) && \text{(αδδιτιον ρυλε)} \\
&= 0 + 0 - 2p\,dx + d(x^2) && \text{(ςονσταντ ρυλες)} \\
&= -2p\,dx + 2x\,dx && \text{(ποωερ ρυλε)} \\
&= 2dx(-p + x) && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)} \\
&= -2dx(p - x) && \text{(ορδιναρψ αλγεβρα)}
\end{aligned}
$$

Νοτε 17

Λειβνιζ ηας θυστ σηοων τηατ

$$
d\omega = \frac{h\,dl}{2\sqrt{l}} + \frac{r\,dm}{2\sqrt{m}} = 0, \tag{1}
$$

ανδ τηατ

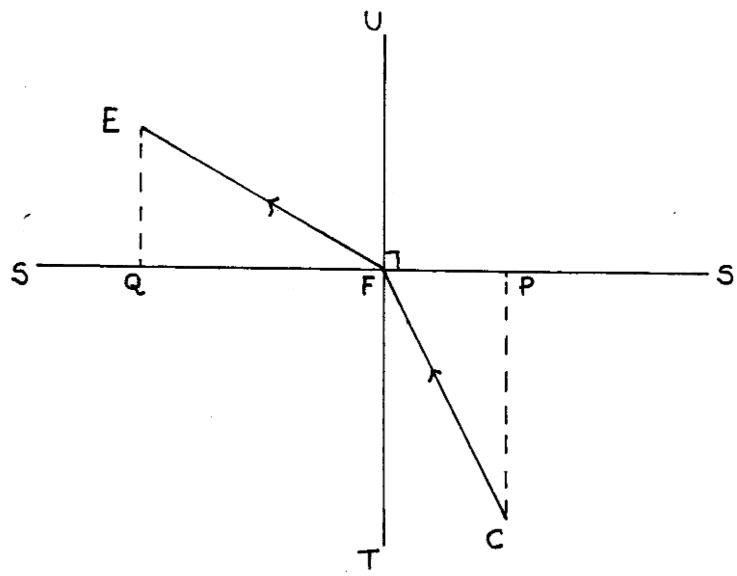
$$
\begin{aligned}
dl &= -2dx(p - x), && (2) \\
dm &= 2x\,dx, && (3) \\
\sqrt{l} &= f, \text{ ανδ} && (4) \\
\sqrt{m} &= g. && (5)
\end{aligned}
$$

Συβστιτυτινγ τηε αλυες φρομ εχυατιονς 2 τηρουγη 5 ιντο εχυατιον 1 γιες

$$
\begin{aligned}
\frac{h(-2dx(p - x))}{2f} + \frac{r(2x\,dx)}{2g} &= 0, \text{ ανδ τηερεφορε} \\
-\frac{h(p - x)}{f} + \frac{rx}{g} &= 0, \text{ ανδ} \\
\frac{h(p - x)}{f} &= \frac{rx}{g}.
\end{aligned}
$$

Νοτε 18

Τηις προπορτιον ις υσυαλλψ ςαλλεδ *Σνελλ΄ς Λαω*, αφτερ Ωιλλεβρορδ Σνελλιυς, ωηο δισςοερεδ ιτ ιν 1621. Ατ τηε τιμε Λειβνιζ ωροτε ‘Α Νεω Μετηοδ,’ Δεσςαρτες ανδ Ηυψγενς ηαδ αλρεαδψ πυβλισηεδ δεριατιονς οφ ιτ. Ιφ ωε δραω τηε λινε UFT περπενδιςυλαρ το τηε λινε QFP ιν Φιγυρε 32, τηεν τηε ανγλε οφ ινςιδενςε ις $\angle CFT$



Φιγυρε 32

ανδ τηε ανγλε οφ ρεφραςτιον ις $\angle EFU$. Ωε μαψ ασσυμε τηατ $FC = EF = 1$. Τηεν

$$\sin(\angle CFT) = \sin(\angle FCP) = \frac{FP}{FC} = FP,$$

ανδ

$$\sin(\angle EFU) = \sin(\angle FEQ) = \frac{FQ}{EF} = FQ.$$

Νοτε 19

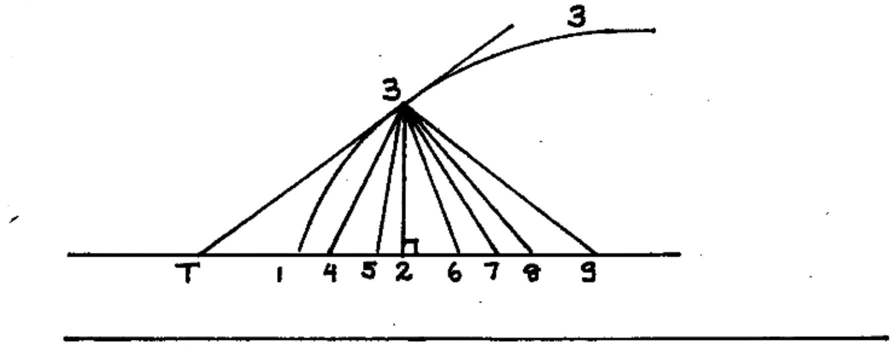
Ιν Θυνε οφ 1682 ιν αν αρτιςλε τιτλεδ ‘Τηε Υνιχυε Πρινςιπλε οφ Οπτιςς, ἂτοπτριςς, ανδ Διοπτριςς.’ Τηερε ηε αννουνςες, ωιτηουτ δεμονστρατιον, τηατ ηις ‘μετηοδ οφ μαξιμα ανδ μινιμα’ ςαν βε υσεδ το προε Σνελλ΄ς λαω, ανδ μαϰες τηε φολλοωινγ ρεμαρϰ:

> Ωε ηαε τηερεφορε, βψ αππλψινγ α σινγλε πρινςιπλε, ρεδυςεδ αλλ τηε Λαως οφ ραψς οφ λιγητ τηατ ηαε βεεν προεδ βψ εξπεριενςε το πυρε Γεομετρψ ανδ ςαλςυλατιον· ριγητλψ ςονσιδερεδ, τηις πρινςιπλε ςομες φρομ α φιναλ ςαυσε: φορ τηε ραψ οφ λιγητ γοινγ ουτ φρομ C δοες

νοτ ςονσιδερ ηοω ιτ μιγητ μοστ εασιλψ αρριε ατ E, νορ ις ιτ ςαρριεδ τηερε βψ ιτσελφ· βυτ τηε Φουνδερ οφ τηινγς σο ςρεατεδ λιγητ, τηατ τηις μοστ βεαυτιφυλ ουτςομε μιγητ αρισε φρομ λιγητ΄ς νατυρε. Ανδ τηυς τηοσε ωηο φολλοω *Δεσςαρτες* ανδ ρεθεςτ *φιναλ ςαυσες* ιν Πηψσιςς αρε ερψ μυςη ιν ερρορ (νοτ το σαψ ανψτηινγ μορε γραε), σινςε βεσιδες αδμιρατιον οφ διινε ωισδομ, φιναλ ςαυσες οφφερ υς α μοστ βεαυτιφυλ *πρινςιπλε* φορ *δισςοερινγ* τηε προπερτιες οφ τηοσε τηινγς ωηοσε ιννερ νατυρε ις νοτ ψετ σο ςλεαρλψ κνοων βψ υς τηατ ωε αρε αβλε το υσε προξιματε εφφιςιεντ ςαυσες ανδ εξπλιςατε τηε μαςηινες ωηιςη τηε φουνδερ ηας υσεδ το προδυςε τηοσε εφφεςτς ανδ οβταιν ηις ενδς. Ηενςε ωε αλσο υνδερστανδ τηατ τηε μεδιτατιονς οφ τηε ανςιεντς ιν τηεσε ματτερς τοο αρε νοτ ας ςοντεμπτιβλε ας τηεψ σεεμ νοω το σομε.

Νοτε 20

Τηε ςυρε 133 [Φιγυρε 33] ις τηε σολυτιον οφ α λοςυς προβλεμ: ιφ σιξ ποιντς (ηερε

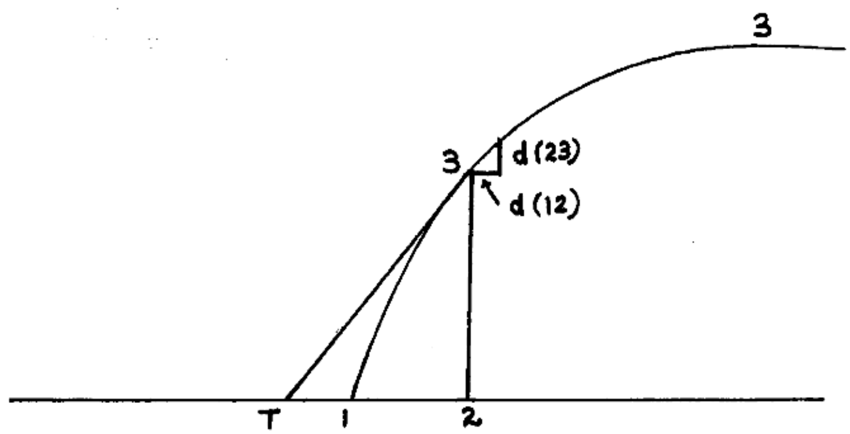


Φιγυρε 33

4, 5, 6, 7, 8, ανδ 9) αρε γιεν, αλλ ον ονε στραιγητ λινε (ηερε τηε λινε Τ14526789), ανδ ιφ στραιγητ λινες αρε δραων το εαςη οφ τηεσε γιεν ποιντς φρομ ονε ποιντ (ηερε ωε δραω τηε στραιγητ λινες 34, 35, 36, 37, 38, ανδ 39, αλλ φρομ τηε ονε ποιντ 3), συςη τηατ αλλ τηεσε δραων λινες αρε τογετηερ εχυαλ το ανοτηερ γιεν λινε (ηερε τηε λινε g, σο τηατ $34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 = g$), τηεν τηε ονε ποιντ (3) λιες ον τηε λοςυς ιν χυεστιον (ηερε τηε λινε 133). Ιφ τηερε ωερε ονλψ τωο ποιντς, 4 ανδ 5, ινστεαδ οφ τηε σιξ ποιντς Λειβνιζ τακες ας γιεν, τηεν τηε λοςυς ιν χυεστιον ωουλδ βε αν ελλιπσε ωηοσε φοςι αρε τηε ποιντς 4 ανδ 5, ανδ ωηοσε μαθορ αξις ις εχυαλ το g· φορ αςςορδινγ το Προποσιτιον 52 οφ Βοοκ ΙΙΙ οφ Απολλονιυσ΄ *ὃνιςς*, τηε συμ οφ τηε τωο λινες φρομ ανψ ποιντ ον αν ελλιπσε το τηε τωο φοςι ις αλωαψς εχυαλ το τηε μαθορ αξις.

Λειβνιζ δοες νοτ φινδ αν αλγεβραις εχυατιον ρελατινγ τηε αβσςισσα ανδ ορδινατε οφ ηις λοςυς, ας Δεσςαρτες δοες φορ Παππυσ΄ λοςυς προβλεμ. Ινστεαδ, ηε φινδς α προπορτιον γιινγ τηε σηαπε οφ τηε τριανγλε (Τ23) φορμεδ βψ τηε ταγγεντ, τηε ορδινατε, ανδ τηε αξις φορ ανψ ποιντ 3· ονςε ωε ηαε φουνδ τηε σηαπε οφ τηε τριανγλε (Τ23), ωε κνοω ωηερε τηε τανγεντ μυστ βε. Λειβνιζ΄ς προπορτιον τηυς γιες υς α ωαψ το φινδ τηε τανγεντ το τηε ςυρε 133 ατ ανψ ποιντ.

Ιτ ις νοτ νεςεσσαρψ το γο τηρουγη α δεταιλεδ δεριατιον οφ Λειβνιζ΄ς προπορτιον, βυτ φορ τηοσε ωηο αρε ιντερεστεδ, ιν τηε ρεμαινδερ οφ τηις νοτε ωε γιε α ςομπλετε αςςουντ οφ ηοω το φινδ τηε ρατιο οφ τηε λινε 23 το τηε λινε $T2$. Ωε βεγιν βψ νοτινγ τηατ ηις ρατιο ις εχυαλ το τηε ρατιο οφ $d(23)$ το $d(12)$· φορ τηε τριανγλε $3T2$ ις σιμιλαρ το τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε, ωηοσε ερτιςαλ σιδε ις εχυαλ το $d(23)$, ανδ ωηοσε ηοριζονταλ σιδε ις εχυαλ το $d(12)$ [Σεε Φιγυρε 34]. Νοω το φινδ τηε ρελατιον βετωεεν τηεσε τωο διφφερενςες, ωε σταρτ βψ υσινγ τηε



Φιγυρε 34

εχυατιον Λειβνιζ υσες το δεφινε τηε ςυρε 13:

$$34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 = g,$$

ωηερε g ις α ςονσταντ. Ωε τηεν φινδ τηε διφφερενςε οφ εαςη σιδε οφ τηις εχυατιον, ανδ υσε τηε αδδιτιον ανδ ςονσταντ ρυλες, το γετ τηε διφφερεντιαλ εχυατιον

$$d(34) + d(35) + d(36) + d(37) + d(38) + d(39) = dg = 0.$$

Βυτ ωε ωαντ αν εχυατιον φορ $d(12)$ ανδ $d(23)$, νοτ $d(34)$, $d(35)$, ετς. Ωε ςαννοτ ιμμεδιατελψ φινδ αν εχυατιον φορ $d(12)$ ανδ $d(23)$, βυτ ωε ςαν ατ λεαστ φινδ αν εχυατιον ρελατινγ $d(23)$ ανδ τηε διφφερενςες οφ σομε οτηερ λινες ον τηε αξις βεσιδες 12. Το δο τηις, ωε υσε Προποσιτιον Ι 47 ιν Ευςλιδ΄ς *Ελεμεντς* το εξπρεσς εαςη οφ τηε λινες 34, 35, ετς., ιν τερμς οφ τηε λινε 23 ανδ α λινε ον τηε αξις:

$$\begin{aligned}(34)^2 &= (42)^2 + (23)^2\\ (35)^2 &= (52)^2 + (23)^2\\ (36)^2 &= (26)^2 + (23)^2\\ &\text{ετς.}\end{aligned}$$

Τηερεφορε

$$\begin{aligned}
(34) &= \sqrt{(42)^2+(23)^2} \\
(35) &= \sqrt{(52)^2+(23)^2} \\
(36) &= \sqrt{(26)^2+(23)^2} \\
&\text{ετς.}
\end{aligned}$$

Νοω ωε τακε τηε διφφερενςες οφ αλλ τηεσε εχυατιονς, γεττινγ

$$\begin{aligned}
d(34) &= d(\sqrt{(42)^2+(23)^2}) \\
d(35) &= d(\sqrt{(52)^2+(23)^2}) \\
d(36) &= d(\sqrt{(26)^2+(23)^2}) \\
&\text{ετς.}
\end{aligned}$$

Ωε τηεν υσε τηε ρυλες φορ τηε ςαλςυλυς το σιμπλιφψ αλλ τηε διφφερενςες ον τηε ριγητ σιδες οφ τηεσε εχυατιονς. Φορ εξαμπλε, το φινδ $d(\sqrt{(42)^2+(23)^2})$, ωε φιρστ σετ $a=(42)^2+(23)^2$, σο τηατ

$$d(34)=d(\sqrt{(42)^2+(23)^2})=d\sqrt{a}.$$

Αςςορδινγ το τηε ροοτ ρυλε,

$$d(\sqrt{a})=\frac{da}{2\sqrt{a}}.$$

Το γετ αν εξπρεσσιον φορ $d(\sqrt{a})$ ιν τερμς οφ τηε λινες (42) ανδ (23) ανδ τηειρ διφφερενςες, ωε νεεδ το φινδ da:

$$\begin{aligned}
da &= d((42)^2+(23)^2) \\
&= d((42)^2)+d((23)^2) && \text{(αδδιτιον ρυλε)} \\
&= 2(42)d(42)+2(23)d(23) && \text{(ποωερ ρυλε).}
\end{aligned}$$

Ιν τηε ενδ, σινςε ωε ωαντ το φινδ τηε ρελατιον βετωεεν $d(12)$ ανδ $d(23)$, ωε ωαντ το φινδ αν εχυατιον ινολινγ νο οτηερ διφφερενςες βεσιδες τηεσε. Ωε τηερεφορε εξπρεσς 42 ιν τερμς οφ 12:

$$42=12-14,$$

ανδ τακε διφφερενςες

$$\begin{aligned}
d(42) &= d(12)-d(14) && \text{(αδδιτιον ρυλε)} \\
&= d(12). && \text{(ςονσταντ ρυλε)}
\end{aligned}$$

Ωε μαψ τηερεφορε συβστιτυτε $d(12)$ φορ $d(42)$ ιν ουρ εξπρεσσιον φορ da:

$$\begin{aligned}
da &= 2(42)d(42)+2(23)d(23) \\
&= 2(42)d(12)+2(23)d(23).
\end{aligned}$$

Τηερεφορε

$$\begin{aligned}
d(34) &= d(\sqrt{a}) \\
&= \frac{da}{2\sqrt{a}} \\
&= \frac{2(42)d(12) + 2(23)d(23)}{2\sqrt{a}} \\
&= \frac{42}{\sqrt{a}}\, d(12) + \frac{23}{\sqrt{a}}\, d(23) \\
&= \frac{42}{34}\, d(12) + \frac{23}{34}\, d(23).
\end{aligned}$$

Σιμιλαρλψ ωε ςαν σηοω τηατ

$$\begin{aligned}
d(35) &= \frac{52}{35}\, d(12) + \frac{23}{35}\, d(23) \\
d(36) &= -\frac{62}{36}\, d(12) + \frac{23}{36}\, d(23) \\
d(37) &= -\frac{72}{37}\, d(12) + \frac{23}{37}\, d(23) \\
& \text{ετς.}
\end{aligned}$$

(Τηε μινυς σιγνς ιν τηε εξπρεσσιονς φορ $d(36)$, $d(37)$, ετς., αρε τηερε βεςαυσε τηε ποιντς 6, 7 ανδ σο ον αρε το τηε ριγητ οφ τηε ποιντ 2, ανδ τηερεφορε $62 = 16 - 12$ ανδ $d(62) = -d(12)$, ετς.)

Ωε νοω ρετυρν το τηε οριγιναλ διφφερεντιαλ εχυατιον φορ τηε ςυρε, ανδ συβστιτυτε τηε εξπρεσσιονς ωε ηαε φουνδ φορ $d(34)$, $d(35)$, ετς.:

$$
\begin{aligned}
0 &= d(34) + d(35) + d(36) + d(37) + d(38) + d(39) \\
&= +\frac{42}{34}\,d(12) + \frac{23}{34}\,d(23) \\
&\quad +\frac{52}{35}\,d(12) + \frac{23}{35}\,d(23) \\
&\quad -\frac{62}{36}\,d(12) + \frac{23}{36}\,d(23) \\
&\quad -\frac{72}{37}\,d(12) + \frac{23}{37}\,d(23)
\end{aligned}
$$

ετς.

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{42}{34} + \frac{52}{35} - \frac{62}{36} - \frac{72}{37} - \frac{82}{38} - \frac{92}{39}\right) d(12) \\
&\quad + \left(\frac{23}{34} + \frac{23}{35} + \frac{23}{36} + \frac{23}{37} + \frac{23}{38} + \frac{23}{39}\right) d(23)
\end{aligned}
$$

Φιναλλψ, ωε υσε τηις εχυατιον το σολε φορ τηε ρατιο οφ $d(12)$ το $d(23)$ (τηατ ις, τηε ρατιο οφ $T2$ το 23). Συβτραςτινγ τηε φιρστ τερμ ον τηε ριγητ φρομ βοτη σιδες οφ τηε εχυατιον γιες:

$$
\left(-\frac{42}{34} - \frac{52}{35} + \frac{62}{36} + \frac{72}{37} + \frac{82}{38} + \frac{92}{39}\right) d(12) = \left(\frac{23}{34} + \frac{23}{35} + \frac{23}{36} + \frac{23}{37} + \frac{23}{38} + \frac{23}{39}\right) d(23).
$$

Διιδινγ βοτη σιδες βψ $d(23)$ ανδ $\left(-\frac{42}{34} - \frac{52}{35} + \frac{62}{36} + \frac{72}{37} - \frac{82}{38} + \frac{92}{39}\right)$ γιες:

$$
\frac{d(12)}{d(23)} = \frac{\frac{23}{34} + \frac{23}{35} + \frac{23}{36} + \frac{23}{37} + \frac{23}{38} + \frac{23}{39}}{\left(-\frac{42}{34} - \frac{52}{35} + \frac{62}{36} + \frac{72}{37} + \frac{82}{38} + \frac{92}{39}\right)}.
$$

Τηις λαστ εχυατιον ις εχυιαλεντ το τηε προπορτιον Λειβνιζ γιες.

Νοτε 21

Τηατ τηε σαμε ρυλε αππλιες νο ματτερ ηοω μανψ ποιντς αρε γιεν ις περηαπς τηε ρεασον Λειβνιζ ςηοοσες το ρεπρεσεντ τηε ποιντς ωιτη νυμβερς ρατηερ τηαν λεττερς: τηερε ις νο λιμιτ το τηε νυμβερ οφ σψμβολς φορ νυμβερς, ανδ ιτ μαψ βε εασιερ το σεε τηε γενεραλ παττερν ιν τηε ρυλε ωηεν ιτ ις εξπρεσσεδ ιν νυμβερς.

Νοτε 22

Τηε σολυτιον το Δε Βεαυνε΄ς προβλεμ ις α λογαριτημις λινε, ανδ Λειβνιζ σεεμς το ασσυμε τηατ ρεαδερς αρε φαμιλιαρ ωιτη λογαριτημις λινες. Σινςε μοστ οφ υς αρε νοτ φαμιλιαρ ωιτη λογαριτημις λινες, ιν τηις νοτε ωε γιε α βριεφ ιντροδυςτιον το τηεμ.

Τηε νοτε ις διιδεδ ιντο σιξ παρτς:

1. α δεφινιτιον οφ λογαριτημις λινες·
2. διφφερεντιαλ εχυατιονς φορ λογαριτημις λινες·
3. νατυραλ λογαριτημς·
4. τηε διφφερενςε οφ e^x·
5. νοτατιον φορ λογαριτημς· ανδ
6. τηε διφφερενςε οφ $\log x$, ανδ φινδινγ διφφερενςες οφ χυαντιτιες ινολινγ λογαριτημς.

1. Α δεφινιτιον οφ λογαριτημις λινες

Αν *αριτημετις προγρεσσιον* ις α σεριες οφ χυαντιτιες ωηοσε συςςεσσιε διφφερενςες αρε αλωαψς εχυαλ. Τηε σιμπλεστ εξαμπλε ις τηε σεριες οφ νυμβερς

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots;$$

τηε διφφερενςε οφ ανψ τωο ςονσεςυτιε νυμβερς ιν τηις σεριες ις αλωαψς εχυαλ το 1.

Α *γεομετρις προγρεσσιον* ις α σεριες οφ χυαντιτιες ωηοσε συςςεσσιε ρατιος αρε αλωαψς τηε σαμε. Α σιμπλε γεομετρις προγρεσσιον ις τηε σεριες οφ νυμβερς

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ldots;$$

ανψ τωο ςονσεςυτιε νυμβερς ιν τηις σεριες αρε αλωαψς ιν α τωο το ονε ρατιο.

Α *λογαριτημις λινϵ* μαψ βε δεφινεδ ας ανψ λινε συςη τηατ ανψ αριτημετις προγρεσσιον οφ ιτς αβσςισσας ςορρεσπονδς το α γεομετρις προγρεσσιον οφ ιτς ορδινατες. Σεε Φιγυρε 35. Τηερε τηε λινε AB ις αν αξις φορ τηε λογαριτημις λινε CF. Τηερεφορε, ιφ

$$AG_1 = G_1G_2 = G_2G_3$$

(σο τηατ τηε αβσςισσας AG_1, AG_2, AG_3 φορμ αν αριτημετις προγρεσσιον), τηεν τηε ορδινατες AC, G_1L_1, G_2L_2, ανδ G_3L_3 οφ CD φορμ α γεομετρις προγρεσσιον, τηατ ις

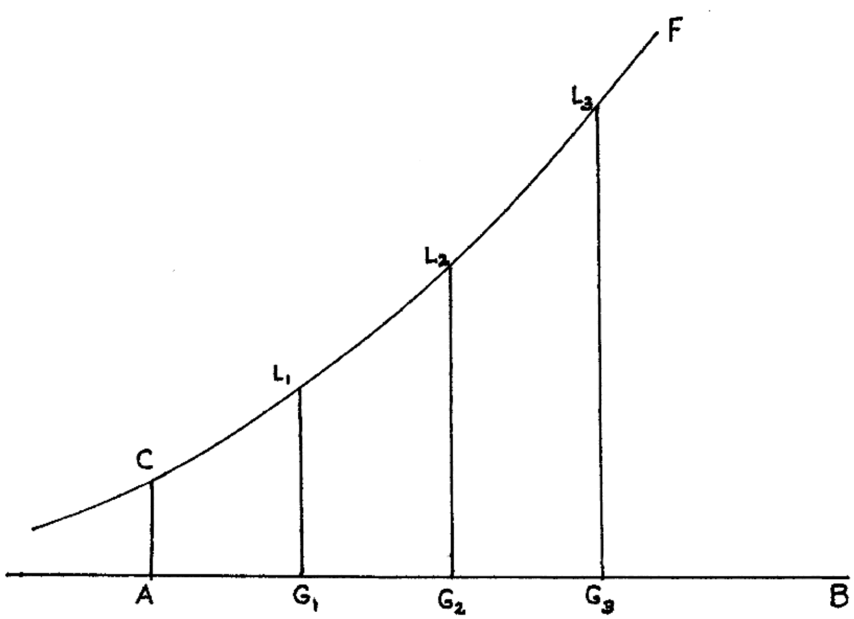
$$AC:G_1L_1 :: G_1L_1:G_2L_2 :: G_2L_2:G_3L_3.$$

Ιφ τηε ορδινατες οφ α λογαριτημις λινε αρε *νυμβερς*, τηεν τηε αβσςισσας οφ τηατ σαμε λινε αρε ςαλλεδ τηε *λογαριτημς* οφ τηοσε νυμβερς (ωιτη ρεσπεςτ το τηατ λινε). Φορ εξαμπλε, ιν Φιγυρε 35, ιφ

$$AG_1 = 1,\ AG_2 = 2,\ AG_3 = 3,\ \ldots,$$

ανδ

$$G_1L_1 = 2,\ G_2L_2 = 4,\ G_3L_3 = 8,\ \ldots,$$



Φιγυρε 35

τηεν 1 ωουλδ βε τηε λογαριτημ οφ τηε νυμβερ 2, 2 ωουλδ βε τηε λογαριτημ οφ τηε νυμβερ 4, 3 ωουλδ βε τηε λογαριτημ οφ τηε νυμβερ 8, ανδ σο ον. Τηε σεριες οφ λογαριτημς,

$$1,\ 2,\ 3,\ \text{ετς.}$$

ις αν αριτημετις προγρεσσιον, ανδ τηε σεριες οφ ςορρεσπονδινγ νυμβερς,

$$2,\ 4,\ 8,\ \text{ετς.}$$

ις α γεομετρις προγρεσσιον.

Νοτε τηατ ωηεν ωε εξπρεσς νυμβερς ας ποωερς, τηειρ εξπονεντς αρε λογαριτημς. Φορ εξαμπλε, ωε ςαν εξπρεσς τηε γεομετρις προγρεσσιον

$$2,\ 4,\ 8,\ \text{ετς.}$$

ας α προγρεσσιον οφ ποωερς,

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \text{ετς.}\ .$$

Τηε ποωερ οφ εαςη νυμβερ ις ιτς ςορρεσπονδινγ λογαριτημ: τηε λογαριτημ οφ 2^1 ις 1, τηε λογαριτημ οφ 2^2 ις 2, τηε λογαριτημ οφ 2^3 ις 3, ανδ σο ον. Ιν γενεραλ ιφ ιν Φιγυρε 35 ωε ασσυμε τηατ τηε φιρστ ορδινατε $AC = 1$, τηατ $AG_1 = G_1G_2 = G_2G_3$ ετς., ανδ ωε λετ

$$k = \frac{G_1L_1}{AC},$$

τηεν βεςαυσε τηε ορδινατες AC, G_1L_1, G_2L_2 αρε ιν α γεομετρις προγρεσσιον,

$$k = \frac{G_1L_1}{AC} = \frac{G_2L_2}{G_1L_1} = \frac{G_3L_3}{G_2L_2} = \cdots .$$

Τηερεφορε

$$\begin{array}{lllll} G_1L_1 & = & k(AC) & = & k, \\ G_2L_2 & = & k(G_1L_1) & = & k^2, \\ G_3L_3 & = & k(G_2L_2) & = & k^3, \text{ ετς.} \end{array}$$

Ιφ ωε δενοτε τηε αβσςισσα AG βψ x ανδ τηε ορδινατες GL βψ w, τηις μεανς τηατ ωηεν

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ \text{ανδ σο ον},$$

τηεν

$$w = k^1,\ k^2,\ k^3,\ \text{ανδ σο ον·}$$

ιν οτηερ ωορδς, ωηενεερ x ις α ποσιτιε ιντεγερ, τηεν

$$w = k^x.$$

Τηε λογαριτημ οφ k^x ις ιτς εξπονεντ, x.

Ωιτη α λιττλε μορε ωορκ ωε ςουλδ σηοω τηατ ωηενεερ x ις α ρατιοναλ νυμβερ (τηατ ις, α φραςτιον ωηοσε νυμερατορ ανδ δενομινατορ αρε βοτη ιντεγερς), τηεν τηε σαμε εχυατιον ηολδς. Ιτ ις τηερεφορε ρεασοναβλε το ασσυμε τηατ φορ *ανψ* νυμβερ x,

$$w = k^x. \tag{1}$$

Εχυατιον 1 ις αν ορδιναρψ εχυατιον φορ τηε λογαριτημις λινε CF. Νοτε τηατ ιτ ις ιν φαςτ α *τρανσςενδεντ* εχυατιον, τηατ ις, αν εχυατιον οφ νο δεφινιτε δεγρεε (σεε παγε 34 οφ ‘Α Νεω Μετηοδ,’ ανδ Νοτε 9, αβοε)· φορ τηε αριαβλε x ις ιν αν εξπονεντ.

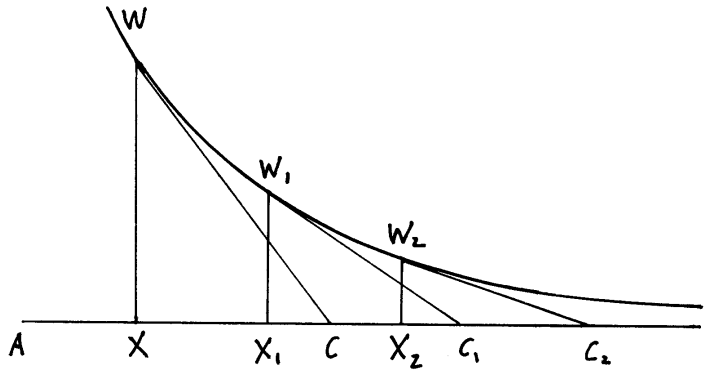
Τηε ωορδ *λογαριτημ* ςομες φρομ τηε Γρεεκ ωορδς λόγος (*ρατιο*) ανδ ἀριθμός (*νυμβερ*): α λογαριτημ ις α νυμβερ οφ α ρατιο. Ιν ουρ εξαμπλε, τηε λογαριτημ οφ 2 ις 1, ανδ 2 ις το 1 ιν τηε *σιμπλε* ρατιο οφ 2 το 1. Τηε λογαριτημ οφ 4 ις 2, ανδ 4 ις το 1 ιν τηε *δυπλιςατε* ρατιο οφ 2 το 1:

$$4:2 :: 2:1.$$

Τηε λογαριτημ οφ 8 ις 3, ανδ 8 ις το 1 ιν τηε *τριπλιςατε* ρατιο οφ 2 το 1:

$$8:4 :: 4:2 :: 2:1.$$

Ιν γενεραλ, ωηεν τηε λογαριτημ AG ις α ωηολε νυμβερ, ιτ εξπρεσσες τηε δεγρεε το ωηιςη τηε ρατιο οφ GL το AC ις ςομπουνδεδ οφ τηε ρατιο οφ 2 το 1. Οφ ςουρσε, AG νεεδ νοτ αλωαψς βε α ωηολε νυμβερ.



Φιγυρε 36

2. Διφφερεντιαλ εχυατιονς φορ λογαριτημις λινες

Λειβνιζ ηας σηοων τηατ τηε λινε WW (ιν Λειβνιζ'ς Φιγυρε 36) ωηιςη ις α σολυτιον το Δε Βεαυνε'ς προβλεμ ις α σολυτιον το τηε διφφερεντιαλ εχυατιον

$$w = \frac{a}{b}dw, \tag{2}$$

ωηερε $a = XC$ ανδ $b = dx$ αρε ςονσταντς. Ηε τηεν ςλαιμς τηατ το σαψ τηατ α λινε ις α σολυτιον το εχυατιον 2 ις εχυιαλεντ το σαψινγ τηατ WW ις α λογαριτημις λινε· τηατ ις, τηατ ιφ α λινε ις α λογαριτημις λινε τηεν ιτ σατισφιες εχυατιον 2, ανδ, ςονερσελψ, τηατ ιφ α λινε σατισφιες εχυατιον 2 τηεν ιτ ις α λογαριτημις λινε. Ιν οτηερ ωορδς, ωε ηαε τηε φολλοωινγ τωο τηεορεμς:

Τηεορεμ 1 *Ιφ* WW *ις α λογαριτημις λινϵ, τηϵν*

$$w = \frac{a}{b}dw,$$

ωηϵρϵ $a = XC$ *ανδ* $b = dx$ *αρϵ ςονσταντς.*

Τηεορεμ 2 *Ιφ* WW *ις α λινϵ σατισφψινγ τηϵ διφφϵρϵντιαλ ϵχυατιον*

$$w = \frac{a}{b}dw,$$

ωηϵρϵ $a = XC$ *ανδ* $b = dx$ *αρϵ ςονσταντς, τηϵν* WW *ις α λογαριτημις λινϵ.*

Ωε ωιλλ γιε α δεμονστρατιον οφ Τηεορεμ 1 ηερε, σηοωινγ τηατ ανψ λογαριτημις λινε ις α σολυτιον οφ Δε Βεαυνε'ς προβλεμ. Τηεορεμ 2, τηε ςονερσε οφ Τηεορεμ 1, ις μορε διφφιςυλτ, ανδ ωε δο νοτ δεμονστρατε ιτ.

Δεμονστρατιον οφ Τηεορεμ 1: Λετ WW βε α λογαριτημις λινε ωηοσε ορδινατες $WX = w$ ανδ ωηοσε αβσςισσας $AX = x$. Ωε σαψ τηατ WW σατισφιες τηε διφφερεντιαλ εχυατιον 2:

$$w = \frac{a}{b}dw,$$

ωηερε a ις α ςονσταντ εχυαλ το τηε διστανςε XC ον τηε αξις βετωεεν τηε ορδινατε WX ανδ τηε τανγεντ WC οφ τηε λινε WW, ανδ $b = dx$, τηε διφφερενςε οφ τηε αβσςισσας AX.

Φορ λετ AX, AX_1, AX_2, ανδ σο ον, βε αν αριτημετις προγρεσσιον οφ ινφινιτελψ ςλοσε αβσςισσας, ανδ λετ τηε ινφινιτελψ σμαλλ διφφερενςε βετωεεν ςονσεςυτιε αβσςισσας ιν τηις σεριες βε $b = dx$. Τηεν, σινςε WW ις α λογαριτημις λινε, τηε ςορρεσπονδινγ σεριες οφ ορδινατες XW, X_1W_1, X_2W_2, ανδ σο ον, ις α γεομετρις σεριες· τηατ ις, τηερε ις ονε ςονσταντ ρατιο c συςη τηατ

$$c = \frac{w_1}{w} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{w_3}{w_2}, \text{ ετς.}$$

(Σινςε w_1 ις ινφινιτελψ ςλοσε το w, τηε χυαντιτψ c ις ινφινιτελψ ςλοσε το 1.) Τηερεφορε

$$w_1 = cw,\ w_2 = cw_1,\ w_3 = cw_2,\ etc.$$

Τηερεφορε, ατ τηε ποιντ W,

$$\begin{aligned} dw &= w_1 - w \\ &= cw - w \\ &= (c-1)w, \end{aligned}$$

ωηερε $c - 1$ ις ινφινιτελψ σμαλλ. Λικεωισε, ατ τηε ποιντ W_1,

$$\begin{aligned} dw_1 &= w_2 - w_1 \\ &= cw_1 - w_1 \\ &= (c-1)w_1. \end{aligned}$$

Α σιμιλαρ εχυατιον ωιλλ ηολδ φορ W_2, W_3, ανδ, ιν φαςτ, φορ *ανψ* ποιντ ον τηε λογαριτημις λινε WW. Τηερεφορε, νο ματτερ ωηατ τηε αλυε οφ τηε ορδινατε w,

$$dw = (c-1)w,$$

ανδ τηερεφορε

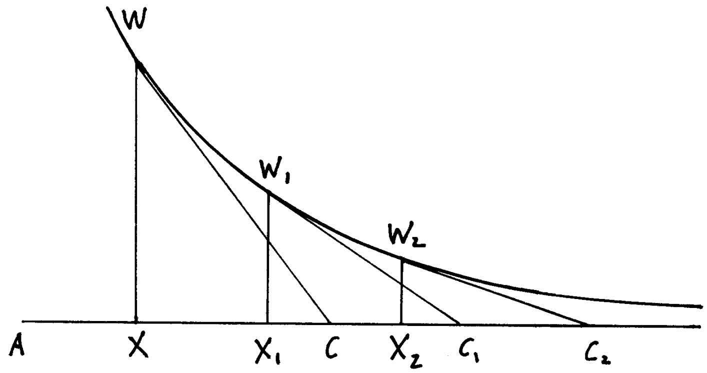
$$\frac{w}{dw} = \frac{1}{c-1}$$

ις ςονσταντ.

Βυτ, ας Λειβνιζ ποιντς ουτ,

$$\frac{w}{dw} = \frac{XC}{b},$$

ανδ τηερεφορε XC μυστ βε ςονσταντ ανδ τηε λινε WW ις α σολυτιον το Δε Βεαυνε΄ς προβλεμ. Λειβνιζ σετς $XC = a$, σο τηατ



Φιγυρε 37

$$\frac{a}{b} = \frac{w}{dw},$$

ανδ τηερεφορε

$$w = \frac{a}{b}dw.$$

Τηις ις εχυατιον 2. Τηερεφορε ιφ WW ις α λογαριτημις λινε ωηοσε ορδινατες αρε w ανδ ωηοσε αβσςισσας αρε x τηεν ιτ σατισφιες τηε διφφερεντιαλ εχυατιον

$$w = \frac{a}{b}dw,$$

ωηερε a ις α ςονσταντ εχυαλ το XC, τηε διστανςε ον τηε αξις βετωεεν τηε ορδινατε ανδ τηε ταγγεντ, ανδ b ις α ςονσταντ dx εχυαλ το τηε διφφερενςε οφ τηε αβσςισσας AX. Χ.Ε.Δ.

3. Νατυραλ λογαριτημς

Βοτη εχυατιον 1,

$$w = k^x, \tag{1}$$

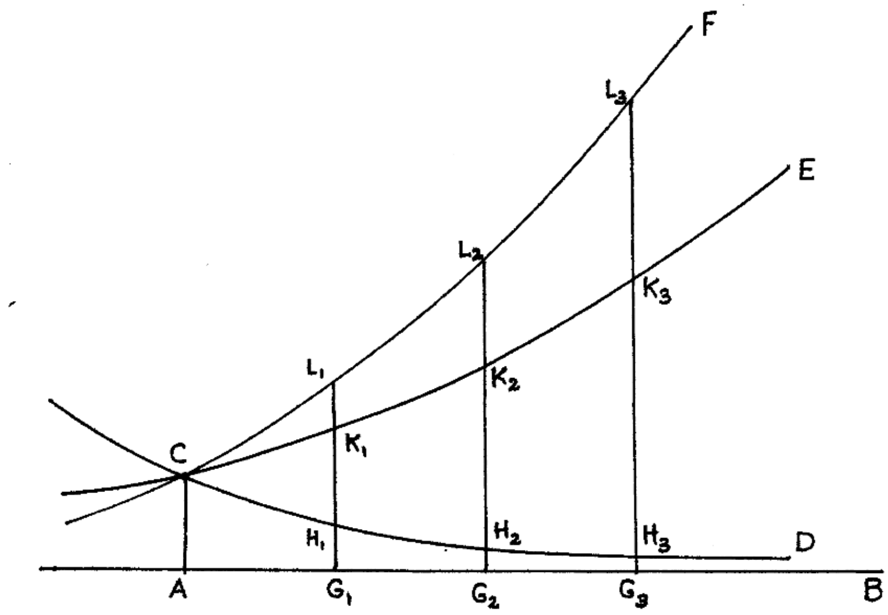
ανδ εχυατιον 2,

$$w = \frac{a}{b}dw, \tag{2}$$

ςονταιν αρβιτραρψ ςονσταντς. Εχυατιον 2 δεπενδς ον a (b ις εχυαλ το dx, ανδ ιν τηατ σενσε ις νοτ αρβιτραρψ), ωηιλε εχυατιον 1 δεπενδς ον k. Διφφερεντ αλυες οφ a ορ οφ k γιε εχυατιονς ςορρεσπονδινγ το διφφερεντ λογαριτημις λινες. Τηε ςονσταντ a ιν εχυατιον 2,

$$w = \frac{a}{b}dw,$$

ις α ςονσταντ οφ προπορτιοναλιτψ βετωεεν τηε ορδινατες w ανδ τηε διφφερενςες οφ τηοσε ορδινατες, dw. Ωηεν a ις ποσιτιε, α ποσιτιε αλυε οφ w ςορρεσπονδς το α ποσιτιε αλυε οφ dw, ανδ τηερεφορε τηε λογαριτημις λινε σλοπες υπωαρδ, ωηιλε ιφ a ις νεγατιε, α ποσιτιε αλυε οφ w ςορρεσπονδς το α νεγατιε αλυε οφ dw, ανδ τηερεφορε τηε λογαριτημις λινε σλοπες δοωνωαρδ. Ιν Φιγυρε 38, a ις ποσιτιε φορ



Φιγυρε 38

CE ανδ CF, ωηιλε a ις νεγατιε φορ CD. Ωηεν a ις ποσιτιε, ας ιτ βεςομες λαργερ, φορ ανψ γιεν αλυε οφ w, τηε διφφερενςες dw μυστ βε σμαλλερ. Τηερεφορε, λαργερ αλυες οφ a ςορρεσπονδ το μορε γεντλψ σλοπινγ λογαριτημις λινες. Ιν Φιγυρε 38, CE ηας α λαργερ αλυε φορ a τηαν CF. Τηε ςονσταντ k ιν εχυατιον 1,

$$w = k^x,$$

ις τηε ρατιο οφ τωο ορδινατες ςορρεσπονδινγ το αβσςισσας ωηιςη αρε ονε υνιτ απαρτ. Φορ εξαμπλε, ιν Φιγυρε 38, ιφ $AC = AG_1 = 1$, τηεν $k = G_1H_1$ φορ τηε λινε CD, $k = G_1K_1$ φορ τηε λινε CE, ανδ $k = G_1L_1$ φορ τηε λινε CF.

Ωηεν τηε ςονσταντ $a = 1$, τηεν εχυατιον 2 βεςομες παρτιςυλαρλψ σιμπλε:

$$w = \frac{1}{b} dw.$$

Συβστιτυτινγ dx φορ b, ανδ σολινγ φορ dx γιες:

$$dx = \frac{dw}{w}. \tag{3}$$

Ιν τηις ςασε τηε λινε ρεπρεσεντεδ βψ εχυατιον 3 ις σαιδ το βε α *νατυραλ λογαριτημις λινε*, ανδ τηε αβσςισσας x αρε σαιδ το βε τηε *νατυραλ λογαριτημς* οφ τηε ορδινατες w. Ιφ ωε υσε εχυατιον 1 ινστεαδ οφ εχυατιον 3 το ρεπρεσεντ τηε νατυραλ λογαριτημις λινε, τηεν ωε δενοτε βψ e τηε αλυε οφ k τηατ ωε νεεδ το υσε, σο τηατ εχυατιον 1 βεςομες

$$w = e^x$$

Ωε ηαε σιμπλψ δεφινεδ e ας τηε νυμβερ συςη τηατ $w = e^x$ ις τηε εχυατιον φορ α νατυραλ λογαριτημις λινε· βυτ ωε ηαε ας ψετ νο νοτιον οφ ωηατ τηε αλυε οφ e μιγητ βε. Ιν φαςτ ιτ ις διφφιςυλτ το δετερμινε αν εξαςτ αλυε φορ e, βυτ τηε προπερτψ οφ τηε ταγγεντς οφ τηε λογαριτημις λινε ςαν ηελπ υς λιμιτ τηε ραγγε οφ αλυες τηατ e μιγητ ηαε, ας σηοων ιν τηε φολλοωινγ τηεορεμ.

Τηεορεμ 3 $2 < e < 4$.

Δεμονστρατιον: Σεε Φιγυρε 39. Τηερε CL ις αγαιν α νατυραλ λογαριτημις λινε ωηοσε ορδινατες GL ωε δενοτε βψ w ανδ ωηοσε αβσςισσας AG ωε δενοτε βψ x. Τηε λινε TCM ις ταγγεντ το CL ατ C, ανδ τηε λινε CN ις δραων παραλλελ το τηε αξις AG. Νοω ιφ $AG = 1$, τηεν

$$GL = e^1 = e,$$

ανδ τηυς e αππεαρς ιν τηε διαγραμ ας τηε ορδινατε GL.

Σινςε $x = 0$ ατ τηε ποιντ A, ιτ φολλοως τηατ

$$AC = e^0 = 1.$$

Τηε τριανγλε TAC ις σιμιλαρ το τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε ατ τηε ποιντ C. Τηερεφορε

$$\frac{AC}{AT} = \frac{dw}{dx},$$

ανδ σινςε $AC = 1$, ιτ φολλοως τηατ

$$\frac{1}{AT} = \frac{dw}{dx}.$$

Βυτ ασςορδινγ το εχυατιον 3, αβοε,

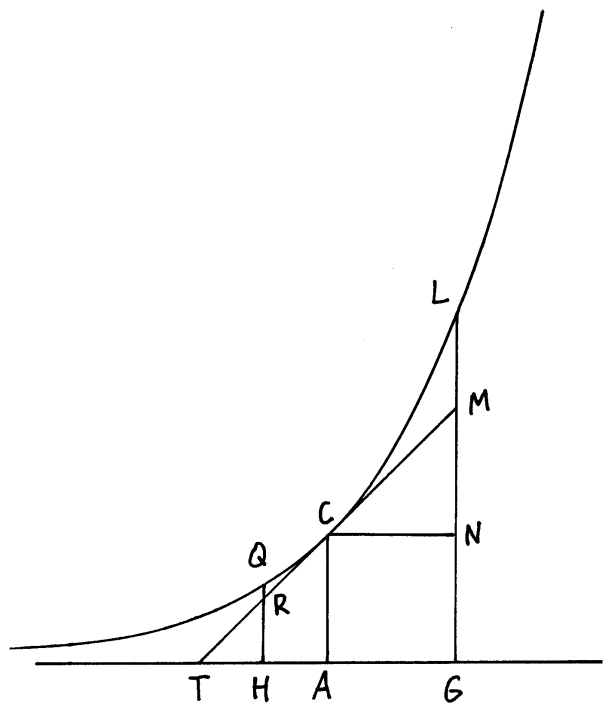
$$\frac{dw}{dx} = w,$$

ανδ ατ τηε ποιντ C, $w = 1$. Τηερεφορε

$$\frac{1}{AT} = 1,$$

ανδ σο $AT = 1$. Λικεωισε, τηε τριανγλε CNM ις σιμιλαρ το τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε ατ τηε ποιντ C, ανδ τηερεφορε

$$\frac{MN}{CN} = \frac{dw}{dx} = 1,$$



Φιγυρε 39

ανδ σινςε $CN = AG = 1$, ιτ φολλοως τηατ $MN = 1$. Τηερεφορε $GM = GN + MN = AC + MN = 2$. Βυτ σινςε TM ις τανγεντ το CL ...

$$GL > GM,$$

ανδ τηερεφορε

$$e > 2.$$

Τηις ις ηαλφ οφ ωηατ τηε τηεορεμ ασσερτς.

Το σηοω τηατ $e < 4$, ωε λετ H βε σομε ποιντ το τηε λεφτ οφ A, ανδ δραω τηε ορδινατε HQ, μεετινγ τηε τανγεντ TC ατ R. Λετ

$$HA = \frac{1}{2},$$

σο τηατ

$$-\frac{1}{2}$$

ις τηε αλυε οφ τηε αβσςισσα ςορρεσπονδινγ το τηε ορδινατε HQ· τηερεφορε

$$HQ = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Σινςε τηε τανγεντ TC φαλλς βελοω τηε λογαριτημις λινε CL, ιτ φολλοως τηατ

$$RH < QH.$$

Βυτ

$$RH = TH$$

(σινςε τριανγλε THR ις σιμιλαρ το τριανγλε TAC), ανδ

$$TH = TA - HA = \frac{1}{2}.$$

Τηερεφορε, τηε ινεχυαλιτψ $RH < QH$ βεςομες

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{e}},$$

ανδ τηερεφορε

$$\sqrt{e} < 2$$

ανδ

$$e < 4.$$

Χ.Ε.Δ.

Τηε μετηοδς υσεδ ιν Τηεορεμ 3 ςαν βε γενεραλιζεδ το φινδ μορε εξαςτ αππροξιματιονς φορ e.

4. Τηε διφφερενςε οφ e^x

Συβστιτυτινγ τηε αλυε e^x φορ w ιν τηε διφφερεντιαλ εχυατιον 3 (παγε 94),

$$dx = \frac{dw}{w} \tag{3}$$

γιες υς αν εχυατιον φορ τηε διφφερενςες οφ e^x:

$$\frac{d(e^x)}{e^x} = dx,$$

ανδ τηερεφορε τηε διφφερενςες οφ e^x

$$d(e^x) = e^x\,dx. \tag{4}$$

Εχυατιον 4 ις τηε βασις εχυατιον ωε υσε, αλονγ ωιτη τηε ρυλες φορ τηε ςαλςυλυς, το φινδ διφφερενςες οφ εξπρεσσιονς ινολινγ e. Σεε τηε εξαμπλες ιν παρτ 6 οφ τηις νοτε, βελοω.

5. Νοτατιον φορ λογαριτημς

Ιφ x ις τηε λογαριτημ οφ w, σο τηατ x ρεπρεσεντς τηε αβσςισσα οφ α λογαριτημις λινε ανδ w τηε ςορρεσπονδινγ ορδινατε, τηατ ις, ιφ x ανδ w αρε ρελατεδ βψ εχυατιον 1,

$$w = k^x,$$

τηεν ωε ωριτε

$$x = \log_k w.$$

Τηις ις σιμπλψ α δεφινιτιον οφ α νεω σψμβολ, $\log_k$. Φορ εξαμπλε, ιφ $k = 2$, τηεν

$$\begin{aligned} \log_2 2 &= 1, \\ \log_2 4 &= 2, \\ \log_2 8 &= 3, \text{ ανδ σο ον,} \end{aligned}$$

σινςε

$$\begin{aligned} 2 &= 2^1, \\ 4 &= 2^2, \\ 8 &= 2^3, \text{ ανδ σο ον.} \end{aligned}$$

Τηε χυαντιτψ k ις ςαλλεδ τηε *βασϵ* οφ τηε λογαριτημ.

Ωηεν ωε αρε δεαλινγ ωιτη νατυραλ λογαριτημς, σο τηατ εχυατιον 1 βεςομες,

$$w = e^x,$$

ωε σιμπλψ ωριτε

$$x = \log w$$

ορ

$$x = \ln w$$

φορ τηε νατυραλ λογαριτημ[16] οφ w.

6. Τηε διφφερενςε οφ $\log x$, ανδ φινδινγ διφφερενςες οφ χυαντιτιες ινολινγ λογαριτημς.

Τηε διφφερεντιαλ εχυατιον 3,

$$dx = \frac{dw}{w},$$

ωηερε x ις τηε νατυραλ λογαριτημ οφ w, μαψ βε υσεδ το φινδ τηε διφφερενςες οφ χυαντιτιες τηατ αρε εξπρεσσεδ ιν τερμς οφ λογαριτημς, ας φολλοως. Ωηεν x ις τηε νατυραλ λογαριτημ οφ w, τηεν

$$x = \log w,$$

ανδ εχυατιον 3 μαψ βε ρεωριττεν ας

$$d(\log w) = \frac{dw}{w}, \tag{5}$$

τηατ ις, τηε διφφερενςε οφ $\log w$ ις εχυαλ το τηε διφφερενςε οφ w διιδεδ βψ w.

Ωε ςαν υσε φορμυλας 4 (παγε 98) ανδ 5 το φινδ συμς ανδ διφφερενςες οφ εξπρεσσιονς ινολινγ νατυραλ λογαριτημς ανδ εξπονεντιαλς, ας τηε φολλοωινγ εξαμπλες σηοω.

1. Λετ $z = e^{(2x-3)}$. Το φινδ dz ιν τερμς οφ dx. Λετ $v = 2x - 3$, σο τηατ $z = e^v$. Τηερεφορε, βψ εχυατιον 4 (συβστιτυτινγ v φορ x),

   $$dz = d(e^v) = e^v\,dv;$$

   ανδ

   $$\begin{aligned} dv &= d(2x-3) \\ &= d(2x) - d(3) \\ &= 2\,dx. \end{aligned}$$

   Τηερεφορε

   $$\begin{aligned} dz &= e^v\,dv \\ &= e^{(2x-3)}\,(2\,dx) \\ &= 2e^{(2x-3)}\,dx. \end{aligned}$$

[16] Ιν ςοντεξτς ωηερε νυμεριςαλ ςομπυτατιον ις ιμπορταντ, $\log w$ οφτεν δενοτες τηε λογαριτημ ωιτη βασε 10, τηατ ις,

$$\log_{10} w.$$

Σινςε ωε ωιλλ νοτ βε υσινγ λογαριτημς φορ ςομπυτατιον, $\log w$ ωιλλ αλωαψς μεαν τηε *νατυραλ* λογαριτημ οφ w φορ υς.

2. Λετ $z = \log(5x^2 + 3)$. Το φινδ dz ιν τερμς οφ dx. Λετ $v = 5x^2 + 3$, σο τηατ $z = \log v$. Τηερεφορε, βψ εχυατιον 5 (συβστιτυτινγ v φορ w),

$$dz = \frac{dv}{v};$$

ανδ

$$\begin{aligned} dv &= d(5x^2 + 3) \\ &= 5d(x^2) + d(3) \\ &= 5(2x\,dx) \\ &= 10x\,dx. \end{aligned}$$

Τηερεφορε

$$\begin{aligned} dz &= \frac{dv}{v} \\ &= \frac{10x\,dx}{5x^2 + 3} \\ &= \frac{10x}{5x^2 + 3}\,dx. \end{aligned}$$

3. Λετ $z = \log^3(x - 4)$, τηατ ις, $z = (\log(x - 4))^3$. Το φινδ dz ιν τερμς οφ dx. Λετ $v = \log(x - 4)$, σο τηατ $z = v^3$. Τηεν, βψ τηε ποωερ ρυλε,

$$dz = 3v^2 dv.$$

Νεξτ, λετ $w = x - 4$, σο τηατ $v = \log w$. Τηεν, βψ εχυατιον 5,

$$dv = \frac{dw}{w}.$$

Φιναλλψ, βψ τηε ςονσταντ ρυλε,

$$dw = dx.$$

Πυττινγ αλλ τηεσε εχυατιονς τογετηερ, ωε γετ

$$\begin{aligned} dz &= 3v^2 dv \\ &= 3(\log(x - 4))^2 \left(\frac{dw}{w}\right) \\ &= 3(\log(x - 4))^2 \left(\frac{dx}{x - 4}\right). \end{aligned}$$

Προβλεμς αβουτ φινδινγ διφφερενςες οφ εξπονεντιαλς ανδ λογαριτημς

Υσινγ τηε ρυλες οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς, ανδ εχυατιονς 4 (παγε 98) ανδ 5 (παγε 99), φινδ τηε φολλοωινγ διφφερενςες.

1. $$d(e^{(3x+1)}).$$

2. $$d(e^{(4x)} - 2e^{(2-3x)}).$$

3. $$d(\log(x^3 - 2x)).$$

4. $$d(\log(x+4) - \log^2 x).$$

5. $$d\left(\frac{\log(2x+3)}{e^x}\right).$$

6. $$d\left(\frac{e^{-x}}{\log 2x}\right).$$

Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ ανδ τηε Αναλψσις οφ Ινδιισιβλες ανδ Ινφινιτες Νοτε 1, π. 113

βψ Γοττφριεδ Ωιληελμ Λειβνιζ

Ι αμ αωαρε τηατ σομε οφ τηε τηινγς Ι ηαε πυβλισηεδ ιν τηεσε *Αςτς* φορ τηε αδανςεμεντ οφ γεομετρψ ηαε βεεν πραισεδ ιν νο σμαλλ ωαψ βψ ςερταιν λεαρνεδ μεν, ανδ ινδεεδ ηαε βεεν γραδυαλλψ πυτ το υσε· νεερτηελεσς, σομε τηινγς, ειτηερ τηρουγη τηε ωριτερ΄ς φαυλτ ορ τηρουγη σομε οτηερ ςαυσε, ηαε νοτ βεεν ωελλ ενουγη υνδερστοοδ, ανδ τηερεφορε Ι τηουγητ ιτ ωορτηωηιλε το αδδ σομε τηινγς ηερε τηατ μαψ σηεδ λιγητ ον ωηατ Ι ωροτε εαρλιερ. Ι ηαε οφ ςουρσε ρεςειεδ Μρ. ῝ραιγ΄ς *Ον τηε Μεασυρεμεντ οφ Φιγυρες*, πυβλισηεδ λαστ ψεαρ ιν Λονδον, φρομ ωηιςη ιτ ςλεαρλψ αππεαρς τηατ τηε αυτηορ ηας μαδε αδανςες τηατ αρε νοτ ςοντεμπτιβλε ιντο τηε δεπτης οφ γεομετρψ. Ηε στρονγλψ αππροες οφ α διστινςτιον Ι ηαε σομετιμες εμπηασιζεδ βετωεεν γενεραλ ανδ σπεςιαλ μεασυρεμεντς οφ φιγυρες, α διστινςτιον ωηιςη ηε σαψς ον παγε 1 ηας βεεν ερψ ωελλ οβσερεδ ρεςεντλψ βψ γεομετερς, ανδ ηε ριγητλψ αττριβυτες τηε ερψ μανψ παραλογισμς οφ τηοσε ωηο τρψ το προε τηε ιμποσσιβιλιτψ οφ α χυαδρατυρε το τηε νεγλεςτ οφ τηις διστινςτιον. Νοτε 2, π. 113
Ηε ρεςογνιζες ωιτη με τηατ τηε φιγυρες τηατ αρε ςομμονλψ ςαστ ουτ οφ Γεομετρψ αρε τρανσςενδεντ (παγε 26). Ηε ηας αλσο γρεατλψ ανδ ηυμανελψ πραισεδ (παγες Νοτε 3, π. 115
27 ανδ 29) μψ Μετηοδ οφ Ταγγεντς, ωηιςη Ι πυβλισηεδ ιν τηε *Αςτς* οφ Οςτοβερ 1684·[1] ηε σαψς τηατ μψ μετηοδ ις μοστ εξτραορδιναρψ, ανδ βψ μεανς οφ ιτ τηε μετηοδ οφ μεασυρεμεντς ις γρεατλψ ηελπεδ, σινςε ιτ συππλιες τηε βεστ ρεμεδψ αγαινστ ιρρατιοναλιτιες. Νεερτηελεσς, τηερε αρε σομε τηινγς τηατ Ι τηινκ ιτ ωιλλ Νοτε 4, π. 116
νοτ βε υσελεσς ορ υνωελςομε το ςαλλ το ηις ορ οτηερσ΄ αττεντιον. Ινδεεδ, Ι δο νοτ κνοω ηοω ιτ ηαππενεδ τηατ ηε βελιεες τηατ τηε μαν ωηο ωροτε τηε παπερ ιν τηε *Αςτς* οφ Μαψ, 1684 (π. 233)[2] ρετραςτεδ ηις οπινιον, ανδ αλτηουγη ηε ηαδ προποσεδ, ατ τηε βεγιννινγ οφ τηε *Αςτς* οφ Οςτοβερ, 1683, το γιε α δεμονστρατιον τηατ τηε χυαδρατυρε οφ τηε ςιρςλε ις ιν νο ωαψ ποσσιβλε, αφτερωαρδς, ιν Μαψ οφ τηε φολλοωινγ ψεαρ, αςκνοωλεδγεδ τηατ ηε ηαδ νοτ ψετ δεμονστρατεδ τηε ιμποσσιβιλιτψ οφ α σπεςιαλ χυαδρατυρε. Αλτηουγη τηε παπερ οφ Οςτοβερ 1683 ις βψ Μρ. Δ. Τ.,[3] τηε παπερ οφ Μαψ 1684 ις ιν φαςτ βψ με, ανδ ον τηε ονε ηανδ Ι ςλαιμεδ τηατ ηις μετηοδ ις μινε, σο τηατ Ι μιγητ νοτ βε αςςυσεδ οφ υσινγ σομετηινγ τηατ βελονγς το σομεονε ελσε, ωηιλε ον τηε οτηερ ηανδ Ι αμιςαβλψ δισαγρεεδ ωιτη τηε υσε τηατ Μρ. Δ. Τ. πυτ ιτ το. Φορ ηε τηουγητ τηατ τηε ιμποσσιβιλιτψ οφ ανψ δεφινιτε χυαδρατυρε φολλοωεδ φρομ τηε ιμποσσιβιλιτψ οφ αν ινδεφινιτε χυαδρατυρε: βυτ μψ ςονσταντ ποσιτιον (αλρεαδψ ινδιςατεδ ωηεν Ι πυβλισηεδ τηε αριτημετις χυαδρατυρε[4] ιν τηε σεςονδ μοντη οφ τηε φιρστ ψεαρ οφ

[1] Τηε αρτιςλε ‘Α Νεω Μετηοδ φορ Γρεατεστς ανδ Λεαστς, ας ωελλ ας φορ Ταγγεντς, ωηιςη ις νοτ Ηινδερεδ βψ Φραςτιοναλ ορ Ιρρατιοναλ Χυαντιτιες, ανδ α Σινγυλαρ ᾶλςυλυς φορ τηεσε’ (αβοε, παγες 24–39).

[2] Ιν Μαψ οφ 1684 Λειβνιζ πυβλισηεδ τηε αρτιςλε ‘Ον Φινδινγ Μεασυρεμεντς οφ Φιγυρες,’ ιν ωηιςη ηε φιρστ ρεσπονδεδ το Τσςηιρνηαυς.

[3] Εηρενφριεδ Ωαλτηερ ον Τσςηιρνηαυς. Τηε αυτηορς οφ αρτιςλες ιν τηε *Αςτς οφ τηε Ερυδιτε* ωερε οφτεν ονλψ ιδεντιφιεδ βψ τηειρ (Λατιν) ινιτιαλς.

[4] Τηε αρτιςλε Λειβνιζ ρεφερς το ις ‘Ον τηε Τρυε Προπορτιον οφ α ῏ρςλε το α ῏ρςυμσςριβεδ

τηε *Αςτς*, 1682) ηαδ βεεν τηατ τηε ινφερενςε φρομ τηε λαττερ το τηε φορμερ ις ιναλιδ. Το προε τηις Ι γαε αν εξαμπλε (ιν τηε *Αςτς* οφ Μαψ, 1684) οφ α ςερταιν φιγυρε τηατ αδμιτς οφ α σπεςιαλ χυαδρατυρε βυτ νοτ α γενεραλ χυαδρατυρε, ας Ι τριεδ το σηοω τηερε υσινγ Μρ. Δ. Τ.΄ς οων τηεορεμς, αλτηουγη Ι ερρεδ ιν μψ ςαλςυλατιον βεςαυσε Ι ωας ιν α ηυρρψ ανδ ςερταιν οφ μψ μετηοδ οφ προοφ. Ι ωιλλ ςορρεςτ ανδ εξπλαιν τηις ςαλςυλατιον λατερ. Μρ. Δ. Τ. πριατελψ ρεσπονδεδ τηατ ηε διδ νοτ δεριε ηις μετηοδ φρομ μινε, βυτ ηαδ ςομε το ιτ ον ηις οων ανδ, ας φαρ ας τηε οβϑεςτιον ωας ςονςερνεδ, τηατ ηε ςουλδ δεμονστρατε τηε ινφερενςε φρομ ινδεφινιτε το δεφινιτε χυαδρατυρες, ανδ τηις ις ωηατ ηις μετηοδ ις εσπεςιαλλψ γοοδ φορ· ινδεεδ, ηε σαιδ μψ εξαμπλε ρεστεδ υπον α βαδ ςαλςυλατιον. Ι ινδεεδ ωιλλινγλψ αδμιττεδ (ιν τηε *Αςτς* οφ Δεςεμβερ, 1684, π. 587) τηατ ιφ ηε ςουλδ δεμονστρατε τηις ινφερενςε, ηε ωουλδ ηαε δονε ωηατ νο ονε ελσε ηαδ δονε ψετ· νεερτηελεσς, Ι ςοντινυεδ το ηαε μψ δουβτς, ανδ αφτερωαρδς στρενγτηενεδ μψ εξαμπλε βψ α ςορρεςτ ςαλςυλατιον, ωηιςη Ι ωιλλ γετ το σοον. Μορεοερ Ι ηαε αλρεαδψ ηαδ τηις μετηοδ φορ μορε τηαν τεν ψεαρς, σινςε τηε τιμε ωε ωερε τογετηερ ιν Παρις ανδ φρεχυεντλψ σποκε αβουτ γεομετρις ματτερς. Ατ τηατ τιμε ηε ωας γοινγ ιν τοταλλψ διφφερεντ διρεςτιονς, ωηιλε Ι ωας αλρεαδψ χυιτε φαμιλιαρ ωιτη ηοω το αππλψ γενεραλ εχυατιονς το εξπρεσς τηε νατυρε οφ τηε λινε σουγητ, εχυατιονς το βε δετερμινεδ βψ τηε προγρεσς οφ τηε ςαλςυλατιον· τηις ις τηε νερε οφ τηε μετηοδ, ανδ Ι ηαδ νεερ σεεν ιτ πυβλισηεδ ελσεωηερε. Βυτ νεερτηελεσς Ι γραντ σο μυςη το βοτη ηις σινςεριτψ ανδ ηις γενιυς τηατ Ι ςουλδ εασιλψ βελιεε τηατ ειτηερ ηε ςαμε υπον τηεσε τηινγς ημσελφ ορ ατ λεαστ νο λονγερ ρεμεμβερεδ ον ωηατ οςςασιον τηε σεεδς οφ συςη μεδιτατιονς ωερε σοων, εσπεςιαλλψ σινςε Ι κνοω τηατ ηε ηας ςομε υπ ωιτη εεν μορε διφφιςυλτ τηινγς ον ηις οων, ανδ τηατ ωε ςαν λοοκ φορωαρδ το μανψ σπλενδιδ ανδ ερψ ιμπορταντ τηινγς φρομ ηις γενιυς.

Ηοωεερ σινςε ιτ ις αδμιττεδ τηατ Ι μαδε α μιστακε ιν τηε ςαλςυλατιον οφ τηε αβοε-μεντιονεδ εξαμπλε, ας Ι σαιδ, ανδ Ι βελιεε τηατ Μρ. ῝ραιγ ηας υσεδ τηις ερρορ ας αν αργυμεντ αγαινστ Μρ. Δ. Τ. (το ωηομ ηε αττριβυτες ιτ) ιν ορδερ το ρεφυτε τηε ερψ μετηοδ οφ ινδεφινιτες, Ι σηουλδ ςορρεςτ τηε ςαλςυλατιον. Λοοκ ατ τηε *Αςτς* οφ τηε ψεαρ 1684, παγε 239, ωηερε, ιν ςομπαρινγ τηε εχυατιον $4z^2 - 8hz$ ετς. ωιτη τηε εχυατιον $bz^2 + caz$ ετς., τηε τερμς ωιτηουτ z πλαςεδ ουτσιδε τηε φραςτιον ιν τηε λαττερ εχυατιον σηουλδ βε μυλτιπλιεδ βψ τηε δενομινατορ οφ τηε φραςτιον βεφορε τηε ςομπαρισον ις μαδε, σο τηατ ον εαςη σιδε οφ τηε εχυατιον αλλ τηε τερμς ωιτηουτ z αρε ςονταινεδ ιν α σινγλε φραςτιον. Ανδ λετ $b = 1$, ωηιςη ςαν αλωαψς βε δονε, ανδ βεςαυσε ιν τηε φορμερ εχυατιον τηε τερμ xz ις εντιρελψ αβσεντ, d βεςομες $= 0$ ιν τηε λαττερ· ανδ λετ τηε φορμερ (γιεν) εχυατιον βε διιδεδ βψ 4, ανδ ιν τηε φραςτιον οφ τηε λαττερ (συπποσιτιοναλ) εχυατιον λετ βοτη τηε νυμερατορ ανδ τηε δενομινατορ βε διιδεδ βψ g: τηυς βοτη τηε τερμς z^2 ον εαςη σιδε, ανδ τηε δενομινατορς οφ τηε φραςτιονς ον εαςη σιδε, αγρεε. Ωηεν ωε ςομπαρε τηε οτηερ τερμς, ον αςςουντ οφ τηε τερμ z, c ωιλλ βεςομε $= \frac{2h}{f}$· ον αςςουντ οφ x^4, g ωιλλ βεςομε $= \frac{1}{16}$· ον αςςουντ οφ x^3, f ωιλλ βεςομε $= \frac{-f}{6a}$· ανδ ον αςςουντ οφ x ιν τηε δενομινατορ f ωιλλ βεςομε $\frac{-h}{8z}$. Τηερεφορε h βεςομες $\frac{8}{6}$, τηατ ις $\frac{4}{3}$, ωηιςη ις αβσυρδ, βεςαυσε h ις α γιεν χυαντιτψ. Οτηερ αβσυρδιτιες αλσο αρισε φρομ τηε ςομπαρισον, φορ βοτη f ανδ c βεςομε $= 0$, ςοντραρψ το ωηατ ηας

Σχυαρε,’ βελοω, παγες 185-191.

αλρεαδψ βεεν ςονςλυδεδ.

Φυρτηερ, το σαψ σομετηινγ μορε υσεφυλ ηερε λετ υς *ρϵϵαλ α σουρςϵ οφ Τρανσςϵνδϵντ Χυαντιτιϵς*, τηατ ις, α ρεασον ωηψ σομε προβλεμς αρε νειτηερ πλανε, νορ σολιδ, νορ συρσολιδ, νορ οφ ανψ δεφινιτε δεγρεε, βυτ τρανσςενδ εερψ αλγεβραις εχυατιον. Ανδ ατ τηε σαμε τιμε ωε σηαλλ σηοω ηοω ιτ ςαν βε δεμονστρατεδ ωιτηουτ ςαλςυλατιον τηατ αν αλγεβραις χυαδρατριξ φορ α ςιρςλε ορ ηψπερβολα ις ιμποσσιβλε. Φορ ιφ συςη α λινε ωερε γιεν ιτ ωουλδ φολλοω τηατ βψ μεανς οφ ιτ αν ανγλε ορ α ρατιο (ορ α λογαριτημ) ςουλδ βε ςυτ ιν α γιεν ρατιο οφ α λινε το α λινε, ανδ τηις ςουλδ βε δονε βψ ονε γενεραλ ςονστρυςτιον, ανδ ςονσεχυεντλψ τηε προβλεμ οφ ςυττινγ αν ανγλε ορ φινδινγ αν αρβιτραρψ νυμβερ οφ μεαν προπορτιοναλς ωουλδ βε οφ α δεφινιτε δεγρεε. Βυτ φορ εερψ διφφερεντ νυμβερ οφ παρτς οφ αν ανγλε ορ εερψ διφφερεντ νυμβερ οφ μεαν προπορτιοναλς ωε νεεδ αν αλγεβραις εχυατιον οφ α διφφερεντ δεγρεε, ανδ τηερεφορε ωηεν τηε προβλεμ ις υνδερστοοδ το βε αβουτ ανψ ποσσιβλε νυμβερ οφ παρτς ορ μεαν προπορτιοναλς, ιτ ις οφ ινδεφινιτε δεγρεε ανδ τρανσςενδς εερψ αλγεβραις εχυατιον. Βεςαυσε νεερτηελεσς συςη προβλεμς ςαν βε προποσεδ ιν γεομετρψ—ινδεεδ, τηεψ σηουλδ βε ςονσιδερεδ το βε αμονγ ιτς λεαδινγ προβλεμσ—ανδ βεςαυσε τηεψ αρε δετερμινατε, ιτ ις τηερεφορε οβιουσλψ νεςεσσαρψ το αδμιτ ιντο γεομετρψ τηοσε λινες τηρουγη ωηιςη αλονε συςη προβλεμς μαψ βε ςονστρυςτεδ· ανδ σινςε τηεσε προβλεμς ςαν βε δεσςριβεδ βψ αν εξαςτ ανδ ςοντινυους μοτιον, ας ις οβιους ιν τηε ςασε οφ τηε ςψςλοιδ ανδ τηε λικε, τηεψ σηουλδ ινδεεδ βε ςονσιδερεδ το βε νοτ μεςηανιςαλ, βυτ γεομετρις, εσπεςιαλλψ σινςε ιν τηειρ υσεφυλνεσς τηεψ λεαε τηε λινες οφ ςομμον γεομετρψ (ιφ ψου λεαε ουτ τηε στραιγητ λινε ανδ τηε ςιρςλε) μανψ παρασανγς βεηινδ, ανδ ηαε προπερτιες οφ τηε γρεατεστ ιμπορτανςε, ανδ φυρτηερμορε τηεσε προπερτιες αδμιτ οφ γεομετρις δεμονστρατιονς. *Τηϵρϵφορϵ Δϵσςαρτϵσ΄ ϵρρορ ιν ϵξςλυδινγ τηϵσϵ λινϵς φρομ γϵομϵτρψ ωας νο λϵσς τηαν τηατ οφ τηϵ ανςιϵντς*, ωηο ρεϑεςτεδ σολιδ ορ λινεαρ λοςι ας λεσς γεομετρις.

Νοτε 5, π. 116

Νοτε 6, π. 117

Μορεοερ, βεςαυσε τηε μετηοδ οφ ινεστιγατινγ ινδεφινιτε χυαδρατυρες ορ τηειρ ιμποσσιβιλιτιες ις φορ με ονλψ α σπεςιαλ ςασε (ανδ ινδεεδ αν εασιερ ονε) οφ α μυςη γρεατερ προβλεμ, ωηιςη I ςαλλ τηε *ινϵρσϵ Μϵτηοδ οφ Τανγϵντς*, ιν ωηιςη τηε γρεατεστ παρτ οφ τρανσςενδεντ γεομετρψ ις ςονταινεδ, ανδ βεςαυσε ιφ τηις προβλεμ ςαν βε σολεδ αλγεβραιςαλλψ, αλλ σορτς οφ δισςοεριες μιγητ βε μαδε, ανδ βεςαυσε ινδεεδ I σεε νοτηινγ σατισφαςτορψ αβουτ ιτ εξταντ· φορ τηεσε ρεασονς λετ με σηοω ηοω ιτ ςαν βε δονε νο λεσς τηαν τηε ινδεφινιτε χυαδρατυρε ιτσελφ ςαν. Ωηιλε βεφορε νοω αλγεβραιστς ηαε τακεν λεττερς ορ γενεραλ νυμβερς φορ τηε χυαντιτιες σουγητ, *I* ηαε τακεν γενεραλ ορ ινδεφινιτε εχυατιονς φορ τηε λινες σουγητ ιν συςη τρανσςενδεντ προβλεμς· ε.γ., ιφ τηε αβσςισσα ανδ ορδινατε αρε x ανδ y, φορ με τηε εχυατιον οφ τηε λινε ιν χυεστιον ις

Νοτε 7, π. 118

$$0 = a + bx + cy + exy + fx^2 + gy^2 \text{ ετς.}\cdot$$

βψ μεανς οφ τηε προποσεδ ινδεφινιτε εχυατιον, ωηιςη ις ιν φαςτ φινιτε (φορ ιτ ςαν αλωαψς βε δετερμινεδ ηοω φαρ υπ ιτ ηας το γο), I σεεκ τηε ταγγεντ οφ τηε λινε, ανδ ςομπαρινγ ωηατ I φινδ ωιτη τηε γιεν προπερτψ οφ τηε ταγγεντς, I φινδ ουτ τηε αλυε οφ τηε ασσυμπτιε λεττερς a, b, c, ετς. ανδ το τηατ εξτεντ δεφινε τηε εχυατιον οφ τηε λινε σουγητ· νεερτηελεσς σομετιμες σομε τηινγς ρεμαιν αρβιτραρψ,

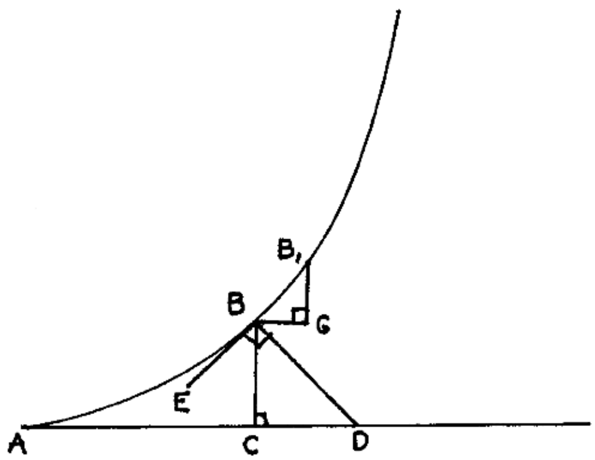
Νοτε 8, π. 119

ιν ωηιςη ςασε ιννυμεραβλε λινες ςαν βε φουνδ τηατ σατισφψ τηε προβλεμ, ωηιςη ις τηε ρεασον ωηψ μανψ, σεεινγ ιτ αφτερωαρδς, μιγητ τηινκ τηατ τηε προβλεμ ις νοτ συφφιςιεντλψ δεφινεδ ανδ ις νοτ ιν ουρ ποωερ. Τηε σαμε τηινγς ςαν αλσο βε σηοων τηρουγη σεριες. Ι ηαε μανψ ωαψς το μακε τηε ςαλςυλατιον μορε ςονςισε, ωηιςη Ι σαε φορ ανοτηερ πλαςε. Βυτ ιφ τηε ςομπαρισον δοες νοτ συςςεεδ, Ι δεςλαρε τηατ
Νοτε 9, π. 121 τηε λινε σουγητ ις νοτ αλγεβραις, βυτ τρανσςενδεντ.

Ιφ τηις ις τηε ςασε, το φινδ ουτ τηε *σπεςιες οφ τρανσςενδενςε* (φορ σομε τρανσςενδεντς δεπενδ ον τηε γενεραλ ςυττινγ οφ α ρατιο (ορ λογαριτημ), σομε ον τηε γενεραλ ςυττινγ οφ αν ανγλε (ορ ον τηε αρςς οφ α ςιρςλε), ανδ σομε ον οτηερ, μορε ςομπλεξ, ινδεφινιτε χυεστιονς) Ι τακε ιν αδδιτιον το τηε λεττερς x ανδ y α τηιρδ λεττερ συςη ας v, ωηιςη σιγνιφιες α τρανσςενδεντ χυαντιτψ, ανδ φρομ τηεσε
Νοτε 10, π. 122 τηρεε Ι φορμ α γενεραλ εχυατιον φορ τηε λινε ιν χυεστιον· φρομ τηις εχυατιον Ι σεεκ τηε ταγγεντ οφ τηε λινε βψ υσινγ τηε μετηοδ οφ ταγγεντς Ι πυβλισηεδ ιν τηε *Αςτς* οφ Οςτοβερ, 1684, α μετηοδ ωηιςη ις νοτ ηινδερεδ βψ τρανσςενδεντς. Νεξτ, ςομπαρινγ ωηατ Ι φινδ ωιτη τηε γιεν προπερτψ οφ τηε ταγγεντς οφ τηε ςυρε, Ι δισςοερ νοτ ονλψ τηε ασσυμπτιε λεττερς a, b, c, ετς., βυτ αλσο τηε σπεςιαλ νατυρε οφ τηε τρανσςενδεντ. Αλτηουγη ιτ ςαν σομετιμες ηαππεν τηατ ωε νεεδ το υσε μορε τηαν ονε τρανσςενδεντ, ωηενεερ τηειρ νατυρες αρε διφφερεντ φρομ εαςη οτηερ, ανδ τρανσςενδεντς οφ τρανσςενδεντς αρε σομετιμες γιεν, ανδ, ιν γενεραλ, συςη τηινγς ςαν γο ον ινδεφινιτελψ, νεερτηελεσς ωε ςαν βε ςοντεντ ωιτη εασιερ ανδ σιμπλερ τηινγς. Ανδ ιτ ις φορ τηε μοστ παρτ ποσσιβλε το υσε σπεςιαλ τριςκς, ωηιςη Ι σηαλλ νοτ γιε ηερε, το μακε τηε ςαλςυλατιον σηορτερ ανδ ρεδυςε τηε προβλεμ το σιμπλε τερμς ας φαρ ας ποσσιβλε. Ηοωεερ, ωηεν τηις μετηοδ ις αππλιεδ το τετραγονισμς, τηατ ις, το φινδινγ χυαδρατριςες (φορ ωηιςη α προπερτψ οφ τηε ταγγεντς ις οφ ςουρσε αλωαψς γιεν), ιτ ις εασψ νοτ ονλψ το φινδ ουτ ωηετηερ αν ινδεφινιτε χυαδρατυρε ις αλγεβραιςαλλψ ιμποσσιβλε, βυτ αλσο ηοω, αφτερ τηε ιμποσσιβιλιτψ ηας βεεν αππρεηενδεδ, α τρανσςενδεντ χυαδρατριξ ςαν βε φουνδ. Νο ονε ελσε ηας δονε τηις ψετ, σο τηατ ιτ σεεμς το με τηατ Ι διδ νοτ μακε αν εμπτψ ςλαιμ ωηεν Ι σαιδ τηατ γεομετρψ ις αδανςεδ βψ μεανς οφ τηις μετηοδ ιμμεασυραβλψ φαρ βεψονδ τηε βουνδαριες σετ δοων βψ *Ϊὲτε* ανδ *Δεσςαρτες*, σινςε ιν τηις ωαψ α ςερταιν ανδ γενεραλ αναλψσις εξτενδς το προβλεμς τηατ αρε οφ νο δεφινιτε δεγρεε ανδ τηυς αρε νοτ ςομπρεηενδεδ βψ μεανς οφ αλγεβραις εχυατιονς.

Φυρτηερμορε, βεςαυσε ηαρδλψ ανψτηινγ ςαν βε ιμαγινεδ τηατ ις μορε υσεφυλ, ςονςισε, ανδ υνιερσαλ φορ τρεατινγ τρανσςενδεντ προβλεμς βψ ςαλςυλατιον ωηερεερ μεασυρεμεντς ανδ ταγγεντς οςςυρ τηαν *μψ διφφερεντιαλ ςαλςυλυς ορ αναλψσις οφ ινδιισιβλες ανδ ινφινιτες*, οφ ωηιςη ονλψ α σμαλλ σαμπλε ορ ςορολλαρψ ις ςονταινεδ ιν μψ μετηοδ οφ ταγγεντς, πυβλισηεδ ιν τηε *Αςτς* οφ Οςτοβερ, 1684, ανδ σο γρεατλψ πραισεδ βψ *Μρ. Ὃραιγ* ανδ βεςαυσε *Μρ. Ὃραιγ* ηιμσελφ συσπεςτεδ τηατ τηερε ις σομετηινγ δεεπερ ηιδδεν ωιτηιν τηις μετηοδ, ανδ ςονσεχυεντλψ ον παγε 29 οφ ηις βοοκ ηε τριεδ το δεριε φρομ ιτ Βαρροω΄ς τηεορεμ (τηατ τηε συμ οφ τηε ιντεραλς τακεν βετωεεν τηε ορδινατες ανδ περπενδιςυλαρς οφ α ςυρε ανδ αππλιεδ το
Νοτε 11, π. 123 τηε αξις ις εχυαλ το ηαλφ τηε σχυαρε ον τηε λαστ ορδινατε), αλτηουγη ιν ςαρρψινγ ουτ τηε δεριατιον ηε μισσεδ ηις μαρκ σομεωηατ, ωηιςη Ι δο νοτ φινδ συρπρισινγ ιν α νεω μετηοδ· φορ τηεσε ρεασονς Ι ϑυδγε τηατ ιτ ωουλδ βε ερψ ωελςομε το ηιμ ανδ το οτηερς, *ιφ Ι δισςλοσε ηερε αν αδδιτιον το σομετηινγ ωηοσε υσεφυλνεσς εξτενδς σο βροαδλψ.* Φορ αλλ τηεορεμς ανδ προβλεμς οφ τηις σορτ, ωηιςη ωερε

ριγητλψ αδμιρεδ, φλοω φρομ ιτ ωιτη συςη εασε τηατ νοω τηεψ νο μορε νεεδ το βε λεαρνεδ ανδ γρασπεδ τηαν τηε μανψ τηεορεμς οφ ςομμον γεομετρψ νεεδ το βε λεαρνεδ βψ ηεαρτ βψ σομεονε ωηο γρασπς σπεςιους γεομετρψ. Τηερεφορε I προ- Νοτε 12, π. 124
ςεεδ ας φολλοως ιν τηε αβοε-μεντιονεδ ςασε. Λετ τηε ορδινατε βε x, τηε αβσςισσα y [Φιγυρε 1] ανδ λετ τηε ιντεραλ I μεντιονεδ βετωεεν τηε περπενδιςυλαρ ανδ τηε



Φιγυρε 1: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ'ς

ορδινατε βε p· ιτ ις ιμμεδιατελψ οβιους φρομ μψ μετηοδ τηατ

$$p\,dy = x\,dx,$$

ωηιςη *Μρ. ῝ραιγ* αλσο οβσερεδ βψ υσινγ τηε σαμε μετηοδ· ωηεν τηις διφφερεντιαλ Νοτε 13, π. 124
εχυατιον ις τυρνεδ ιντο αν εχυατιον οφ συμς, ωε γετ

$$\int p\,dy = \int x\,dx.$$

Βυτ ιτ ις οβιους φρομ τηε τηινγς I ηαε σετ φορτη ιν τηε μετηοδ οφ τανγεντς τηατ Νοτε 14, π. 125

$$d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x\,dx;$$

ανδ τηερεφορε ςορρεσπονδινγλψ

$$\frac{1}{2}x^2 = \int x dx$$

(φορ συμς ανδ διφφερενςες ορ $\int$ ανδ d αρε ρεςιπροςαλ φορ υς ϑυστ ας ποωερς ανδ ροοτς αρε ιν ςομμον ςαλςυλατιονς). Τηερεφορε ωε ηαε Νοτε 15, π. 125

$$\int p\,dy = \frac{1}{2}x^2,$$

ωηιςη ωας ωηατ ωας το βε δεμονστρατεδ. Νοω Ι πρεφερ το υσε `$dx$' ανδ σιμιλαρ εξπρεσσιονς ρατηερ τηαν το συβστιτυτε λεττερς φορ τηεμ, βεςαυσε τηε εξπρεσσιον `dx' ις α ςερταιν μοδιφιςατιον οφ τηε εξπρεσσιον `x,' ανδ τηυς, βψ υσινγ τηις dx, ωε μαψ ενσυρε τηατ, ωηεν νεςεσσαρψ, ονλψ τηε λεττερ x (τογετηερ ωιτη ιτς ποωερς ανδ διφφερεντιαλς) εντερς ιντο τηε ςαλςυλατιον, ανδ τηε τρανσςενδεντ ρελατιονς βετωεεν x ανδ σομετηινγ ελσε αρε εξπρεσσεδ. Ιν τηις ωαψ ιτ ις ποσσιβλε το δισπλαψ τρανσςενδεντ λινες βψ μεανς οφ αν εχυατιον· φορ εξαμπλε, λετ a βε αν
Νοτε 16, π. 125 αρς ανδ x ιτς ερσεδ σινε· τηεν

$$a = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

Νοτε 17, π. 127 ανδ ιφ y ις τηε ορδινατε οφ τηε ςψςλοιδ, τηεν

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

ωηιςη εχυατιον περφεςτλψ εξπρεσσες τηε ρελατιον βετωεεν τηε ορδινατε y ανδ τηε αβσςισσα x, ανδ φρομ ιτ αλλ τηε προπερτιες οφ τηε ςψςλοιδ ςαν βε δεμονστρατεδ· ανδ ιν τηις ωαψ αναλψτις ςαλςυλατιον ις εξτενδεδ το τηοσε λινες τηατ ηαε βεεν τηυς φαρ εξςλυδεδ φορ νο γρεατερ ρεασον τηαν τηατ τηεψ ωερε βελιεεδ νοτ το αδμιτ οφ ιτ· Ωαλλισ΄ς ιντερπολατιονς ανδ innυμεραβλε οτηερ τηινγς αρε αλσο δεριεδ φρομ τηις.

Φιναλλψ, σο τηατ Ι μαψ νοτ σεεμ το ασςριβε τοο μυςη το μψσελφ ορ δετραςτ τοο μυςη φρομ οτηερς, λετ με σαψ ιν α φεω ωορδς ωηατ Ι τηινκ τηατ Ι οωε το τηε ματηεματιςιανς οφ ουρ αγε ωηο αρε διστινγυισηεδ ιν τηις σορτ οφ γεομετρψ. *Γαλιλϵο* ανδ *ἃαλιϵρι* φιρστ βεγαν το υνςοερ τηε ερψ ινολεδ αρτς οφ *ὂνον* ανδ *Αρςηιμϵδϵς*. Βυτ ἃαλιερι΄ς γεομετρψ οφ ινδισιβλες βελονγεδ ονλψ το τηε ινφανςψ οφ α σςιενςε ιν ιτς ρεβιρτη. Τηρεε φαμους μεν ηελπεδ μορε: *Φϵρματ* βψ φινδινγ τηε μετηοδ οφ γρεατεστ ανδ λεαστ λινες, *Δϵσςαρτϵς* βψ σηοωινγ τηε ωαψ το εξπρες τηε λινες οφ ςομμον γεομετρψ (φορ ηε εξςλυδεδ τρανσςενδεντς) τηρουγη εχυατιονς, ανδ *Φρ. Γρϵγορψ οφ Στ. ἵνςϵντ* βψ ηις μανψ ερψ σπλενδιδ δισςοεριες. Ι αδδ το τηεσε τηε εξτραορδιναρψ ρυλε οφ *Γυλδιν* αβουτ τηε μοτιον οφ τηε ςεντερ οφ γραιτψ. Βυτ τηεσε μεν αλσο ςαμε το α στοπ ωιτηιν ςερταιν βουνδαριες, ωηιςη, αφτερ οπενινγ α νεω αππροαςη, τηε ρενοωνεδ γεομετερς *Ηυψγϵνς* ανδ *Ωαλλις* ςροσσεδ. Ινδεεδ ιτ ις λικελψ ενουγη τηατ Ηυψγενσ΄ς δισςοεριες γαε το *Ηϵυρατ*, ανδ Ωαλλισ΄ς γαε το *Νϵιλ* ανδ *Ωρϵν* (τηε μεν ωηο φιρστ δεμονστρατεδ τηατ ςυρες αρε εχυαλ το στραιγητ λινες), τηε οππορτυνιτψ το μακε τηειρ οων ερψ βεαυτιφυλ δισςοεριες, ωηιςη νεερτηελεσς τακες νοτηινγ αωαψ φρομ τηειρ ωελλ-δεσερεδ πραισε. Τηε Σςοτ *Θαμϵς Γρϵγορψ* ανδ τηε Ενγλισημαν *Ισαας Βαρροω*, ωηο ωονδερφυλλψ ενριςηεδ τηε σςιενςε ωιτη σπλενδιδ τηεορεμς οφ τηις κινδ, φολλοωεδ τηεσε μεν. Μεανωηιλε *Νιςολας Μϵρςατορ* οφ Ηολστειν, α ματηεματιςιαν ανδ α μοστ ουτστανδινγ ονε, ις τηε φιρστ Ι κνοω το ηαε γιεν α χυαδρατυρε βψ μεανς οφ αν ινφινιτε σεριες. Βυτ α γεομετερ οφ μοστ προφουνδ γενιυς, *Ισαας Νϵωτον*, νοτ ονλψ μαδε τηε σαμε δισςοερψ ον ηις οων, βυτ αλσο σολεδ τηε προβλεμ βψ α ςερταιν υνιερσαλ μετηοδ· ιφ Νεωτον ωερε το πυβλιση ηις τηουγητς, ωηιςη Ι υνδερστανδ ηε ηας τηυς φαρ συππρεσσεδ, ηε ωουλδ υνδουβτεδλψ οπεν υπ φορ υς νεω ωαψς το μακε σςιενςε γροω ανδ βεςομε μορε ςονςισε.

Ιτ ηαππενεδ τηατ ωηιλε Ι ωας στιλλ α βεγιννερ ιν τηεσε στυδιες, φρομ ονε ασπεςτ οφ α ςερταιν δεμονστρατιον αβουτ τηε μαγνιτυδε οφ α σπηεριςαλ συρφαςε, α γρεατ λιγητ συδδενλψ δαωνεδ ον με. Φορ Ι σαω τηατ ιν γενεραλ τηε φιγυρε μαδε φρομ τηε περπενδιςυλαρς το α ςυρε, δραων ορδινατεωισε το τηε αξις (ιν τηε ςασε οφ τηε ςιρςλε, τηε φιγυρε μαδε φρομ τηε ραδιι) ις προπορτιοναλ το τηε συρφαςε οφ τηε σολιδ τηατ αρισες φρομ τηε ροτατιον οφ τηε φιγυρε αβουτ τηε αξις. Ωονδερφυλλψ δελιγητεδ ωιτη τηις φιρστ τηεορεμ (σινςε Ι διδ νοτ κνοω τηατ σομετηινγ σιμιλαρ ηαδ βεεν νοτιςεδ βψ οτηερς), Ι ιμμεδιατελψ ινεντεδ τηε τριανγλε τηατ ιν ανψ ςυρε Ι ςαλλεδ τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε, ωηοσε σιδες ωερε ινδιισιβλες (το σπεακ μορε αςςυρατελψ, ινφινιτελψ σμαλλ) ορ διφφερεντιαλ χυαντιτιες· βψ υσινγ ιτ Ι ιμμεδιατελψ ςομποσεδ ιννυμεραβλε τηεορεμς ωιτη νο τρουβλε, παρτ οφ ωηιςη Ι αφτερωαρδς φουνδ ιν *Γρεγορψ* ανδ *Βαρροω*. Ανδ Ι ωας νοτ ψετ υσινγ τηε τρυε αλγεβραις ςαλςυλυς· ωηεν Ι σταρτεδ το υσε ιτ Ι σοον φουνδ μψ αριτημετις χυαδρατυρε ανδ μανψ οτηερ τηινγς. Βυτ σομεηοω τηε αλγεβραις ςαλςυλυς διδ νοτ σατισφψ με ιν τηις βυσινεσς, ανδ Ι ωας φορςεδ το σηοω μανψ τηινγς βψ μοινγ φιγυρες αρουνδ τηατ Ι ωαντεδ το σηοω βψ αναλψσις, υντιλ ατ λαστ Ι φουνδ τηε τρυε συππλεμεντ το αλγεβρα φορ τρανσςενδεντς, ναμελψ, μψ ςαλςυλυς οφ τηε ινδεφινιτελψ σμαλλ, ωηιςη Ι αλσο ςαλλ διφφερεντιαλ, ορ συμμινγ, ορ τετραγονιστις, ανδ χυιτε αππροπριατελψ (ιφ Ι αμ νοτ μιστακεν) τηε *Αναλψσις οφ ινδιισιβλες ανδ ινφινιτες*· ονςε Ι ηαδ δισςοερεδ τηις ςαλςυλυς, εερψτηινγ Ι μψσελφ ηαδ πρειουσλψ αδμιρεδ ιν τηις αρεα σεεμεδ το βε ςηιλδ'ς πλαψ. Ιτ νοτ ονλψ λεδ το τηε μαρκεδ αββρειατιονς, βυτ αλσο μαδε ιτ ποσσιβλε το πυτ τογετηερ τηε ερψ γενεραλ μετηοδ τηατ Ι σετ φορτη αβοε, ωηερεβψ χυαδρατριςες ορ οτηερ λινες, αλγεβραις ορ τρανσςενδεντ, αρε δετερμινεδ ας φαρ ας ποσσιβλε. Βεφορε Ι φινιση, λετ με γιε α ωαρνινγ: ιν διφφερεντιαλ εχυατιονς, συςη ας

$$a = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

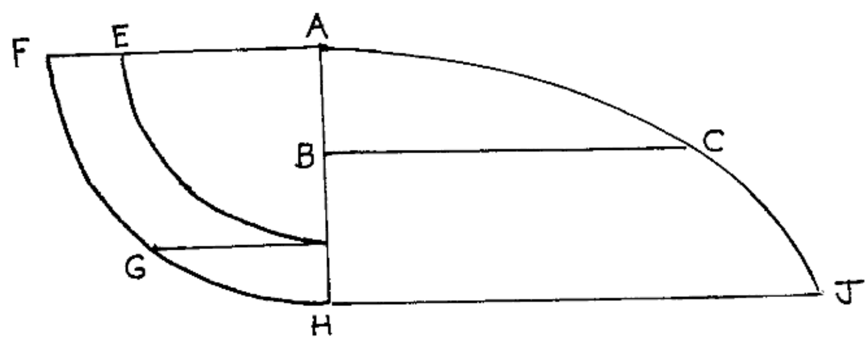
λετ νο ονε ηεεδλεσσλψ νεγλεςτ τηε dx ιτσελφ βεςαυσε ιτ ςαν βε νεγλεςτεδ ιν τηε ςασε ωηερε τηε x'ς τηεμσελες αρε ασσυμεδ το γροω υνιφορμλψ. Φορ μοστ ερρ ιν ϑυστ τηις ωαψ ανδ πρεεντ τηεμσελες φρομ αδανςινγ φυρτηερ βεςαυσε τηεψ δο νοτ λετ ινδιισιβλες λικε dx κεεπ τηειρ υνιερσαλιτψ (σο τηατ ανψ κινδ οφ προγρεσσιον μιγητ βε τακεν φορ τηε x'ς τηεμσελες), αλτηουγη ιννυμεραβλε τρανσφιγυρατιονς ανδ εχυιποτενςιες οφ φιγυρες μαψ αρισε φρομ τηις ερψ τηινγ.

Νοτε 18, π. 129

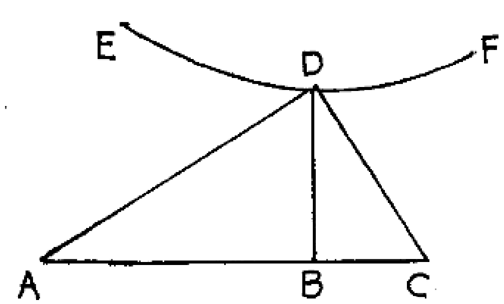
Νοτε 19, π. 132

Αφτερ Ι ηαδ αλρεαδψ φινισηεδ ωριτινγ τηις λιττλε αρτιςλε, τηε τηινγ τηατ Μρ. Δ. Τ. σηαρεδ ιν τηε *Αςτς* οφ Μαρςη οφ τηις ψεαρ ον παγε 176 ςαμε ιντο μψ ηανδς, ωηερε ηε προποσεδ σομε ελεγαντ χυεστιονς τηατ αρε ωορτηψ το βε σολεδ. Ανδ Ι σεε τηατ τηε λινε ACI (Φιγυρε 2) ις ονε οφ τηε λινες οφ σινες, ανδ τηε ρεςτανγλε φορμεδ βψ AH ανδ GD ις εχυαλ το τηε σπαςε $ABCA$. Ανδ ιν Φιγυρε 3, ιφ τηε σολιδ φορμεδ βψ τηε σχυαρε ον BC ανδ BD (ορ x) σηουλδ αλωαψς βε εχυαλ το τηε γιεν ςυβε φρομ a, Ι σεε τηατ τηε παραβολοιδ ωηοσε εχυατιον ις $4a^3y^2 = 25x^5$ σατισφιες τηε προβλεμ. Ιτ ις ποσσιβλε το δετερμινε σομετηινγ σιμιλαρ φορ οτηερ ποωερς. Βυτ ιφ AD, DB, $BC =$ τηε γιεν ςυβε, ιτ ρεδυςες το τηε σχυαρινγ λινε οφ τηε φιγυρε τηε αλυε οφ ωηοσε ορδινατες ις ax^3 διιδεδ βψ $\sqrt{a^6 - x^6}$· ανδ ιν γενεραλ τηε προβλεμ οφ φινδινγ τηε λινε ωιτη α γιεν ρελατιον βετωεεν τηε στραιγητ λινες AB, BC, CD, AD, DB ιν τηε σαιδ Φιγυρε 3 ςοινςιδες ωιτη α προβλεμ οφ φινδινγ

Νοτε 20, π. 165



Φιγυρε 2: Λειβνιζ'ς φιγυρε



Φιγυρε 3: Λειβνιζ'ς φιγυρε

χυαδρατυρες. Βυτ ιφ α φιξεδ ποιντ L ις τακεν ον τηε λινε AC νεω ρελατιονς οφ α διφφερεντ νατυρε αρισε (φορ εξαμπλε, τηε ρατιο βετωεεν LC ανδ CD μαψ βε γιεν), ανδ τηις προβλεμ λικεωισε αδμιτς οφ α σολυτιον.

Νοτες ον Λειβνιζ΄ς 'Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ'

Λειβνιζ πυβλισηεδ τηις παπερ ιν τηε *Αςτς οφ τηε Ερυδιτε* ιν Θυνε οφ 1686, αβουτ α ψεαρ ανδ ηαλφ αφτερ 'Α Νεω Μετηοδ.' Ωε ηαε τρανσλατεδ ιτ φρομ τηε Λατιν τεξτ ιν Γερηαρδτ΄ς εδιτιον, ὅλυμε ˝, παγες 226–33.

Νοτε 1

Ιν 'Α Νεω Μετηοδ,' Λειβνιζ σηοως ηοω, γιεν α ρελατιον βετωεεν χυαντιτιες, ωε ςαν φινδ α *διφφερεντιαλ εχυατιον* ρελατινγ τηειρ διφφερενςες, ανδ ηοω ωε ςαν υσε τηις διφφερεντιαλ εχυατιον το σολε γεομετρις προβλεμς βψ φινδινγ γρεατεστ ανδ λεαστ ορδινατες ανδ φινδινγ τανγεντς (σεε παγε 33 οφ 'Α Νεω Μετηοδ' ανδ παγε 74 οφ ουρ νοτες). 'Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ' τρεατς τηε ινερσε προβλεμ: Λειβνιζ σηοως ηοω, γιεν α διφφερεντιαλ εχυατιον ρελατινγ τηε διφφερενςες οφ σομε χυαντιτιες, ωε ςαν (ιν σομε ςασες) φινδ τηε ρελατιον βετωεεν τηε χυαντιτιες *τηεμσελες*· ανδ ηε σηοως ηοω ωε ςαν υσε τηις ρελατιον βετωεεν τηε χυαντιτιες το σολε α γεομετρις προβλεμ: τηε προβλεμ οφ φινδινγ τηε μεασυρεμεντς οφ ςυριλινεαρ φιγυρες (τηατ ις, λενγτης, αρεας, ανδ ολυμες). Το σολε τηε προβλεμ οφ φινδινγ τηε ρελατιον βετωεεν χυαντιτιες ωιτη α γιεν διφφερεντιαλ εχυατιον, Λειβνιζ ιντροδυςες ιντο ηις ςαλςυλυς α νεω οπερατιον, 'συμμινγ,' ρεπρεσεντεδ βψ α νεω σψμβολ, $\int$.

Νοτε 2

Τηε Μεασυρεμεντ οφ Φιγυρες

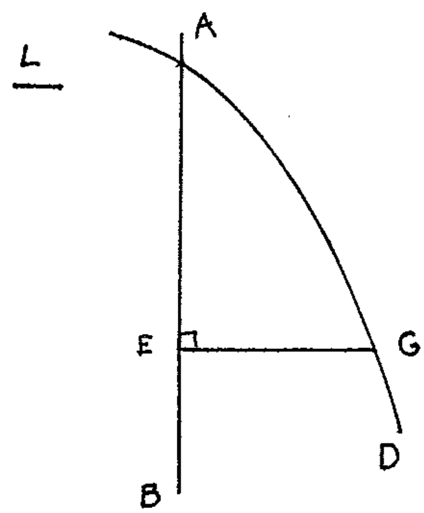
Ιν Προποσιτιον Ι 45 οφ τηε *Ελεμεντς*, Ευςλιδ σηοως ηοω το φινδ α ρεςτανγλε εχυαλ το ανψ γιεν *ρεςτιλινεαρ* φιγυρε. Το φινδ α ρεςτανγλε εχυαλ το α γιεν *ςυριλινεαρ* φιγυρε ις α προβλεμ οφ χυαδρατυρε, αλσο ςαλλεδ 'τετραγονισμ.' Φορ εξαμπλε, το φινδ τηε χυαδρατυρε οφ α ςιρςλε, το 'σχυαρε α ςιρςλε,' ις το φινδ α σχυαρε εχυαλ το τηε ςιρςλε. Τηις ις νοτ α προβλεμ νεω το Λειβνιζ: Αρςημεδες, φορ ονε, οφφερς α δεμονστρατιον τηατ 'τηε αρεα οφ ανψ ςιρςλε ις εχυαλ το α ριγητ-ανγλεδ τριανγλε ιν ωηιςη ονε οφ τηε σιδες αβουτ τηε ριγητ ανγλε ις εχυαλ το τηε ραδιυς, ανδ τηε οτηερ το τηε ςιρςυμφερενςε οφ τηε ςιρςλε.'[5]

Γενεραλ ανδ Σπεςιαλ Μεασυρεμεντς οφ Φιγυρες

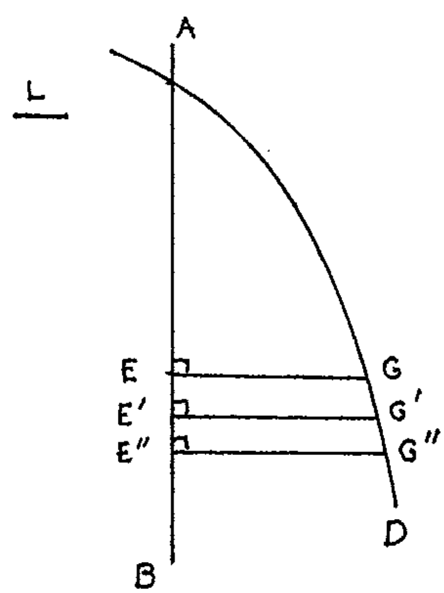
Ιν τηις πασσαγε, Λειβνιζ διστινγυισηες α γενεραλ (ορ ινδεφινιτε) χυαδρατυρε φρομ α σπεςιαλ (ορ δεφινιτε) χυαδρατυρε. Το φινδ α σπεςιαλ (τηατ ις, σπεςιφις) χυαδρατυρε ις το φινδ τηε σιδες οφ τηε ρεςτανγλε εχυαλ το α σινγλε, ςονσταντ αρεα. Αν εξαμπλε οφ α προβλεμ οφ σπεςιαλ χυαδρατυρε ις σηοων ιν Φιγυρε 4: γιεν α ςυρε AD ωιτη αξις AB ανδ ορδινατε EG, ανδ ονε σιδε L οφ α ρεςτανγλε, τηε προβλεμ ις το φινδ τηε οτηερ σιδε M οφ τηε ρεςτανγλε ωηιςη ωιλλ ενςλοσε αν αρεα εχυαλ το τηε ςυριλινεαρ φιγυρε AEG.

Τηε προβλεμ οφ α γενεραλ (ορ ινδεφινιτε) χυαδρατυρε ις το φινδ τηε ρεςτανγλες τηατ ενςλοσε α αρψινγ ορ αριαβλε αρεα. Φορ εξαμπλε, Φιγυρε 5, γιεν α ςυρε AD

[5]Σεε Αρςημεδεσ' *Μεασυρεμεντ οφ τηε ΐρςλε*, Προποσιτιον 1.



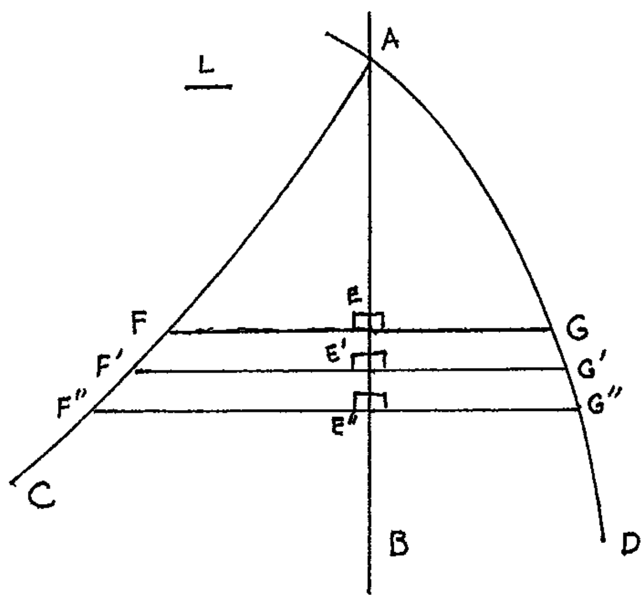
Φιγυρε 4



Φιγυρε 5

ωιτη αξις AB ανδ ορδινατε EG, ανδ ονε σιδε L οφ τηε ρεςτανγλε, τηε προβλεμ ις το φινδ τηε σεςονδ σιδες M, M', M'', ετς., οφ τηε ρεςτανγλες εχυαλ το τηε ςυριλινεαρ αρεας AEG, $AE'G'$, $AE''G''$, ετς.

Νοω το ρεπρεσεντ αλλ τηεσε λινες ιν α σινγλε φιγυρε (Φιγυρε 6), λετ $EF = M$, $E'F' = M'$, $E''F'' = M''$, ετς. Τηεν ιφ ωε ηαε φουνδ αλλ ποσσιβλε σεςονδ σιδες



Φιγυρε 6

M, M', ετς., τηε ποιντς F, F', ετς., ωιλλ τραςε ουτ α ςυρεδ λινε AFC, συςη τηατ φορ ανψ ορδινατε EG τηε ρεςτανγλε ον EF ανδ L ις εχυαλ το τηε ςυριλινεαρ αρεα AEG. Τηερεφορε το φινδ τηε λινε AFC ις εχυιαλεντ το φινδινγ τηε χυαδρατυρε οφ αλλ ποσσιβλε αρεας AEG, τηατ ις, το φινδινγ α γενεραλ χυαδρατυρε. Τηε ςυρε AFC τηυς γιες υς α ωαψ το μεασυρε νοτ θυστ α σινγλε αρεα, βυτ τηε αριαβλε αρεα AEG, ωηιςη ςηανγες ας τηε ορδινατε μοες. Τηε οριγιναλ ςυρε AGD ις ςαλλεδ τηε *χυαδρανδα*, τηατ ις, τηε ‘ςυρε το βε σχυαρεδ¨, ωηιλε τηε ςυρε ωε φινδ, AFC, ις ςαλλεδ τηε *χυαδρατριξ*, τηατ ις, τηε ‘σχυαρινγ ςυρε,’ βεςαυσε ιτ λετς υς φινδ α σχυαρε εχυαλ το τηε αρεα AEG βψ φινδινγ α σχυαρε εχυαλ το τηε ρεςτανγλε ον FE ανδ L.

Νοτε 3

Τηε τερμ ‘τρανσςενδεντ’ (αλσο ‘τρανσςενδενταλ¨) ις οπποσεδ το ‘αλγεβραις.’ Ιτ μεανς: τρανσςενδς φινιτε αλγεβραις οπερατιονς. Τηε τερμ μαψ βε αππλιεδ το α νυμβερ ορ α ςυρε. Αν αλγεβραις νυμβερ ις ονε τηατ ις α σολυτιον το αν αλγεβραις εχυατιον ωιτη ονε αριαβλε, τηατ ις, αν εχυατιον οφ τηε φορμ

$$a_nx^n + a_{n-1}1x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

ωηερε n ις α νατυραλ νυμβερ ανδ $a_0, a_1, \ldots$ αρε ιντεγραλ ςοεφφιςιεντς. Φορ εξαμπλε,

$$3x^2 + 2x - 5 = x^9 - 3x^5$$

ις αν αλγεβραις εχυατιον, ανδ σο ιτς σολυτιονς αρε αλγεβραις νυμβερς.

Α τρανσςενδεντ ςυρε ις ονε τηατ ςαννοτ βε εξπρεσσεδ βψ αν αλγεβραις εχυατιον. Ωηιλε α νυμβερ ις δεφινεδ βψ αν εχυατιον ιν ονε αριαβλε, α ςυρε ις δεφινεδ βψ αν εχυατιον ιν τωο αριαβλες. Συςη αν εχυατιον ις αλγεβραις ωηεν ιτ ις α πολψνομιαλ ιν τωο αριαβλες ωιτη ανψ ςοεφφιςιεντς, τηατ ις, ωηεν ιτ ις οφ τηε φορμ

$$\begin{aligned}
0 = {} & a_{n,m}x^ny^m + a_{n-1,m}x^{n-1}y^m + \cdots + a_{1,m}xy^m + a_{0,m}y^m \\
& + a_{n,m-1}x^ny^{m-1} + a_{n-1,m-1}x^{n-1}y^{m-1} + \cdots + a_{1,m-1}xy^{m-1} + a_{0,m-1}y^{m-1} \\
& + \cdots \\
& + a_{n,1}x^ny + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{1,1}xy + a_{0,1}y \\
& + a_{n,0}x^n + a_{n-1,0}x^{n-1} + \cdots + a_{1,0}x + a_{0,0}.
\end{aligned}$$

ωηερε n ανδ m αρε νατυραλ νυμβερς ανδ τηε νυμβερς $a_{i,j}$ (φορ αλλ αλυες οφ i βετωεεν 0 ανδ n ανδ αλλ αλυες οφ j βετωεεν 0 ανδ m) ςουλδ βε ανψ νυμβερς.

Φορ εξαμπλε,

$$3x^2 - 2y^2 + 2xy - 7x + 1 = 0$$

ις αν αλγεβραις εχυατιον ςορρεσπονδινγ το αν αλγεβραις ςυρε.

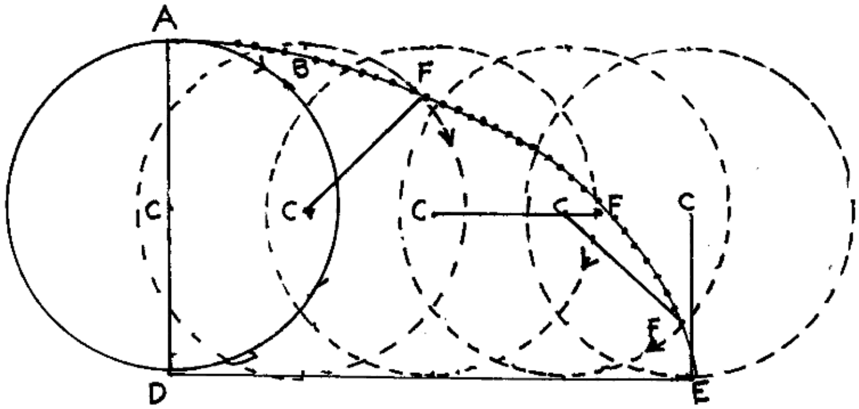
Δεσςαρτες ςαλλεδ τρανσςενδεντ ςυρες 'μεςηανιςαλ,' ας οπποσεδ το 'γεομετριςαλ', ινδιςατινγ τηερεβψ τηατ, αλτηουγη ονε ςαν ςονστρυςτ μεςηανιςαλ δειςες βψ ωηιςη συςη α ςυρε μαψ βε τραςεδ, τηερε σεεμς το βε νο ριγορους δετερμιναβλε ρυλε τηατ ρελατες α γιεν αβσςισσα το ιτς ςορρεσπονδινγ ορδινατε. Συςη ςυρες τηυς σεεμ το ελυδε αναλψσις. Τηερε αρε μανψ τρανσςενδεντ ςυρες: τηε σινε ςυρε, αλονγ ωιτη τηε οτηερ τριγονομετρις ςυρες, τηε λογαριτημις ςυρε, τηε λογαριτημις σπιραλ, τηε ςψςλοιδ (τηε πατη τραςεδ βψ α ποιντ ον τηε ριμ οφ α ςιρςυλαρ ωηεελ ας ιτ ρολλς αλονγ α στραιγητ λινε), ανδ τηε ςατεναρψ ορ ηανγινγ ςηαιν.

Νοτε 4

Βψ σαψινγ τηατ ηις μετηοδ συππλιες τηε 'βεστ ρεμεδψ αγαινστ ιρρατιοναλιτιεσ' Λειβνιζ αππεαρς το μεαν σιμπλψ τηατ ηις διφφερεντιαλ ςαλςυλυς ςαν φινδ τανγεντς εεν ωηεν τηε εχυατιον φορ α ςυρε ινολες σχυαρε ροοτς ανδ οτηερ μορε ςομπλιςατεδ εξπρεσσιονς. Σεε παγε 33 οφ 'Α Νεω Μετηοδ.'

Νοτε 5

Α *ςψςλοιδ* ις α ςυρε τραςεδ ουτ βψ α ποιντ ον α ωηεελ ας τηε ωηεελ ρολλς ωιτηουτ σλιππινγ ον λεελ γρουνδ. Σεε Φιγυρε 7. Τηερε ωε ηαε α ωηεελ ωηιςη βεγινς ατ ABD ανδ ηας ιτς ςεντερ ατ C. Τηε γρουνδ ις τηε ηοριζονταλ λινε DE. Ας τηε



Φιγυρε 7

ωηεελ ρολλς το τηε ριγητ αλονγ τηε γρουνδ τηε ποιντ A ωιλλ μοε το νεω ποιντς F ανδ τραςε ουτ τηε *ςψςλοιδ* AFE. Ωε τρεατ τηε ςψςλοιδ ιν μορε δεταιλ βελοω (παγε 127), υσινγ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς.

Νοτε 6

Λειβνιζ΄ς αργυμεντ (ανδ τηε σκετςη ωε γιε ηερε) ις φαρ φρομ α ςομπλετε δεμονστρατιον, βυτ ρατηερ α πλαυσιβλε αργυμεντ το ςαστ δουβτ ον Δεσςαρτεσ΄ δεφινιτιον οφ τηε βουνδαριες οφ γεομετρψ. Λειβνιζ σηοως τηατ τηερε αρε γοοδ ρεασονς το βελιεε τηατ τηε χυαδρατριςες φορ τηε ςιρςλε ανδ ηψπερβολα αρε, ιν Δεσςαρτεσ΄ τερμς, μεςηανιςαλ, ανδ τηατ Δεσςαρτες ωουλδ ηαε το εξςλυδε τηεμ φρομ γεομετρψ.

Ωε ωιλλ ονλψ τρεατ τηε ςασε οφ τηε ςιρςλε, ρετυρνινγ το τηε ςασε οφ τηε ηψπερβολα λατερ (σεε βελοω, παγε 158).

Τηεορεμ: *Τηε χυαδρατριξ οφ α ςιρςλε ις τρανσςενδεντ.*

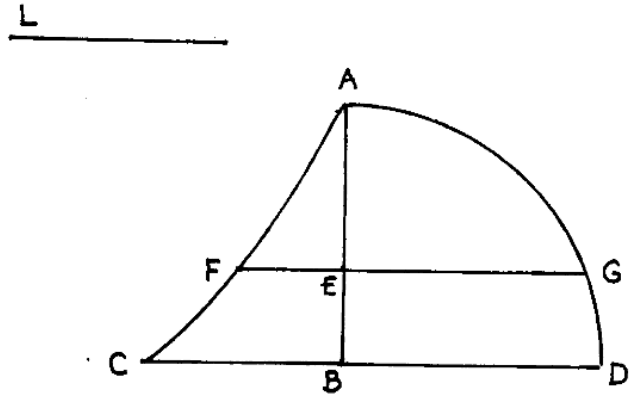
Α σκετςη οφ α δεμονστρατιον: Σεε Φιγυρε 8.

Λετ ςιρςλε AGD βε ουρ χυαδρανδα, ανδ λετ ιτς χυαδρατριξ βε τηε λινε AFC, σο τηατ FE (ορ τηε ρεςτανγλε FE, L, ωηερε L ις α υνιτ) ις αλωαψς εχυαλ το αρεα AEG. Λετ ιτς αβσςισσας $AE = x$ ανδ ιτς ορδινατες $EF = v$. Λειβνιζ σαψς τηατ AFC ις τρανσςενδεντ. Ωε αργυε βψ *ρεδυςτιο αδ αβσυρδυμ*: ωε (φαλσελψ) συπποσε τηατ AFC ις νοτ τρανσςενδεντ, ανδ αργυε τηατ τηις λεαδς το αν αβσυρδιτψ.

Φορ συπποσε τηατ AFC ωερε νοτ τρανσςενδεντ. Τηεν ιτ ωουλδ ηαε α σινγλε αλγεβραις εχυατιον οφ δεφινιτε δεγρεε, συςη ας

$$v^2 = x,$$

ορ σομε οτηερ αλγεβραις εχυατιον ωηερε τηε εξπονεντς οφ x ανδ v ωερε αλλ οφ δεφινιτε δεγρεες, τηατ ις, αλλ ςονσταντ ωηολε νυμβερς.



Φιγυρε 8

Τηις αλγεβραις εχυατιον φορ τηε χυαδρατριξ ςουλδ βε υσεδ το φινδ τηε αλυε οφ FE, τηατ ις, αρεα AEG, φορ ανψ γιεν αλυε οφ AE. Ιν οτηερ ωορδς, ουρ *ρεδυςτιο* ασσυμπτιον ις τηατ ωε ςαν φινδ αλλ τηε αρεας AEG ιν τερμς οφ τηειρ σιδες AE βψ α *σινγλε* εχυατιον οφ *δεφινιτε* δεγρεε.

Το ςομπλετε τηε αργυμεντ ωε ωουλδ τηεν ηαε το δεμονστρατε τηε φολλοωινγ τωο τηινγς:

1. Ωε φιρστ ωουλδ ηαε το σηοω τηατ, γιεν ουρ *ρεδυςτιο* ασσυμπτιον, ωε ςουλδ φινδ α σινγλε αλγεβραις εχυατιον οφ δεφινιτε δεγρεε τηατ ςαν βε υσεδ το διιδε ανψ ανγλε ιντο ανψ νυμβερ οφ εχυαλ παρτς.

2. Ωε τηεν ωουλδ ηαε το σηοω τηατ τηε προβλεμ οφ διιδινγ αν ανγλε ιντο αν αρβιτραρψ νυμβερ οφ παρτς ηας νο δεφινιτε δεγρεε, ςοντραδιςτινγ ωηατ ωε ϑυστ σηοωεδ ιν τηε φιρστ παρτ οφ τηε δεμονστρατιον, ανδ τηυς σηοωινγ τηατ ουρ ασσυμπτιον τηατ AFC ις νοτ τρανσςενδεντ μυστ βε φαλσε.

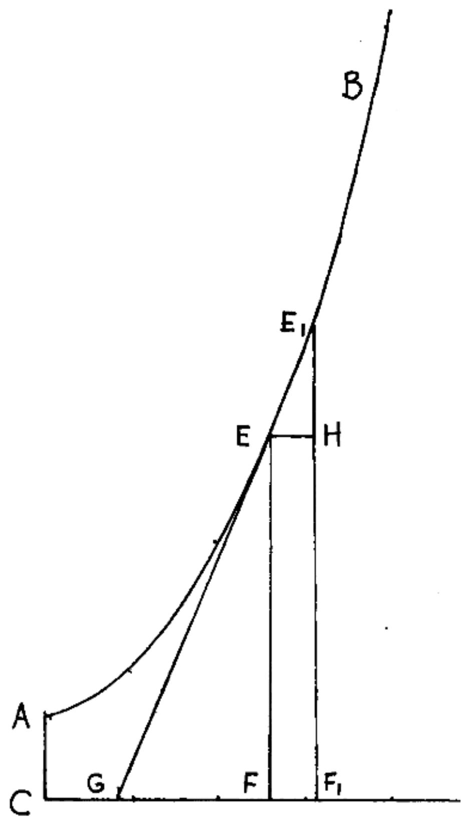
Ωε γο τηρουγη τηεσε στεπς ιν αν αππενδιξ, παγες 249–251, βελοω.

Νοτε 7

Λειβνιζ ςλαιμς ηερε, ωιτηουτ προοφ, τηατ φινδινγ χυαδρατριςες ις α σπεςιαλ ςασε οφ αν ινερσε τανγεντ προβλεμ. Αν ινερσε τανγεντ προβλεμ ις α προβλεμ ωηερε ωε αρε γιεν α προπερτψ τηατ τηε τανγεντς οφ α ςυρε μυστ ηαε, ανδ ωε ηαε το φινδ τηε ςυρε. Ηερε, ινστεαδ οφ ιμμεδιατελψ δεμονστρατινγ τηατ τηε προβλεμ οφ φινδινγ χυαδρατριςες ις α σπεςιαλ ςασε οφ τηε ινερσε τανγεντ προβλεμ, Λειβνιζ φιρστ γοες ον το σηοω (ιν τηις ανδ τηε φολλοωινγ παραγραπη) ηοω τηε ινερσε τανγεντ προβλεμ ςαν βε αππροαςηεδ βψ α μετηοδ τηατ ις ςλοσελψ αναλογους το τηε ονε πρεσεντεδ ιν αν εαρλιερ παπερ, ‘Ον φινδινγ μεασυρεμεντς οφ φιγυρες,’ α μετηοδ ωηιςη ιν τυρν φολλοως Τσςηιρνηαυσ΄ς μετηοδ.

Νοτε 8

Ηερε ις αν εξαμπλε οφ τηε σολυτιον το αν ινερσε τανγεντ προβλεμ, υσινγ τηε μετηοδ Λειβνιζ σκετςηες ηερε. Συπποσε ωε αρε λοοκινγ φορ α ςυρεδ λινε AEB (Φιγυρε 9) ωηοσε ορδινατες αρε EF, ωηοσε αβσςισσας αρε CF, ανδ ωηοσε ταν-



Φιγυρε 9

γεντς EG ηαε τηε προπερτψ τηατ

$$\frac{EF}{FG} = CF.$$

Ιφ ωε σετ $CF = x$ ανδ $EF = y$, ανδ ωε δραω α ςηαραςτεριστις τριανγλε EE_1H, τηεν $EH = dx$, ανδ $E_1H = dy$. Σινςε τριανγλε EE_1H ις σιμιλαρ το τριανγλε GEF,

$$\frac{EF}{FG} = \frac{dy}{dx},$$

ανδ τηερεφορε, βεςαυσε οφ ουρ προπερτψ οφ τανγεντς,

$$\frac{dy}{dx} = x. \tag{1}$$

Το φινδ τηε ςυρε AEB τηατ ηας εχυατιον 1, ωε φιρστ ωριτε δοων α ‘γενεραλ ορ ινδεφινιτε εχυατιον’ φορ ιτ:

$$0 = a + bx + cy + exy + fx^2 + gy^2 + \text{ ετς.} \tag{2}$$

Τηις εχυατιον ις γενεραλ ορ ινδεφινιτε ινσοφαρ ας ιτς ςοεφφιςιεντς (a, b, c ετς.) αρε νοτ δεφινιτε νυμβερς, βυτ γενεραλ ςονσταντς, εαςη οφ ωηιςη ςουλδ ρεπρεσεντ ανψ νυμβερ. Συςη αν εχυατιον ςαν ρεπρεσεντ *ανψ* ςυρε τηατ ηας αν αλγεβραις εχυατιον, ανδ σο, ιν παρτιςυλαρ, ιτ ςαν ρεπρεσεντ τηε ςυρε AEB ωε αρε λοοκινγ φορ *ιφ* ιτ ηας αν αλγεβραις εχυατιον.

Ωε τηεν υσε τηις γενεραλ εχυατιον το φινδ τηε τανγεντ οφ τηε λινε, βψ τακινγ ιτς διφφερενςες ανδ σολινγ φορ $\frac{dy}{dx}$, ας φολλοως.

$$\begin{aligned} 0 &= d(a + bx + cy + exy + fx^2 + gy^2 + \text{ ετς.}) \\ &= b\,dx + c\,dy + e\,d(xy) + f\,d(x^2) + g\,d(y^2) + \text{ ετς.} \\ &= b\,dx + c\,dy + ex\,dy + ey\,dx + 2fx\,dx + 2gy\,dy + \text{ ετς.} \end{aligned}$$

(Ωε υσεδ τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε ανδ τηε ποωερ ρυλε ον τηε λαστ στεπ.) Γατηερινγ αλλ τερμς ινολινγ dy ον τηε λεφτ γιες

$$-c\,dy - ex\,dy - 2gy\,dy + \text{ ετς.} = b\,dx + ey\,dx + 2fx\,dx + \text{ ετς.},$$

ορ

$$dy(-c - ex - 2gy) + \text{ ετς.} = dx(b + ey + 2fx + \text{ ετς.}),$$

ανδ τηερεφορε (σολινγ φορ dy ανδ διιδινγ βοτη σιδες βψ dx),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + ey + 2fx + \text{ ετς.}}{-c - ex - 2gy + \text{ ετς.}}.$$

Ωε τηεν ‘ςομπαρε ωηατ [ωε φουνδ] ωιτη τηε γιεν προπερτψ οφ τηε τανγεντς,’ βψ συβστιτυτινγ τηις σολυτιον ιντο ουρ εχυατιον φορ τανγεντς

$$\frac{dy}{dx} = x,$$

ας φολλοως:

$$\frac{b + ey + 2fx + \text{ ετς.}}{-c - ex - 2gy + \text{ ετς.}} = x.$$

Ωε τηεν υσε τηις λαστ εχυατιον το τρψ το φινδ τηε ςονσταντς a, b, c, ετς. Ιν τηις ςασε, ιφ $b = e = g = h = \ldots = 0$, ανδ $f = -\frac{c}{2}$, τηεν

$$\frac{b + ey + 2fx + \text{ ετς.}}{-c - ex - 2gy + \text{ ετς.}}$$

ωουλδ σιμπλψ εχυαλ x, ανδ τηερεφορε τηε εχυατιον

$$\frac{dy}{dx} = x$$

ωουλδ βε σατισφιεδ. Νοτε τηατ τηερε ις νο ρεστριςτιον ον a ορ c. Συβστιτυτινγ τηεσε αλυες βαςκ ιντο τηε γενεραλ εχυατιον (εχυατιον 2), γιες υς α *δεφινιτε* εχυατιον φορ AEB, τηατ ις, ιτ εναβλες υς το 'δεφινε τηε εχυατιον οφ τηε λινε σουγητ̈:

$$\begin{aligned} 0 &= a + 0x + cy + 0xy - \frac{c}{2}x^2 + 0y^2 + \text{ ετς.} \\ &= a + cy - \frac{c}{2}x^2. \end{aligned}$$

Σιμπλιφψινγ τηις εχυατιον το σολε φορ y γιες υς

$$cy = \frac{c}{2}x^2 - a, \text{ ανδ}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{a}{c}. \tag{3}$$

Τηις ις τηε εχυατιον φορ λινε AEB. 'Σομε τηινγς ρεμαιν αρβιτραρψ,' ναμελψ, τηε ςονσταντ,

$$\frac{a}{c},$$

βεςαυσε ιννυμεραβλψ μανψ λινες σολε τηε προβλεμ. Ιν φαςτ, τηε λενγτη οφ τηε λινε AC ιν Φιγυρε 9 ις αρβιτραρψ, ανδ ςορρεσπονδς το

$$-\frac{a}{c}.$$

Νοτε 9

Τηε προβλεμ ατ τηε ενδ οφ 'Α Νεω Μετηοδ' (παγε 38) ις αν ινερσε τανγεντ προβλεμ ωηερε 'τηε ςομπαρισον δοες νοτ συςςεεδ' ανδ τηε λινε ις τρανσςενδεντ. Ρεςαλλ τηατ ιν τηατ προβλεμ ωε ωερε λοοκινγ φορ α λινε AEB (Φιγυρε 10) ωηοσε τανγεντς ηαδ τηε προπερτψ τηατ τηε λινε GF βετωεεν τηε τανγεντς EG ανδ ορδινατες EF ωας αλωαψς εχυαλ το α ςονσταντ λινε k. Φορ σιμπλιςιτψ, λετ υς συπποσε $GF = k = 1$. Ιφ ωε αγαιν σετ $CF = x$ ανδ $EF = y$, τηεν βεςαυσε τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε EHE_1 ις σιμιλαρ το τριανγλε GFE,

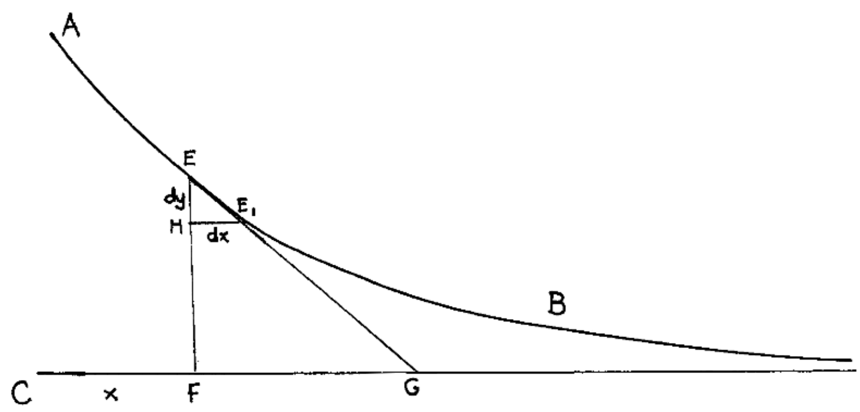
$$\frac{EH}{E_1H} = \frac{EF}{GF},$$

ανδ τηερεφορε

$$\frac{dy}{dx} = y. \tag{1}$$

Ιφ, φολλοωινγ Λειβνιζ'ς μετηοδ, ωε τρψ το φινδ α σολυτιον βψ υσινγ α γενεραλ ορ ινδεφινιτε εχυατιον

$$0 = a + bx + cy + exy + fx^2 + gy^2 + \text{ ετς.}, \tag{2}$$



Φιγυρε 10

ωε ωιλλ νοτ συςςεεδ. Φορ, προςεεδινγ ας ιν τηε πρειους νοτε, ωε ωιλλ φινδ τηατ τηερε ις νο ωαψ το σολε φορ a, b, c, ετς., το μακε τηε εχυατιον

$$\frac{dy}{dx} = y$$

τρυε.

Νοτε 10

Ηερε Λειβνιζ σκετςηες α ωαψ το φινδ μορε ςομπλεξ τρανσςενδεντς ιν τερμς οφ σιμπλερ ονες. Τηερε ις τηυς α κινδ οφ ορδερ οφ τρανσςενδεντ χυαντιτιες, ανδ τηε σπεςιες οφ α τρανσςενδεντ ις ιτς πλαςε ιν τηις ορδερ: τηε βασις τρανσςενδεντς ςομε φρομ ςιρςλες ανδ λογαριτημς, ανδ μορε ςομπλεξ τρανσςενδεντς ςαν τηεν βε δεφινεδ ιν τερμς οφ τηεσε.

Το δο τηις, Λειβνιζ ςηοοσες α σιμπλε γιεν τρανσςενδεντ v ανδ τριες το εξπρεσς τηε εχυατιον φορ τηε ςυρε ηε ις λοοκινγ φορ ιν τερμς οφ x, y, ανδ τηε τρανσςενδεντ v. Φορ εξαμπλε, τηε ςυρε μιγητ ηαε τηε εχυατιον

$$y = 3v^2 + 2x.$$

Τηε χυαντιτψ y ις τηεν α νεω, μορε ςομπλεξ, τρανσςενδεντ δεπενδινγ ον τηε ολδ τρανσςενδεντ v.

Τηε τρανσςενδεντ v μιγητ ‘δεπενδ ον τηε γενεραλ ςυττινγ οφ α ρατιο·’ ωε ωιλλ σεε βελοω (παγε 161) τηατ τηε λογαριτημ

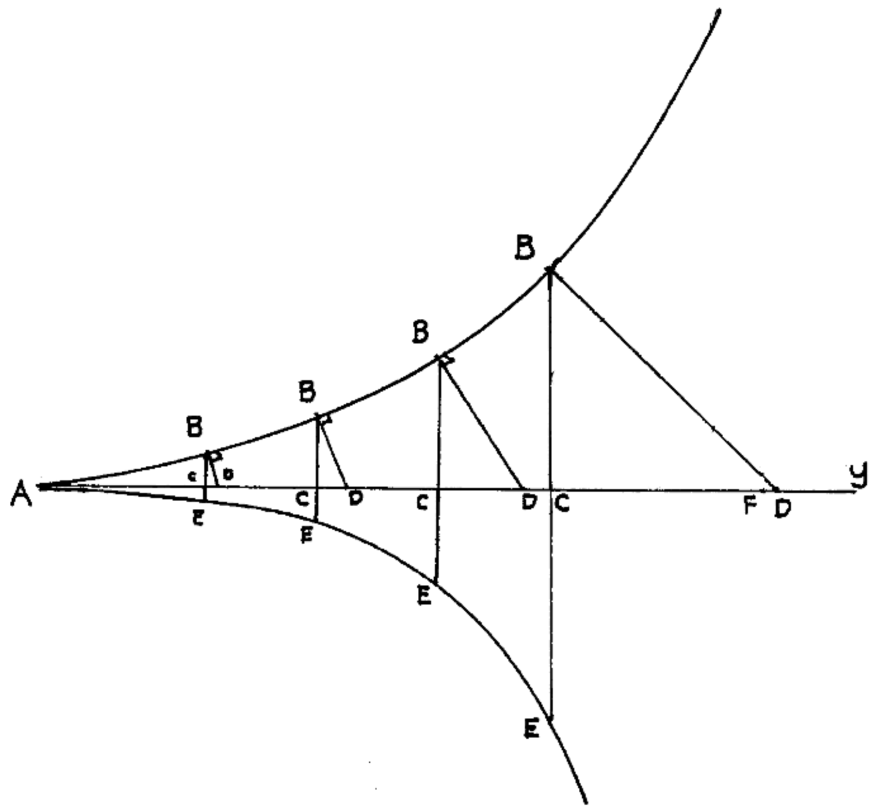
$$v = \log x$$

ις συςη α τρανσςενδεντ. Τηεν τηε νεω τρανσςενδεντ y ωουλδ βε εχυαλ το

$$3(\log(x))^2 + 2x.$$

Νοτε 11

Το υνδερστανδ ωηατ Βαρροω΄ς τηεορεμ ις, σεε Φιγυρε 11. Τηερε ωε αρε γιεν αν



Φιγυρε 11

αρβιτραρψ ςυρε AB ωηοσε αξις ις AC. Τηε ορδινατες BC αρε εχυαλ το x, ωηιλε τηε αβσςισσας AC αρε εχυαλ το y. Τηεν φορ εερψ ποιντ B ον τηε ςυρε ωε εξτενδ α *περπενδιςυλαρ* BD φρομ τηε ςυρε το τηε αξις. Τηις περπενδιςυλαρ ςρεατες αν *ιντεραλ* $CD = p$ βετωεεν τηε ορδινατε BC ανδ τηε περπενδιςυλαρ BD ον τηε αξις AC. Ωε τηεν *αππλψ* τηις ιντεραλ το τηε αξις βψ δραωινγ φρομ εερψ ποιντ C ον τηε αξις α λινε CE εχυαλ το CD ανδ περπενδιςυλαρ το AC. Βψ δοινγ τηις ωε ςονστρυςτ α λινε AE βελοω τηε αξις. Βαρροω΄ς τηεορεμ ασσερτς τηατ τηε *συμ* οφ αλλ τηε ιντεραλς ($p = CD = CE$) αππλιεδ το τηε y-αξις ις εχυαλ το ονε ηαλφ τηε σχυαρε ον τηε φιναλ ορδινατε BC, τηατ ις, το

$$\frac{1}{2}x^2.$$

Τηις συμ ις α συμ οφ ινφινιτελψ μανψ λινες CE. Λειβνιζ δοες νοτ ιμμεδιατελψ μακε ςλεαρ ηοω ηε υνδερστανδς συςη αν ινφινιτε συμ.

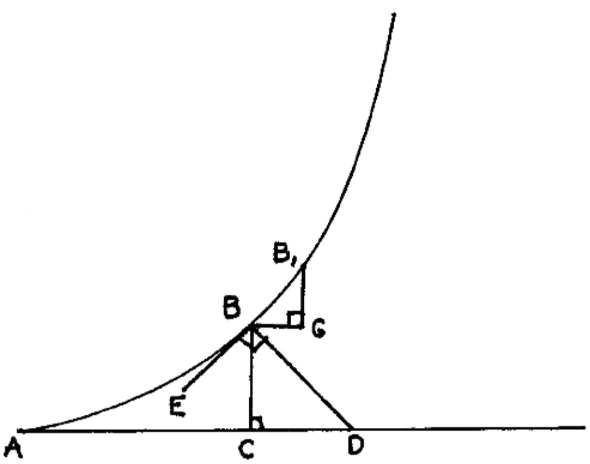
Νοτε 12

Βψ *σπεςιους γεομετρψ* Λειβνιζ μεανς γεομετρψ βασεδ ον αλγεβρα, ας ιν Δεσςαρτεσ' *Γεομετρψ*. Τηε τερμ *σπεςιους* ςομες φρομ ϊέτε, ωηο ςαλλς τηε λεττερς φορ υνκνοων χυαντιτιες *σπεςιες* ανδ ςαλλς αλγεβρα *σπεςιους αριτημετις*.

Νοτε 13

Το σεε ωηερε τηις διφφερεντιαλ εχυατιον ςομες φρομ, ςονσιδερ Φιγυρε 12, BD ις περπενδιςυλαρ το τηε ςυρε ABB_1, CD ις τηε ιντεραλ βετωεεν τηε ορδινατε ανδ περπενδιςυλαρ, ανδ BGB_1 ις α ςηαραςτεριστις τριανγλε. Λετ τηε ορδινατε $BC = x$ ανδ τηε αβσςισσα $AC = y$, σο τηατ $B_1G = dx$ ανδ $BG = dy$. Λετ $CD = p$.

Νοτε τηατ τριανγλε BGB_1 ις σιμιλαρ το τριανγλε BCD· φορ ανγλες BGB_1



Φιγυρε 12

ανδ BCD αρε βοτη ριγητ, ανδ τηερεφορε εχυαλ· ανδ

$$\begin{aligned} \angle B_1BG + \angle GBD &= \text{τηε ριγητ ανγλε } \angle B_1BD, \text{ ανδ} \\ \angle CBD + \angle GBD &= \text{τηε ριγητ ανγλε } \angle CBG, \end{aligned}$$

ανδ τηερεφορε

$$\angle B_1BG + \angle GBD = \angle CBD + \angle GBD,$$

ανδ τηερεφορε (συβτραςτινγ $\angle GBD$ φρομ βοτη σιδες οφ τηις εχυατιον)

$$\angle B_1BG = \angle CBD,$$

σο τηατ τηε τριανγλες GBB_1 ανδ CBD σηαρε τωο εχυαλ ανγλες, ανδ αρε τηερεφορε σιμιλαρ. Ιτ φολλοως φρομ τηε σιμιλαριτψ οφ τηεσε τωο τριανγλες τηατ

$$B_1G : BG :: CD : BC,$$

τηατ ις,

$$dx : dy :: p : x,$$

ανδ τηερεφορε

$$x\,dx = p\,dy.$$

Νοτε 14

Λειβνιζ δενοτες τηε *συμ* οφ τηε ινφινιτελψ μανψ ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες $p\,dy$ βψ

$$\int p\,dy.$$

Τηε σψμβολ $\int$ ις αν ελονγατεδ λεττερ s.

Νοτε 15

Σινςε

$$d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x\,dx,$$

ιτ φολλοως τηατ

$$\int x\,dx = \int d\left(\frac{1}{2}x^2\right).$$

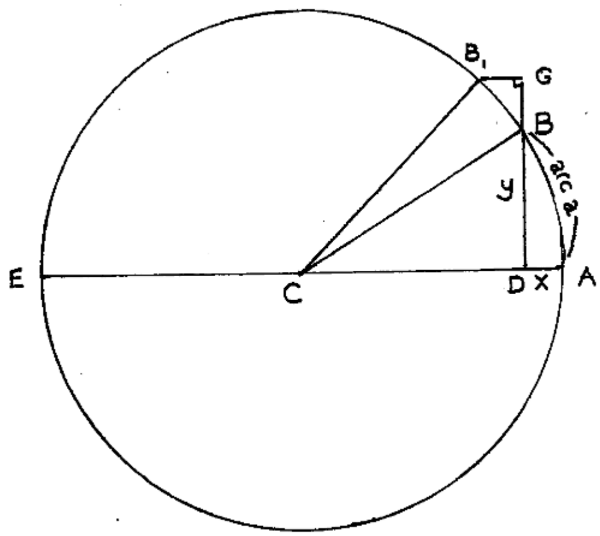
Νοω, αςςορδινγ το Λειβνιζ, συμς ανδ διφφερενςες αρε ρεςιπροςαλ λικε ποωερς ανδ ροοτς. Τηις μεανς τηατ τακινγ συμς υνδοες ωηατ τακινγ διφφερενςες δοες. Τηερεφορε, ωηεν ωε βεγιν ωιτη α χυαντιτψ, τακε ιτς διφφερενςες, ανδ τηεν τακε τηε συμ οφ τηεσε διφφερενςες, ωε γετ βαςκ τηε χυαντιτψ ωε σταρτεδ ωιτη. Ιν τηις ςασε

$$\int d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2.$$

Ιν Νοτε 19, βελοω (π. 132), ωε δεμονστρατε τηατ συμς ανδ διφφερενςες αρε ρεςιπροςαλ.

Νοτε 16

Το σεε ωηερε Λειβνιζ γετς ηις εχυατιον φορ a, λετ AB βε α ςιρςλε ωιτη ςεντερ C (Φιγυρε 13)· δροπ α περπενδιςυλαρ BD (τηε *σινϵ* οφ ανγλε BCA ορ αρς a) φρομ σομε ποιντ B ον τηε ςιρςλε το τηε ραδιυς CA. Λετ τηε ραδιυς $CA = 1$, λετ $AD = x$ (σο τηατ $CD = 1 - x$) ανδ λετ αρς $AB = a$. (Τηε λινε AD ιν τηε υνιτ



Φιγυρε 13

ςιρςλε ις τηε *ερσεδ σινε*, ανδ τηε λινε CD ις τηε *ςοσινε* οφ ανγλε BCA ορ αρς a.[6]) Τηεν τακε α ποιντ B_1 ινφινιτελψ ςλοσε το B, ανδ ςομπλετε τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε B_1GB. Τηεν $B_1G = dx$, $BG = dy$, ανδ $B_1B = da$.

Τριανγλε B_1GB ις σιμιλαρ το τριανγλε BDC· φορ

$$\angle B_1GB = \angle BDC,$$

(βεςαυσε τηεψ αρε βοτη ριγητ), ανδ

$$\begin{aligned} \angle GB_1B + \angle B_1GB + \angle GBB_1 &= \text{τωο ριγητ ανγλες, ανδ} \\ \angle CBD + \angle CBB_1 + \angle GBB_1 &= \text{τωο ριγητ ανγλες.} \end{aligned}$$

Τηερεφορε

$$\angle GB_1B + \angle B_1GB + \angle GBB_1 = \angle CBD + \angle CBB_1 + \angle GBB_1,$$

ανδ τηερεφορε (ςανςελινγ $\angle GBB_1$ ον βοτη σιδες)

$$\angle GB_1B + \angle B_1GB = \angle CBD + \angle CBB_1.$$

Βυτ

$$\angle B_1GB = \angle CBB_1$$

[6]Ιφ AB ις ωερε νοτ α υνιτ ςιρςλε, τηεν τηε ρατιο AD/BC ωουλδ βε τηε ερσεδ σινε, CD/BC ωουλδ βε τηε ςοσινε, ανδ τηε αρς a ωουλδ εχυαλ $\frac{\text{αρςλενγτη } AB}{BC}$, τηατ ις, τηε αλυε οφ αρς AB μεασυρεδ ιν ραδιανς.

(φορ τηεψ αρε βοτη ριγητ), ανδ τηερεφορε

$$\angle GB_1B = \angle CBD.$$

Τριανγλες B_1GB ανδ BDC τηερεφορε ηαε τωο παιρς οφ εχυαλ ανγλες, ανδ τηερεφορε μυστ βε σιμιλαρ.

Ιτ φολλοως φρομ τηε σιμιλαριτψ οφ τηεσε τριανγλες τηατ

$$B_1B : B_1G :: CB : BD.$$

Βυτ

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{BC^2 - CD^2} \\ &= \sqrt{1-(1-x)^2} \\ &= \sqrt{2x - x^2}. \end{aligned}$$

Τηερεφορε (συβστιτυτινγ αλυες ιντο τηε πρεςεδινγ προπορτιον ανδ ςονερτινγ ιτ ιντο αν εχυατιον)

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Τηερεφορε

$$da = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Τακινγ συμς οφ βοτη σιδες οφ τηις εχυατιον γιες

$$\int da = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Βυτ σινςε συμς ανδ διφφερενςες αρε ρεςιπροςαλ,

$$\int da = a.$$

Τηερεφορε

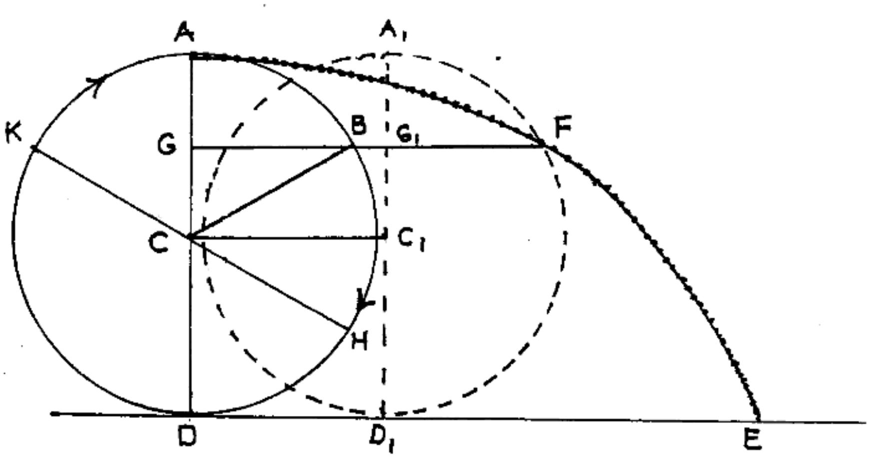
$$a = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Τηις ις Λειβνιζ'ς εχυατιον. Ιτ ις α σιμπλε εχυατιον εξπρεσσινγ τηε τρανσςενδεντ ρελατιον βετωεεν τηε λενγτη οφ τηε αρς AB οφ α ςιρςλε ανδ ιτς ερσεδ σινε AD.

Νοτε 17

Ρεςαλλ τηατ α *ςψςλοιδ* ις α ςυρε τραςεδ ουτ βψ α ποιντ ον α ωηεελ ας τηε ωηεελ ρολλς ωιτηουτ σλιππινγ ον λεελ γρουνδ. Σεε Φιγυρε 14. Τηερε ωε ηαε α ωηεελ ωηιςη βεγινς ατ ABD ανδ ηας ιτς ςεντερ ατ C. Τηε γρουνδ ις τηε ηοριζονταλ λινε DE. Ας τηε ωηεελ ρολλς το τηε ριγητ αλονγ τηε γρουνδ τηε ποιντ A ωιλλ μοε το νεω ποιντς F ανδ τραςε ουτ τηε *ςψςλοιδ* AFE.

Το φινδ αν εχυατιον φορ τηε ςψςλοιδ, ωε φινδ τηε λενγτη οφ τηε λινε GF φορ α γιεν ποσιτιον οφ τηε ωηεελ. Λετ H βε τηε ποιντ τηατ ενδς υπ ον τηε γρουνδ ατ D_1 ας τηε ωηεελ ρολλς το τηε ριγητ. Δραω τηε διαμετερ KCH. Τηεν, ωηεν H ηας μοεδ δοων το D_1, K ηας μοεδ υπ το A_1. Τηε ποιντ F, ωηερε A ενδς υπ, ις τηεν ον τηε σαμε ηοριζονταλ λινε $KGBF$ ας τηε ποιντ K. Τηεν, βεςαυσε τηε ωηεελ ρολλς ωιτηουτ σλιππινγ,



Φιγυρε 14

$$\text{αρς } DH = DD_1.$$

Βυτ

$$DD_1 = GG_1,$$

ανδ

$$\text{αρς } DH = \text{αρς } AB,$$

ανδ τηερεφορε

$$GG_1 = \text{αρς } AB. \tag{1}$$

Μορεοερ, βεςαυσε A_1F ανδ AB αρε εχυαλ αρςς ον εχυαλ ςιρςλες, ιτ φολλοως τηατ τηε ςυριλινεαρ τριανγλε AGB ις εχυαλ ανδ σιμιλαρ το τηε ςυριλινεαρ τριανγλε A_1G_1F, ανδ τηερεφορε

$$G_1F = GB. \tag{2}$$

Πυττινγ τογετηερ εχυατιονς 1 ανδ 2, ωε γετ αν εχυατιον φορ GF:

$$GF = GG_1 + G_1F \tag{3}$$

$$= \text{αρς } AB + GB. \tag{4}$$

Νοω, το γετ Λειβνιζ'ς εχυατιον, ωε τρεατ AD ας τηε αξις οφ τηε ςψςλοιδ ανδ FG ας αν ορδινατε, σο τηατ AG ις τηε αβσςισσα, ανδ σετ

$$AG = x$$

ανδ

$$GF = y.$$

Τηεν, αςςορδινγ το εχυατιον 4,

$$y = \text{αρς } AB + GB,$$

ανδ ιν τηε πρειους νοτε (παγε 127) ωε σηοωεδ τηατ

$$\text{αρς } AB = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

ανδ (παγε 127)

$$GB = \sqrt{2x - x^2}.$$

Τηερεφορε

$$y = FG = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{2x - x^2}.$$

Τηις ις Λειβνιζ΄ς εχυατιον.

Νοτε 18

Λετ AB βε α ςυρε, ανδ λετ CD βε ιτς αξις. (Σεε Φιγυρε 15.) Λετ λινες EF βε τηε ορδινατες το τηε ςυρε. Φρομ εερψ ποιντ E ον τηε ςυρε δραω περπενδιςυλαρ λινες EG μεετινγ τηε αξις ατ G. Φρομ F, δραω περπενδιςυλαρ λινες FL βελοω τηε αξις συςη τηατ

$$FL = EG.$$

Λετ HLK βε τηε λινε γοινγ τηρουγη αλλ τηε ποιντς L. Τηεν φιγυρε $CHKD$ ις 'τηε φιγυρε μαδε φρομ τηε περπενδιςυλαρς το α ςυρε, δραων ορδινατεωισε το τηε αξις.'

Νεξτ, ροτατε τηε λινε AB αλλ τηε ωαψ αρουνδ τηε αξις, σο τηατ εερψ ποιντ E μοες ιν α ςομπλετε ςιρςλε αρουνδ τηε ποιντ F ον τηε αξις. (Σεε Φιγυρε 16.) Ας ιτ ροτατες, τηε φιγυρε $ACDB$ τηεν φορμς α σολιδ, ανδ λετ υς ςαλλ τηε συρφαςε οφ τηις σολιδ $AMNB$. Λειβνιζ σαω τηε φολλοωινγ τηεορεμ.

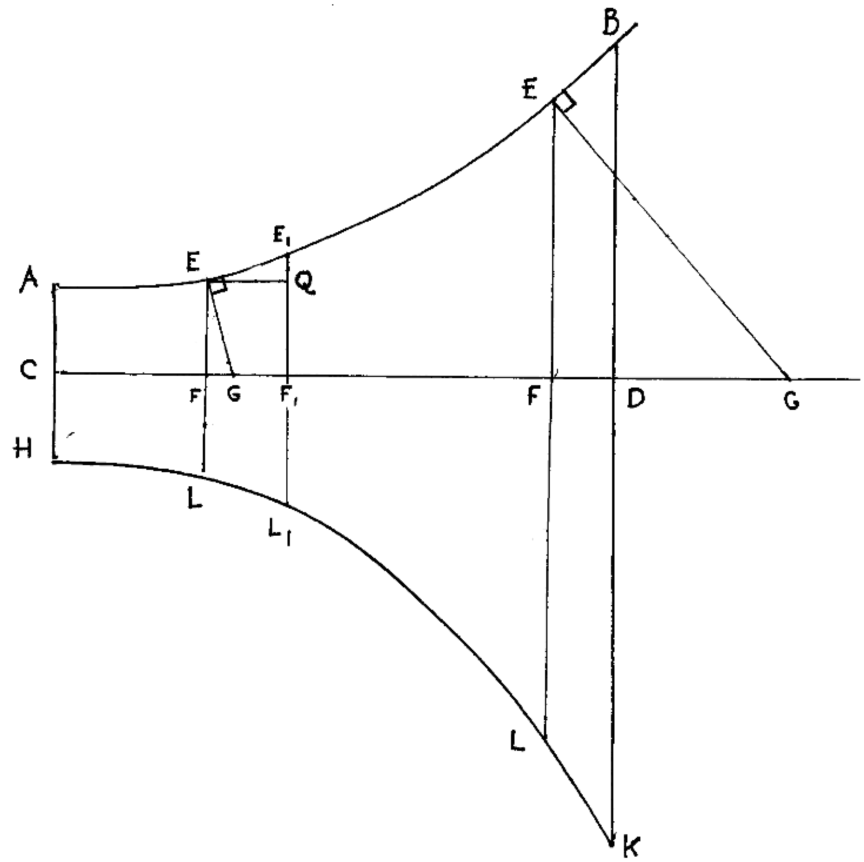
Τηεορεμ:

Φιγυρε $CHKD$ ις προπορτιοναλ το συρφαςε $AMNB$.

Δεμονστρατιον:

Ιν Φιγυρε 16 (π.131), ςονσιδερ τηε ρινγ $ERPP_1R_1E_1$ φορμεδ βψ ροτατινγ τηε ινφινιτελψ σμαλλ λινε EE_1 αβουτ τηε αξις. Τηε αρεα οφ τηε συρφαςε $AMNB$ ις τηε συμ οφ αλλ τηεσε ινφινιτελψ σμαλλ ρινγς. Τηε ςιρςυμφερενςε οφ τηις ρινγ ις προπορτιοναλ το ιτς ραδιυς EF:

$$\text{ςιρςυμφερενςε } ERP = 2\pi(EF).$$



Φιγυρε 15

(Βεςαυσε E ανδ E_1 αρε ινφινιτελψ ςλοσε, τηε ςιρςυμφερενςε οφ ςιρςλε ERP ις εχυαλ το τηε ςιρςυμφερενςε οφ ςιρςλε $E_1R_1P_1$.) Τηε συρφαςε αρεα οφ τηε ρινγ $ERPP_1R_1E_1$ ις εχυαλ το ιτς ωιδτη (EE_1) τιμες ιτς ςιρςυμφερενςε $(2\pi(EF))$:

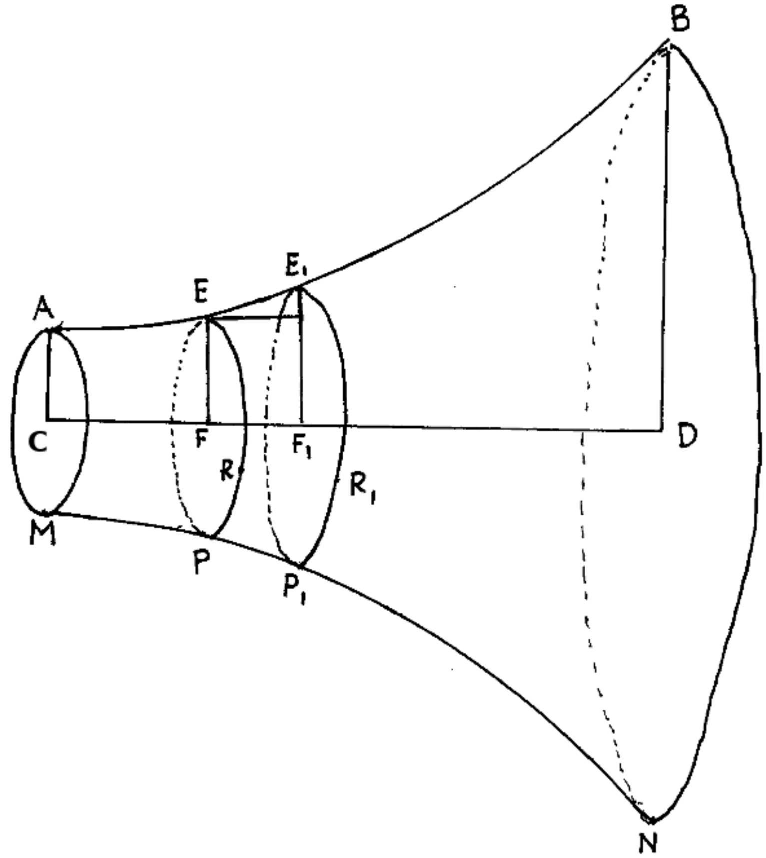
$$\text{αρεα } ERPP_1R_1E_1 = 2\pi \times EE_1 \times EF \tag{1}$$

Νοω, το φινδ $EE_1 \times EF$, τυρν βαςκ το Φιγυρε 15. Δραω τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε EE_1Q, τηε ορδινατε E_1F_1 ανδ τηε λινε F_1L_1 εχυαλ το τηε τηε περπενδιςυλαρ το τηε ςυρε ατ E_1. Τηεν

$$\angle E_1EQ + \angle QEG = \angle FEG + \angle QEG = \text{α ριγητ ανγλε.}$$

Τηερεφορε

$$\angle E_1EQ = \angle FEG,$$



Φιγυρε 16

ανδ τηε ριγητ τριανγλες E_1EQ ανδ GEF αρε σιμιλαρ. Τηερεφορε

$$\frac{EE_1}{EG} = \frac{EQ}{EF},$$

ανδ τηερεφορε

$$EE_1 \times EF = EQ \times EG.$$

Βυτ $EQ = FF_1$, ανδ $EG = FL$, ανδ τηερεφορε

$$EE_1 \times EF = FF_1 \times FL.$$

Νοω $FF_1 \times FL$ ις εχυαλ το τηε ςυριλινεαρ χυαδριλατεραλ FF_1L_1L (σινςε $FL = F_1L_1$, βεςαυσε L ανδ L_1 αρε ινφινιτελψ ςλοσε), ανδ τηερεφορε

$$EE_1 \times EF = \text{χυαδριλατεραλ } FF_1L_1L. \tag{2}$$

Τηερεφορε (πυττινγ τογετηερ εχυατιονς 1 ανδ 2)

$$\text{αρεα } ERPP_1R_1E_1 = 2\pi \times \text{χυαδριλατεραλ } FF_1L_1L. \tag{3}$$

Εχυατιον 3 ηολδς φορ εερψ ποιντ E ον τηε ςυρε AEB. Ωε νοω φινδ τηε συμς οφ εαςη σιδε οφ εχυατιον 3 φορ αλλ ποιντς ον τηε ςυρε. Τηε συμ οφ τηε λεφτ σιδε οφ εχυατιον 3 ις τηε συμ οφ αλλ τηε ρινγς $ERPP_1R_1E_1$ ιν Φιγυρε 16, τηατ ις, τηε συρφαςε $AMNB$. Τηε συμ οφ τηε ριγητ σιδε ις 2π τιμες τηε συμ οφ αλλ τηε χυαδριλατεραλς FLL_1F_1 ιν Φιγυρε 15, τηατ ις, 2π τιμες τηε ωηολε φιγυρε $CHKD$. Τηερεφορε

$$\text{συρφαςε } AMNB = 2\pi \times \text{φιγυρε } CHKD,$$

ανδ συρφαςε $AMNB$ ις προπορτιοναλ το φιγυρε $CHKD$.
Χ.Ε.Δ.

Νοτε 19

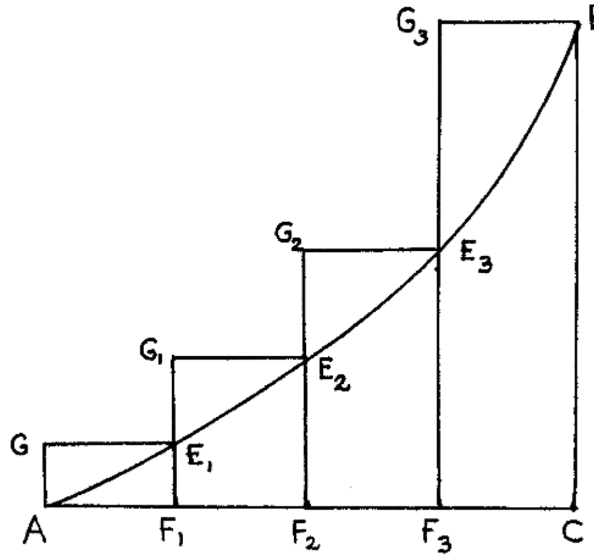
Ιν φινδινγ μεασυρεμεντς οφ φιγυρες υσινγ τηε ςαλςυλυς, ωε ηαε ρεπεατεδλψ υσεδ τηε ρεςιπροςιτψ οφ συμς ανδ διφφερενςες. Ιν τηις νοτε, ωε δεμονστρατε τηις ρεςιπροςιτψ, ωηιςη ις τραδιτιοναλλψ ςαλλεδ τηε *φυνδαμενταλ τηεορεμ οφ ςαλςυλυς*. Βεφορε δεμονστρατινγ τηε φυνδαμενταλ τηεορεμ, ωε φιρστ νεεδ το σπελλ ουτ ιν γρεατερ γενεραλιτψ ηοω συμς ςαν βε υσεδ το φινδ τηε αρεας οφ ςυριλινεαρ φιγυρες. Αφτερ δεμονστρατινγ τηε φυνδαμενταλ τηεορεμ ωε ωιλλ γιε α νυμβερ οφ εξαμπλες οφ ηοω τηε ςαλςυλυς ςαν βε υσεδ το δετερμινε ‘χυαδρατριςες ορ οτηερ λινες, αλγεβραις ορ τρανσςενδεντ’ (π. 109).

Τηις νοτε ις διιδεδ ιντο φιε παρτς:

1. Φινδινγ αρεας οφ φιγυρες ωιτη συμς.
2. Τηε ρεςιπροςιτψ οφ συμς ανδ διφφερενςες: τηε φυνδαμενταλ τηεορεμ.
3. Εξαμπλες οφ δετερμινινγ αλγεβραις χυαδρατριςες. Ηερε ωε σηοω ηοω τηε ςαλςυλυς ςαν βε υσεδ το φινδ αρεας υνδερ ςυρες ιν ςερταιν ςασες ωηερε βοτη τηε οριγιναλ ςυρε ανδ τηε εχυατιον γιινγ ιτς αρεα τυρν ουτ το βε αλγεβραις.
4. Α τρανσςενδεντ λινε: τηε σινε ςυρε. Ηερε ωε σηοω τηε ςαλςυλυς ςαν βε υσεδ το εξπρεσς α τρανσςενδεντ ςυρε τηατ αρισες φρομ αρςς οφ α ςιρςλε. Αφτερ σηοωινγ ωηατ τηε σινε ςυρε λοοκς λικε ανδ δεμονστρατινγ τηατ ιτ ις τρανσςενδεντ, ωε γο ον το σηοω ηοω τηε ςαλςυλυς ςαν βε υσεδ το φινδ συμς ανδ διφφερενςες οφ εξπρεσσιονς ινολινγ σινες ανδ οτηερ τριγονομετρις χυαντιτιες.
5. Ανοτηερ τρανσςενδεντ λινε: τηε λογαριτημις λινε. Ηερε ωε ρετυρν το τηε λογαριτημις λινε, ωηιςη ωε σαω ατ τηε ενδ οφ ‘Α Νεω Μετηοδ¨. Ηερε ωε σηοω τηατ τηε λογαριτημις λινε ις ιν φαςτ τηε χυαδρατριξ οφ α ηψπερβολα, εξπανδ Λειβνιζ΄ς αργυμεντ φρομ εαρλιερ ιν ‘Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ’ (παγε 105) τηατ τηε λογαριτημ ις τρανσςενδεντ, ανδ γο τηρουγη α νυμβερ οφ εξαμπλες σηοωινγ ηοω τηε ςαλςυλυς ςαν βε υσεδ το φινδ συμς οφ εξπρεσσιονς ινολινγ λογαριτημς.

1. Φινδινγ αρεας οφ φιγυρες ωιτη συμς

Συπποσε AB (Φιγυρε 17) ις α ςυρεδ λινε ωιτη αξις AC ανδ ορδινατες EF, ανδ



Φιγυρε 17

ωε ωαντ το φινδ τηε αρεα $AEBC$. Λετ τηε ορδινατες $EF = v$ ανδ τηε αβσςισσας $AF = x$. Δραω αν αρβιτραρψ νυμβερ οφ ορδινατες $E_1F_1 = v_1$, $E_2F_2 = v_2$, ετς. Λετ $BC = v_4$, ανδ συπποσε $AF_1 = dx_1$, $F_1F_2 = dx_2$, $F_2F_3 = dx_3$, ανδ $F_3C = dx_4$. Τηε αρεα ABC ις οφ ςουρσε εχυαλ το τηε συμ οφ τηε φουρ αρεας AE_1F_1, $E_1E_2F_2F_1$, $E_2E_3F_3F_2$, ανδ E_3BCF_3. Εαςη οφ τηεσε φουρ αρεας ις στιλλ ςυριλινεαρ, ανδ ιτ ις τηερεφορε διφφιςυλτ το ςομε υπ ωιτη α νυμεριςαλ αλυε φορ εαςη. Βυτ ιφ ωε δραω τηε ρεςτανγλες AGE_1F_1, $F_1G_1E_2F_2$, $F_2G_2E_3F_3$, ανδ F_3G_3BC, μακινγ α πολψγον $AGE_1G_1E_2G_2E_3G_3BC$, ωηιςη ωε ωιλλ ςαλλ P, ωε ςαν ςομπυτε τηε αρεα οφ τηις πολψγον ας α συμ οφ τηεσε φουρ ρεςτανγλες

$$\begin{aligned}
P &= AGE_1F_1 + F_1G_1E_2F_2 + F_2G_2E_3F_3 + F_3G_3BC \\
&= (AF_1 \times F_1E_1) + (F_1F_2 \times F_2E_2) + (F_2F_3 \times F_3E_3) + (F_3C \times CB) \\
&= v_1\,dx_1 + v_2\,dx_2 + v_3\,dx_3 + v_4\,dx_4.
\end{aligned}$$

Τηυς τηε αρεα οφ α πολψγον, υνλικε α ςυριλινεαρ αρεα, ςαν βε ςομπυτεδ βψ φινδινγ α φινιτε συμ.

Νοω πολψγον P ις γρεατερ τηαν τηε ςυριλινεαρ αρεα ABC ωε αρε ιντερεστεδ ιν. Βυτ ιφ ωε ηαδ τακεν μορε ποιντς E_1, E_2, ετς., ωε ωουλδ ηαε φουνδ α πολψγον τηατ ωας ςλοσερ το τηις αρεα, ανδ ωε ςουλδ μακε τηε διφφερενςε βετωεεν τηε αρεα οφ ουρ πολψγον ανδ ουρ ςυριλινεαρ αρεα λεσς τηαν ανψ γιεν διφφερενςε.

Τηερεφορε ιφ ωε τακε α πολψγον P ωιτη ινφινιτελψ μανψ σιδες, ωε μαψ τρεατ ιτ ας εξαςτλψ εχυαλ το τηε ςυριλινεαρ αρεα ABC. Τηε αρεα οφ τηε ωηολε ινφινιτε πολψγον $AGE_1G_1\dots BC$ (τηατ ις, τηε ςυριλινεαρ αρεα $ABDC$) ις εχυαλ το

$$v_1\,dx_1 + v_2\,dx_2 + v_3\,dx_3 + \dots$$

Ωε ςαν τηυς ςομπυτε τηε ςυριλινεαρ αρεα ABC βψ φινδινγ αν *ινφινιτε* συμ οφ *ινφινιτελψ σμαλλ* χυαντιτιες. Λειβνιζ δενοτες τηις συμ βψ

$$\int v\,dx;$$

τηε σψμβολ $\int$ ινδιςατες τηατ α συμ ις βεινγ τακεν, ωηιλε $v\,dx$ ινδιςατες ωηατ ις βεινγ συμμεδ: τηε προδυςτς οφ τηε ορδινατες v τιμες τηε ινφινιτελψ σμαλλ διφφερενςες οφ τηε αβσςισσας dx. Ονε ςουλδ ρεαδ τηε ωηολε σψμβολ $\int v\,dx$ ας ‘τηε συμ οφ τηε ορδινατες αππλιεδ το τηε αξις.’

(Σηορτλψ αφτερ Λειβνιζ ιντροδυςεδ τηις νεω σψμβολ φορ ινφινιτε συμς, οτηερ ματηεματιςιανς βεγαν ςαλλινγ τηεμ *ιντεγραλς*, ανδ τηατ σοον βεςαμε τηε στανδαρδ ναμε. Ωε υσυαλλψ ρεαδ

$$\int v\,dx$$

ας ‘τηε ιντεγραλ οφ $v\,dx$.’ Συμμινγ ις ςαλλεδ *ιντεγρατινγ*.)

Νοτε τηατ α συμ ηας το βεγιν ανδ ενδ ατ σομε δεφινιτε ποιντς: ηερε ωε ηαε φουνδ τηε συμ βεγιννινγ φρομ A ανδ ενδινγ ατ C. Ωε ςουλδ ηαε βεγυν ορ ενδεδ τηε συμ ατ ανψ δεφινιτε ορδινατες. Ιν γενεραλ, ιτ ωιλλ βε ςλεαρ φρομ τηε προβλεμ ωε αρε ςονσιδερινγ ωηερε τηε συμ σηουλδ βεγιν. Μοστ οφτεν, ωε σιμπλψ βεγιν τηε συμ ατ α ποιντ ωηερε τηε χυαντιτψ ωηοσε διφφερενςες αππεαρ ιν τηε συμ ις εχυαλ το ζερο· ηερε ωε αρε ςονσιδερινγ

$$\int v\,dx,$$

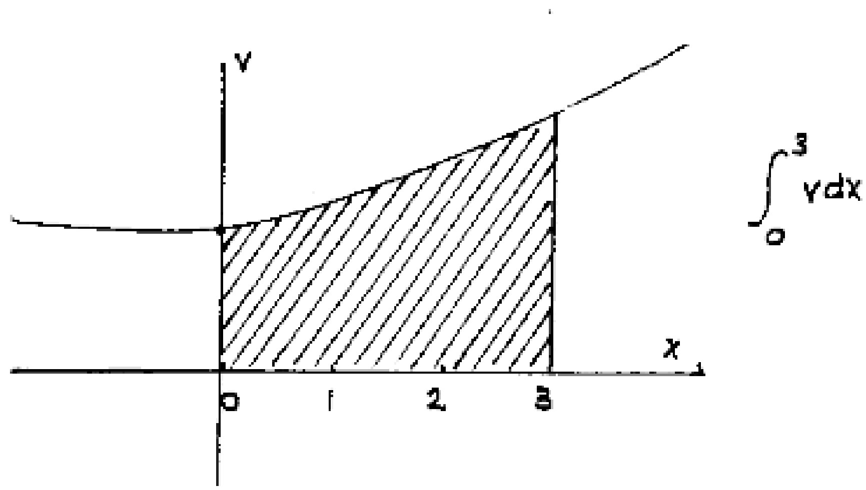
α συμ ινολινγ dx, ανδ ωε βεγιν τηε συμ ωηερε $x = 0$, τηατ ις, ατ τηε ποιντ A. Ωε υσυαλλψ λετ τηε ενδποιντ οφ τηε συμ βε αν υνδετερμινεδ αριαβλε. Ωηεν ωε ωαντ το μακε εξπλιςιτ ωηερε τηε συμ βεγινς ανδ ενδς, ωε ατταςη χυαντιτιες το τηε συμμινγ σιγν, ας φολλοως:

$$\int_0^3 v\,dx,$$

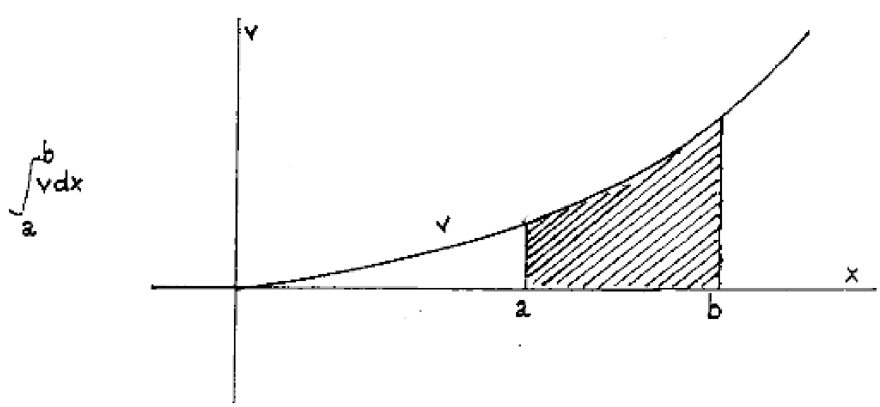
δενοτες τηε συμ βεγιννινγ ατ $x = 0$ ανδ ενδινγ ατ $x = 3$ (σεε Φιγυρε 18), ανδ, ιν γενεραλ,

$$\int_a^b v\,dx$$

δενοτες τηε συμ βεγιννινγ ατ $x = a$ ανδ ενδινγ ατ $x = b$ (σεε Φιγυρε 19).



Φιγυρε 18



Φιγυρε 19

2. Συμς ανδ διφφερενςες ας ινερσες

Το σηοω τηατ συμς ανδ διφφερενςες αρε ρεςιπροςαλ, ωε νεεδ το δεμονστρατε τωο τηεορεμς:

1. τηατ ιφ ωε φινδ α διφφερενςε ανδ τηεν φινδ ιτς συμ, ωε γετ βαςκ το ωηερε ωε σταρτεδ· ανδ
2. τηατ ιφ ωε φινδ α συμ ανδ τηεν φινδ ιτς διφφερενςε, ωε γετ βαςκ το ωηερε ωε σταρτεδ.

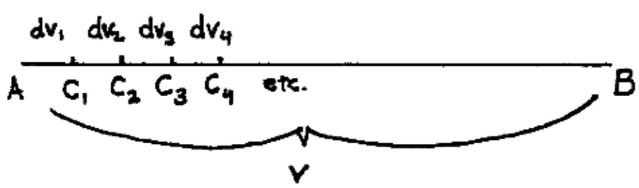
Τηεσε τωο τηεορεμς σηοω τηατ φινδινγ συμς ις α σορτ οφ μιρρορ ιμαγε οφ φινδινγ διφφερενςες, ϑυστ ας φινδινγ σχυαρε ροοτς ις α μιρρορ ιμαγε οφ φινδινγ σχυαρες. Ωηατ φινδινγ διφφερενςες δοες, φινδινγ συμς υνδοες, ανδ ιςε ερσα. Εερψτηινγ ωε κνοω αβουτ διφφερενςες ις τηερεφορε ρεφλεςτεδ ιν συμς, ανδ, τηερεφορε αλσο ιν φινδινγ μεασυρεμεντς οφ φιγυρες. Τηεσε τηεορεμς αρε τηυς τηε φουνδατιον οφ τηε αππλιςατιον οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς το προβλεμς οφ φινδινγ μεασυρεμεντς οφ φιγυρες, ανδ ωε τηερεφορε ναμε τηεμ τηε *φιρστ* ανδ *σεςονδ φυνδαμενταλ τηεορεμς*.

Φιρστ Φυνδαμενταλ Τηεορεμ

Φορ ανψ αριαβλε χυαντιτψ

$$\int dv = v.$$

Δεμονστρατιον: Λετ τηε λινε AB ρεπρεσεντ τηε χυαντιτψ v. (Σεε Φιγυρε 20.) Τακε ινφινιτελψ μανψ ινφινιτελψ ςλοσε ποιντς C_1, C_2, ετς. ον τηε λινε, σο τηατ



Φιγυρε 20

$AC_1 = v_1$, $AC_2 = v_2$, $AC_3 = v_3$, ετς. Τηερεφορε $AC_1 = dv_1$, $C_1C_2 = dv_2$, ετς. Τηεν

$$\begin{aligned} \int dv &= dv_1 + dv_2 + \dots \\ &= AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots \\ &= AB \\ &= v. \qquad \text{Χ.Ε.Δ.} \end{aligned}$$

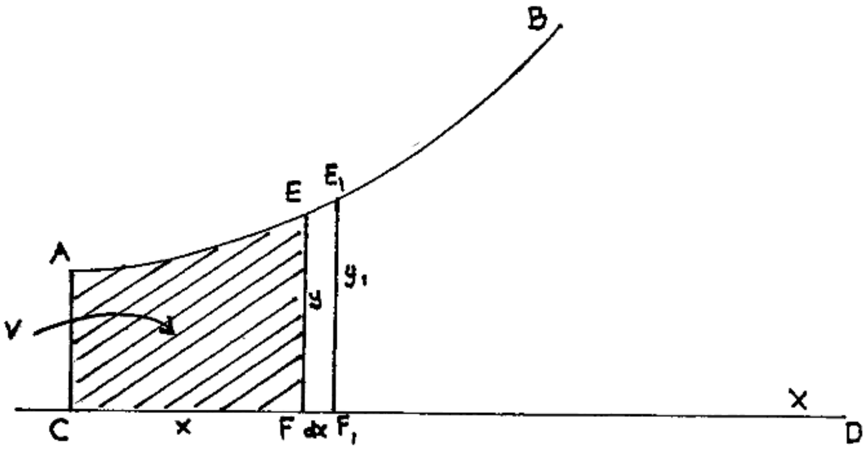
Νοτε τηατ ιτ ις ιμπορταντ ηερε τηατ ωε βεγιν τηε συμ ατ τηε ποιντ ωηερε $v = 0$.

Σεςονδ Φυνδαμενταλ Τηεορεμ

Γιεν αν ινφινιτελψ σμαλλ αριαβλε χυαντιτψ $y\,dx$,

$$d\int y\,dx = y\,dx.$$

Δεμονστρατιον: Λετ AB βε α ςυρεδ λινε ωιτη αξις CD, ορδινατες $EF = y$ ανδ αβσςισσας $CF = x$. (Σεε Φιγυρε 21.)



Φιγυρε 21

Λετ υς δενοτε τηε αριαβλε αρεα $ACFE$ βψ v. Τηεν

$$v = \int y\,dx.$$

Λετ E_1 βε α ποιντ ινφινιτελψ ςλοσε το E ον τηε ςυρε, ανδ δροπ αν ορδινατε E_1F_1 το τηε αξις. Λετ $CF_1 = x_1$ ανδ $ACF_1E_1 = v_1$. Τηεν

$$dx = x_1 - x = FF_1,$$

ανδ

$$dv = v_1 - v = ACF_1E_1 - ACFE = EFF_1E_1.$$

Βυτ σινςε E ανδ E_1 αρε ινφινιτελψ ςλοσε, ωε μαψ τακε $EF = E_1F_1$ ανδ τρεατ EFF_1E_1 ας α ρεςτανγλε. Ιτς αρεα ις τηερεφορε εχυαλ το EF τιμες FF_1, τηατ ις, το $y\,dx$. Τηερεφορε

$$dv = y\,dx,$$

τηατ ις,

$$d\int y\,dx = y\,dx.$$

Χ.Ε.Δ.

Τηε σεςονδ φυνδαμενταλ τηεορεμ σαψς τηατ ανψ ινφινιτελψ σμαλλ αριαβλε χυαντιτψ $y\,dx$, ις εχυαλ το τηε διφφερενςε οφ ιτς συμς.

3. Εξαμπλες οφ δετερμινινγ αλγεβραις χυαδρατρισες

Ιν αλλ τηε φολλοωινγ εξαμπλες ωε αρε γιεν α ςυρεδ λινε ADB (Φιγυρε 22) ωηοσε αξις ις AEC ανδ ωηοσε ορδινατες αρε DE. Λετ $AE = x$ ανδ $DE = y$. Λετ τηε ςυρε AFG βε τηε χυαδρατριξ οφ τηε ςυρε ADB (τηε χυαδρανδα), τηατ ις, λετ τηε ρεςτανγλε φορμεδ βψ τηε ορδινατε EF ανδ α υνιτ λινε βε αλωαψς εχυαλ το τηε ςυριλινεαρ αρεα ADE. Λετ $v = EF$, σο τηατ v τιμες α υνιτ λινε ις αλωαψς εχυαλ το τηε αρεα ADE, τηατ ις, v ις εχυαλ το τηε αρεα ADE. Τηεν

$$v = \int y\,dx.$$

Το φινδ αν εχυατιον φορ τηε χυαδρατριξ AFG ωε ηαε το φινδ αν εχυατιον ρελατινγ v το x, τηατ ις ωε ηαε το φινδ τηε αρεα $\int y\,dx$ ιν τερμς οφ x.

Ιν γενεραλ, ιτ ις μυςη μορε διφφιςυλτ το φινδ συμς, ανδ τηερεβψ φινδ χυαδρατρισες, τηαν ιτ ις το φινδ διφφερενςες. Το φινδ διφφερενςες ωε σιμπλψ ηαε το φολλοω μεςηανιςαλλψ τηε ρυλες Λειβνιζ ηας γιεν υς ιν 'Α Νεω Μετηοδ.' Βυτ τηερε ις νο γενεραλ μετηοδ φορ φινδινγ συμς. Ιν αν εαρλιερ παπερ Λειβνιζ ωριτες τηατ

> Βυτ τηις ις τηε λαβορ, τηις ις τηε τασκ: γιεν α Χυαδρανδα, το φινδ σομε Χυαδρατριξ φορ ιτ· τηις ις εσπεςιαλλψ διφφιςυλτ βεςαυσε σομετιμες ιτ ις ιμποσσιβλε το φινδ α χυαδρατριξ (ατ λεαστ ονε τηατ ςαν βε εξπρεσσεδ αλγεβραιςαλλψ).[7]

Ηε ις αλλυδινγ ηερε το Βοοκ ῎Ι οφ ῞ἰργιλ΄ς *Αενειδ* ωηερε τηε ῦμαεαν Σψβιλ σαψς το Αενεας

> Βορν οφ τηε βλοοδ
> οφ γοδς ανδ σον οφ Τροψ΄ς Ανςηισες, εασψ—
> τηε ωαψ τηατ λεαδς ιντο Αερνυς: δαψ
> ανδ νιγητ τηε δοορ οφ δαρκεστ Δις ις οπεν.
> Βυτ το ρεςαλλ ψουρ στεπς, το ρισε αγαιν
> ιντο τηε υππερ αιρ: τηατ ις τηε λαβορ·
> τηατ ις τηε τασκ.[8]

Ηερε αρε σομε εξαμπλες.

1. Λετ $y = x^2$, σο τηατ $v = \int y\,dx = \int x^2\,dx$. Συπποσε τηατ τηε συμ βεγινς ατ τηε ποιντ A ωηερε $x = 0$. Ωε νεεδ το φινδ αν εξπρεσσιον φορ v συςη τηατ

   (α) $dv = x^2\,dx$, ανδ

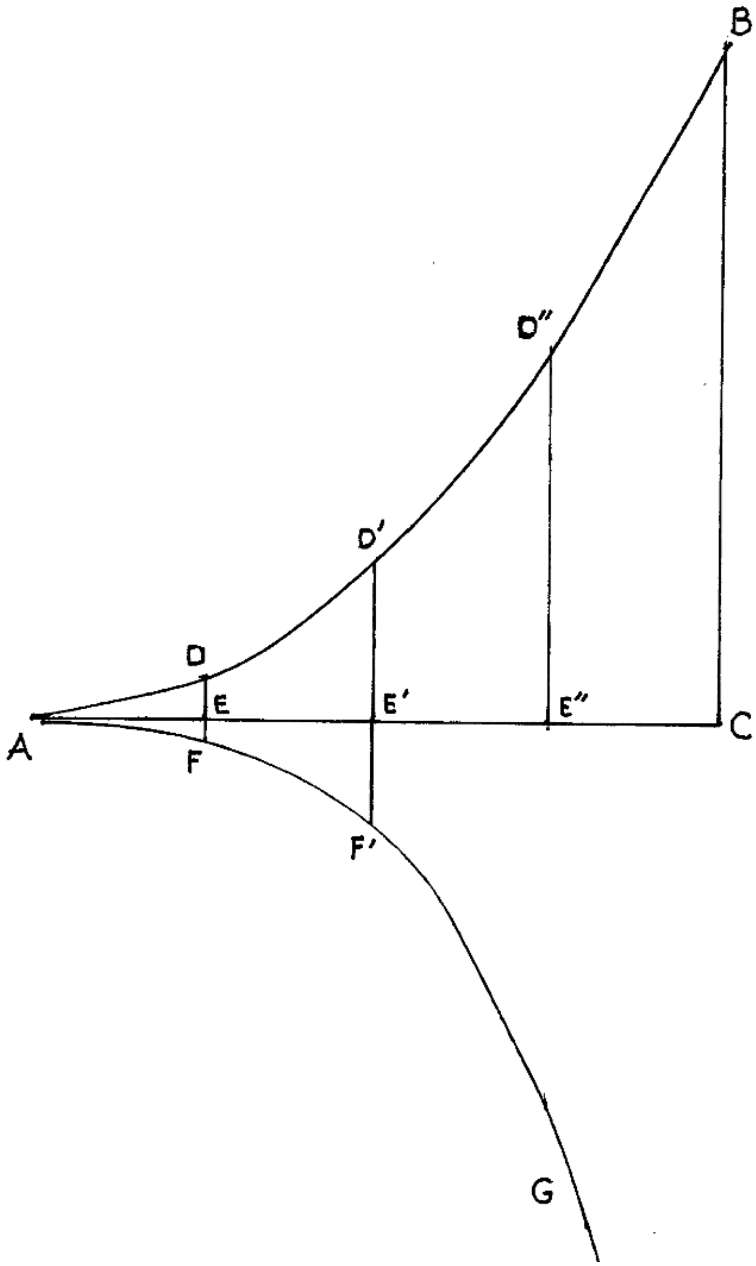
   (β) $v = 0$ ωηεν $x = 0$, ωηερε τηε συμ βεγινς.

   Ιφ ωε φινδ συςη αν εξπρεσσιον v, τηεν, αςςορδινγ το τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ,

$$\text{αρεα } ADE = \int y\,dx = \int dv = v,$$

[7] 'Ον Φινδινγ Μεασυρεμεντς οφ Φιγυρες,' πυβλισηεδ ιν τηε *Αςτς* ιν Μαψ οφ 1684. Ιτ ις ον παγες 123–6 ιν ὄλυμε ῎ οφ Γερηαρδτ΄ς εδιτιον.

[8] Λινες 174–180 οφ Αλλεν Μανδελβαυμ΄ς τρανσλατιον. Λινες 125–129 οφ Ρ. Α. Β. Μψνορσ΄ς Λατιν τεξτ.



Φιγυρε 22

ανδ v ωιλλ βε τηε χυαντιτψ ωε αρε λοοκινγ φορ.

Ωε κνοω φρομ τηε ρυλες οφ τηε ςαλςυλυς τηατ

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x^3}{3}\right) &= \frac{d(x^3)}{3} \\ &= \frac{3x^2\,dx}{3} \\ &= x^2\,dx \\ &= y\,dx. \end{aligned}$$

Σινςε

$$\frac{x^3}{3} = 0$$

ωηεν $x = 0$, ωηερε τηε συμ βεγινς, ωε τηερεφορε σετ

$$v = \frac{x^3}{3},$$

ανδ υσε τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ το ςονςλυδε τηατ

$$\begin{aligned} \text{αρεα } ADE &= \int y\,dx \\ &= \int dv \\ &= v \\ &= \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

Τηερεφορε τηε εχυατιον οφ τηε χυαδρατριξ AFG ις ιν τηις ςασε

$$v = \frac{x^3}{3}.$$

2. Λετ $y = x^3$, σο τηατ $\int y\,dx = \int x^3\,dx$. Συπποσε τηατ τηε συμ βεγινς ατ τηε ποιντ A ωηερε $x = 0$. Τηεν αςςορδινγ το τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ, ιφ ωε ςαν φινδ α χυαντιτψ v συςη τηατ $x^3\,dx = dv$ ανδ $v = 0$ ωηεν $x = 0$, τηεν

$$\text{αρεα } ADE = \int y\,dx = \int dv = v.$$

Βυτ ωε κνοω φρομ τηε ρυλες οφ τηε ςαλςυλυς τηατ

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{x^4}{4}\right) &= \frac{d(x^4)}{4} \\
&= \frac{4x^3\,dx}{4} \\
&= x^3\,dx \\
&= y\,dx.
\end{aligned}$$

Σινςε

$$\frac{x^4}{4} = 0$$

ωηεν $x = 0$, ωηερε τηε συμ βεγινς, ωε τηερεφορε σετ

$$v = \frac{x^4}{4},$$

ανδ υσε τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ το ςονςλυδε τηατ

$$\begin{aligned}
\text{αρεα } ADE &= \int y\,dx \\
&= \int dv \\
&= v \\
&= \frac{x^4}{4}.
\end{aligned}$$

Τηερεφορε τηε εχυατιον οφ τηε χυαδρατριξ AFG ις ιν τηις ςασε

$$v = \frac{x^4}{4}.$$

3. Λετ $y = x^n$, ωηερε n ις ανψ ννονεγατιε νυμβερ. Ωε προςεεδ ϑυστ ας ιν τηε πρειους τωο εξαμπλες, φινδινγ α χυαντιτψ v συςη τηατ $y\,dx = dv$ ανδ $v = 0$ ωηεν $x = 0$, ανδ αππλψ τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ. Ωε κνοω φρομ τηε ρυλες οφ ςαλςυλυς τηατ

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{x^{(n+1)}}{n+1}\right) &= \frac{d(x^{(n+1)})}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)x^n\,dx}{n+1} \\
&= x^n\,dx \\
&= y\,dx.
\end{aligned}$$

Σινςε

$$\frac{x^{(n+1)}}{n+1} = 0$$

ωηεν $x = 0$, ωε τηερεφορε σετ

$$v = \frac{x^{(n+1)}}{n+1},$$

ανδ υσε τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ το ςονςλυδε τηατ

$$\begin{aligned} \text{αρεα } ADE &= \int y\,dx \\ &= \int dv \\ &= v \\ &= \frac{x^{(n+1)}}{n+1}. \end{aligned}$$

Τηερεφορε τηε εχυατιον οφ τηε χυαδρατριξ AFG ις ιν τηις ςασε

$$v = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}.$$

4. Λετ $y = x^3 + x^2$. Τηεν, ιφ ωε σετ

$$v = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3},$$

αςςορδινγ το τηε ρυλες οφ ςαλςυλυς,

$$dv = x^3\,dx + x^2\,dx = y\,dx.$$

Σινςε $v = 0$ ωηεν $x = 0$, αςςορδινγ το τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ,

$$\begin{aligned} \int y\,dx &= \int dv \\ &= v \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Νοτε τηατ ηερε ιτ τυρνς ουτ τηατ

$$\int (x^3 + x^2)\,dx = \int x^3\,dx + \int x^2\,dx.$$

Τηις ις γενεραλλψ τρυε: φορ ανψ αριαβλε χυαντιτιες t ανδ u,

$$\int (t + u) = \int t + \int u.$$

Φορ ιφ $t = dv$ ανδ $u = dw$, τηεν

$$d(v+w) = dv + dw = t + u,$$

ανδ ιφ ωε βεγιν τηε συμς ωηεν $v = 0$ ανδ $w = 0$ τηεν ωε ωιλλ αλσο βεγιν τηε συμς ωηερε $v + w = 0$, ανδ ασςορδινγ το τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ,

$$\begin{aligned}
\int (t+u) &= \int d(v+w) \\
&= (v+w) \\
&= \int dv + \int dw \\
&= \int t + \int u.
\end{aligned}$$

Ωε μιγητ ςαλλ τηις τηε *αδδιτιον ρυλϵ φορ συμς*. Ωε ςουλδ λικεωισε σηοω τηατ φορ ανψ ςονσταντ a ανδ ανψ αριαβλε t

$$\int at = a \int t.$$

Τηις ςουλδ βε ςαλλεδ *ςονσταντ μυλτιπλϵ ρυλϵ φορ συμς*.

Ωε ςαν υσε τηεσε ρυλες, ανδ τηε ρυλε φρομ τηε τηιρδ εξαμπλε, το φινδ συμς φορ μανψ αλγεβραις εξπρεσσιονς, ας ιν τηε φολλοωινγ εξαμπλε.

5. Λετ $y = 3x^5 - 8x^2 + 4$. Τηεν

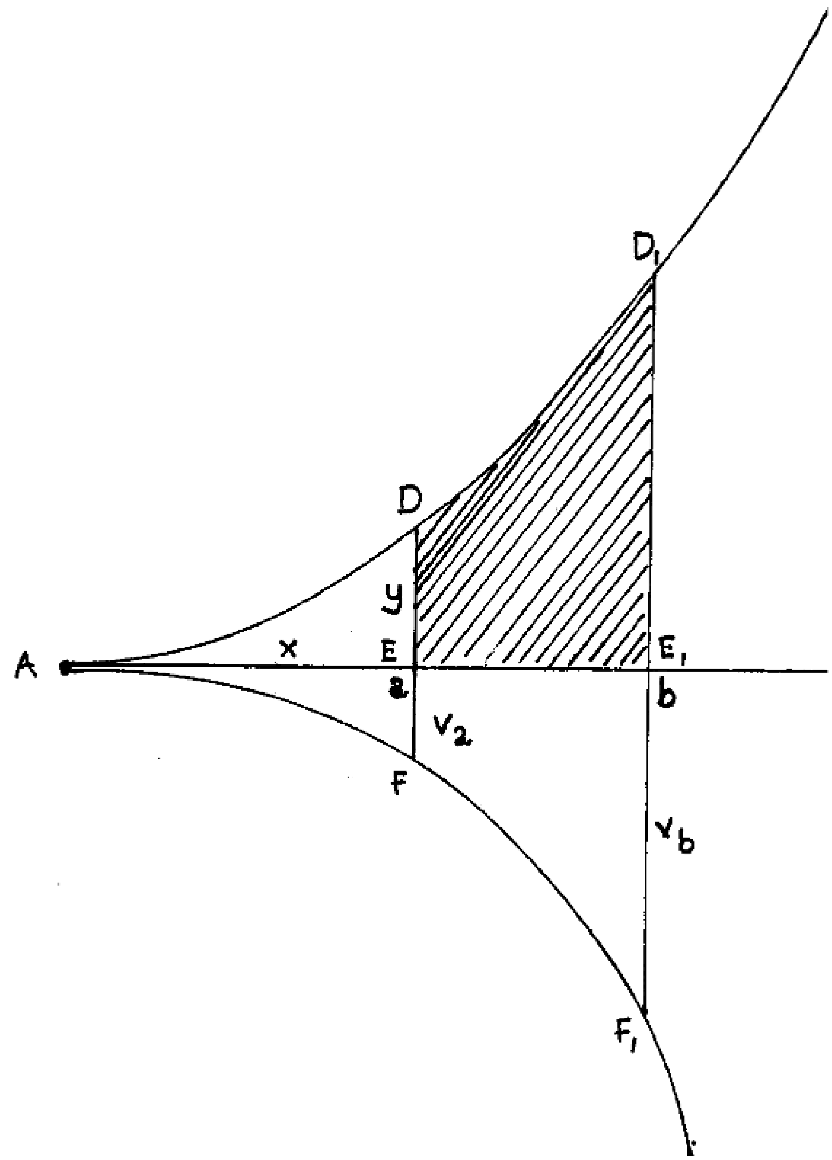
$$\begin{aligned}
\int y\,dx &= 3\int x^5\,dx - 8\int x^2\,dx + 4\int x^0\,dx \\
&= 3\frac{x^6}{6} - 8\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^1}{1} \\
&= \frac{x^6}{2} - \frac{8x^3}{3} + 4x.
\end{aligned}$$

6. Λετ

$$y = 2\sqrt{x} - 8x^{\frac{5}{3}}.$$

Τηεν

$$\begin{aligned}
\int y\,dx &= 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 8\int x^{\frac{5}{3}}\,dx \\
&= 2\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - 8\left(\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}\right) \\
&= \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} - 3x^{\frac{8}{3}}.
\end{aligned}$$



Φιγυρε 23

Νοω συπποσε τηατ ωε αρε ιντερεστεδ νοτ ιν τηε αρεα ADE, βυτ ιν τηε αρεα DEE_1D_1 (σεε Φιγυρε 23) βετωεεν τωο δεφινιτε ορδινατες, DE ανδ D_1E_1. Λετ $AE = a$ ανδ $AE_1 = b$, ωηερε a ανδ b αρε ςονσταντς. Τηις αρεα ις εχυαλ το τηε συμ οφ $y\,dx$ βετωεεν $x = a$ ανδ $x = b$, ωηιςη ωε δενοτε βψ

$$\int_a^b y\,dx.$$

Τηις συμ ις ςαλλεδ α *δεφινιτε ιντεγραλ*, βεςαυσε, υνλικε τηε συμς ιν τηε πρειους εξαμπλες, ιτ ρεπρεσεντς α σινγλε ςονσταντ αρεα, ανδ νοτ α αριαβλε αρεα. Το φινδ τηε αρεα DEE_1D_1, ωε τακε τηε διφφερενςε οφ τηε αρεα AD_1E_1 (τηις αρεα ις εχυαλ το τηε αλυε οφ v ωηεν ωε σετ $x = b$, ωηιςη ωε ωιλλ ςαλλ v_b) ανδ τηε αρεα ADE (τηις αρεα ις εχυαλ το τηε αλυε οφ v ωηεν ωε σετ $x = a$, ωηιςη ωε ωιλλ ςαλλ v_a):

$$\begin{aligned}
\text{αρεα } DEE_1D_1 &= \text{αρεα } AD_1E_1 - \text{αρεα } ADE \\
&= v_b - v_a.
\end{aligned}$$

7. Λετ $y = x^2$. Τηεν, ας ωε σαω αβοε (παγε 140),

$$v = \frac{x^3}{3}.$$

Νοω ιφ $a = AE = 2$ ανδ $b = AE_1 = 4$, τηεν

$$\begin{aligned}
\text{αρεα } DEE_1D_1 &= \int_2^4 y\,dx \\
&= v_4 - v_2 \\
&= \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} \\
&= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} \\
&= \frac{56}{3}.
\end{aligned}$$

8. Λετ $y = 3x^2 + 7x$. Τηεν

$$\begin{aligned}
v &= \int y\,dx \\
&= 3\int x^2\,dx + 7\int x\,dx \\
&= 3\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} \\
&= x^3 + \frac{7x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Νοω ιφ $a = AE = 1$ ανδ $b = AE_1 = 5$, τηεν

$$\begin{aligned}
\text{αρεα } DEE_1D_1 &= \int_1^5 y\,dx \\
&= v_5 - v_1 \\
&= \left(5^3 + \frac{7(5^2)}{2}\right) - \left(1^3 + \frac{7(1^2)}{2}\right) \\
&= \left(125 + \frac{175}{2}\right) - \left(1 + \frac{7}{2}\right) \\
&= \frac{425}{2} - \frac{9}{2} \\
&= \frac{416}{2} \\
&= 208.
\end{aligned}$$

Σομε προβλεμς ον συμς οφ αλγεβραις χυαντιτιες

Φινδ τηε φολλοωινγ συμς.

1. $$\int (2x^3 - x + 4)\,dx.$$

2. $$\int (3x^5 - 2x^2 + 1)\,dx.$$

3. $$\int (\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3)\,dx.$$

4. $$\int (x^3 + \sqrt[3]{x})\,dx.$$

5. $$\int_1^3 x^3\,dx.$$

6. $$\int_{-1}^1 x^4\,dx.$$

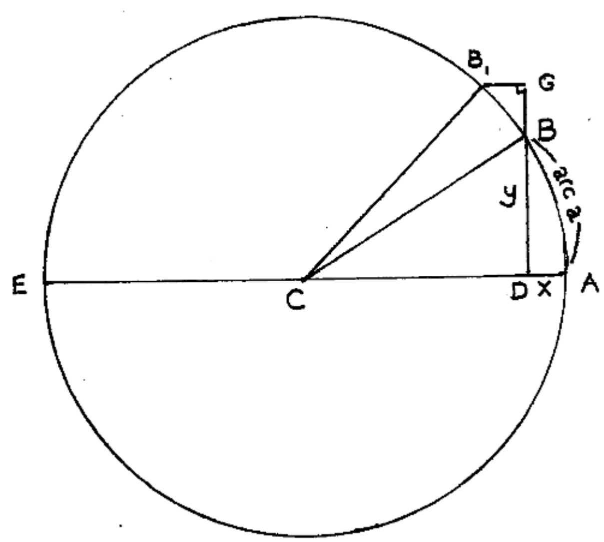
7. $$\int_1^2 (5x^4 - 2x)\,dx.$$

8. $$\int_{-1}^2 (2x^2 + 1)\,dx.$$

4. Α τρανσςενδεντ λινε: τηε σινε ςυρε

Ιν τηε αβοε εξαμπλες ως αλωαψς βεγιν ωιτη αν αλγεβραις ςυρε ανδ ενδ ωιτη αν αλγεβραις χυαδρατριξ: τηε εχυατιον φορ τηε οριγιναλ ςυρε ADB (τηατ ις, τηε εχυατιον ρελατινγ y ανδ x) ανδ τηε φιναλ εχυατιον φορ τηε χυαδρατριξ AFG (τηατ ις, τηε εχυατιον ρελατινγ v ανδ x) αρε βοτη ορδιναρψ αλγεβραις εχυατιονς (σεε Φιγυρε 22, παγε 139). Λετ υς νοω ςονσιδερ σομε τρανσςενδεντ εχυατιονς, βεγιννινγ ωιτη Λειβνιζ΄ς εχυατιον φορ τηε λενγτη οφ αν αρς οφ α ςιρςλε (ον παγε 108 οφ ηις τεξτ—σεε Φιγυρε 24 ηερε):

$$a = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$



Φιγυρε 24

Λειβνιζ ηας γιεν αν εχυατιον ρελατινγ τηε *ϵρσϵδ σινϵ*, x (DA ιν Φιγυρε 24), το τηε αρς a (AB). Βυτ ιτ ωιλλ βε σιμπλερ φορ υς το υσε αν εχυατιον ρελατινγ τηε *σινϵ*, y (BD), το a. Το γετ συςη αν εχυατιον ως αγαιν υσε τηε ςηαραςτεριστις τριανγλε B_1GB (σεε νοτε 16, αβοε, παγε 125). Βεςαυσε τριανγλε B_1GB ις σιμιλαρ το τριανγλε BDC,

$$B_1B : BG :: CB : CD.$$

Νοω $B_1B = da$, $BG = dy$, $CB = 1$, ανδ

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{CB^2 - DB^2} \quad \text{(βψ τηε Πψτηαγορεαν τηεορεμ)} \\ &= \sqrt{1 - y^2}. \end{aligned}$$

Τηερεφορε (συβστιτυτινγ ιντο τηις προπορτιον ανδ ςονερτινγ ιτ το αν εχυατιον)

$$\frac{da}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Τηερεφορε

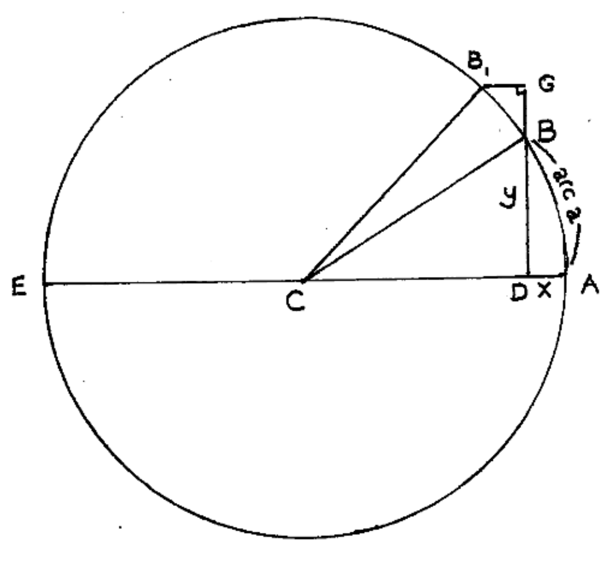
$$da = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

ανδ (τακινγ συμς οφ βοτη σιδες οφ τηε εχυατιον ανδ υσινγ τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ)

$$a = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

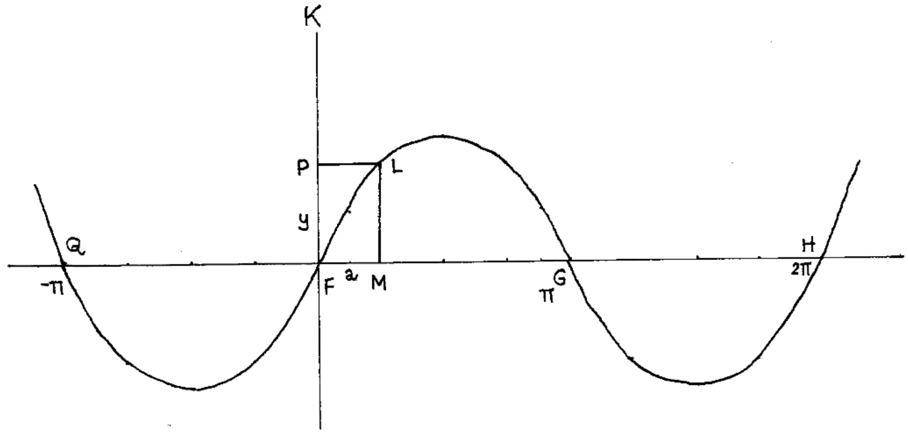
(Νοτε τηατ τηις βεςομες τηε σαμε εχυατιον Λειβνιζ γιες ον παγε 109 οφ ‘Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ,’ ιφ ωε συβστιτυτε x φορ y.)

Νοω, ιν Φιγυρε 24, y ις α αριαβλε στραιγητ λινε ωηιλε a ις α αριαβλε ςυρεδ



Φιγυρε 24

λινε. Βυτ ωε υσυαλλψ (φολλοωινγ Δεσςαρτες) ρεπρεσεντ αν εχυατιον βψ τακινγ βοτη αριαβλες το ςορρεσπονδ το *στραιγητ* λινες. Φιγυρε 25 δοες τηις, σηοωινγ τηε ςυρε φορ τηε σαμε εχυατιον ωηεν ωε τακε βοτη y ανδ a το βε αριαβλε στραιγητ λινες. Τηερε ωε δραω αν a-αξις FG ανδ α y-αξις FK. Φορ ανψ ποιντ M ον τηε αξις FG, ιφ $FM = a$ (= αρς AB ιν Φιγυρε 24), τηεν ωε σετ $ML = y$ (= BD ιν Φιγυρε 24). Το σεε ωηψ τηε ςυρε ιν Φιγυρε 25 ηας τηε σηαπε ιτ δοες, ιμαγινε ωηατ ηαππενς ας a ινςρεασες υνιφορμλψ. Ιν Φιγυρε 24, ας a ινςρεασες τηε ποιντ B μοες ςουντερςλοςκωισε ιν υνιφορμ ςιρςυλαρ μοτιον, ωηιλε ιν Φιγυρε 25 τηε ποιντ M μοες το τηε ριγητ ιν υνιφορμ λινεαρ μοτιον. Ωηεν τηε ποιντ B ρεαςηες τηε



Φιγυρε 25

ποιντ E οπποσιτε A ιν Φιγυρε 24, $a = \pi$ (ηαλφ τηε ςιρςυμφερενςε οφ τηε ςιρςλε) ανδ $y = DB$ βεςομες εχυαλ το 0. Τηερεφορε ιν Φιγυρε 25, ωηεν $a = FG = \pi$, $y = LM$ βεςομες εχυαλ το 0, ανδ τηε ςυρε ςροσσες τηε αξις ατ G. Ας a ςοντινυες το ινςρεασε το αλυες γρεατερ τηαν π, τηε ποιντ B πασσες βελοω E ιν Φιγυρε 24, ανδ σο τηε αλυες οφ y βεςομε νεγατιε. Τηερεφορε ιν Φιγυρε 25, τηε ςυρε πασσες βελοω τηε αξις βεψονδ G. Τηε αλυες οφ y ςοντινυε το βε νεγατιε υντιλ τηε ποιντ B ιν Φιγυρε 24 ςομες βαςκ αρουνδ το ωηερε ιτ σταρτεδ ατ A. Ωηεν $a = 2\pi$ (τηε ωηολε ςιρςυμφερενςε οφ τηε ςιρςλε) B ανδ A ςοινςιδε, ανδ $y = 0$. Τηερεφορε ιν Φιγυρε 25, ωηεν $a = FH = 2\pi$, τηεν $y = 0$ ανδ τηε ςυρε ςροσσες τηε αξις. Ας ωε μοε το τηε ριγητ οφ H ιν Φιγυρε 25, τηε παττερν ρεπεατς ιτσελφ ας B γοες αρουνδ τηε ςιρςλε αγαιν ιν Φιγυρε 24. Λικεωισε, ιφ ωε μοε το τηε λεφτ οφ F, ωε γετ τηε σαμε παττερν, ας B γοες αρουνδ τηε ςιρςλε ιν τηε οτηερ διρεςτιον ιν Φιγυρε 24. Τηε ρεσυλτινγ ςυρε ις τηερεφορε α κινδ οφ ινφινιτε ωαε τηατ γοες ον ρεπεατινγ ιτσελφ ιν βοτη διρεςτιονς. Σινςε τηις ςυρε ρεπρεσεντς τηε ρελατιον βετωεεν τηε σινε BD οφ τηε ςιρςλε ABE το ιτς ςορρεσπονδινγ αρς AB, ιτ ις ςαλλεδ α *σινϵ ςυρϵ*.

Τηε σινε ςυρε μυστ βε τρανσςενδεντ, ας ωε ςαν σεε βψ α σιμπλε *ρεδυςτιο αδ αβσυρδυμ* αργυμεντ. Φορ ιφ ιτ ωερε νοτ τρανσςενδεντ, σο τηατ τηε εχυατιον ρελατινγ y ανδ a ςουλδ βε εξπρεσσεδ αλγεβραιςαλλψ, τηεν ωε ςουλδ σετ $y = 0$ ανδ γετ αν αλγεβραις εχυατιον φορ αλλ τηε αλυες οφ a ωηερε $y = 0$. Ωε ωουλδ τηερεβψ φινδ αλλ τηε ποιντς F, G, H, ετς., ωηερε τηε σινε ςυρε ςροσσες τηε a-αξις. Βυτ τηε εχυατιον φορ τηεσε ποιντς, λικε ανψ αλγεβραις εχυατιον, ωουλδ ηαε ονλψ φινιτελψ μανψ σολυτιονς. (Φορ εξαμπλε, ιφ τηε εχυατιον φορ τηε σινε ςυρε ωερε

$$y = a^3 - 3a^2 + 7,$$

ωε ωουλδ γετ τηε εχυατιον

$$0 = a^3 - 3a^2 + 7,$$

ωηιςη ωουλδ ηαε ατ μοστ 3 σολυτιονς.) Ιτ ωουλδ τηεν φολλοω τηατ τηε σινε ςυρε ωουλδ ονλψ ςροσς τηε αξις ατ φινιτελψ μανψ ποιντς. Βυτ ωε ϑυστ σαω τηατ ιτ μυστ ςροσς τηε αξις ατ ινφινιτελψ μανψ ποιντς: F, G, H, ετς. Τηερεφορε τηε σινε ςυρε ςαννοτ βε εξπρεσσεδ βψ αν αλγεβραις εχυατιον· τηατ ις, τηερε ις νο ωαψ το φινδ αν αλγεβραις εξπρεσσιον ρελατινγ τηε αβσςισσα οφ τηε σινε ςυρε

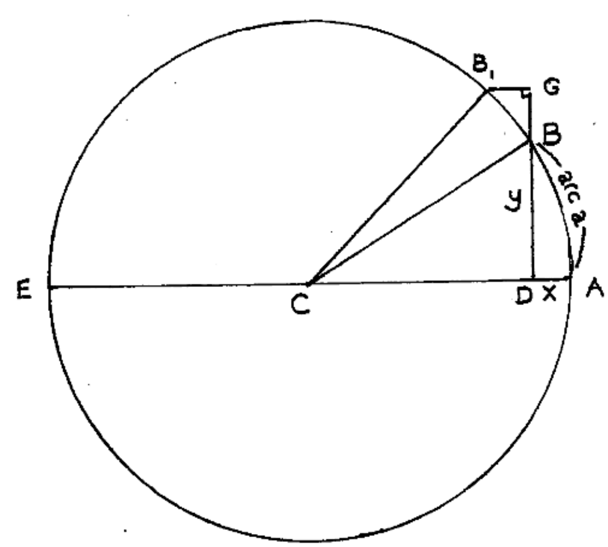
$$a = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

το ιτς ορδινατε y. Ιν οτηερ ωορδς, τηερε ις νο ωαψ το φινδ α σιμπλψ αλγεβραις εξπρεσσιον φορ

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}};$$

ωε μυστ υσε τρανσςενδεντ χυαντιτιες το φινδ τηις συμ.

Διφφερενςες ανδ συμς οφ σινες ανδ οτηερ τριγονομετρις χυαντιτιες



Φιγυρε 24

Υσινγ Φιγυρες 24 ανδ 25 ωε μαψ φινδ εχυατιονς ρελατινγ τηε διφφερενςες ανδ συμς οφ σινες ανδ οτηερ τριγονομετρις χυαντιτιες. Ηερε αρε σομε εξαμπλες. Ωε δενοτε $y = BD$ (ιν Φιγυρε 24) βψ $\sin a$ ανδ $1 - x = CD$ βψ $\cos a$, ας ις υσυαλλψ δονε ιν τριγονομετρψ. (Ηερε τηε αρς AB ις εχυαλ το τηε ανγλε BCA, εξπρεσσεδ ιν ραδιανς.)

1. Το φινδ $d\sin a$ ιν τερμς οφ a. Ιν Φιγυρε 24, βεςαυσε οφ τηε σιμιλαρ τριανγλες B_1GB ανδ BDC,

$$GB : B_1B :: DC : BC.$$

Συβστιτυτινγ $d\sin a (= dy)$ φορ GB, da φορ B_1B, $\cos a$ φορ DC, ανδ 1 φορ BC, ανδ ςονερτινγ τηε προπορτιον το αν εχυατιον, ωε γετ

$$\frac{d\sin a}{da} = \frac{\cos a}{1}.$$

Τηερεφορε (σολινγ φορ $d\sin a$),

$$d\sin a = \cos a \, da.$$

2. Το φινδ $d\cos a$ ιν τερμς οφ a. Ιν Φιγυρε 24, βεςαυσε οφ τηε σαμε σιμιλαρ τριανγλες,

$$B_1G : B_1B :: BD : BC.$$

Νοτε τηατ B_1G ις τηε αμουντ βψ ωηιςη CD $(= \cos a)$ δεςρεασες ας B μοες το τηε ινφινιτελψ ςλοσε ποιντ B_1. Τηερεφορε $GB_1 = -d\cos a$. Συβστιτυτινγ $-d\cos a$ φορ GB_1, da φορ B_1B, $\sin a$ φορ BD ανδ 1 φορ BC, ανδ ςονερτινγ τηε προπορτιον το αν εχυατιον, ωε γετ

$$\frac{-d\cos a}{da} = \frac{\sin a}{1}.$$

Τηερεφορε

$$d\cos a = -\sin a \, da.$$

3. Λετ

$$z = \sin(3a + 4).$$

Το φινδ dz ιν τερμς οφ a. Ηερε ωε λετ $v = 3a + 4$, σο τηατ $z = \sin v$. Τηερεφορε, βψ τηε φιρστ εξαμπλε, αβοε,

$$dz = \cos v \, dv.$$

Ανδ

$$\begin{aligned} dv &= d(3a + 4) \\ &= 3\,da + d(4) \\ &= 3\,da. \end{aligned}$$

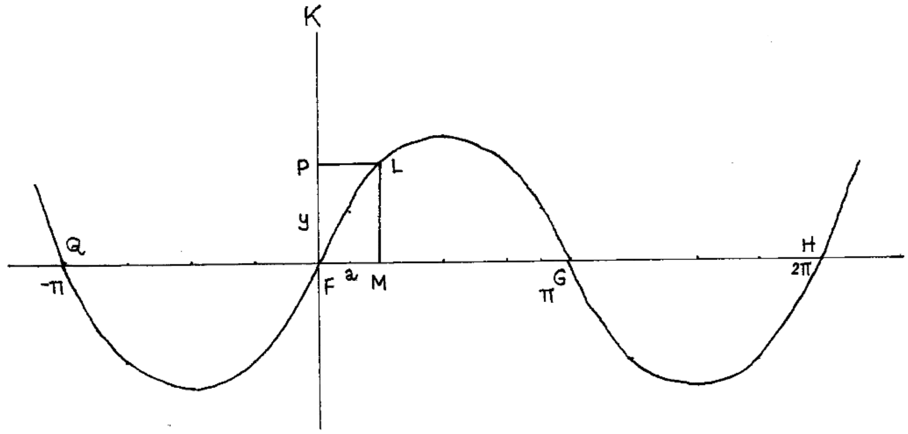
Τηερεφορε

$$\begin{aligned} dz &= \cos v \, dv \\ &= \cos(3a + 4)\,(3\,da) \\ &= 3\cos(3a + 4)\,da. \end{aligned}$$

4. Λετ
$$z = \sin(\omega t),$$
ωηερε ω ις σομε ςονσταντ. Το φινδ dz ιν τερμς οφ t. Λετ $v = \omega t$, σο τηατ
$$z = \sin v.$$
Τηερεφορε, βψ τηε φιρστ εξαμπλε, αβοε,
$$dz = \cos v\, dv;$$
ανδ
$$dv = \omega\, dt.$$
Τηερεφορε
$$\begin{aligned} dz &= \cos v\, dv \\ &= \cos(\omega t)\, dv \\ &= \cos(\omega t)\, \omega\, dt \\ &= \omega \cos(\omega t)\, dt. \end{aligned}$$

5. Λετ
$$z = \cos^2(4a).$$
Το φινδ dz ιν τερμς οφ a. Ηερε ωε λετ $v = \cos(4a)$, σο τηατ $z = v^2$ ανδ
$$dz = 2v\, dv.$$
Το φινδ dv, ωε λετ $u = 4a$, σο τηατ $v = \cos u$ ανδ
$$dv = -\sin u\, du = -\sin(4a)\, du$$
βψ τηε σεςονδ εξαμπλε, αβοε. Φιναλλψ, αςςορδινγ το τηε ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε,
$$du = d(4a) = 4\, da.$$
Τηερεφορε
$$\begin{aligned} dz &= 2v\, dv \\ &= 2(\cos(4a))(-\sin(4a)\, du) \\ &= 2(\cos(4a))(-\sin(4a))(4\, da) \\ &= -8\cos(4a)\sin(4a)\, da. \end{aligned}$$

6. Το φινδ $\int \sin a\, da$, τηατ ις, αρεα FLM ιν Φιγυρε 25, ωε ωουλδ λικε το αππλψ τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ. Το δο τηις, ωε νεεδ το φινδ α χυαντιτψ



Φιγυρε 25

v συςη τηατ $dv = \sin a\,da$ ανδ $v = 0$ ωηεν $a = 0$. Ιτ φολλοως φρομ τηε σεςονδ εξαμπλε, αβοε, τηατ

$$d(-\cos a) = \sin a\,da.$$

Τηερεφορε ωε μιγητ βε τεμπτεδ το σετ v εχυαλ το $-\cos a$. Βυτ $-\cos a$ ις νοτ εχυαλ το 0 ωηεν $a = 0$: $-\cos 0 = -1$. Τηερεφορε ινστεαδ ωε σετ

$$v = 1 - \cos a.$$

Τηεν

$$dv = d(1) - d(\cos a) = -d(\cos a) = \sin a\,da,$$

ανδ ωηεν $a = 0$

$$v = 1 - \cos 0 = 0.$$

Τηερεφορε ωε μαψ αππλψ τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ:

$$\begin{aligned} \text{αρεα } FLM &= \int \sin a\,da \\ &= \int dv \\ &= v \\ &= 1 - \cos a. \end{aligned}$$

Ιτ φολλοως ιν παρτιςυλαρ τηατ ωηεν αρεα FLM ςοινςιδες ωιτη αρεα FLG, $a = \pi$ ανδ

$$\begin{aligned} \text{αρεα } FLG &= 1 - \cos(\pi) \\ &= 2. \end{aligned}$$

7. Το φινδ τηε δεφινιτε ιντεγραλ

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin a \, da.$$

(Σεε παγε 145, αβοε, φορ α δισςυσσιον οφ δεφινιτε ιντεγραλς.)

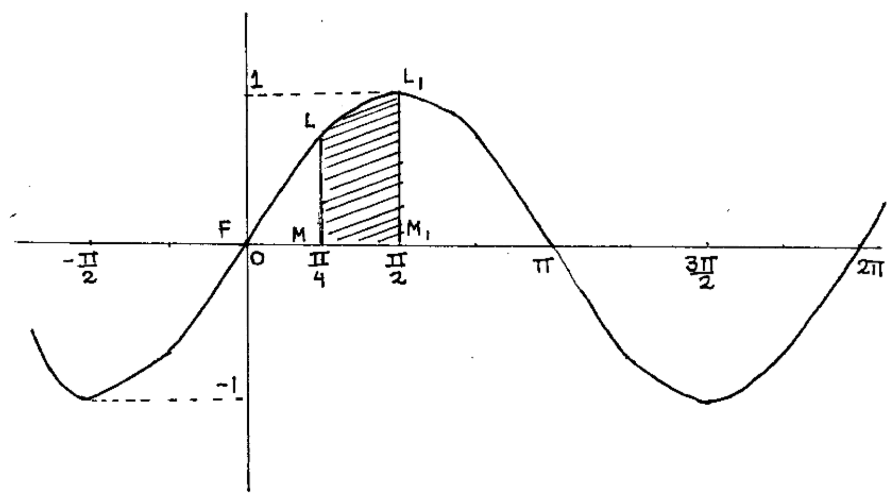
Τηις συμ ις εχυαλ το τηε αρεα LMM_1L_1, ωηερε

$$FM = \frac{\pi}{4}$$

ανδ

$$FM_1 = \frac{\pi}{2}$$

(σεε Φιγυρε 26). Τηις αρεα ις εχυαλ το τηε διφφερενςε οφ αρεα FM_1L_1 ανδ



Φιγυρε 26

αρεα FML . Βυτ ωε σηοωεδ ιν τηε πρειους εξαμπλε τηατ

$$\begin{aligned} FM_1L_1 &= v_{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1, \end{aligned}$$

ανδ

$$\begin{aligned} FML &= v_{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Τηερεφορε,

$$\begin{aligned}
\text{αρεα } LMM_1L &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin a \, da \\
&= v_{\frac{\pi}{2}} - v_{\frac{\pi}{4}} \\
&= 1 - \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

(Ιτ τυρνς ουτ τηατ, βψ α τριγονομετρις αργυμεντ τηατ ις νοτ ωορτη γοινγ ιντο ηερε,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

σο τηατ

$$\text{αρεα } LMM_1L = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx .7071.)$$

Σομε προβλεμς ον τριγονομετρις χυαντιτιες

1. Υσινγ τηε ρυλες οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς, ανδ τηε αβοε εξαμπλες, φινδ τηε φολλοωινγ διφφερενςες.

   (α)
   $$d(\sin(2a-1) + \cos(3a+2)).$$

   (β)
   $$d(\sin(5a) + \cos(a+3)).$$

   (ς)
   $$d(4\sin(2a) + 2\cos(a+1)).$$

   (δ)
   $$d(2\sin(3a) - 3\sin(7a)).$$

   (ε)
   $$d(\sin^3(a)).$$

   (φ)
   $$d(\sin^3(4a)).$$

   (γ)
   $$d(\cos^4(1-a)).$$

   (η)
   $$d\left(\frac{\sin(2a)}{\cos(-a)}\right).$$

(ι)

$$d\left(\frac{\cos(a^2)}{\sin(2a)}\right).$$

2. Υσινγ τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ ανδ τηε ρυλες οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς, φινδ τηε φολλοωινγ συμς.

   (α)

   $$\int \cos a \, da.$$

   (β)

   $$\int (4\cos a - \sin a)\, da.$$

   (ς)

   $$\int (3\sin a + 2\cos a)\, da.$$

   (δ)

   $$\int 3\cos(a-2)\, da.$$

   (ε)

   $$\int \sin(2a)\, da.$$

   (φ)

   $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos a \, da.$$

   (γ)

   $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2a)\, da.$$

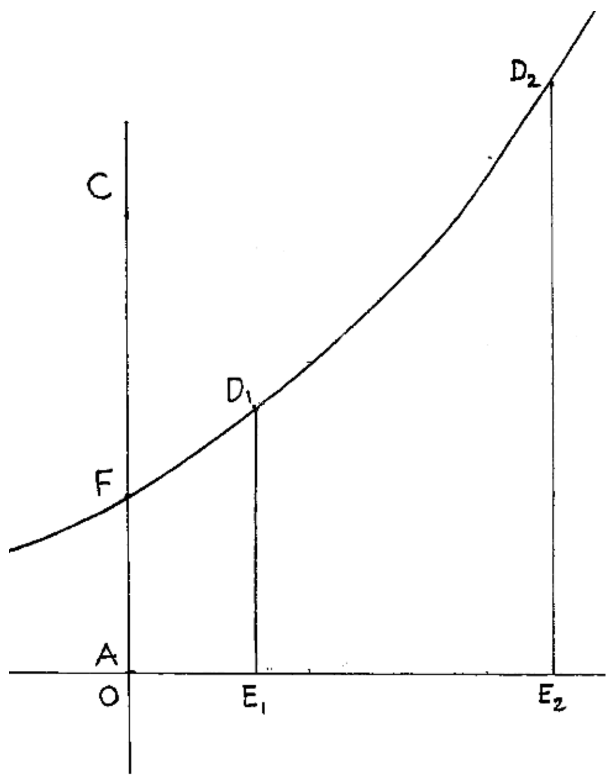
5. Ανοτηερ τρανσςενδεντ λινε: τηε λογαριτημις λινε

Λετ τηε λινε FD (Φιγυρε 27) βε α λογαριτημις λινε, τηατ ις, α λινε συςη τηατ ανψ αριτημετις προγρεσσιον οφ ιτς αβσςισσας AE ςορρεσπονδς το α γεομετρις προγρεσσιον οφ ιτς ορδινατες ED (σεε ‘Α Νεω Μετηοδ,’ παγε 39, ανδ αβοε, παγε 87). Ωε ωιλλ ασσυμε φυρτηερ τηατ FD ις α *νατυραλ* λογαριτημις λινε. Λετ τηε αβσςισσας AE βε δενοτεδ βψ x ανδ τηε ορδινατες ED βε δενοτεδ βψ y. Τηεν x ις τηε νατυραλ λογαριτημ οφ y, τηατ ις

$$x = \log y$$

(σεε παγε 95, αβοε). Μορεοερ,

$$y = e^x$$



Φιγυρε 27

(τηις ις αν εχυατιον ον παγε 95, συβστιτυτινγ y φορ w), ανδ y ανδ x αρε ρελατεδ βψ τηε διφφερεντιαλ εχυατιον

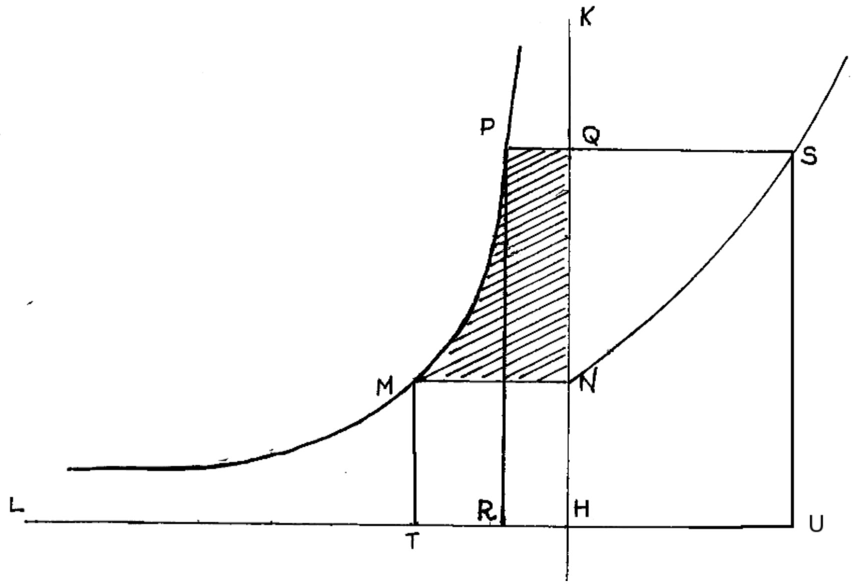
$$\frac{dy}{y} = dx$$

(εχυατιον 3 ον παγε 99, αβοε, συβστιτυτινγ y φορ w).

Ωε ωιλλ σηοω ηερε τηατ FD ις τηε χυαδρατριξ οφ α ηψπερβολα, τηατ ιτ ις τρανσςενδεντ, ανδ γιε σομε εξαμπλες οφ ηοω το φινδ συμς οφ εξπρεσσιονς ινολινγ λογαριτημς.

Τηε λογαριτημις λινε ας α χυαδρατριξ οφ α ηψπερβολα

Τηε λογαριτημις λινε ις τηε χυαδρατριξ οφ α ηψπερβολα. Φορ λετ τηε λινε PM (Φιγυρε 28) βε α ηψπερβολα ωηοσε ασψμπτοτες αρε τηε περπενδιςυλαρ λινες LH



Φιγυρε 28

ανδ KH. Λετ M βε τηε πρινςιπαλ ερτεξ οφ τηε ηψπερβολα, ανδ δροπ περπενδιςυλαρ λινες MN ανδ MT το KH ανδ LH, ρεσπεςτιελψ. Λετ MN (ωηιςη ις εχυαλ το MT) βε ουρ υνιτ. Ιφ P ις ανψ ποιντ ον τηε ηψπερβολα, ανδ ωε δροπ περπενδιςυλαρ λινες PQ ανδ PR το KH ανδ LH, ρεσπεςτιελψ, τηεν αςςορδινγ το Προποσιτιον ΙΙ 12 ιν Απολλονιυσ' *δνιςς*,

$$\text{ρεςτανγλε } PQHR = \text{σχυαρε } MNHT.$$

Τηερεφορε, ιφ ωε λετ $PQ = z$ ανδ $QH = y$,

$$zy = \text{ρεςτανγλε } PQHR = \text{σχυαρε } MNHT = 1,$$

ανδ τηερεφορε

$$z = \frac{1}{y}.$$

Λετ NS βε τηε χυαδρατριξ οφ τηε ηψπερβολα PM, σο τηατ

$$SQ = \text{αρεα } QPMN.$$

Νοω τηε συμ

$$\int z\,dy$$

(βεγιννινγ φρομ $y = 1$) ρεπρεσεντς τηε αρεα οφ $QPMN$ ςορρεσπονδινγ το τηε αριαβλε $y = QH$ (σεε παρτ 1 οφ Νοτε 19, αβοε, παγε 133), ανδ σινςε

$$z = \frac{1}{y},$$

τηις αρεα ις αλσο εχυαλ το

$$\int \frac{dy}{y}.$$

Τηερεφορε

$$SQ = \int \frac{dy}{y}.$$

Νοω λετ x βε τηε νατυραλ λογαριτημ οφ y, σο τηατ

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

(εχυατιον 3 ον παγε 94, αβοε, συβστιτυτινγ y φορ w). Τηεν

$$SQ = \int dx = x,$$

αςςορδινγ το τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ. Δροπ SU περπενδιςυλαρ το HU. Τηεν τηε αβσςισσα HU οφ τηε λινε NS ις εχυαλ το SQ, ανδ τηερεφορε το x, ωηιλε ιτς ορδινατε SU ις εχυαλ το y. Βυτ ωε δεφινεδ x ας τηε νατυραλ λογαριτημ οφ y, ανδ τηερεφορε τηε αβσςισσα οφ NS ις αλωαψς εχυαλ το τηε νατυραλ λογαριτημ οφ ιτς ορδινατε. Τηερεφορε NS ις α λογαριτημις λινε.

Τηε ςαλςυλυς τηερεφορε σηοως υς αν υνεξπεςτεδ αναλογψ βετωεεν σινες ανδ λογαριτημς. Βοτη σινε ςυρες ανδ λογαριτημις ςυρες αρισε φρομ μεασυρεμεντς οφ σιμπλε ςονις σεςτιονς. Τηε σινε ςυρε αρισες φρομ μεασυρινγ αρςς οφ ςιρςλες, ωηιλε τηε λογαριτημ αρισες φρομ τακινγ αρεας υνδερ ηψπερβολας ωιτη περπενδιςυλαρ ασψμπτοτες. Σινες ανδ τηε λογαριτημς τηυς αρισε φρομ τακινγ μεασυρεμεντς οφ τωο οφ τηε σιμπλεστ ςυρεδ λινες. Ωε μιγητ τηεν ωονδερ ωηατ σορτ οφ τρανσςενδεντ χυαντιτιες ωουλδ αρισε φρομ μορε ςομπλιςατεδ ςυρεδ λινες. Φορ εξαμπλε, ωηατ σορτ οφ τρανσςενδεντ χυαντιτιες αρισε φρομ μεασυρινγ τηε αρς λενγτης οφ ελλιπσες; ορ αρεας υνδερ ηψπερβολας ωηοσε ασψμπτοτες αρε νοτ περπενδιςυλαρ; Ανδ ωηατ σορτ οφ τρανσςενδεντ χυαντιτιες αρισε φρομ ηιγηερ δεγρεε ςυρες;

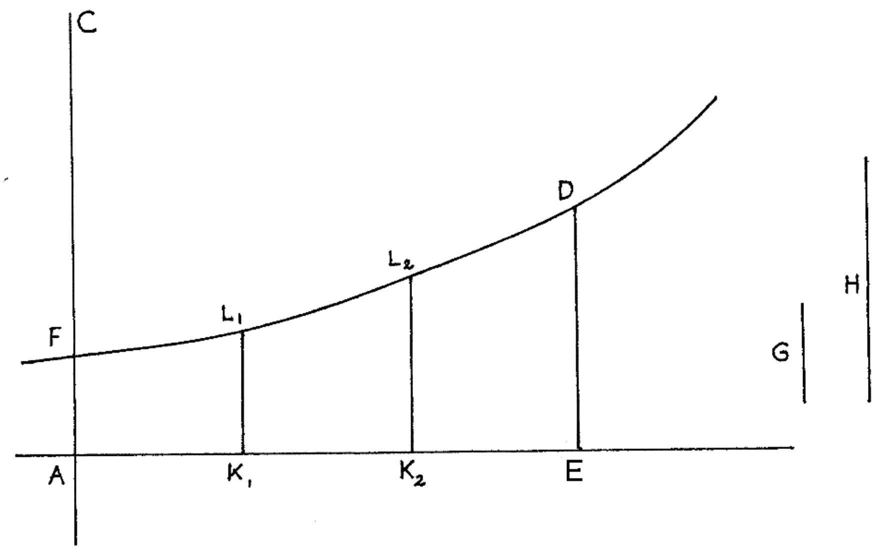
Τηε τρανσςενδενςε οφ τηε λογαριτημις λινε

Ωε αρε φιναλλψ ιν α ποσιτιον το εξπανδ Λειβνιζ'ς αργυμεντ (ον παγε 105 οφ 'Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ¨) τηατ τηε λογαριτημις λινε ις τρανσςενδεντ. Τηε αργυμεντ ις παραλλελ το τηε αργυμεντ το σηοω τηατ τηε χυαδρατριξ οφ α ςιρςλε ις τρανσςενδεντ (σεε Νοτε 6, αβοε, παγες 117–118, ανδ τηε αππενδιξ, παγες 249–251), ανδ ηερε αγαιν ωε γιε α πλαυσιβλε αργυμεντ, ανδ νοτ α ςομπλετε δεμονστρατιον.

Συπποσε τηατ FD ωερε νοτ τρανσςενδεντ. Τηεν ιτ ωουλδ ηαε α σινγλε αλγεβραις εχυατιον οφ δεφινιτε δεγρεε, συςη ας

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac,$$

Νοω τηε λογαριτημις λινε FD (ωηιςη ις τηε χυαδρατριξ οφ α ηψπερβολα τηατ Λειβνιζ μεντιονς ον παγε 105) μαψ βε υσεδ το φινδ αν αρβιτραρψ νυμβερ οφ μεαν προπορτιοναλς φορ ανψ γιεν ρατιο, ας φολλοως. Λετ τηε γιεν ρατιο βε τηατ οφ G το H (σεε Φιγυρε 29), ανδ συπποσε G ις α υνιτ. Νοτε τηατ AF ις αλσο α υνιτ,



Φιγυρε 29

σινςε ιτ ρεπρεσεντς $e^0 = 1$. Λετ ED βε τηε ορδινατε οφ FD εχυαλ το H. Ιφ ωε ωαντ το φινδ τωο μεαν προπορτιοναλς, τηεν λετ K_1 ανδ K_2 βε τωο ποιντς ον τηε αξις συςη τηατ

$$AK_1 = K_1K_2 = K_2E.$$

Τηερεφορε τηε αβσςισσας

$$0,\ AK_1,\ AK_2,\ \text{ανδ } AE$$

φορμ αν αριτημετις προγρεσσιον. Τηερεφορε τηε ςορρεσπονδινγ ορδινατες

$$AF,\ K_1L_1,\ K_2L_2,\ \text{ανδ } ED$$

φορμ α γεομετρις προγρεσσιον, τηατ ις

$$AF(=G):K_1L_1::K_1L_1:K_2L_2::K_2L_2:ED(=H).$$

Τηερεφορε K_1L_1 ανδ K_2L_2 αρε τωο μεαν προπορτιοναλς φορ G ανδ H. Ιφ ωε ωαντ το φινδ τηρεε μεαν προπορτιοναλς φορ G ανδ H, ωε σιμπλψ τακε τηρεε εχυαλλψ σπαςεδ ποιντς K βετωεεν A ανδ E, ανδ σο ον.

Τηυς τηε λινε FD, ωηιςη ηας αν αλγεβραις εχυατιον οφ α σινγλε δεφινιτε δεγρεε, μαψ βε υσεδ το φινδ αν αρβιτραρψ νυμβερ οφ μεαν προπορτιοναλς φορ τωο γιεν μαγνιτυδες. Βυτ τηε προβλεμ οφ φινδινγ τωο μεαν προπορτιοναλς φορ α γιεν ρατιο ις οφ τηε τηιρδ δεγρεε. Φορ ιφ ωε λετ

$$H=ED=y,$$

ανδ

$$z^3=y,$$

τηεν

$$1:z::z:z^2::z^2:z^3.$$

Συβστιτυτινγ G φορ 1 ανδ H φορ z^3 γιες

$$G:z::z:z^2::z^2:H.$$

Τηερεφορε z ανδ z^2 αρε τηε τωο μεαν προπορτιοναλς φορ τηε γιεν ρατιο, σο τηατ φινδινγ z λετς υς φινδ βοτη τηεσε μεαν προπορτιοναλς, ανδ z ις τηε σολυτιον οφ α τηιρδ δεγρεε εχυατιον, ναμελψ,

$$z^3=y.$$

Τηερεφορε τηε προβλεμ οφ φινδινγ τωο μεαν προπορτιοναλς ις α προβλεμ οφ τηε τηιρδ δεγρεε. Λικεωισε, τηε προβλεμ οφ φινδινγ τηρεε μεαν προπορτιοναλς ις α προβλεμ οφ τηε φουρτη δεγρεε, τηε προβλεμ οφ φινδινγ φουρ μεαν προπορτιοναλς ις οφ τηε φιφτη δεγρεε, ανδ σο ον. Τηε λινε FD ωουλδ τηεν ηαε α σινγλε δεφινιτε δεγρεε βυτ βε ςαπαβλε οφ σολινγ ινφινιτελψ μανψ προβλεμς οφ αλλ ποσσιβλε δεγρεες. Τηις ις αβσυρδ. Τηερεφορε ουρ ασσυμπτιον τηατ FD ις νοτ τρανσςενδεντ μυστ βε φαλσε.

Συμς οφ χυαντιτιες ινολινγ λογαριτημς

1. Λετ $y=e^x$. Το φινδ $\int y\,dx$, τηατ ις, αρεα $FAED$ ιν Φιγυρε 27 (παγε 157), ιν τερμς οφ x. Το δο τηις, ωε νεεδ το φινδ α χυαντιτψ v συςη τηατ $dv=e^x\,dx$ ανδ $v=0$ ωηεν $x=0$. Αςςορδινγ το εχυατιον 4 ον παγε 98, αβοε,

$$d(e^x)=e^x\,dx.$$

Τηερεφορε ωε μιγητ βε τεμπτεδ το σετ v το βε εχυαλ το e^x. Βυτ e^x ις νοτ εχυαλ το 0 ωηεν $x=0$: $e^0=1$. Τηερεφορε ινστεαδ ωε σετ

$$v=e^x-1.$$

Τηεν
$$dv = d(e^x - 1) = d(e^x) = e^x\,dx,$$
ανδ ωηεν $x = 0$
$$v = e^0 - 1 = 0.$$
Τηερεφορε, αςςορδινγ το τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ,
$$\begin{aligned} \text{αρεα } FAED &= \int e^x\,dx \\ &= \int dv \\ &= v \\ &= e^x - 1. \end{aligned}$$

2. Λετ $y = e^{2x}$. Το φινδ $\int y\,dx$ ιν τερμς οφ x. Το δο τηις, λετ
$$u = 2x.$$
Τηεν
$$y = e^u$$
ανδ, βψ τηε ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε,
$$du = 2\,dx.$$
Τηερεφορε
$$dx = \frac{1}{2}\,du.$$
Τηερεφορε
$$\begin{aligned} \int y\,dx &= \int (e^u)\left(\frac{1}{2}\,du\right) \\ &= \frac{1}{2}\int e^u\,du \\ &= \frac{1}{2}(e^u - 1) \qquad \text{(πρειους εξαμπλε)} \\ &= \frac{1}{2}(e^{2x} - 1). \end{aligned}$$
Τηε μετηοδ ωε ηαε υσεδ ιν τηις εξαμπλε ις ςαλλεδ *ιντεγρατιον βψ συβστιτυτιον*. Ιτ ις υσεφυλ ωηενεερ ωε ςαν φινδ ανοτηερ αριαβλε u συςη τηατ
$$\int y\,dx$$
ςαν μορε εασιλψ βε φουνδ ωηεν ιτ ις εξπρεσσεδ ιν τερμς οφ u. Τηερε αρε νο υνιερσαλ ρυλες φορ δετερμινινγ ωηατ νεω αριαβλε u το συβστιτυτε, ανδ ιτ ςαν εεν βε διφφιςυλτ το σεε ιν αδανςε τηατ συβστιτυτιον ις α υσεφυλ μετηοδ φορ α γιεν προβλεμ.

3. Λετ $y = x\sin(x^2)$. Το φινδ $\int y\,dx$ ιν τερμς οφ x. Το δο τηις, λετ

$$u = x^2.$$

Τηεν

$$du = 2x\,dx$$

ανδ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sin(u)\,du &= \frac{1}{2}\sin(x^2)(2x\,dx) \\
&= \sin(x^2)\,x\,dx \\
&= x\sin(x^2)\,dx \\
&= y\,dx.
\end{aligned}$$

Τηερεφορε

$$\begin{aligned}
\int y\,dx &= \int \frac{1}{2}\sin(u)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int \sin(u)\,du \\
&= \frac{1}{2}(1-\cos(u)) && \text{(εξαμπλε 6, παγε 152)} \\
&= \frac{1}{2}(1-\cos(x^2)).
\end{aligned}$$

4. Λετ $y = xe^x$. Το φινδ $\int y\,dx$ ιν τερμς οφ x.

Λετ $u = x$ ανδ $v = e^x$. Τηεν $dv = e^x\,dx$, ανδ τηερεφορε

$$y\,dx = u\,dv.$$

Νοω, αςςορδινγ το τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

ανδ τηερεφορε

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Τηερεφορε

$$\begin{aligned}
\int y\,dx &= \int u\,dv \\
&= \int (d(uv) - v\,du) \\
&= \int d(uv) - \int v\,du \\
&= uv - \int v\,du && \text{(φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ)} \\
&= xe^x - \int e^x\,dx \\
&= xe^x - (e^x - 1) && \text{(φιρστ εξαμπλε)}
\end{aligned}$$

Τηε μετηοδ ωε ηαε υσεδ ιν τηις εξαμπλε ις ςαλλεδ *ιντεγρατιον βψ παρτς*: φορ ανψ συμ $\int y\,dx$, ιφ ωε ςαν φινδ u ανδ v συςη τηατ $y\,dx = u\,dv$, τηεν

$$\int y\,dx = uv - \int v\,du.$$

Τηις μετηοδ ις υσεφυλ ωηεν ιτ ις εασιερ το φινδ $\int v\,du$ τηαν ιτ ις το φινδ $\int u\,dv$.

Σομε προβλεμς ον συμς ινολινγ λογαριτημς

Υσινγ τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ ανδ τηε ρυλες οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς, φινδ τηε φολλοωινγ συμς.

1.
$$\int (3e^x + x^2)\,dx.$$

2.
$$\int (2e^x + \sin x)\,dx.$$

3.
$$\int (e^{3x})\,dx.$$

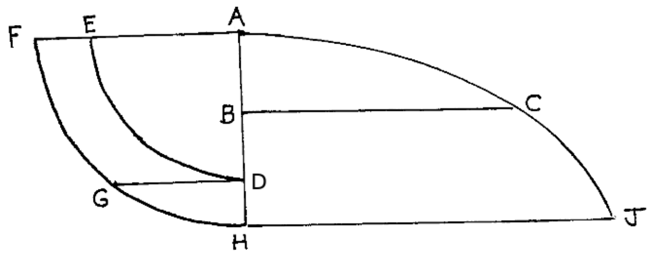
4.
$$\int (e^{2x} + 3e^{-x})\,dx.$$

5.
$$\int e^{(x^2)}\,x\,dx.$$

6.
$$\int e^{(\sin x)}\,\cos x\,dx.$$

7.
$$\int x^2 e^x\,dx.$$

8.
$$\int x^3 e^x\,dx.$$



Φιγυρε 30

Νοτε 20

Ιν τηε παπερ Λειβνιζ ρεφερς το, Τσςηιρνηαυς ις, λικε Λειβνιζ (σεε τηε βεγιννινγ οφ ‘Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ’), ρεσπονδινγ το ῝ραιγ΄ς ρεςεντ ωορκ . Αςςορδινγ το Τσςηιρνηαυς, ῝ραιγ εξςεσσιελψ πραισες Βαρροω΄ς δισςοεριες. Το προε τηατ ηις μετηοδ ις συπεριορ το Βαρροω΄ς, Τσςηιρνηαυς γιες σεεραλ προβλεμς τηατ ηε ςλαιμς τηατ ηε ςαν σολε ανδ Βαρροω ςαννοτ. Τηεσε αρε τηε προβλεμς τηατ Λειβνιζ ις σπεακινγ οφ ηερε. Τηε φιρστ προβλεμ ις ας φολλοως:

> Λετ FGH (Φιγυρε 30) βε α χυαδραντ οφ α ςιρςλε, ανδ συπποσε τηατ
>
> $$AH : HB :: \text{αρς } FGH : \text{αρς } GH.$$
>
> Νοω φορ ανψ ποιντ G ον τηε αρς FGH, λετ ED βε α χυαδραντ οφ α ςιρςλε ωιτη ςεντερ A, ανδ δραω τηε λινε BC περπενδιςυλαρ το AH συςη τηατ
>
> $$BC = \text{αρς } ED.$$
>
> Τηεν ας τηε ποιντ G μοες αλονγ τηε αρς FH, τηε ποιντς C ωιλλ τραςε ουτ α ςυρε ACJ. Τηε προβλεμ ις το φινδ τηε ςυρε ACJ.

Λειβνιζ ςλαιμς ηερε τηατ ACJ ις α λινε οφ σινες, ανδ τηατ

$$\text{αρεα } ABCA = AH \times GD.$$

(Ηε ις μισταкεν αβουτ τηε αρεα $ABCA$· ιν φαςτ

$$\text{αρεα } BHJC = AH \times GD.)$$

Τσςηιρνηαυσ΄ς οτηερ προβλεμς αρε οβσςυρελψ ποσεδ, ανδ ιτ ις νοτ νεςεσσαρψ το υνδερστανδ τηεμ ηερε.

Φυνςτιοναλ Νοτατιον ανδ ἄλςυλυς

Φυνςτιονς ανδ δεριατιες

Τηε εξπλιςιτ οβθεςτς οφ Λειβνιζ΄ς ςαλςυλυς αρε υσυαλλψ αριαβλε χυαντιτιες. Ωηεν ηε τακες διφφερενςες ορ συμς, ηε τακες διφφερενςες ορ συμς οφ αριαβλε χυαντιτιες. Βυτ τηεσε αριαβλε χυαντιτιες ραρελψ στανδ αλονε. Τηε ωαψ ονε αριαβλε χυαντιτψ αριες υσυαλλψ δεπενδς ον τηε ωαψ οτηερ χυαντιτιες αρψ. Φορ εξαμπλε, τηε ωαψ αν ορδινατε y οφ α ςυρε αριες δεπενδς υπον τηε ωαψ ιτς αβσςισσα, x, αριες. Ιφ τηε αλυε οφ x ις δετερμινεδ, τηεν τηε αλυε οφ y ις αλσο δετερμινεδ. Ιν τηις ςασε τηε ςυρε προιδες υς α κινδ οφ ρυλε ρελατινγ τηε αλυες οφ x το τηε αλυες οφ y. Αλλ ιντερεστινγ αππλιςατιονς οφ τηε ςαλςυλυς δεπενδ υπον ρελατιονς *βετωϵϵν* αριαβλε χυαντιτιες: ωηεν ωε φινδ διφφερενςες ορ συμς οφ α χυαντιτψ y, ωε φινδ τηεμ ιν τερμς οφ σομε οτηερ χυαντιτψ x ον ωηιςη y δεπενδς.

Λατερ ματηεματιςιανς ςαλλεδ ανψ ρυλε ρελατινγ τωο αριαβλε χυαντιτιες, ςονσιδερεδ ας αν οβθεςτ ιν ιτς οων ριγητ, α *φυνςτιον*. Ωε δενοτε α φυνςτιον βψ α σινγλε λεττερ, συςη ας f, ανδ ινδιςατε τηατ f ις τηε ρυλε ρελατινγ x ανδ y βψ ωριτινγ

$$y = f(x),$$

ωηιςη ωε ρεαδ ας 'y εχυαλς f οφ x.' Τηε ρυλε ρεπρεσεντεδ βψ f μαψ ορ μαψ νοτ ςομε φρομ α ςυρε ορ ανψ γεομετρις οβθεςτ. Ιτ σιμπλψ ις α λαω τηατ, φορ ανψ γιεν αλυε οφ x, δετερμινες α σινγλε αλυε οφ y. Ωηεν ωε ωριτε, φορ εξαμπλε,

$$f(x) = x^7 - 3x^3 + 2,$$

ωε νεεδ νοτ τηινκ οφ α ςυρε, βυτ σιμπλψ οφ τηε ωαψ ιν ωηιςη ωε ςαλςυλατε $f(x)$ φορ ανψ γιεν αλυε οφ x.

Ιφ y δεπενδς ον x, σο τηατ $y = f(x)$, τηεν τηε ρατιο ωηιςη Λειβνιζ υσες το δεφινε dy, ναμελψ, τηε ρατιο οφ dy το dx ('Α Νεω Μετηοδ,' παγε 25), αλσο δεπενδς ον x, τηατ ις, τηις ρατιο ις α φυνςτιον οφ x. Τηις φυνςτιον ις ςαλλεδ τηε *δεριατιϵ* οφ f ωιτη ρεσπεςτ το x, ανδ ις δενοτεδ βψ f', σο τηατ

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Σομετιμες ονε αλσο δενοτες $f'(x)$ βψ

$$\frac{df}{dx} \text{ ορ } \frac{d}{dx} f(x).$$

Νοτε τηατ $f'(x)$ ις αλωαψς α *φινιτϵ* χυαντιτψ, ανδ νοτ ινφινιτελψ σμαλλ.

Σινςε $f'(x)$ ις ιτσελφ α φυνςτιον οφ x, ωε ςαν τακε ιτς δεριατιε ωιτη ρεσπεςτ το x. Τηις ρεσυλτ ις ςαλλεδ τηε *σϵςονδ δεριατιϵ* οφ f ωιτη ρεσπεςτ το x, ανδ ις δενοτεδ βψ $f''(x)$. Τηατ ις,

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x).$$

Ιφ ωε ωαντ το υσε πυρελψ Λειβνιζιαν νοτατιον, ανδ ωε ασσυμε τηατ dx ις ςονσταντ (ας ωε μαψ αλωαψς δο, σινςε ιτ ις αρβιτραρψ [σεε αλσο π. 70]), τηεν ωε ηαε

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \\ &= \frac{\left(\frac{ddy}{dx}\right)}{dx} && \text{(ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε απλιεδ το } \tfrac{1}{dx}\text{)} \\ &= \frac{ddy}{(dx)^2}. \end{aligned}$$

Τηις ις υσυαλλψ δενοτεδ βψ

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ονε ςαν ςοντινυε τακινγ δεριατιες ινδεφινιτελψ, σο τηατ τηε δεριατιε οφ τηε σεςονδ δεριατιε ις τηε τηιρδ δεριατιε, τηε δεριατιε οφ τηε τηιρδ δεριατιε ις τηε φουρτη δεριατιε, ανδ σο ον.

Φινδινγ δεριατιες ιν φυνςτιοναλ νοτατιον

Τηερε αρε διφφερεντ ωαψς το δενοτε δεριατιες. Φολλοωινγ Λειβνιζ, ωε ηαε φορ τηε μοστ παρτ δενοτεδ τηε διφφερενςε οφ α αριαβλε χυαντιτψ y βψ dy ανδ ιτς δεριατιε ωιτη ρεσπεςτ το x βψ

$$\frac{dy}{dx}.$$

Λειβνιζ εξπρεσσες τηε ρυλες φορ φινδινγ διφφερενςες ιν τηις νοτατιον, ανδ ρυλες φορ δεριατιες εασιλψ φολλοω. Ωε ωιλλ ςαλλ τηις νοτατιον τηε *διφφερεντιαλ νοτατιον*. Βυτ ιφ $y = f(x)$, ωε μαψ αλσο δενοτε τηε δεριατιε οφ y ωιτη ρεσπεςτ το x βψ

$$f'(x).$$

Τηε ρυλες φορ δεριατιες ςαν οφ ςουρσε αλσο βε εξπρεσσεδ ιν τηις νοτατιον. Ωε ωιλλ ςαλλ τηις τηε *φυνςτιοναλ νοτατιον* φορ δεριατιες.

Τηεσε τωο νοτατιονς αρε υσεφυλ ιν διφφερεντ ωαψς. Τηε διφφερεντιαλ νοτατιον ρεφερς μορε διρεςτλψ το τηε χυαντιτιες y ανδ x, ανδ λετς υς εξπρεσς τηε ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες ορ διφφερεντιαλς dy ανδ dx. Τηε φυνςτιοναλ νοτατιον ρεφερς μορε διρεςτλψ το τηε ρελατιονς f βετωεεν τηε χυαντιτιες, ανδ μορε ςλεαρλψ εξπρεσσες τηατ τηε δεριατιε f' οφ α φυνςτιον ις τηε σαμε κινδ οφ τηινγ ας τηε οριγιναλ φυνςτιον f. Λατερ αυτηορς μακε φρεχυεντ υσε οφ βοτη νοτατιονς. Αλλ τηε ρυλες φορ φινδινγ δεριατιες αρε εχυιαλεντ ιν τηε τωο νοτατιονς, βυτ σινςε τηε φυνςτιοναλ νοτατιον ηας ατ λεαστ α διφφερεντ λοοκ ανδ φεελ τηαν τηε διφφερεντιαλ νοτατιον, ωε ηερε τρψ το σκετςη τηε ρυλες φορ δεριατιες ιν ιτ.

δνσιδερ, φορ εξαμπλε, τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε. Ιν διφφερεντιαλ νοτατιον, ιτ ις

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

τηατ ις, τηε διφφερενςε οφ α προδυςτ οφ τωο χυαντιτιες ις εχυαλ το τηε φιρστ χυαντιτψ τιμες τηε διφφερενςε οφ τηε σεςονδ πλυς τηε σεςονδ χυαντιτψ τιμες τηε διφφερενςε οφ τηε φιρστ. Ιφ u ανδ v αρε βοτη φυνςτιονς οφ x, ωε ςαν μακε τηις α ρυλε φορ δεριατιες βψ διδινγ βοτη σιδες βψ dx το γετ

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx},$$

τηατ ις, τηε δεριατιε οφ α προδυςτ οφ τωο χυαντιτιες ις εχυαλ το τηε φιρστ χυαντιτψ τιμες τηε δεριατιε οφ τηε σεςονδ χυαντιτψ πλυς τηε σεςονδ χυαντιτψ τιμες τηε δεριατιε οφ τηε φιρστ. Νοω ιφ $u = f(x)$, ανδ $v = g(x)$, τηεν ωε ςαν εξπρεσς τηις ιν τηε φυνςτιοναλ νοτατιον βψ

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x),$$

τηατ ις, τηε δεριατιε οφ α προδυςτ οφ τωο φυνςτιονς ις εχυαλ το τηε φιρστ φυνςτιον τιμες τηε δεριατιε οφ τηε σεςονδ πλυς τηε σεςονδ φυνςτιον τιμες τηε δεριατιε οφ τηε φιρστ.

Προβλεμ 1

Φινδ τηε ρυλες φορ δεριατιες ςορρεσπονδινγ το τηε ςονσταντ ρυλε, ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε, αδδιτιον ρυλε, διισιον ρυλε, ανδ ποωερ ρυλε. Εξπρεσς εαςη οφ τηεσε ιν φυνςτιοναλ νοτατιον.

Εξαμπλε

Λετ $f(x) = \sin x$ ανδ $g(x) = e^x$. Συπποσε ωε ωαντ το φινδ $(fg)'(x)$. Τηεν, αςςορδινγ το τηε μυλτιπλιςατιον ρυλε,

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Νοω

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d(\sin x)}{dx} \\ &= \frac{\cos x\,dx}{dx} \\ &= \cos x, \end{aligned}$$

ανδ

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d(e^x)}{dx} \\ &= \frac{e^x\,dx}{dx} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Τηερεφορε,

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \\ &= (\sin x)\,e^x + e^x\,\cos x. \end{aligned}$$

Τηε μετηοδ οφ συβστιτυτιον ανδ τηε ςηαιν ρυλε

Ωηεν φινδινγ δεριατιες, ωε οφτεν ηαε το συβστιτυτε νεω αριαβλες. Τηις λοοκς σομεωηατ διφφερεντ ωηεν πυτ ιντο τηε λανγυαγε οφ δεριατιες. Φορ εξαμπλε, ιφ $y = \sin(x^2)$ ανδ ωε ωαντ το φινδ dy ιν τερμς οφ x ανδ dx. Λετ $x^2 = v$, τηεν

$$\begin{aligned} dy &= (\cos v)\, dv \\ &= (\cos v)\, d(x^2) \\ &= (\cos v)\, 2x\, dx \end{aligned}$$

Νοω ωε ςαννοτ δο τηε σαμε τηινγ ιν φυνςτιοναλ νοτατιον, σινςε τηερε ις νο ωαψ το εξπρεσς dv ιν ιτ. Βυτ ιφ ωε διιδε βοτη σιδες οφ τηε φιναλ εξπρεσσιον βψ dx, ωε ωιλλ ηαε αν εχυατιον φορ α δεριατιε, ωιτηουτ ανψ ινφινιτελψ σμαλλ διφφερενςες ον τηειρ οων:

$$\frac{dy}{dx} = (\cos v)\, 2x.$$

Τηε ριγητ ηανδ σιδε ηας τωο φαςτορς: $\cos v$ ανδ $2x$. Τηε φιρστ φαςτορ, $\cos v$, ις εχυαλ το $\frac{dy}{dv}$. Τηε σεςονδ φαςτορ, $2x$, ις εχυαλ το $\frac{dv}{dx}$. Σο ιν τηις ςασε ωε ηαε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Τηις ις αλωαψς τρυε, νο ματτερ ωηατ y ανδ v αρε. Ιτ ις αν αλγεβραις στατεμεντ οφ τηε *ςηαιν ρυλϵ*.

Τηε ςηαιν ρυλε ςαν βε εξπρεσσεδ ιν φυνςτιοναλ νοτατιον, ωιτηουτ ανψ d'ς. Το δο τηις, ωε φιρστ νεεδ το ιντροδυςε τηε νοτιον οφ α ςομποσιτε φυνςτιον. ὂνσιδερ αγαιν τηε εξαμπλε αβοε, $y = \sin(x^2)$. Τηεν ωε ςαν ωριτε $y = h(x)$, σινςε y δεπενδς ον x. Βυτ ωε ςαν αλσο ωριτε $y = f(v)$, ωηερε $v = x^2$, ανδ $f(v) = \sin v$, ανδ ωε ςαν λετ $g(x) = x^2$, σο τηατ $v = g(x)$. Τηεν, ιν τηις νοτατιον, $y = f(v) = f(g(x))$. Τηυς y ις εχυαλ το τωο διφφερεντ εξπρεσσιονς ιν φυνςτιοναλ νοτατιον:

1. $h(x)$, ανδ
2. $f(g(x))$.

Τηις φαςτ ις εξπρεσσεδ βψ ωριτινγ $h = f \circ g$. Τηε φυνςτιον h ις τηεν ςαλλεδ τηε *ςομποσιτϵ* οφ τηε φυνςτιονς f ανδ g. Ωε γετ φρομ x το y βψ φιρστ υσινγ τηε φυνςτιον g το γο φρομ x το v, ανδ τηεν υσινγ τηε φυνςτιον f το γετ φρομ v το y. Φορ ανοτηερ εξαμπλε οφ α ςομποσιτε φυνςτιον, ςονσιδερ τηε φυνςτιον h ωηερε

$$y = h(x) = (x^3 + 3x)^{11}.$$

Λετ $v = x^3 + 3x$ ανδ $f(v) = v^{11}$. Τηεν $y = f(v)$. Λετ $g(x) = x^3 + 3x$. Τηεν $v = g(x)$ ανδ $y = f(v) = f(g(x))$. Τηερεφορε $h(x) = f(g(x))$ ανδ $h = f \circ g$.

Το ρετυρν το τηε ςηαιν ρυλε, ωε συπποσε ιν γενεραλ τηατ h ις α φυνςτιον ςομποσεδ οφ f ανδ g, σο τηατ $h(x) = f(g(x))$. Τηεν ιφ $y = h(x)$ ανδ $v = g(x)$, $y = f(v)$, ανδ

$$\frac{dy}{dx} = h'(x),\ \frac{dy}{dv} = f'(v), \text{ ανδ } \frac{dv}{dx} = g'(x),$$

ανδ τηε ςηαιν ρυλε βεςομες

$$h'(x) = f'(v) \cdot g'(x),$$

τηατ ις

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Πυτ ιντο ωορδς, τηε ςηαιν ρυλε σαψς τηατ ιφ y ις α ςομποσιτε φυνςτιον, τηατ ις, ιφ y ις α φυνςτιον οφ v ωηιςη ις α φυνςτιον οφ x, τηεν τηε δεριατιε οφ y ωιτη ρεσπεςτ το x εχυαλς τηε δεριατιε οφ y ωιτη ρεσπεςτ το v τιμες τηε δεριατιε οφ v ωιτη ρεσπεςτ το x. Ωε ςουλδ αλσο σαψ τηατ τηε δεριατιε οφ τηε ωηολε ςομποσιτε φυνςτιον ις τηε δεριατιε οφ τηε ‘ουτσιδε’ τιμες τηε δεριατιε οφ τηε ‘ινσιδε·’ ιν τηε εξαμπλε, τηε δεριατιε οφ $\sin(x^2)$ ις τηε δεριατιε οφ $\sin()$ (τηε ‘ουτσιδε¨’) τιμες τηε δεριατιε οφ x^2 (τηε ‘ινσιδε¨’).

Λετ υς νοω γο τηρουγη τηε εξαμπλε υσινγ τηε ςηαιν ρυλε ινστεαδ οφ συβστιτυτιον. Αγαιν, $y = h(x) = \sin(x^2) = f(g(x))$, ωηερε $f(v) = \sin v$ ανδ $g(x) = x^2$. Ωε ωαντ το φινδ $h'(x)$. Αςςορδινγ το τηε ςηαιν ρυλε,

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ιν τηις ςασε $f'(v) = \cos v = \cos(g(x)) = \cos(x^2)$ ανδ $g'(x) = 2x$, ανδ τηερεφορε, αςςορδινγ το τηε ςηαιν ρυλε,

$$h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Τηε ςηαιν ρυλε ςαν βε δεμονστρατεδ υσινγ τηε φυνςτιοναλ νοτατιον, ωιτηουτ εερ υσινγ ινφινιτελψ σμαλλ διφφερενςες. Τηε δεμονστρατιον ις βεψονδ τηε σςοπε οφ τηις νοτε, βυτ ψου ςαν φινδ ιτ ιν μανψ ιντροδυςτορψ ςαλςυλυς βοοκς. Οφ ςουρσε, ιφ ψου αρε τηινκινγ ιν διφφερενςες το βεγιν ωιτη, τηεν τηε ςηαιν ρυλε ις χυιτε οβιουσλψ τρυε υσινγ σιμπλε αλγεβρα:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

σινςε ωε ςαν σιμπλψ ςανςελ τηε dv'ς ον τηε ριγητ σιδε οφ τηις εχυατιον το γετ τηε λεφτ σιδε.

Προβλεμς

Φορ εαςη οφ τηε φολλοωινγ φυνςτιονς $f(x)$, φινδ $f'(x)$. Υσε φυνςτιοναλ νοτατιον ας μυςη ας ποσσιβλε, ανδ αοιδ ινφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες

2. $f(x) = (x^2 + 3)^{17}$.
3. $f(x) = \cos(x)e^{3x}$.
4. $f(x) = 2\cos(5x + 4)$.
5. $f(x) = A\sin(kx + \alpha)$, ωηερε A, k, ανδ α αρε αρβιτραρψ ςονσταντς.

Φυνςτιονς οφ μορε τηαν ονε αριαβλε ανδ παρτιαλ δεριατιες

Ονε αριαβλε χυαντιτψ μαψ δεπενδ ον μορε τηαν ονε οτηερ αριαβλε χυαντιτψ. Φορ εξαμπλε, τηε χυαντιτψ

$$v = 2xy + 3x$$

δεπενδς ον βοτη x ανδ y: φορ ανψ γιεν παιρ οφ αλυες φορ x ανδ y, τηερε ις α σινγλε αλυε οφ v. Τηε ρυλε ρελατινγ v το x ανδ y ις α φυνςτιον οφ μορε τηαν ονε αριαβλε. Ωε δενοτε φυνςτιονς οφ μορε τηαν ονε αριαβλε βψ α σινγλε λεττερ, συςη ας f, ανδ εξπρεσς τηε φαςτ τηατ α χυαντιτψ v δεπενδς ον τωο οτηερ χυαντιτιες x ανδ y βψ ωριτινγ

$$v = f(x, y).$$

Ιφ v δεπενδς ον τηρεε αριαβλες, x, y, ανδ z, ωε ωουλδ λικεωισε ωριτε

$$v = f(x, y, z),$$

ανδ σο ον.

Ιτ ις οφτεν υσεφυλ το φινδ τηε ινφινιτελψ σμαλλ ινςρεμεντς οφ α χυαντιτψ τηατ δεπενδς ον σεεραλ διφφερεντ αριαβλες. Εαςη ινφινιτελψ σμαλλ ινςρεμεντ οφ α χυαντιτψ ις α διφφερενςε, βυτ νοω, βεςαυσε τηε χυαντιτψ δοες νοτ δεπενδ ον α σινγλε αριαβλε, τηερε ις νο υναμβιγυους ωαψ το ρεφερ το *τηϵ* διφφερενςε οφ v. Φορ ιφ v δεπενδς ον x ανδ y, τηεν δεπενδινγ ον ηοω x ανδ y αρψ, v αριες ιν διφφερεντ ωαψς. Φορ εξαμπλε, ιφ ωε ηολδ y ςονσταντ ανδ λετ ονλψ x αρψ βψ αν ινφινιτελψ σμαλλ αμουντ dx, τηεν ωε ωιλλ γετ ονε αλυε οφ dv, ωηιλε ιφ ωε ηολδ x ςονσταντ ανδ λετ y αρψ βψ αν ινφινιτελψ σμαλλ αμουντ dy, τηεν ωε ωιλλ ιν γενεραλ γετ α διφφερεντ αλυε φορ dv. Ανδ ιφ ωε ηολδ νειτηερ x νορ y ςονσταντ βυτ λετ εαςη οφ τηεμ ςηανγε βψ α διφφερεντ ινφινιτελψ σμαλλ αμουντ, ωε ωιλλ γετ στιλλ ανοτηερ αλυε φορ dv. Ιν φαςτ, dv ις ιν γενεραλ ιτσελφ α φυνςτιον οφ dx ανδ dy ας ωελλ ας x ανδ y. Ιφ $v = f(x, y)$ ις α φυνςτιον οφ x ανδ y, τηεν

$$dv = g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy,$$

ωηερε g ανδ h αρε σομε φυνςτιονς οφ x ανδ y. Τηε φυνςτιον g ις ςαλλεδ τηε *παρτιαλ δεριατιϵ* οφ f ωιτη ρεσπεςτ το x, ωηιλε τηε φυνςτιον h ις ςαλλεδ τηε *παρτιαλ δεριατιϵ* οφ f ωιτη ρεσπεςτ το y. Τηεσε δεριατιες αρε ςαλλεδ παρτιαλ βεςαυσε τηεψ εαςη ονλψ εξπρεσς παρτ οφ τηε ςηανγε ιν v ας x ανδ y ςηανγε. Νοτε τηατ ιφ ωε σετ y ςονσταντ ανδ λετ ονλψ x αρψ, τηεν $dy = 0$ ανδ

$$dv = g(x,y)\,dx,$$

σο τηατ

$$g(x,y) = \frac{dv}{dx}.$$

Σινςε dv ις νοτ ανψ ποσσιβλε αλυε οφ dv, βυτ ονλψ τηατ αλυε οφ dv ωηιςη αρισες φρομ αρψινγ x βυτ νοτ y, τηερε αρε σπεςιαλ νοτατιονς φορ τηε παρτιαλ δεριατιε:

$$g(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

(σο τηατ $g = \dfrac{\partial f}{\partial x}$). Λικεωισε

$$h(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

ις τηε παρτιαλ δεριατιε οφ $v = f(x,y)$ ωιτη ρεσπεςτ το y (σο τηατ $h = \dfrac{\partial f}{\partial y}$). Τηυς τηε ςομπλετε διφφερεντιαλ dv, εξπρεσσεδ ιν τερμς οφ παρτιαλ δεριατιες, ις

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy.$$

Φορ εξαμπλε, λετ $v = f(x,y) = 2xy + 3x$. Τηεν

$$\begin{aligned} dv &= d(2xy + 3x) \\ &= 2\,d(xy) + 3\,dx \\ &= 2\,(x\,dy + y\,dx) + 3\,dx \\ &= (3 + 2y)\,dx + 2x\,dy. \end{aligned}$$

Τηε παρτιαλ δεριατιε οφ v ωιτη ρεσπεςτ το x ις τηε ςοεφφιςιεντ οφ dx ιν τηε ςομπλετε διφφερεντιαλ dv, τηατ ις

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 + 2y.$$

Λικεωισε, τηε ςοεφφιςιεντ οφ dy ιν τηε ςομπλετε διφφερεντιαλ dv ις τηε παρτιαλ δεριατιε οφ v ωιτη ρεσπεςτ y

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x.$$

Το φινδ παρτιαλ δεριατιες, ωε δο νοτ νεεδ το φινδ φιρστ τηε ςομπλετε διφφερεντιαλ dv. Φορ εξαμπλε, ιφ $v = 2xy + 3x$, ανδ ωε ωαντ το φινδ $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, ωε ςαν τρεατ y ας α ςονσταντ ανδ τακε τηε δεριατιε ωιτη ρεσπεςτ το x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{dv}{dx} && \text{(ωηερε } y \text{ ις ςονσταντ)} \\ &= y\frac{d(2x)}{dx} + 3\frac{dx}{dx} \\ &= 2y + 3. \end{aligned}$$

Λικεωισε, το φινδ $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, ωε ςαν τρεατ x ας α ςονσταντ ανδ τακε α δεριατιε ωιτη ρεσπεςτ το y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{dv}{dy} && \text{(ωηερε } x \text{ ις ςονσταντ)}\\ &= 2x\frac{dy}{dy} + \frac{d(3x)}{dy}\\ &= 2x + 0.\end{aligned}$$

Προβλεμς

Φορ εαςη οφ τηε φολλοωινγ φυνςτιονς $f(x, y)$, φινδ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ανδ $\frac{\partial f}{\partial y}$.

6. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$.
7. $f(x, y) = 2y^2 + 3xy - 5x^2 + 2y$.
8. $f(x, y) = \sin(x - 2y)$
9. $f(x, y) = e^{(x-2y)}$
10. $f(x, y) = \Phi(x - 2y)$, ωηερε Φ ις ανψ φυνςτιον οφ ονε αριαβλε. Ψουρ ανσωερ σηουλδ βε εξπρεσσεδ ιν τερμς οφ τηε δεριατιε Φ' οφ Φ.

ἇλςυλυς ανδ Νεωτονιαν Πηψσιςς

Ιν τηε πρεφαςε το ηις *Ματηεματιςαλ Πρινςιπλες οφ Νατυραλ Πηιλοσοπηψ*, Νεωτον ωριτες τηατ ‘τηε ωηολε διφφιςυλτψ οφ πηιλοσοπηψ σεεμς το βε το δισςοερ τηε φορςες οφ νατυρε φρομ τηε πηενομενα οφ μοτιονς ανδ τηεν το δεμονστρατε οτηερ πηενομενα φρομ τηεσε φορςες.’ Τηε ςαλςυλυς ςαν ηελπ σολε τηις διφφιςυλτψ.

ἔλοςιτψ ανδ φορςε

Νεωτον΄ς λαως αρε λαως οφ ελοςιτψ ανδ φορςε. ἔλοςιτψ ανδ φορςε ςαν εασιλψ βε εξπρεσσεδ βψ τηε ςαλςυλυς. Συπποσε τηατ α βοδψ A ις μοινγ αλονγ α στραιγητ λινε AB, ανδ τηατ B ις α φιξεδ ποιντ. Λετ τηε αριαβλε διστανςε AB βε δενοτεδ βψ s, ανδ λετ τιμε βε δενοτεδ βψ t. Τηε διστανςε s ις α φυνςτιον οφ t. Ιφ ιν αν ινςρεμεντ οφ τιμε dt τηε βοδψ μοες φρομ A το A_1, τηεν $ds = AA_1$, ανδ τηε αεραγε ελοςιτψ οφ τηε βοδψ δυρινγ τηις τιμε ωιλλ βε τηε διστανςε ιτ τραελς (ds) διιδεδ βψ τηε τιμε (dt) ιτ τακες το τραελ τηις διστανςε. Τηατ ις, τηε αεραγε ελοςιτψ ωιλλ βε

$$\frac{ds}{dt}.$$

Νοω ιφ τηε τιμε dt ις ερψ σμαλλ, τηε ελοςιτψ ωιλλ νοτ ςηανγε ερψ μυςη δυρινγ τηις τιμε. Ανδ ιφ τηε τιμε ις ινφινιτελψ σμαλλ, τηεν τηε ςηανγε ιν ελοςιτψ δυρινγ τηις τιμε ωιλλ βε νεγλιγιβλε. Τηερεφορε ιν τηις ςασε, τηε αεραγε ελοςιτψ ωιλλ βε τηε ινσταντανεους ελοςιτψ. Ιφ ωε δενοτε τηις ελοςιτψ βψ v, ωε τηεν ηαε

$$v = \frac{ds}{dt},$$

τηατ ις, τηε ελοςιτψ οφ τηε βοδψ ις εχυαλ το τηε δεριατιε οφ ιτς διστανςε ωιτη ρεσπεςτ το τιμε.

Νεωτον΄ς σεςονδ λαω ασσερτς ιν τηις ςασε τηατ ςηανγε οφ μοτιον ις προπορτιοναλ το μοτιε φορςε ιμπρεσσεδ. Αςςορδινγ το ηις σεςονδ δεφινιτιον, χυαντιτψ οφ μοτιον ις τηε προδυςτ οφ χυαντιτψ οφ ματτερ ανδ ελοςιτψ. Ιφ ωε δενοτε τηε χυαντιτψ οφ ματτερ (νοω υσυαλλψ ςαλλεδ *μασς*) βψ m, τηε χυαντιτψ οφ μοτιον ωιλλ βε mv. Φορςε ις τηερεφορε προπορτιοναλ το τηε ςηανγε ιν mv. Νοω ιτ ις ςλεαρ φρομ ωηατ Νεωτον ωριτες λατερ ιν τηε *Πρινςιπια* τηατ ιν τηε σεςονδ λαω ηε ασσυμες τηατ τηε τιμε ις φιξεδ. Ιφ ωε λετ τιμε αρψ, τηεν τηε ςηανγε ιν μοτιον ις προπορτιοναλ το βοτη τηε φορςε ανδ τηε τιμε, σο τηατ, φορ εξαμπλε, ιφ ωε λετ α ςονσταντ φορςε αςτ φορ τωιςε τηε τιμε, ωε ωιλλ γετ τωιςε τηε ςηανγε οφ μοτιον. Νοω ιν γενεραλ α φορςε ις νοτ ςονσταντ. Βυτ ιφ ωε τακε α σμαλλ τιμε ιντεραλ dt, τηεν τηε φορςε ωιλλ ςηανγε ερψ λιττλε δυρινγ τηις τιμε, ανδ ιφ ωε τακε αν ινφινιτελψ σμαλλ τιμε ιντεραλ dt, ωε ςαν ασσυμε α φορςε ις ςονσταντ. Ιν τηατ ςασε, ιφ ωε λετ F δενοτε τηε φορςε, ανδ λετ dt δενοτε τηε τιμε ιν ωηιςη ιτ αςτς, ωε ςαν εξπρεσς τηε προπορτιοναλιτψ οφ ςηανγε οφ μοτιον το φορςε ανδ τιμε βψ

$$d(mv) \propto F dt,$$

ορ (σινςε m ις ςονσταντ)

$$m\,dv \propto F dt,$$

ορ (διιδινγ βψ dt)

$$m\frac{dv}{dt} \propto F.$$

Ωε ςαν ςηοοσε ουρ υνιτς οφ φορςε σο τηατ τηις προπορτιον βεςομες αν εχυατιον, σο τηατ

$$m\frac{dv}{dt} = F.$$

Ιν ωορδς, τηε φορςε ις εχυαλ το τηε χυαντιτψ οφ ματτερ (ορ μασς) τιμες τηε δεριατιε οφ ελοςιτψ ωιτη ρεσπεςτ το τιμε. Τηε δεριατιε οφ ελοςιτψ ωιτη ρεσπεςτ το τιμε ις υσυαλλψ ςαλλεδ τηε αςςελερατιον, ανδ ις δενοτεδ βψ a. Ωε τηερεφορε ηαε

$$F = ma,$$

τηατ ις, φορςε ις εχυαλ το μασς τιμες αςςελερατιον.

Νοτε τηατ σινςε αςςελερατιον ις τηε δεριατιε οφ ελοςιτψ, ωηιςη ις ιτσελφ α δεριατιε οφ διστανςε, αςςελερατιον ις τηε σεςονδ δεριατιε οφ διστανςε ωιτη ρεσπεςτ το τιμε:

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d^2 s}{dt^2}. \end{aligned}$$

Τηε πηενομενον ανδ φορςε οφ ονε φαλλινγ βοδψ

Το βεγιν το υνδερστανδ ηοω τηε ςαλςυλυς ςαν ηελπ υς σολε Νεωτον΄ς προβλεμ ανδ λετ υς μοε φρομ πηενομενον το φορςε ανδ βαςκ φρομ φορςε το πηενομενον, ωε ωιλλ φιρστ ςονσιδερ α σιμπλε εξαμπλε: α σινγλε φαλλινγ βοδψ. Συπποσε ωε λιφτ τηε βοδψ A το τηε φιξεδ ποιντ B ανδ δροπ ιτ. Λετ τηε τιμε t βε εχυαλ το 0 ατ τηε μομεντ ωε ρελεασε τηε βοδψ, ανδ αγαιν λετ $s = AB$. Ας ωε σαω ιν λαβ, τηε διστανςε τηε βοδψ φαλλς ις ας τηε σχυαρε οφ τηε τιμε, σο τηατ

$$s = kt^2,$$

ωηερε k ις σομε ςονσταντ. Τηις ις α σιμπλε πηψσιςαλ πηενομενον: τηε διστανςε οφ φαλλ αππεαρς το δεπενδ ον τιμε ιν α ςερταιν ωαψ. Ωε ωιλλ φιρστ ασκ ωηατ τηε φορςε μυστ βε τηατ ςορρεσπονδς το τηις πηενομενον, ανδ τηεν, ονςε ωε ηαε φουνδ τηις φορςε, τρψ το τυρν αρουνδ ανδ σεε ιφ ωε ςαν δεμονστρατε τηε οριγιναλ πηενομενον φρομ τηις φορςε.

Φρομ πηενομενον το φορςε

Φολλοωινγ Νεωτον, ωε σηουλδ τρψ το ‘δισςοερ τηε φορςες οφ νατυρε φρομ τηε πηενομενα.’ Το δο τηις, ωε υσε τηε σεςονδ λαω, $F = ma$. Νοω αςςελερατιον a ις εχυαλ το τηε δεριατιε οφ v ωιτη ρεσπεςτ το t, σο ιτ ηελπς το φινδ v φιρστ. Ιν φαςτ

$$\begin{aligned}
v &= \frac{ds}{dt} \\
&= \frac{d(kt^2)}{dt} \\
&= k\frac{d(t^2)}{dt} && \text{(ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε)} \\
&= k\frac{2t\,dt}{dt} && \text{(ποωερ ρυλε)} \\
&= 2kt.
\end{aligned}$$

Ωε ςαν υσε τηις εξπρεσσιον φορ v το φινδ αν εξπρεσσιον φορ a.

$$\begin{aligned}
a &= \frac{dv}{dt} \\
&= \frac{d(2kt)}{dt} \\
&= \frac{2k\,dt}{dt} && \text{(ςονσταντ μυλτιπλε ρυλε)} \\
&= 2k.
\end{aligned}$$

Τηερεφορε αςςελερατιον ις ςονσταντ, ανδ

$$F = ma = 2km$$

ις αλσο ςονσταντ. Ωε ηαε τηυς γονε φρομ α πηενομενον οφ νατυρε το α φορςε βψ τακινγ δεριατιες. Χ.Ε.Φ.

Φρομ φορςε το πηενομενον

ὂνερσελψ, συπποσε ωε αρε νοτ γιεν α πηενομενον, βυτ αρε γιεν α φορςε. Ιν παρτιςυλαρ, συπποσε τηατ ωε αρε γιεν τηατ τηε φορςε αςτινγ ον τηε βοδψ B ις ςονσταντ ανδ αςτς στραιγητ δοων. Τηεν, σινςε $F = ma$, ανδ m ις ςονσταντ, ωε κνοω τηατ τηε αςςελερατιον a μυστ αλσο βε εχυαλ το α ςονσταντ g. Τηις ςονσταντ φορςε ις νοτ α πηενομενον: ωε ςαννοτ διρεςτλψ μεασυρε τηε φορςε οφ α φαλλινγ βοδψ. Βυτ ωε ςαν ασκ ωηατ πηενομενα ςαν βε δεμονστρατεδ φρομ τηις ςονσταντ φορςε. Ιν παρτιςυλαρ, ωε μιγητ ασκ ωηερε τηε βοδψ ωιλλ βε ατ α γιεν τιμε t. Ηερε ωε βεγιν ωιτη τηε διφφερεντιαλ εχυατιον

$$\frac{dv}{dt} = g.$$

Ωε ςαν μυλτιπλψ βοτη σιδες βψ dt το γετ $dv = g\,dt$. Τηις εχυατιον εξπρεσσες τηε φαςτ τηατ αν ινφινιτελψ σμαλλ ινςρεμεντ ιν ελοςιτψ v ις εχυαλ το τηε ρατε οφ ςηανγε οφ ελοςιτψ g τιμες τηε ινφινιτελψ σμαλλ τιμε dt. Ωε τηεν ιντεγρατε (τακε συμς οφ) βοτη σιδες οφ τηις εχυατιον το γετ αν εχυατιον φορ v:

$$\int dv = \int g\,dt.$$

Τηε ιντεγραλ οφ τηε λεφτ σιδε ις v βψ τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ: τηε συμ οφ αλλ τηε ινφινιτελψ σμαλλ ινςρεμεντς οφ ελοςιτψ ις εχυαλ το τηε φιναλ ελοςιτψ. (Νοτε τηατ το αππλψ τηε φυνδαμενταλ τηεορεμ ιν τηις φορμ ωε ηαε υσεδ τηε ασσυμπτιον τηατ $v = 0$ ωηεν $t = 0$: τηε βοδψ σταρτς ουτ ωιτη νο ελοςιτψ.) Τηερεφορε

$$\begin{aligned} v &= \int g\,dt \\ &= g\int dt \\ &= gt \end{aligned}$$

Ιν τηε λαστ στεπ ωε αρε αγαιν υσινγ τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ: τηε συμ οφ αλλ τηε ινφινιτελψ σμαλλ ινςρεμεντς οφ τιμε dt ις εχυαλ το τηε φιναλ τιμε t (ασσυμινγ αγαιν ωε σταρτ ατ τιμε 0).

Ωε ηαε τηυς σηοων τηατ ιφ τηε φορςε ις ςονσταντ, τηεν τηε ελοςιτψ ις προπορτιοναλ το τηε τιμε. Βυτ ελοςιτψ ις αλσο ηαρδ το διρεςτλψ μεασυρε, σο ωε ηαε νοτ ψετ γονε αλλ τηε ωαψ φρομ τηε φορςε το α πηενομενον. Το δο τηις, ωε ηαε το ιντεγρατε ουρ εχυατιον ονε μορε τιμε:

$$\int v\,dt = \int gt\,dt.$$

Τηε χυαντιτψ $v\,dt$ ις τηε προδυςτ οφ τηε ελοςιτψ v ανδ τηε ινφινιτελψ σμαλλ τιμε dt. Δυρινγ τηε ινφινιτελψ σμαλλ τιμε dt ωε μαψ ασσυμε τηε ελοςιτψ v ις ςονσταντ. Ωηεν α βοδψ μοες ωιτη ςονσταντ σπεεδ οερ α τιμε, τηε διστανςε ιτ μοες ις τηε προδυςτ οφ ιτς σπεεδ ανδ τηε τιμε ιν ωηιςη ιτ μοες. Ιν τηις ςασε, τηερεφορε, τηε ινςρεμεντ ds οφ διστανςε s οερ τηε τιμε dt ις εχυαλ το τηε προδυςτ οφ τηε ελοςιτψ v ανδ τηε τιμε dt. Τηερεφορε

$$ds = v\,dt = gt\,dt.$$

Ιντεγρατινγ γιες

$$\int ds = \int v\,dt = \int gt\,dt.$$

Βυτ αςςορδινγ το τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ, $\int ds = s$: τηε συμ οφ τηε ινφινιτελψ σμαλλ ινςρεμεντς οφ διστανςε ις εχυαλ το τηε τοταλ διστανςε τραελεδ.

Τηερεφορε

$$\begin{aligned} s &= \int gt\,dt \\ &= g\int t\,dt \\ &= \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(βψ τηε ποωερ ρυλε φορ ιντεγρατιον).} \end{aligned}$$

Ωε αρε φιναλλψ βαςκ το τηε πηενομενον ωε σταρτεδ ωιτη: διστανςε ις προπορτιοναλ το τηε σχυαρε οφ τιμε. Ωε ηαε τηυς μοεδ φρομ α φορςε το α πηενομενον βψ τακινγ ιντεγραλς. χ.ε.Δ.

Τηε αβοε εξαμπλε οφ τηε φαλλινγ βοδψ ις ρελατιελψ σιμπλε, ανδ ινδεεδ Γαλιλεο τρεατς ιτ ςαρεφυλλψ ωιτηουτ υσινγ ςαλςυλυς ορ Νεωτονιαν πηψσιςς. Βυτ ιν τηις σιμπλε εξαμπλε ωε ηαε α μοδελ φορ ηοω το υσε ςαλςυλυς ον μορε ςομπλιςατεδ προβλεμς. Ωε μαψ βεγιν ωιτη α πηενομενον, εξπρεσσεδ ιν ορδιναρψ εχυατιονς λικε $s = kt^2$. Ωε τηεν ςαν τακε δεριατιες το ςομε το αν εχυατιον φορ φορςε λικε $F = 2km$. Ορ, ςονερσελψ, ωε μαψ βεγιν ωιτη αν εχυατιον φορ φορςε, λικε $F = mg$, ωηερε g ις ςονσταντ. Τηεν ωε ιντεγρατε το γετ βαςκ το α πηενομενον $s = kt^2$.

Προβλεμς

1. Συπποσε νοω τηε βοδψ A δοες νοτ βεγιν ατ ρεστ, βυτ ινστεαδ σταρτς ωιτη αν ινιτιαλ ελοςιτψ οφ τεν μετερς περ σεςονδ δοωνωαρδ ατ τηε ποιντ B ατ τιμε $t = 0$. Αγαιν λετ s βε τηε διστανςε AB. Υσε τηε ςαλςυλυς το σηοω τηατ

   (α) ιφ τηε αςςελερατιον ις εχυαλ το α ςονσταντ $g = 9.8$ μετερς περ σεςονδ περ σεςονδ, τηεν
   $$s = 10t + 4.9t^2, \text{ ανδ}$$

   (β) ιφ $s = 10t + 4.9t^2$, τηεν τηε αςςελερατιον ις εχυαλ το 9.8 μετερς περ σεςονδ περ σεςονδ ανδ τηε ελοςιτψ
   $$v = 10 + 9.8t.$$

2. Συπποσε τηατ τηε βοδψ βεγινς ατ α ποσιτιον 1 μετερ αβοε τηε ποιντ B ωιτη αν υπωαρδ ελοςιτψ οφ 15 μετερς περ σεςονδ. Φινδ αν εχυατιον φορ s ιν τερμς οφ t.

3. Συπποσε τηατ τηε βοδψ βεγινς ατ ρεστ ατ τηε ποιντ B, ας ιν τηε οριγιναλ εξαμπλε, βυτ νοω συπποσε τηατ τηε φορςε ις νοτ ςονσταντ. Ινστεαδ, συπποσε τηατ τηε βοδψ ις αςτεδ ον βψ α φορςε ςαυσινγ α δοωνωαρδ αςςελερατιον
   $$a = 2t + 1.$$
   Φινδ αν εχυατιον φορ s ιν τερμς οφ t.

4. Συπποσε τηατ τηε αςςελερατιον ις γιεν βψ τηε εχυατιον

$$a = \sin t.$$

   (α) Ιφ τηε βοδψ βεγινς ατ τηε ποιντ B ατ ρεστ ατ τιμε $t = 0$, φινδ αν εχυατιον φορ s ιν τερμς οφ t.

   (β) Ιφ τηε βοδψ βεγινς ατ τηε ποιντ B ωιτη α δοωνωαρδ ελοςιτψ οφ 5 μετερς περ σεςονδ, φινδ αν εχυατιον φορ s ιν τερμς οφ t.

5. Μακε ανδ σολε α προβλεμ ινολινγ α βοδψ μοινγ αλονγ α λινε ανδ αςτεδ ον βψ α φορςε.

Προϑεςτιλε μοτιον

Αλλ οφ ουρ εξαμπλες σο φαρ ινολε α σινγλε βοδψ μοινγ αλονγ α στραιγητ λινε. Συςη προβλεμς αρε νοτ ερψ υσεφυλ βψ τηεμσελες. Βυτ ωε ςαν βυιλδ ον τηεμ το μακε μορε ςομπλιςατεδ ανδ ιντερεστινγ προβλεμς. Συπποσε, φορ εξαμπλε, α βοδψ A βεγινς ατ α ποιντ B ωιτη α ηοριζονταλ ελοςιτψ v_0.

Ιφ, ας ιν τηε ςασε οφ α φαλλινγ βοδψ, τηε φορςε ις ςονσταντ ανδ αςτς ιν α δοωνωαρδ διρεςτιον, ωε ςαν υσε τηε ςαλςυλυς το δεμονστρατε τηε πηενομενον ιν τηις νεω ςασε, ας φολλοως.

Ωε βεγιν βψ δραωινγ α ηοριζονταλ λινε BC ανδ α ερτιςαλ λινε BD. Τηεν ωε δροπ περπενδιςυλαρς AC φρομ A το BC ανδ AD φρομ A το BD. Λετ $BC = x$ ανδ $BD = y$. Τηεν τηε ποσιτιον οφ A ις δετερμινεδ βψ τηε αλυες οφ x ανδ y. Τηεσε χυαντιτιες αρε φυνςτιονς οφ τιμε: $x = f(t)$ ανδ $y = h(t)$. Το φινδ ουτ ηοω τηε βοδψ μοες ωε ηαε το φινδ βοτη φυνςτιονς f ανδ h.

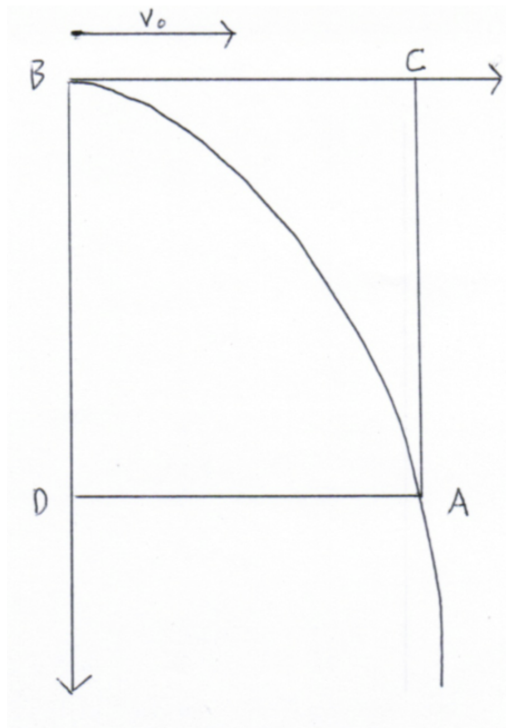
ἔλοςιτψ, λικε ποσιτιον, μυστ νοω βε εξπρεσσεδ βψ τωο αριαβλες. Φορ ωε ςαννοτ σιμπλψ σαψ ηοω φαστ τηε βοδψ ις γοινγ, βυτ μυστ σαψ ωηατ διρεςτιον ιτ ις γοινγ. Ανοτηερ ωαψ το εξπρεσς τηε ελοςιτψ ις βψ λοοκινγ σεπαρατελψ ατ ηοω φαστ ιτ ις μοινγ ηοριζονταλλψ ανδ ηοω φαστ ιτ ις μοινγ ερτιςαλλψ. Το γετ τηε ηοριζονταλ ελοςιτψ, ωε τακε τηε τηε δεριατιε οφ x ωιτη ρεσπεςτ το t,

$$\frac{dx}{dt}$$

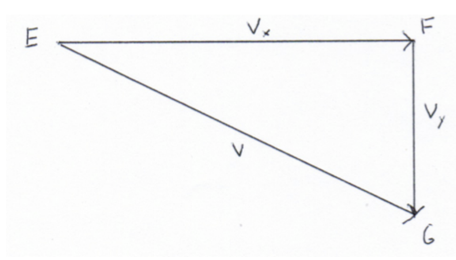
ωηιςη ωε ςαλλ v_x ορ τηε x-ςομπονεντ οφ τηε ελοςιτψ. Σινςε dx εξπρεσσες α ςηανγε ιν x ανδ dt αν ιντεραλ οφ τιμε, $\frac{dx}{dt}$ εξπρεσσες τηε ςηανγε ιν x διδεδ βψ τηε τιμε τηις ςηανγε τακες. Ωε ςουλδ ςαλλ τηις χυοτιεντ τηε *ρατϵ οφ ςηανγϵ* οφ x. Σινςε dx ανδ dt αρε ινφινιτελψ σμαλλ, ωε ςαν ςαλλ ιτ αν *ινσταντανϵους ρατϵ οφ ςηανγϵ*. Ιν φαςτ, τηις ις τρυε οφ ανψ δεριατιε ωιτη ρεσπεςτ το τιμε: φορ ανψ αριαβλε υ, τηε δεριατιε $\frac{du}{dt}$ ις τηε ινσταντανεους ρατε οφ ςηανγε οφ u. Ιν τηις ςασε, τηεν, v_x, τηε ηοριζονταλ ελοςιτψ, ις τηε ινσταντανεους ρατε οφ ςηανγε οφ x. Το γετ τηε ερτιςαλ ελοςιτψ, ωε τακε τηε δεριατιε οφ y ωιτη ρεσπεςτ το t,

$$\frac{dy}{dt},$$

ωηιςη ωε ςαλλ v_y ορ τηε y-ςομπονεντ οφ τηε ελοςιτψ, ανδ ωηιςη ις τηε ινσταντανεους ρατε οφ ςηανγε οφ y. Ιφ ωε κνοω βοτη v_x ανδ v_y, ωε ςαν φινδ τηε σπεεδ



Φιγυρε 1



Φιγυρε 2

ανδ διρεςτιον τηε βοδψ ις μοινγ. Λετ τηε βοδψ μοε α ηοριζονταλ διστανςε EF περ υνιτ τιμε ανδ α ερτιςαλ διστανςε FG περ υνιτ τιμε, σο τηατ EF ις προπορτιοναλ το v_x ανδ FG το v_y. Τηεν τηε βοδψ μυστ μοε τηε τοταλ διστανςε EG περ υνιτ τιμε, σο τηατ τηε βοδψ μοες ιν τηε διρεςτιον οφ EG ανδ EG ις προπορτιοναλ το τηε σπεεδ οφ τηε βοδψ.

Αςςελερατιον, λικε ελοςιτψ, μυστ αλσο βε εξπρεσσεδ βψ τωο αριαβλες. Λετ

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t),$$

ανδ

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = h''(t).$$

Τηεν τηε διρεςτιον ανδ μαγνιτυδε οφ τηε αςςελερατιον οφ τηε βοδψ ις γιεν βψ a_x ανδ a_y.

Τηε φορςε οφ γραιτψ αςτς ονλψ ερτιςαλλψ, νοτ ηοριζονταλλψ, ανδ τηερεφορε ονλψ ςηανγες τηε ερτιςαλ ςομπονεντ v_y οφ τηε ελοςιτψ οφ τηε βοδψ. Ιφ ωε ασσυμε τηατ τηις φορςε ις ςονσταντ, ας φορ φαλλινγ βοδιες, τηεν ιτ φολλοως τηατ τηε ερτιςαλ ςομπονεντ a_y οφ τηε αςςελερατιον ις εχυαλ το α ςονσταντ g, ανδ τηερεφορε

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Ωε ςαν ιντεγρατε τηις εχυατιον τωιςε, ας φορ α φαλλινγ βοδψ, το γετ

$$y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Το φινδ τηε x ςομπονεντ, ωε νοτε τηατ τηε ςομπονεντ v_x οφ τηε ελοςιτψ ιν τηε x-διρεςτιον δοες νοτ ςηανγε, ανδ τηερεφορε v_x ις αλωαψς εχυαλ το v_0, τηε ινιτιαλ ηοριζονταλ ελοςιτψ. Τηερεφορε

$$\frac{dx}{dt} = v_0.$$

Ιντεγρατινγ τηις εχυατιον γιες

$$\int \frac{dx}{dt}dt = \int v_0\, dt.$$

Τηε ιντεγραλ ον τηε λεφτ ηανδ σιδε ις εχυαλ το

$$\int dx = x,$$

βψ τηε φυνδαμενταλ τηεορεμ (σινςε $x = 0$ ατ τιμε $t = 0$). Τηε ιντεγραλ ον τηε ριγητ-ηανδ σιδε ις εχυαλ το $v_0 t$. Τηερεφορε

$$x = v_0 t.$$

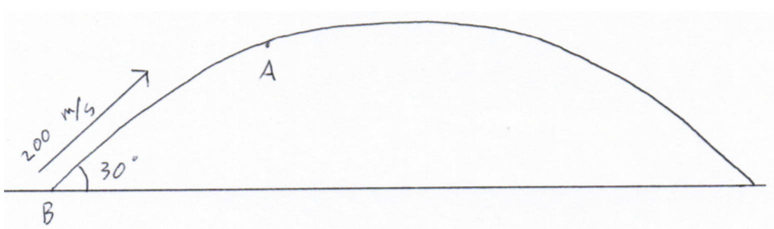
Ωε ηαε τηυς φουνδ εχυατιονς φορ x ανδ y ιν τερμς οφ t ωηιςη δεσςριβε τηε πηενομενον οφ προϑεςτιλε μοτιον.

Το συμμαριζε, ωε ηαε τρεατεδ α ςασε ωηερε τηε ποσιτιον οφ τηε βοδψ ις δετερμινεδ βψ τωο αριαβλες βψ ςηοοσινγ ςοορδινατε αξες ανδ βρεακινγ δοων ποσιτιον, ελοςιτψ, αςςελερατιον, ανδ φορςε εαςη ιντο τηειρ ςομπονεντς ωιτη ρεσπεςτ το τηεσε ςοορδινατε αξες. Ονςε ωε ηαε δονε τηις, ωε ςαν τρεατ εαςη διμενσιον σεπαρατελψ ας α ονε-διμενσιοναλ προβλεμ: ιν τηε ερτιςαλ διμενσιον, ωε ηαε α φαλλινγ βοδψ, ωηιλε ιν τηε ηοριζονταλ διμενσιον ωε ηαε α βοδψ μοινγ ωιτη α φιξεδ ελοςιτψ ωιτη νο φορςες ατ αλλ αςτινγ ον ιτ. Βοτη οφ τηεσε προβλεμς ςαν βε σολεδ αναλψτιςαλλψ βψ ιντεγρατινγ τηε γιεν εχυατιονς.

Προβλεμς

1. Συπποσε τηατ α βοδψ A βεγινς ατ α ποιντ B ωιτη α ηοριζονταλ ελοςιτψ οφ 10 μετερς περ σεςονδ, ανδ α ερτιςαλ ελοςιτψ δοωνωαρδ οφ 5 μετερς περ σεςονδ. Ασσυμε τηε αςςελερατιον οφ γραιτψ ις 9.8 μετερς περ σεςονδ περ σεςονδ. Ωηερε ωιλλ τηε βοδψ βε αφτερ t σεςονδς;

2. Συπποσε α ςαννονβαλλ A (Φιγυρε 3) ις φιρεδ φρομ α γυν ατ ποιντ B ωιτη α σπεεδ οφ 200 μετερς περ σεςονδ ανδ ατ αν ανγλε οφ 30 δεγρεες αβοε ηοριζονταλ. Ιφ ωε νεγλεςτ αιρ ρεσιστανςε, ωηερε ωιλλ τηε ςαννονβαλλ βε ατ τιμε t; Ηοω φαρ αωαψ ωιλλ τηε ςαννονβαλλ λανδ;



Φιγυρε 3

3. Συπποσε νοω τηατ α βοδψ A βεγινς ατ τηε ποιντ B ωιτη α ηοριζονταλ ελοςιτψ οφ 10 μετερς περ σεςονδ ανδ νο ερτιςαλ ελοςιτψ, βυτ τηατ α φορςε αςτς ον A τηατ ηας βοτη α ερτιςαλ ανδ α ηοριζονταλ ςομπονεντ. Λετ τηε ερτιςαλ ςομπονεντ οφ φορςε γιε α ςονσταντ αςςελερατιον οφ 9.8 μετερς περ σεςονδ περ σεςονδ δοωνωαρδ, ανδ λετ τηε ηοριζονταλ ςομπονεντ οφ φορςε γιε α ςονσταντ αςςελερατιον οφ $-\sin t$. Ωηερε ις τηε βοδψ ατ τιμε t;

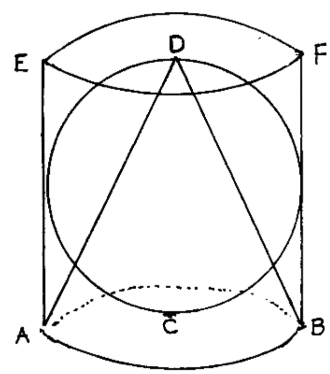
4. Μακε ανδ σολε α προβλεμ ινολινγ α βοδψ ωηοσε μοτιον ις δετερμινεδ βψ τωο αριαβλες.

Ον τηε Τρυε Προπορτιον, Εξπρεσσεδ ιν Ρατιοναλ Νυμβερς, οφ α ῎ιρςλε το α ῎ιρςυμσςριβεδ Σχυαρε.

Νοτε 1, π. 193

βψ Γοττφριεδ Ωιληελμ Λειβνιζ

Γεομετερς ηαε αλωαψς τριεδ το ινεστιγατε τηε προπορτιονς οφ ςυριλινεαρ φιγυρες το ρεςτιλινεαρ φιγυρες, βυτ εεν νοω, αφτερ αππλψινγ αλγεβρα, τηεψ στιλλ ηαε νοτ συςςεεδεδ—ατ λεαστ ωιτη τηε μετηοδς τηεψ ηαε πυβλισηεδ: φορ τηεσε προβλεμς ςαννοτ βε ρεδυςεδ το αλγεβραις εχυατιονς, βυτ τηεψ ηαε ερψ βεαυτιφυλ υσες, εσπεςιαλλψ ιν ρεδυςινγ μεςηανιςς το τερμς οφ πυρε γεομετρψ. Τηοσε ωηο ηαε λοοκεδ μορε δεεπλψ ιντο συςη τηινγς κνοω τηις· φεω ηαε δονε σο, βυτ τηεψ αρε αμονγ τηε μοστ ουτστανδινγ ματηεματιςιανς. Αρςηιμεδες ωας τηε φιρστ, ας φαρ ωε κνοω, το φινδ τηε ρατιο βετωεεν α ςονε, α σπηερε ανδ α ςψλινδερ ωιτη τηε σαμε ηειγητ ανδ βασε—τηις ρατιο ις τηε ρατιο τηατ τηε νυμβερς 1, 2, ανδ 3 ηαε το εαςη οτηερ, σο τηατ τηε ςψλινδερ ις τριπλε τηε ςονε ανδ ονε ανδ α ηαλφ τιμες τηε σπηερε—ανδ τηις ις ωηψ ηε ηαδ α σπηερε ανδ α ςψλινδερ ινσςριβεδ ον ηις τομβ.[1] Ηε αλσο φουνδ τηε χυαδρατυρε οφ τηε παραβολα.[2] Ιν ουρ τιμε α ωαψ

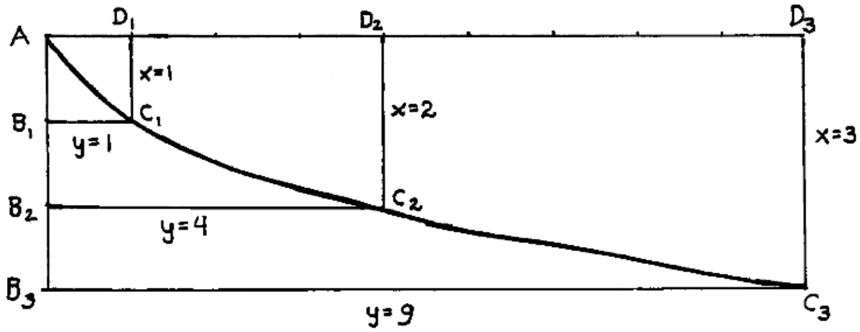


Φιγυρε 1: ουρ φιγυρε, νοτ Λειβνιζ'ς

οφ μεασυρινγ ιννυμεραβλε ςυριλινεαρ φιγυρες ηας βεεν δισςοερεδ, ιν τηε φιρστ πλαςε ωηεν τηε ρατιο οφ τηε ορδινατες BC (Φιγυρε 2) ις οβταινεδ βψ μυλτιπλψινγ ορ συβμυλτιπλψινγ, διρεςτλψ ορ ρεςιπροςαλλψ, τηε ρατιο οφ τηε αβσςισσας AB ορ DC· φορ τηε φιγυρε $ABCA$ ωιλλ βε το τηε ςιρςυμσςριβεδ ρεςτανγλε $ABCD$ ας α υνιτ ις το τηε νυμβερ εξπρεσσινγ τηε μυλτιπλιςιτψ οφ τηε ρατιο, ινςρεασεδ βψ α υνιτ. Φορ εξαμπλε, βεςαυσε ιν τηε παραβολα ωηεν τηε αβσςισσας AB ορ Νοτε 2, π. 193 DC αρε ας τηε νατυραλ νυμβερς, 1, 2, 3, ετς., τηε ορδινατες BC αρε ας τηειρ Νοτε 3, π. 194

[1]Ιν *Ον τηε Σπηερε ανδ τηε ῞ψλινδερ*. Σεε Φιγυρε 1.

[2]Ιν *Ον τηε Χυαδρατυρε οφ τηε Παραβολα*.



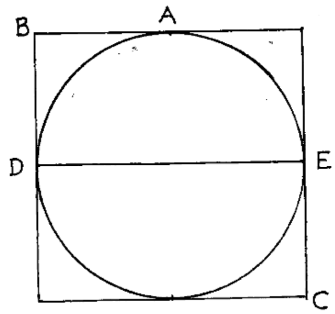
Φιγυρε 2: Λειβνιζ'ς φιγυρε

σχυαρες, 1, 4, 9, ετς., τηατ ις, τηεψ αρε ιν τηε δυπλιςατε ρατιο οφ τηε νυμβερς, ιτ φολλοως τηατ τηε νυμβερ εξπρεσσινγ τηε μυλτιπλιςιτψ οφ τηε ρατιο ωιλλ βε τωο· τηερεφορε τηε φιγυρε $ABCA$ ωιλλ βε το τηε ςιρςυμσςριβεδ ρεςτανγλε $ABCD$ ας 1 ις το $2+1$, ορ ας 1 ις το 3· ιν οτηερ ωορδς τηε φιγυρε ωιλλ βε α τηιρδ οφ τηε Νοτε 4, π. 195 ρεςτανγλε. Ιφ AB ορ CD αρε στιλλ νατυραλ νυμβερς, ανδ τηε BC'ς βεςομε τηε ςυβες 1, 8, 27, ετς. (ιν τηε ςυβις παραβολοιδ), τηε ρατιο οφ τηε ορδινατες ωιλλ βε τηε τριπλιςατε ρατιο οφ τηε αβσςισσας· τηερεφορε τηε φιγυρε ωιλλ βε το τηε ρεςτανγλε ας 1 ις το $3+1$ ορ 4· ιν οτηερ ωορδς τηε φιγυρε ωιλλ βε ονε φουρτη Νοτε 5, π. 195 οφ τηε ρεςτανγλε. Βυτ ιφ τηε DC'ς αρε σχυαρες ανδ τηε BC'ς αρε ςυβες, τηατ ις, ιφ τηε ρατιο οφ τηε BC'ς ις τηε τριπλιςατε ρατιο οφ τηε συβδυπλιςατε ρατιο οφ τηε DCς, τηε φιγυρε (α ςυβιςο-συβχυαδρατις παραβολοιδ) $ABCA$ ωιλλ βε το τηε ρεςτανγλε $ABCD$ ας 1 ις το $\frac{3}{2}+1$· ιν οτηερ ωορδς ιτ ωιλλ μακε υπ τωο φιφτης Νοτε 6, π. 195 οφ τηε ρεςτανγλε. Ιν ρεςιπροςαλς ωε πρεφιξ τηε σιγν '−' (μινυς) το τηε νυμβερ εξπρεσσινγ τηε μυλτιπλιςιτψ οφ τηε ρατιο.

Βυτ υντιλ νοω νο ονε ηας φουνδ α ωαψ το βρινγ τηε ςιρςλε υνδερ συςη λαως, αλτηουγη γεομετερς ηαε τριεδ φορ ας λονγ ας ανψονε ςαν ρεμεμβερ. Φορ νο ονε ηας ψετ βεεν αβλε το φινδ α νυμβερ εξπρεσσινγ τηε ρατιο οφ α ςιρςλε A το α ςιρςυμσςριβεδ σχυαρε BC (τηε σχυαρε ον τηε διαμετερ DE) (Φιγυρε 3). Νορ ηας ανψονε βεεν αβλε το φινδ τηε ρατιο οφ τηε ςιρςυμφερενςε το τηε διαμετερ, α ρατιο τηατ ις ις φουρ τιμες τηε ρατιο οφ τηε ςιρςλε το τηε σχυαρε. Το βε συρε, Αρςημεδες,[3] βψ ινσςριβινγ ανδ ςιρςυμσςριβινγ πολψγονς (σινςε τηε ςιρςλε ις γρεατερ τηαν τηε ινσςριβεδ πολψγονς ανδ λεσς τηαν τηε ςιρςυμσςριβεδ) σηοωεδ α ωαψ το σετ ουτ λιμιτς ιν ωηιςη τηε ςιρςλε φαλλς ορ το φινδ αππροξιματιονς· ιν φαςτ ηε σηοωεδ τηατ τηε ρατιο οφ τηε ςιρςυμφερενςε το τηε διαμετερ ις γρεατερ τηαν 3 το 1 ορ τηαν 21 το 7, ανδ λεσς τηαν 22 το 7. Οτηερς ηαε πυρσυεδ τηις μετηοδ: Πτολεμψ, ῗετε, Μετιυς, ανδ εσπεςιαλλψ Λυδολπη αν ἒυλεν, ωηο σηοωεδ τηε ςιρςυμφερενςε ις το τηε διαμετερ ας 3.14159265358979323846 το 1.00000000000000000000.

Ηοωεερ, αππροξιματιονς οφ τηις σορτ, αλτηουγη υσεφυλ ιν πραςτιςαλ γεομετρψ ωιλλ νοτ σατισφψ α μινδ γρεεδψ φορ τρυτη υντιλ ωε ηαε φουνδ τηε *προγρεσσιον*

[3]Ιν *Ον τηε Μεασυρεμεντ οφ τηε ῗρςλε.*



Φιγυρε 3: Λειβνιζ'ς φιγυρε

οφ συςη ινδεφινιτελψ ςοντινυινγ νυμβερς. Το βε συρε, μανψ ηαε αννουνςεδ α ςομπλετεδ τετραγονισμ, συςη ας ᾶρδιναλ Ὓσα, Οροντιυς Φιναευς, Θοσεπη Σςαλιγερ, Τηομας Γεπηψρανδερ, ανδ Τηομας Ηοββες, βυτ τηεψ ωερε αλλ ωρονγ: φορ τηεψ ωερε ρεφυτεδ βψ τηε ςαλςυλατιονς οφ Αρςημεδες ορ τηοσε τοδαψ οφ Λυδολπη.

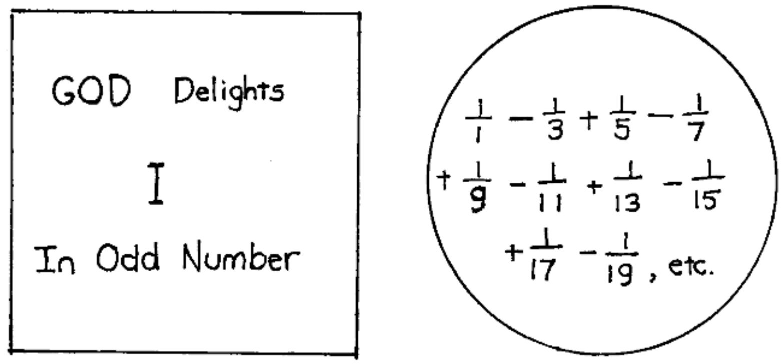
Βυτ σινςε Ι σεε τηατ μανψ ηαε νοτ φυλλψ υνδερστοοδ ωηατ τηεψ αρε λοοκινγ φορ, ωε σηουλδ νοτε τηατ α τετραγονισμ, τηατ ις, α ςονερσιον οφ α ςιρςλε ιντο αν εχυαλ σχυαρε ορ ανοτηερ εχυαλ ρεςτιλινεαλ φιγυρε (α ςονερσιον ωηιςη δεπενδς ον τηε ρατιο οφ α ςιρςλε το τηε σχυαρε ον ιτς διαμετερ, ορ οφ ιτς ςιρςυμφερενςε το ιτς διαμετερ) ςαν βε υνδερστοοδ ιν φουρ ωαψς: ειτηερ τηρουγη α ςαλςυλατιον ορ Νοτε 7, π. 195
τηρουγη α ςονστρυςτιον οφ λινες, ανδ εαςη οφ τηεσε ςαν βε ειτηερ αςςυρατε ορ νεαρλψ σο. Αν αςςυρατε χυαδρατυρε τηρουγη ςαλςυλατιον Ι ςαλλ *αναλψτις*· βυτ ονε δονε τηρουγη αν αςςυρατε ςονστρυςτιον Ι ςαλλ *γεομετρις*· ωε ςαλλ ονε δονε τηρουγη α νεαρλψ αςςυρατε ςαλςυλατιον αν *αππροξιματιον*, ωηιλε ονε δονε τηρουγη α νεαρλψ αςςυρατε ςονστρυςτιον ις α *μεςηανισμ*. Λυδολπη προδυςεδ α ερψ λονγ αππροξιματιον· ἴὲτε, Ηυψγενς ανδ οτηερς ηαε γιεν ουτστανδινγ μεςηανισμς.

Ωε ςαν οβταιν αν *αςςυρατε γεομετρις ςονστρυςτιον*, ωηερεβψ ωε μεασυρε νοτ ονλψ αν εντιρε ςιρςλε, βυτ αλσο αν αρβιτραρψ σεςτορ ορ αρς, βψ α μοτιον τηατ ις ορδερεδ ανδ εξαςτ βυτ φολλοως τρανσςενδεντ ςυρες. (Σομε ηαε ερρονεουσλψ Νοτε 8, π. 196
ςονσιδερεδ τρανσςενδεντ ςυρες το βε μεςηανιςαλ, αλτηουγη ιν φαςτ τηεψ αρε ας γεομετρις ας τηε ςομμον ςυρες, εεν τηουγη τηεψ αρε νοτ αλγεβραις ανδ ςαννοτ βε ρεδυςεδ το εχυατιονς τηατ αρε αλγεβραις ορ οφ α δεφινιτε δεγρεε· φορ τηεψ ηαε τηειρ οων εχυατιονς ωηιςη, αλτηουγη τηεψ αρε νοτ αλγεβραις, αρε νεερτηελεσς αναλψτις. Βυτ ωε ςαννοτ εξπλαιν τηεσε τηινγς ηερε ιν τηε ωαψ τηεψ δεσερε.) *Αναλψτις χυαδρατυρε*, τηατ ις, χυαδρατυρε δονε τηρουγη αςςυρατε ςαλςυλατιον, ςαν αγαιν βε διιδεδ ιντο τηρεε παρτς: ιντο τρανσςενδεντ αναλψτις χυαδρατυρε, αλγεβραις χυαδρατυρε, ανδ αριτημετις χυαδρατυρε. Ωε γετ α *τρανσςενδεντ* αναλψτις χυαδρατυρε βψ μεανς οφ, αμονγ οτηερ τηινγς, εχυατιονς οφ ινδεφινιτε δεγρεε, εχυατιονς ωηιςη νο ονε ηας ψετ ςονσιδερεδ. Φορ εξαμπλε, ιφ $x^x + x$ ις εχυαλ το 30, ανδ ωε αρε λοοκινγ φορ x, ωε ωιλλ φινδ τηατ ιτ ις 3, βεςαυσε $3^3 + 3$ ις $27 + 3$ ορ 30· Ι ωιλλ γιε συςη εχυατιονς φορ α ςιρςλε ιν τηε προπερ πλαςε. Αν *αλγεβραις* εξπρεσσιον ις ονε μαδε υσινγ ςομμον νυμβερς (ποσσιβλψ ιρρατιοναλ) ορ

Νοτε 9, π. 198

ροοτς οφ ςομμον εχυατιονς: συςη αν εξπρεσσιον ις ιν φαςτ ιμποσσιβλε φορ α γενεραλ χυαδρατυρε οφ α ςιρςλε ορ σεςτορ. Τηερε ρεμαινς *αριτημετις χυαδρατυρε*, ωηιςη ις δονε υσινγ σεριες, βψ εξηιβιτινγ τηε εξαςτ αλυε οφ τηε ςιρςλε τηρουγη α προγρεσσιον οφ τερμς, εσπεςιαλλψ ρατιοναλ τερμς. Τηις ις τηε κινδ οφ χυαδρατυρε Ι αμ πρεσεντινγ ηερε.

Αςςορδινγλψ Ι φουνδ τηατ (Φιγυρε 4), ωηεν τηε διαμετερ οφ τηε ςιρςλε ις 1,



Φιγυρε 4: Λειβνιζ΄ς φιγυρε, ινςλυδινγ τηε τεξτ φρομ ΐργιλ΄ς *Εςλογυες*, ῞ΙΙΙ 75

τηε αρεα οφ τηε ςιρςλε ωιλλ βε

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\ \text{ετς.},$$

Νοτε 10, π. 199

ναμελψ τηε εντιρε σχυαρε οφ τηε διαμετερ, αφτερ α τηιρδ οφ ιτ ις τακεν αωαψ (σο τηατ τηε αλυε δοες νοτ βεςομε τοο λαργε), ανδ α φιφτη ις αδδεδ βαςκ (βεςαυσε ωε τοοκ τοο μυςη αωαψ), ανδ α σεεντη ις αγαιν τακεν αωαψ (βεςαυσε ωε ρε-αδδεδ τοο μυςη), ανδ σο ον· ανδ ιν ρελατιον το τηε ςορρεςτ αλυε

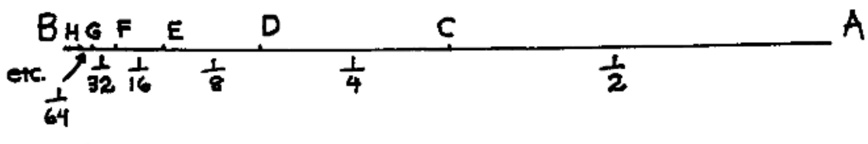
1	ωιλλ βε	γρεατερ,	ψετ ωιτη αν ερρορ λεσς τηαν	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$	....	λεσς,	....	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$	....	γρεατερ,	....	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$	....	λεσς,	....	$\frac{1}{9}$
ετς.				ετς.

Τηερεφορε τηε ωηολε σεριες σιμυλτανεουσλψ ςονταινς αλλ τηε αππροξιματιονς ορ αλυες γρεατερ τηαν ορ λεσς τηαν τηε ςορρεςτ ονε: φορ ιφ ιτ ις ςοντινυεδ φαρ ενουγη τηε ερρορ ωιλλ βε λεσς τηαν α γιεν φραςτιον, ανδ τηυς αλσο λεσς τηαν ανψ γιεν χυαντιτψ. Τηε ωηολε σεριες τηερεφορε εξπρεσσες τηε εξαςτ αλυε. Ανδ αλτηουγη ωε ςαννοτ εξπρεσς τηε συμ οφ τηις σεριες βψ ονε νυμβερ, ανδ τηε σεριες μαψ βε προδυςεδ ινδεφινιτελψ, νεερτηελεσς, βεςαυσε τηε σεριες κεεπς το α σινγλε λαω οφ προγρεσσιον, ωε συφφιςιεντλψ περςειε τηε ωηολε ωιτη ουρ μινδς. Φορ σινςε τηε ςιρςλε ις ινδεεδ ινςομμενσυραβλε ωιτη τηε σχυαρε, ιτ ςαννοτ βε εξπρεσσεδ βψ ονε νυμβερ, βυτ ιτ μυστ βε εξπρεσσεδ ιν ρατιοναλς τηρουγη α σεριες, ϑυστ ας ωε εξπρεσς τηε διαγοναλ οφ α σχυαρε, τηε σεςτιον μαδε βψ αν εξτρεμε ανδ μεαν ρατιο (ωηιςη σομε ςαλλ διινε) ανδ μανψ οτηερ χυαντιτιες τηατ αρε ιρρατιοναλ. Ανδ ινδεεδ, ιφ Λυδολπη ηαδ βεεν αβλε το γιε α ρυλε βψ ωηιςη τηε νυμβερς 3.14159 ετς. μιγητ βε ςοντινυεδ ινδεφινιτελψ, ηε ωουλδ ηαε γιεν υς αν εξαςτ αριτημετις χυαδρατυρε ιν ιντεγερς, α χυαδρατυρε ωηιςη ωε αρε πρεσεντινγ ιν φραςτιονς.

Ηοωεερ το πρεεντ ανψονε ωηο ις λιττλε ερσεδ ιν τηεσε τηινγς φρομ τηινκινγ τηατ α σεριες ςομποσεδ οφ ινφινιτελψ μανψ τερμς ςαννοτ βε εχυαλ το α ςιρςλε, ωηιςη ις α φινιτε χυαντιτψ, ωε σηουλδ νοτε τηατ μανψ σεριες τηατ αρε ινφινιτε ωιτη ρεσπεςτ το τηειρ νυμβερ οφ τερμς αρε φινιτε χυαντιτιες ωιτη ρεσπεςτ το τηειρ συμ. Α ερψ εασψ εξαμπλε ις τηε σεριες οφ τηε δουβλε γεομετρις προγρεσσιον βεγιννινγ φρομ τηε υνιτ ανδ δεςρεασινγ ινδεφινιτελψ,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\ \text{ετς.}$$

Εεν τηουγη ιτ γοες ον ινδεφινιτελψ ιτ νεερτηελεσς μακες νο μορε τηαν 1. Φορ λετ τηε ατταςηεδ στραιγητ λινε AB (Φιγυρε 5) βε 1. Τηεν AC ωιλλ βε $\frac{1}{2}\cdot$ βισεςτινγ



Φιγυρε 5: Λειβνιζ΄ς φιγυρε

τηε ρεμαινδερ (CB) ατ D, ψου ωιλλ ηαε $CD = \frac{1}{4}\cdot$ βισεςτινγ τηε ρεμαινδερ (DB) ατ E, ψου ωιλλ ηαε $DE = \frac{1}{8}\cdot$ βισεςτινγ τηε ρεμαινδερ (EB) ατ F, ψου ωιλλ ηαε $EF = \frac{1}{16}\cdot$ ανδ βψ ςοντινυινγ ενδλεσσλψ ιν τηις ωαψ ψου ωιλλ νεερ γο βεψονδ τηε βουνδαρψ B. Ι σηοωεδ ελσεωηερε τηατ τηε σαμε τηινγ ηαππενς ωιτη τηε φραςτιονς οφ φιγυρατε νυμβερς ορ τηε ηαρμονις τριανγλε.[4]

Ωε δο νοτ ηαε τιμε το σαψ εερψτηινγ τηατ ςουλδ βε σαιδ αβουτ τηις χυαδρατυρε, βυτ ωε σηουλδ νοτ φαιλ το μεντιον τηε φαςτ τηατ τηε τερμς οφ ουρ σεριες $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, ετς. βελονγ το α ηαρμονις προγρεσσιον, τηατ ις, αρε ιν ςοντινυεδ ηαρμονις προπορτιον—τηις ωιλλ βε ςλεαρ το ανψονε ωηο τριες ιτ ουτ· ινδεεδ, τηε σεριες ωε γετ βψ σκιππινγ, Νοτε 11, π. 203

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{17}\ \text{ετς.}$$

ις αλσο τηε σεριες οφ α ηαρμονις προγρεσσιον, ανδ

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{15},\ \frac{1}{19}\ \text{ετς.}$$

[4]Ιν τηε παπερ ‘Αν Αππροαςη το τηε Αριτημετις οφ Ινφινιτες,’ ωριττεν ιν λατε 1672. Σεε Λειβνιζ΄ς *Σäμτλιςηε Σςηριφτεν υνδ Βριεφε* (ὃλλεςτεδ Ωριτινγς ανδ Λεττερς), ιν Σεριες ΙΙΙ, ὃλυμε 1, ον παγες 1–20.

ις λικεωισε α σεριες οφ ηαρμονις προπορτιοναλς. Ανδ σο, σινςε τηε ςιρςλε ις

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}\text{ ετς.}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}-\frac{1}{15}-\frac{1}{19}\text{ ετς.}$$

(συβτραςτινγ τηε λαττερ παρτιαλ σεριες φρομ τηε φορμερ) τηε μαγνιτυδε οφ τηε ςιρςλε ωιλλ βε τηε διφφερενςε οφ τωο σεριες οφ α ηαρμονις προγρεσσιον. Ανδ βεςαυσε τηερε αρε σηορτςυτς το ςομπυτε τηε συμ οφ α ηαρμονις προγρεσσιον ωιτη αν αρβιτραρψ νυμβερ οφ φινιτε τερμς, ιτ φολλοως τηατ ωε ςουλδ ςαλςυλατε ςονςισε αππροξιματιονς (ιφ τηερε ωερε ανψ νεεδ οφ τηεμ αφτερ Λυδολπη).

Ιφ ανψονε σηουλδ ωιση το ρεμοε φρομ ουρ σεριες τηε τερμς αφφεςτεδ βψ τηε σιγν −, τηεν βψ αδδινγ τογετηερ τηε τωο νεαρεστ τερμς, $+\frac{1}{1}$ ανδ $-\frac{1}{3}$, ανδ αλσο $+\frac{1}{5}$ ανδ $-\frac{1}{7}$, $+\frac{1}{9}$ ανδ $-\frac{1}{11}$, $+\frac{1}{13}$ ανδ $-\frac{1}{15}$, $+\frac{1}{17}$ ανδ $-\frac{1}{19}$, ανδ σο ον, ηε ωιλλ γετ α νεω σεριες φορ τηε μαγνιτυδε οφ τηε ςιρςλε, ναμελψ $\frac{2}{3}$ (τηατ ις $+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$) $+\frac{2}{35}$ (τηατ ις $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$) $+\frac{2}{99}$ (τηατ ις $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$), ανδ σο:

Νοτε 12, π. 203 *Ιφ τηϵ αρϵα οφ τηϵ ινσςριβϵδ σχυαρϵ ις $\frac{1}{4}$, τηϵν τηϵ αρϵα οφ τηϵ ςιρςλϵ ωιλλ βϵ $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+\frac{1}{195}+\frac{1}{323}$ ϵτς.*

Νοω τηε νυμβερς 3, 35, 99, 195, 323, ετς. αρε τακεν βψ σκιππινγ τερμς ιν τηε σεριες τηατ ρεσυλτς ωηεν τηε σχυαρε νυμβερς (4, 9, 16, 25, ετς.) αρε αλλ δεςρεασεδ βψ α υνιτ—ναμελψ, ιν τηε σεριες 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143, 168, 195, 224, 255, 288, 323, 360, 399, ετς. Ερψ φουρτη νυμβερ ιν τηις λαττερ σεριες βελονγς το ουρ σεριες. Νοω Ι ηαε φουνδ (α ρεμαρκαβλε φαςτ) τηατ τηε συμ οφ τηε ινφινιτε σεριες

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}\text{ ετς.}$$

Νοτε 13, π. 204 ις $\frac{3}{4}$· Βυτ ιφ ωε τακε τερμς βψ α σιμπλε σκιππινγ, τηατ ις, ιφ ωε τακε

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}\text{ ετς.,}$$

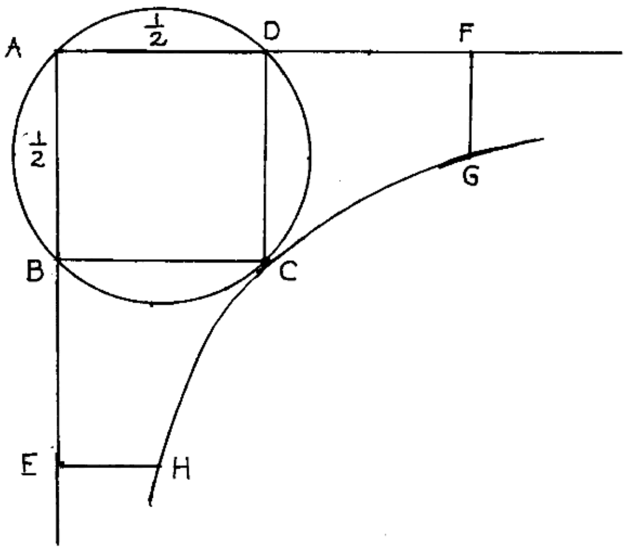
Νοτε 14, π. 205 τηεν τηε συμ οφ τηις ινφινιτε σεριες μακες $\frac{2}{4}$ ορ $\frac{1}{2}$. Ανδ ιφ ωε αγαιν τακε τερμς φρομ τηε λαττερ σεριες βψ σιμπλε σκιππινγ, τηατ ις, ιφ ωε τακε

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}\text{ ετς.,}$$

τηεν τηε συμ οφ τηις σεριες ωιλλ βε α σεμιςιρςλε, ιφ ωε συπποσε τηατ τηε σχυαρε οφ ιτς διαμετερ ις 1. Μορεοερ, σινςε ωε γρασπ τηε *αριτημϵτις χυαδρατυρϵ οφ τηϵ ηψπϵρβολα* ιν τηε σαμε ωαψ, ιτ σεεμς φιττινγ τηατ τηε ωηολε ηαρμονψ βε πλαςεδ βεφορε ουρ εψες ιν τηε φολλοωινγ ταβλε:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256		
0	3	8	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168	195	224	255		
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{143}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{195}$	$\frac{1}{224}$	$\frac{1}{255}$	ετς. εχυαλς	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{3}$	.	$\frac{1}{15}$	.	$\frac{1}{35}$	.	$\frac{1}{63}$	.	$\frac{1}{99}$	.	$\frac{1}{143}$	.	$\frac{1}{195}$	.	$\frac{1}{255}$	ετς. εχυαλς	$\frac{2}{4}$
	.	$\frac{1}{8}$	.	$\frac{1}{24}$	.	$\frac{1}{48}$	.	$\frac{1}{80}$	.	$\frac{1}{120}$	.	$\frac{1}{168}$	.	$\frac{1}{224}$	.	ετς. εχυαλς	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{3}$	.	.	.	$\frac{1}{35}$	.	.	.	$\frac{1}{99}$	.	.	.	$\frac{1}{195}$	.	.	ετς. εχυαλς	ςιρςλε $ABCD$
	.	$\frac{1}{8}$	.	.	.	$\frac{1}{48}$	.	.	.	$\frac{1}{120}$	.	.	.	$\frac{1}{224}$	.	ετς. εχυαλς	φιγυρε $CBEHC$

Ιν Φιγυρε 6 λετ α ηψπερβολις ςυρε GCH βε δεσςριβεδ, ηαινγ περπενδιςυλαρ



Φιγυρε 6: Λειβνιζ΄ς φιγυρε

ασψμπτοτες AF ανδ AE, ανδ ερτεξ C· λετ τηε ινσςριβεδ ποωερ οφ τηε ηψπερβολα (τηατ ις, τηε σχυαρε τηατ ις αλωαψς εχυαλ το τηε ρεςτανγλε φορμεδ βψ ανψ ορδινατε EH ον ιτς οων αβσςισσα AE) βε $ABCD$· λετ α ςιρςλε βε δεσςριβεδ Νοτε 15, π. 206 αβουτ τηις σχυαρε, ανδ συπποσε τηατ τηε ηψπερβολα ηας βεεν ςοντινυεδ φαρ ενουγη, φρομ C το H, σο τηατ AE ις τωιςε AB. Τηεν ιφ ωε συπποσε τηατ AE ις α υνιτ, AB ωιλλ βε $\frac{1}{2}$, ιτς σχυαρε $ABCD$ ωιλλ βε $\frac{1}{4}$, ανδ τηε ςιρςλε ωησε ινσςριβεδ ποωερ ις $ABCD$ ωιλλ βε

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} \text{ ετς.},$$

ωηιλε τηε πορτιον $CBEHC$ οφ τηε ηψπερβολα (ωησε ινσςριβεδ ποωερ ις τηε σαμε σχυαρε, $\frac{1}{4}$), ωηιςη ρεπρεσεντς τηε λογαριτημ οφ τηε ρατιο οφ AE το AB (α τωο το ονε ρατιο), ωιλλ βε

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120} \text{ ετς.}$$ Νοτε 16, π. 206

Νοτες ον Λειβνιζ΄ς ‘Ον τηε Τρυε Προπορτιον.’

Λειβνιζ πυβλισηεδ τηις παπερ ιν τηε *Αςτς οφ τηε Ερυδιτε* ιν Φεβρυαρψ οφ 1682, μορε τηαν τωο ψεαρς βεφορε ‘Α Νεω Μετηοδ.’ Τηε παπερ ις ωριττεν ιν Λατιν, ανδ ωε ηαε τρανσλατεδ ιτ φρομ Γερηαρδτ΄ς εδιτιον, ὅλυμε ῞, παγες 118–122.

Νοτε 1

Τηις ις τηε φιρστ παπερ Λειβνιζ πυβλισηεδ ιν τηε *Αςτς*· ιτ αππεαρεδ βεφορε ‘Ον Φινδινγ Μεασυρεμεντς οφ Φιγυρεσ¨, ‘Α Νεω Μετηοδ¨, ανδ ‘Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ¨. Ιν ιτ, Λειβνιζ γιες α ωαψ το σχυαρε α ςιρςλε, τηατ ις, το φινδ τηε αρεα οφ α ςιρςλε, βυτ ηε δοες νοτ γιε α δεμονστρατιον. Ωε ηαε πλαςεδ ‘Ον τηε Τρυε Προπορτιον’ ηερε, αφτερ ‘Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ¨, βεςαυσε τηε μετηοδς οφ ‘Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ’ αλλοω υς το δεμονστρατε εασιλψ Λειβνιζ΄ς σχυαρινγ οφ τηε ςιρςλε ιν ‘Ον τηε Τρυε Προπορτιον¨.

Λειβνιζ αλμοστ εντιρελψ αοιδς τηε ςαλςυλυς, ανδ εεν αλγεβρα, ιν τηις παπερ. Ηε ηαδ αλρεαδψ ιντενσιελψ δεελοπεδ τηε ςαλςυλυς, ανδ τηε νεω τηεορεμ ηε αννουνςες ηερε φολλοως νατυραλλψ φρομ ηις ωορκ ον τηε ςαλςυλυς, βυτ ηε αππαρεντλψ τηουγητ ιτ ωουλδ βε βεττερ το φιρστ αννουνςε ηις ωορκ βψ τρψινγ το υσε τηε λανγυαγε οφ ςλασσιςαλ γεομετρψ ανδ αριτημετις ας φαρ ας ποσσιβλε. Φορ υς, ωηο ηαε στυδιεδ αλγεβρα ανδ τηε ςαλςυλυς, ιτ ωιλλ βε εασιερ ατ τιμες το εξπρεσς ωηατ ηε σαψς ιν τερμς οφ αλγεβρα, ανδ τηε νοτες τρψ το δο τηατ ωηεν ιτ ις αππροπριατε.

Νοτε 2

Ιν τερμς τηε ςαλςυλυς, τηις αμουντς το σαψινγ τηατ, φορ ανψ n,

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1},$$

α φορμυλα ωε αλρεαδψ δεμονστρατεδ (ατ λεαστ φορ ποσιτιε n) ιν εξαμπλε 3 ον παγε 141 οφ ουρ νοτες ον ‘Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ¨.

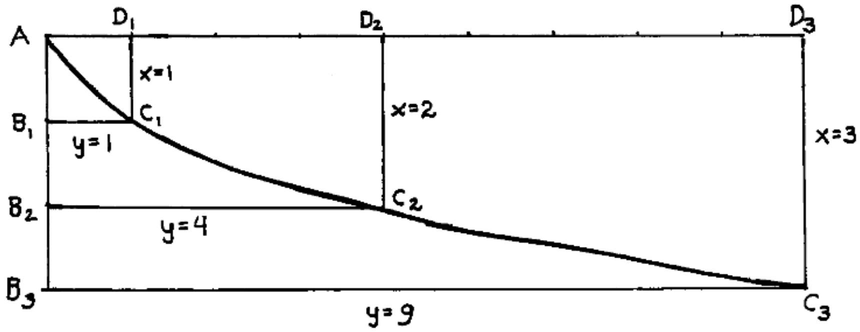
Λειβνιζ εξπρεσσες ημσελφ οβσςυρελψ ηερε βεςαυσε ηε αοιδς υσινγ αλγεβρα. Ωε ωιλλ τρανσλατε ωηατ ηε ηας το σαψ ιντο αλγεβρα ανδ τηε ςαλςυλυς. Λετ τηε αβσςισσας DC (Φιγυρε 7) εχυαλ x, ανδ τηε ορδινατες $AD(= BC)$ εχυαλ y. Τηεν το σαψ τηατ ‘τηε ρατιο οφ τηε ορδινατες BC ις οβταινεδ βψ μυλτιπλψινγ ορ συβμυλτιπλψινγ, διρεςτλψ ορ ρεςιπροςαλλψ, τηε ρατιο οφ τηε αβσςισσας AB ορ DC’ αμουντς το σαψινγ τηατ τηερε ις αν εχυατιον

$$y = x^n$$

φορ σομε n.

Νοω φιγυρε $ABCA$ ις εχυαλ το

$$\int y \, dx = \int x^n \, dx,$$



Φιγυρε 7

ανδ ας ωε σαω ιν εξαμπλε 3 ον παγε 141 οφ ουρ νοτες ον ‘Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ¨,

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}.$$

Τηε ςιρςυμσςριβεδ ρεςτανγλε $ABCD$ ις εχυαλ το

$$AB \times BC = xy = x\,x^n = x^{(n+1)}.$$

Τηερεφορε τηε ρατιο οφ φιγυρε $ABCA$ το τηε ςιρςυμσςριβεδ ρεςτανγλε $ABCD$ ις

$$\begin{aligned} \frac{ABCA}{ABCD} &= \frac{\left(\frac{x^{(n+1)}}{n+1}\right)}{x^{(n+1)}} \\ &= \frac{1}{n+1}; \end{aligned}$$

βυτ n ις ‘τηε νυμβερ εξπρεσσινγ τηε μυλτιπλιςιτψ οφ τηε ρατιο’ (τηατ ις, τηε μυλτιπλιςιτψ οφ τηε ρατιο οφ τηε αβσςισσας ωιτη ρεσπεςτ το τηε ρατιο οφ τηε ορδινατες), σο τηατ $n+1$ ις ‘τηε νυμβερ εξπρεσσινγ τηε μυλτιπλιςιτψ οφ τηε ρατιο, ινςρεασεδ βψ α υνιτ,’ ανδ τηερεφορε τηε ρατιο οφ φιγυρε $ABCA$ το ρεςτανγλε $ABCD$ ις τηε σαμε ας τηε ρατιο οφ τηε υνιτ (1) το ‘τηε νυμβερ εξπρεσσινγ τηε μυλτιπλιςιτψ οφ τηε ρατιο, ινςρεασεδ βψ α υνιτ’ $(n+1)$.

Νοτε 3

Λειβνιζ ηερε υσες ηις τερμς διφφερεντλψ φρομ Απολλονιυς. Ιν Απολλονιυσ’ *δνιςς* (Προπ. Ι 20), τηε αβσςισσας οφ α παραβολα αρε ιν τηε δυπλιςατε ρατιο οφ τηε ορδινατες, ωηιλε φορ Λειβνιζ τηε ορδινατες αρε ιν τηε δυπλιςατε ρατιο οφ τηε αβσςισσας.

Νοτε 4

Ιν τερμς οφ τηε ςαλςυλυς, ιφ

$$y = x^2,$$

τηεν

$$\text{φιγυρε } ABCA : \text{ρεςτανγλε AB῝Δ} :: \left(\int x^2\,dx\right) : x^3 :: 1:3.$$

Νοτε 5

Ιν τερμς οφ τηε ςαλςυλυς, ιφ

$$y = x^3,$$

τηεν

$$\text{φιγυρε } ABCA : \text{ρεςτανγλε AB῝Δ} :: \left(\int x^3\,dx\right) : x^4 :: 1:4.$$

Νοτε 6

Ιν τερμς οφ τηε ςαλςυλυς, ιφ

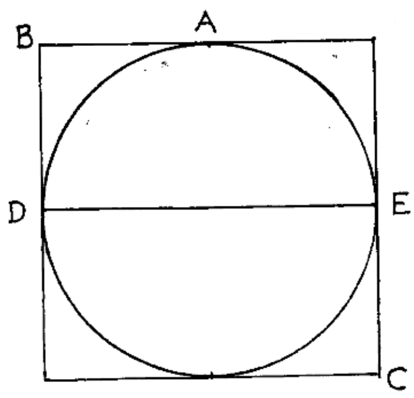
$$y = x^{\frac{3}{2}},$$

τηεν

$$\text{φιγυρε } ABCA : \text{ρεςτανγλε AB῝Δ} :: \left(\int x^{\frac{3}{2}}\,dx\right) : x^{\frac{5}{2}} :: 1:\frac{5}{2} :: 2:5.$$

Νοτε 7

Λειβνιζ σαψς τηατ ωε αρε λοοκινγ φορ α ςονερσιον οφ α ςιρςλε ιντο αν εχυαλ σχυαρε. Λετ ADE (Φιγυρε 8) βε ουρ γιεν ςιρςλε, ανδ συπποσε ωε αρε λοοκινγ



Φιγυρε 8

φορ α σχυαρε FG εχυαλ το ADE. Συπποσε τηατ τηε διαμετερ DE οφ τηε γιεν ςιρςλε ις α υνιτ. Λετ υς δενοτε βψ π τηε ρατιο οφ τηε ςιρςυμφερενςε οφ α ςιρςλε το ιτς διαμετερ, σο τηατ ιν τηις ςασε τηε ςιρςυμφερενςε οφ ADE ις εχυαλ το π. (Ηερε ωε αρε σιμπλψ υσινγ τηε σψμβολ π ας α σηορτηανδ φορ τηε ρατιο οφ τηε ςιρςυμφερενςε οφ α ςιρςλε το ιτς ραδιυς, ανδ αρε νοτ ασσυμινγ τηατ ωε ηαε φουνδ τηις ρατιο.) Ιτ φολλοως φρομ Αρςημεδεσ' *Μεασυρεμεντ οφ α ῒρςλε* (ινςλυδεδ ας σεςτιον 12) τηατ τηε αρεα οφ τηε ςιρςλε ADE ις εχυαλ το

$$\frac{\pi}{4}.$$

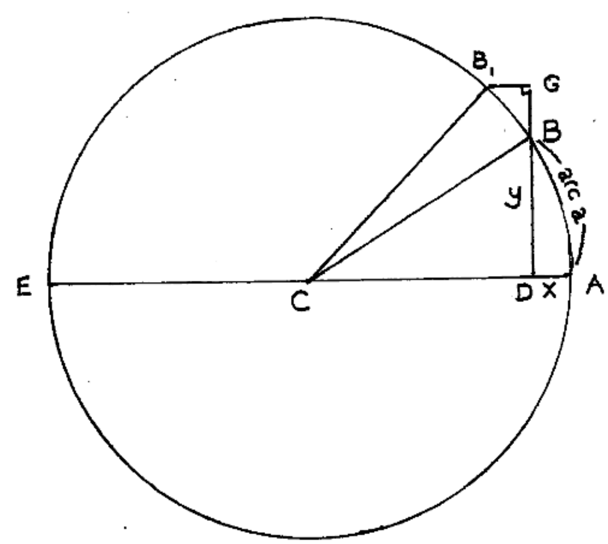
Τηερεφορε τηε αρεα οφ τηε σχυαρε FG μυστ αλσο βε

$$\frac{\pi}{4}.$$

Τηερεφορε, ιφ ωε ςαν φινδ π, τηε ρατιο οφ α ςιρςυμφερενςε οφ α ςιρςλε το ιτς διαμετερ, ωε ςαν φινδ FG ανδ σχυαρε τηε ςιρςλε.

Νοτε 8

Τηε τρανσςενδεντ ςυρε ιν χυεστιον ις τηε σινε ςυρε. Ας ωε σαω ιν τηε νοτες (παγες 147–149) το 'Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ̈, ιφ ωε αρε γιεν α ςιρςλε ABE (σεε Φιγυρε 9), ανδ ωε λετ αρς AB βε εχυαλ το a ανδ DB βε εχυαλ το y, τηεν τηε



Φιγυρε 9

σινε ςυρε ις τηε ςυρε (σεε Φιγυρε 25, παγε 153) ωησε αβσςισσας FM αρε εχυαλ το a ανδ ωησε ορδινατες LM αρε εχυαλ το y.

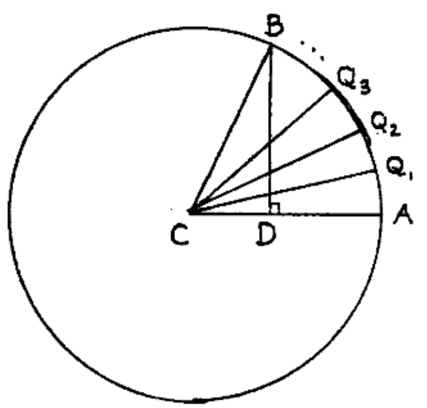
Γιεν α ποιντ B ον τηε ςιρςλε, ωε ςαν υσε τηε σινε ςυρε το φινδ τηε λενγτη οφ τηε αρς AB (ιν Φιγυρε 9), ας φολλοως. Φιρστ, δροπ α περπενδιςυλαρ BD φρομ B το CA. ῝ηοοσε α ποιντ P ον KF σο τηατ

$$FP = BD.$$

Εξτενδ PL παραλλελ το FH υντιλ ιτ μεετς τηε σινε ςυρε ατ L. Φιναλλψ, δροπ LM περπενδιςυλαρ το FH. Τηε λινε $FM = a$ ωιλλ τηεν βε εχυαλ το αρς AB, σινςε $LM = FP$ ις εχυαλ το τηε ςορρεσπονδινγ σινε $DB = y$. Τηε σινε ςυρε τηυς γιες υς αν 'αςςυρατε γεομετρις ςονστρυςτιον' οφ αν αρβιτραρψ *αρς* οφ α ςιρςλε. Ιν παρτιςυλαρ, ωηεν B μοες αλλ τηε ωαψ αρουνδ τηε ςιρςλε ανδ βαςκ το A, τηε ωηολε ςιρςυμφερενςε οφ τηε ςιρςλε βεςομες εχυαλ το FH.

Το σεε ηοω τηε σινε ςυρε αλσο γιες υς α ςονστρυςτιον το μεασυρε αν αρβιτραρψ *σεςτορ* οφ α ςιρςλε, ωε νεεδ τηε φολλοωινγ τηεορεμ, ωηιςη ρελατες αρςς ανδ σεςτορς:

Τηεορεμ Φορ ανψ γιεν αρς $AB = a$ (σεε Φιγυρε 10), ιφ τηε ραδιυς



Φιγυρε 10

οφ τηε ςιρςλε $CA = r$, τηεν

$$\text{σεςτορ } BCA = \frac{1}{2} ra.$$

Δεμονστρατιον Ωε ςηοοσε ινφινιτελψ μανψ ποιντς Q_1, Q_2, ετς., αλονγ αρς AB, τηεν τηε ωηολε αρεα AB ις εχυαλ το

$$\text{σεςτορ } ACQ_1 + \text{σεςτορ } Q_1CQ_2 + \text{σεςτορ } Q_2CQ_3 + \text{ετς.}$$

Νοω σινςε τηε ποιντς A ανδ Q_1 αρε ινφινιτελψ ςλοσε το εαςη οτηερ,

$$\begin{aligned}\text{σεςτορ } ACQ_1 &= \text{τριανγλε } ACQ_1,\\ \text{σεςτορ } Q_1CQ_2 &= \text{τριανγλε } Q_1CQ_2,\end{aligned}$$

ετς., ανδ τηε ηειγητ οφ εαςη οφ τηεσε τριανγλες ις εχυαλ το τηε ραδιυς οφ τηε ςιρςλε. Τηερεφορε

$$\begin{aligned}
\text{σεςτορ } ACQ_1 = \text{τρι } ACQ_1 &= \frac{1}{2}(AC \times AQ_1) = \frac{1}{2}r(AQ_1) \\
\text{σεςτορ } Q_1CQ_2 = \text{τρι } Q_1CQ_2 &= \frac{1}{2}(Q_1C \times Q_1Q_2) = \frac{1}{2}r(Q_1Q_2),
\end{aligned}$$

ετς. Τηερεφορε

$$\begin{aligned}
\text{σεςτορ A˘B} &= \text{τρι } ACQ_1 + \text{τρι } Q_1CQ_2 + \text{τρι } Q_2CQ_3 + \text{ετς.} \\
&= \frac{1}{2}r(AQ_1) + \frac{1}{2}r(Q_1Q_2) + \frac{1}{2}r(Q_2Q_3) + \text{ετς.} \\
&= \frac{1}{2}r(AQ_1 + Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + \text{ετς.}) \\
&= \frac{1}{2}r(\text{αρς } AB) \\
&= \frac{1}{2}ra.
\end{aligned}$$

χ.ε.Δ.

Ιτ φολλοως φρομ τηε τηεορεμ τηατ ονςε ωε ηαε φουνδ α μεασυρεμεντ a φορ αρς AB, ωε ςαν φινδ α μεασυρεμεντ φορ τηε αρεα οφ σεςτορ ACB βψ μυλτιπλψινγ a βψ $\frac{1}{2}r$, τηατ ις, βψ τακινγ τηε ρεςτανγλε ον a ανδ $\frac{1}{2}r$. Τηερεφορε, βεςαυσε τηε σινε ςυρε γιες υς αν αςςυρατε γεομετρις ςονστρυςτιον το μεασυρε a, ιτ αλσο γιες υς αν αςςυρατε γεομετρις ςονστρυςτιον το μεασυρε τηε σεςτορ ACB. Ιν παρτιςυλαρ, τηε αρεα οφ τηε ωηολε ςιρςλε ις εχυαλ το τηε ωηολε ςιρςυμφερενςε (FH) τιμες ονε ηαλφ τηε ραδιυς.

Νοτε 9

Ηερε ις α ρεδυςτιο αργυμεντ το σηοω τηατ α γενεραλ αλγεβραις χυαδρατυρε οφ ςιρςλε ορ σεςτορ ις ιμποσσιβλε. Συπποσε τηερε ωερε συςη α χυαδρατυρε. Τηεν τηερε ωουλδ βε αν αλγεβραις εχυατιον ρελατινγ τηε αρεα

$$\frac{1}{2}ra$$

οφ αν αρβιτραρψ σεςτορ BCA οφ α ςιρςλε AB (σεε Φιγυρε 10) το τηε ορδινατε

$$BD$$

οφ τηε ποιντ B. Νοω

$$BD = \sin a,$$

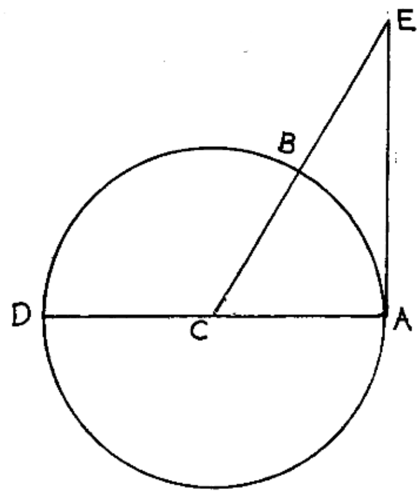
ανδ τηερεφορε αν αλγεβραις εχυατιον ρελατινγ BD ανδ

$$\frac{1}{2}ra$$

ωουλδ αλσο γιε υς αν αλγεβραις εχυατιον ρελατινγ a ανδ $\sin a$, τηατ ις, αν αλγεβραις εχυατιον φορ τηε σινε ςυρε. Βυτ ωε σηοωεδ αβοε, ιν τηε νοτες το ‘Ον Ρεςονδιτε Γεομετρψ’ (παγε 149), τηατ τηε σινε ςυρε ις τρανσςενδεντ, τηατ ις, τηατ ιτ ηας νο αλγεβραις εχυατιον. Τηερεφορε τηερε ις νο γενεραλ αλγεβραις χυαδρατυρε οφ α ςιρςλε ορ σεςτορ, ϑυστ ας Λειβνιζ σαψς.

Νοτε 10

Ωε ωιλλ φινδ τηε αρεα οφ τηε ωηολε ςιρςλε βψ φινδινγ ιτς ςιρςυμφερενςε, ανδ υσινγ τηε τηεορεμ ιν Νοτε 8 (παγε 197). Το φινδ ιτς ςιρςυμφερενςε ωε ωιλλ φινδ α γενεραλ εξπρεσσιον ρελατινγ τηε λενγτη οφ ανψ αρς το α ςορρεσπονδινγ τανγεντ. Σεε Φιγυρε 11. ABD ις α ςιρςλε ωηοσε ςεντερ ις C ανδ ωηοσε διαμετερ DA ις



Φιγυρε 11

2. (Ωε ηαε δουβλεδ τηε διαμετερ το μακε τηε ςαλςυλατιονς εασιερ. Τηε ρεσυλτινγ ςιρςλε ις φουρ τιμες ας λαργε ας τηε ονε Λειβνιζ ςονσιδερς.) CB ις αν αρβιτραρψ ραδιυς οφ τηε ςιρςλε, ανδ AE ις α τανγεντ τηατ μεετς CB εξτενδεδ ατ E. Λετ $EA = z$ ανδ

$$\text{αρς } AB = \angle BCA = a.$$

Τηεν

$$\begin{aligned} z &= EA \\ &= \frac{EA}{CA} \\ &= \tan a \end{aligned}$$

Της ις αν εξπρεσσιον φορ z ιν τερμς οφ a. Βυτ ωε ωαντ το φινδ αν εξπρεσσιον φορ a ιν τερμς οφ z, σο τηατ ωε μαψ φινδ τηε αρεα ιν τερμς οφ τηε τανγεντ. Ωε ωιλλ δο τηις ιν τωο στεπς:

1. ωε φιρστ φινδ διφφερενςες οφ βοτη σιδες οφ τηις εχυατιον, γιινγ υς α διφφερεντιαλ εχυατιον, ανδ σολε τηις εχυατιον φορ da· ανδ

2. ωε σιμπλιφψ τηις εχυατιον φυρτηερ υντιλ ωε γετ ιτ ιντο α φορμ ιν ωηιςη ωε ςαν εασιλψ φινδ συμς ανδ σολε φορ a βψ υσινγ τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ· τηε σολυτιον ωιλλ βε αν ορδιναρψ (νοτ διφφερεντιαλ) εχυατιον φορ a, τηατ ις, ονε τηατ δοες νοτ εξπλιςιτλψ ινολε διφφερενςες ορ συμς.

Ηερε ις τηε δεμονστρατιον:

1. *Φινδινγ da υσινγ ουρ ρυλες φορ τηε ςαλςυλυς:*

$$
\begin{aligned}
dz &= d\tan a \\
&= d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) \\
&= \frac{(\cos a)(d\sin a)-(\sin a)(d\cos a)}{\cos^2 a} && \text{(δισιον ρυλε)} \\
&= \frac{(\cos a)(\cos a\,da)-(\sin a)(-\sin a\,da)}{\cos^2 a} && \text{(Νοτες, παγε 150)} \\
&= \frac{(\cos^2 a+\sin^2 a)\,da}{\cos^2 a} \\
&= \frac{1}{\cos^2 a}\,da \\
&= \frac{1}{\left(\frac{CA}{CE}\right)^2}\,da \\
&= \left(\frac{CE}{CA}\right)^2 da \\
&= \frac{EA^2+AC^2}{CA^2}\,da \\
&= \frac{1+z^2}{1^2}\,da \\
&= (1+z^2)\,da
\end{aligned}
$$

Τηερεφορε

$$da = \frac{1}{1+z^2}\,dz.$$

2. *Σολινγ φορ a.* Ιφ ωε φινδ συμς οφ βοτη σιδες οφ τηις διφφερεντιαλ εχυατιον ανδ υσε τηε φιρστ φυνδαμενταλ τηεορεμ, ωε γετ αν εχυατιον φορ a:

$$a \;\; = \;\; \int \frac{1}{1+z^2}\, dz. \tag{1}$$

Βυτ τηις ις στιλλ α διφφερεντιαλ εχυατιον (ιτ ινολες dz) υντιλ ωε ςαν εαλυατε τηε συμ ον τηε ριγητ. Το δο τηις ωε νεεδ το σιμπλιφψ ιτ φυρτηερ. Ωε υσε τηε φολλοωινγ Λεμμα:

Λεμμα: Φορ ανψ ποσιτιε χυαντιτψ u, ιφ $u < 1$, τηεν

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 \text{ ετς.}$$

Δεμονστρατιον:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + u - u + u^2 - u^2 + u^3 - u^3 + u^4 \text{ ετς.} \\ &= (1+u) - (u+u^2) + (u^2+u^3) - (u^3+u^4) \text{ ετς.} \\ &= (1+u)(1) - (1+u)u + (1+u)u^2 - (1+u)u^3 \text{ ετς.} \\ &= (1+u)(1 - u + u^2 - u^3 \text{ ετς.}) \end{aligned}$$

Τηερεφορε

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 \text{ ετς.}$$

χ.ε.δ.

(Ωε ασσυμεδ τηατ $u < 1$ σο τηατ $1 - u + u^2 - u^3$ ετς. ωουλδ βε α φινιτε συμ. Ιφ u ις εχυαλ το ορ γρεατερ τηαν 1, τηεν τηε συμ ις υνδεφινεδ.)

Νοω ιφ ωε ασσυμε τηατ αρς a ις λεσς τηαν ονε ειγητη οφ τηε ςιρςυμφερενςε οφ τηε ςιρςλε, τηατ ις, τηατ

$$a < \frac{\pi}{4},$$

τηεν ιτ φολλοως τηατ

$$AE < CA,$$

ανδ τηερεφορε (σινςε $AE = z$ ανδ $CA = 1$)

$$z < 1,$$

ανδ τηερεφορε

$$z^2 < 1.$$

Ωε μαψ τηερεφορε υσε τηε Λεμμα, συβστιτυτινγ z^2 φορ u, το τρανσφορμ τηε συμ ον τηε ριγητ οφ εχυατιον 1 (παγε 201) ιντο α συμ ωε ςαν εασιλψ εαλυατε:

$$
\begin{aligned}
a &= \int\left(\frac{1}{1+z^2}\,dz\right)\\
&= \int\left((1-(z^2)+(z^2)^2-(z^2)^3+\text{ ετς.})\,dz\right)\\
&= \int\left(1-z^2+z^4-z^6\text{ ετς.}\,dz\right)\\
&= \int 1\,dz-\int z^2\,dz+\int z^4\,dz-\int z^6\,dz+\text{ ετς.}\\
&= z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}\text{ ετς.}
\end{aligned}
$$

Τηις εχυατιον ηολδς φορ ανψ αλυε οφ a λεσς τηαν $\frac{\pi}{4}$, τηατ ις, ονε ειγητη οφ τηε ςιρςυμφερενςε οφ τηε ςιρςλε· ανδ ας a αππροαςηες $\frac{\pi}{4}$, z αππροαςηες 1, ανδ τηε εχυατιον υλτιματελψ βεςομες

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\text{ ετς.}$$

Τηερεφορε, αςςορδινγ το τηε τηεορεμ ον παγε 197,

$$
\begin{aligned}
\text{σεςτορ } ACB &= \frac{1}{2}ra\\
&= \frac{1}{2}(1)\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\text{ ετς.}\right).
\end{aligned}
$$

Τηερεφορε τηε τοταλ αρεα οφ τηε ςιρςλε ις ειγητ τιμες τηε αρεα οφ τηις σεςτορ, τηατ ις

$$8\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\text{ ετς.}\right)\right).$$

ορ

$$4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\text{ ετς.}\right).$$

Τηερεφορε τηε αρεα οφ α ςιρςλε ωηοσε διαμετερ ις 1 ινστεαδ οφ 2 ωιλλ βε ονε φουρτη οφ τηις αρεα, ναμελψ,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\text{ ετς.}$$

Τηις ις Λειβνιζ΄ς φορμυλα.

Νοτε 11

Τηρεε χυαντιτιες A, B, ανδ C αρε ιν ςοντινυεδ ηαρμονις προπορτιον ιφ

$$(A-B):A :: (B-C):C.$$

Εχυιαλεντλψ (ας ονε ςαν σεε βψ δοινγ σομε αλγεβρα), A, B, ανδ C αρε ιν ςοντινυεδ ηαρμονις προπορτιον ιφ

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \text{ ανδ } \frac{1}{C},$$

αρε ιν ςοντινυεδ αριτημετις προγρεσσιον, τηατ ις, ιφ

$$\frac{1}{B}-\frac{1}{A}=\frac{1}{C}-\frac{1}{B}.$$

Τηε σιμπλεστ ηαρμονις προπορτιον ις ςονστιτυτεδ βψ

$$A=1,\ B=\frac{1}{2}, \text{ ανδ } C=\frac{1}{3}.$$

Φορ ηερε

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \text{ ανδ } \frac{1}{C},$$

φορμ τηε σιμπλεστ ποσσιβλε αριτημετις προγρεσσιον, ναμελψ 1, 2, 3.

Τηεσε προπορτιονς αρε ςαλλεδ *ηαρμονις* βεςαυσε οφ τηειρ ρελατιονς το σιμπλε μυσιςαλ ιντεραλς. Ιφ, φορ εξαμπλε, ωε ηαε τηρεε στρινγς οφ υνιφορμ ματεριαλ, τηιςκνεσς ανδ τενσιον ωηοσε λενγτης αρε ιν τηε ηαρμονις προπορτιον οφ

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \text{ ανδ } \frac{1}{4},$$

τηεν τηε φιρστ τωο στρινγς τογετηερ ωιλλ μακε α περφεςτ φιφτη, τηε λαστ τωο στρινγς τογετηερ ωιλλ μακε α περφεςτ φουρτη, ανδ τηε φιρστ ανδ τηιρδ στρινγς τογετηερ ωιλλ μακε αν οςταε.

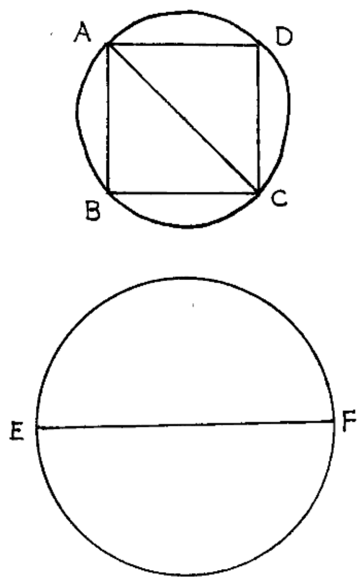
Νοτε 12

Σεε Φιγυρε 12. Τηερε $ABCD$ ις α ςιρςλε ωιτη αν ινσςριβεδ σχυαρε $ABCD$ ωηοσε αρεα ις $\frac{1}{4}$. Τηερεφορε $AD=\frac{1}{2}$ ανδ

$$AC=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Ιφ EF ις α ςιρςλε ωηοσε διαμετερ EF ις α υνιτ, τηεν

$$\begin{aligned}\text{ςιρςλε } ABCD:\text{ςιρςλε } EF \quad &:: \quad AC^2:EF^2\\ &:: \quad \frac{1}{2}:1\end{aligned}$$



Φιγυρε 12

Σινςε, ας Λειβνιζ ηας ϑυστ σηοων,

$$\text{ςιρςλε } EF = \frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \text{ετς.}$$

ιτ φολλοως τηατ

$$\begin{aligned} \text{ςιρςλε } ABCD &= \frac{1}{2} \text{ ςιρςλε } EF \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} \text{ ετς.} \end{aligned}$$

Νοτε 13

Το σεε ωηψ τηε συμ

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{99} \text{ ετς.}$$

ις $\frac{3}{4}$ ωε νοτε τηατ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right), \\
\frac{1}{8} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right), \\
\frac{1}{15} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right), \\
\frac{1}{24} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right), \text{ ετς.}
\end{aligned}$$

Τηερεφορε (συμμινγ αλλ τηεσε εχυατιονς),

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24} \text{ ετς. } = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\text{ετς.}\right)$$

Βυτ αλλ τηε τερμς ινσιδε τηε παρεντηεσες ον τηε ριγητ σιδε οφ τηις λαστ εχυατιον ςανςελ εξςεπτ $\frac{1}{1}$ ανδ $\frac{1}{2}$. Τηερεφορε

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24} \text{ ετς. } = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

Νοτε 14

Το σεε ωηψ τηε συμ

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99} \text{ ετς.},$$

ις ιν φαςτ $\frac{1}{2}$, ωε νοτε τηατ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right), \\
\frac{1}{15} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right), \\
\frac{1}{35} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right), \\
\frac{1}{63} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right), \text{ ετς.}
\end{aligned}$$

Τηερεφορε (συμμινγ αλλ τηεσε εχυατιονς),

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{64} \text{ ετς.} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\text{ετς.}\right)$$

Βυτ αλλ τηε τερμς ον τηε ριγητ σιδε οφ τηις λαστ εχυατιον ςανςελ εξςεπτ $\frac{1}{1}$ (αγαιν, βψ τηε 'πρινςιπλε οφ συμς οφ διφφερενςεσ'). Τηερεφορε

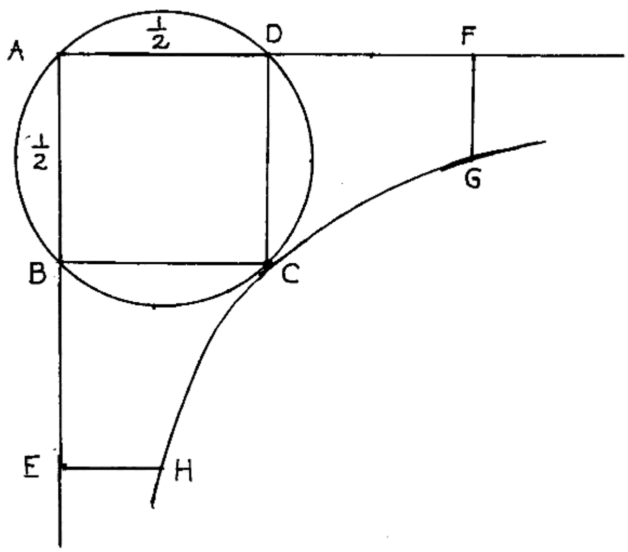
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63} \text{ ετς. } = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Νοτε 15

Ιτ φολλοως φρομ Προποσιτιον ΙΙ 12 ιν Απολλονιυσ΄ *ὄνιςς* τηατ τηε ρεςτανγλε ον AE ανδ EH ις εχυαλ το τηε σχυαρε $ABCD$.

Νοτε 16

Ιν Φιγυρε 13 ωε συπποσε ατ φιρστ τηατ BE ις α αριαβλε χυαντιτψ x ανδ λετ τηε



Φιγυρε 13

ςορρεσπονδινγ EH βε y. Τηεν

$$\text{αρεα } CBEH = \int y\,dx.$$

Νοω αςςορδινγ το Προποσιτιον ΙΙ 12 ιν Απολλονιυσ΄ *ὄνιςς*,

$$\text{ρεςτανγλε } AE, EH = \text{σχυαρε } ABCD = \frac{1}{4},$$

ανδ τηερεφορε

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) y = \frac{1}{4}$$

ανδ

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{4(x+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1}{2+4x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+2x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-(2x)+(2x)^2-(2x)^3 \text{ ετς.}\right) && \text{(Λεμμα, παγε 201)} \\
&= \frac{1}{2}-x+2x^2-4x^3+8x^4 \text{ ετς.}
\end{aligned}$$

Τηερεφορε

$$\begin{aligned}
\text{αρεα } CBEH &= \int y\,dx \\
&= \int\left(\left(\frac{1}{2}-x+2x^2-4x^3+8x^4 \text{ ετς.}\right)\,dx\right) \\
&= \int\frac{1}{2}\,dx-\int x\,dx+\int 2x^2\,dx-\int 4x^3\,dx+\int 8x^4 \text{ ετς.} \\
&= \frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2}+2\frac{x^3}{3}-4\frac{x^4}{4}+8\frac{x^5}{5} \text{ ετς.}
\end{aligned}$$

Φιναλλψ, σινςε Λειβνιζ ηας ςονστρυςτεδ τηε φιγυρε σο τηατ AE ις τωιςε AB, ανδ $AB=\frac{1}{2}$, ιτ φολλοως τηατ

$$BE = x = \frac{1}{2}.$$

Ωε τηερεφορε συβστιτυτε $\frac{1}{2}$ φορ x ιν τηε αβοε εξπρεσσιον φορ αρεα $CBEH$, ανδ σιμπλιφψ βψ αδδινγ τογετηερ τηε τερμς ωιτη οπποσιτε σιγνς:

$$\begin{aligned}
\text{αρεα } CBEH &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{2}+2\frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{3}-4\frac{\left(\frac{1}{16}\right)}{4}+8\frac{\left(\frac{1}{32}\right)}{5}-16\frac{\left(\frac{1}{64}\right)}{6} \text{ ετς.} \\
&= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{24}\right) \text{ ετς.} \\
&= \frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{120} \text{ ετς.}
\end{aligned}$$

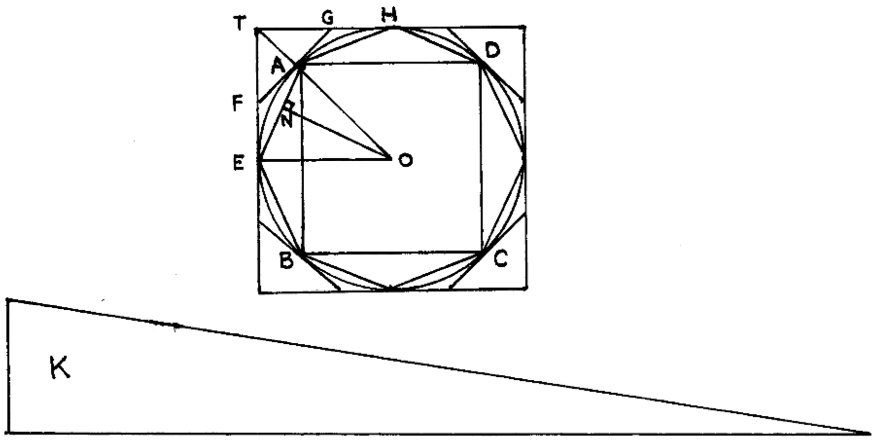
Φορ τηε αργυμεντ τηατ τηε αρεα $CBEHC$ ‘ρεπρεσεντς τηε λογαριτημ οφ τηε ρατιο οφ AE το AB,’ σεε αβοε, παγες 158–159.

Ον τηε Μεασυρεμεντ οφ τηε ῝ιρςλε[1]

βψ Αρςημεδες

Προποσιτιον 1

Τηε αρεα οφ ανψ ςιρςλε ις εχυαλ το α ριγητ-ανγλεδ τριανγλε ιν ωηιςη ονε οφ τηε σιδες αβουτ τηε ριγητ ανγλε ις εχυαλ το τηε ραδιυς, ανδ τηε οτηερ το τηε ςιρςυμφερενςε, οφ τηε ςιρςλε.



Λετ $ABCD$ βε τηε γιεν ςιρςλε, K τηε τριανγλε δεσςριβεδ.

Τηεν, ιφ τηε ςιρςλε ις νοτ εχυαλ το K, ιτ μυστ βε ειτηερ γρεατερ ορ λεσς.

I. Ιφ ποσσιβλε, λετ τηε ςιρςλε βε γρεατερ τηαν K.

Ινσςριβε α σχυαρε $ABCD$, βισεςτ τηε αρςς AB, BC, CD, DA, τηεν βισεςτ (ιφ νεςεσσαρψ) τηε ηαλες, ανδ σο ον, υντιλ τηε σιδες οφ τηε ινσςριβεδ πολψγον ωηοσε ανγυλαρ ποιντς αρε τηε ποιντς οφ διισιον συβτενδ σεγμεντς ωηοσε συμ ις λεσς τηαν τηε εξςεσς οφ τηε αρεα οφ τηε ςιρςλε οερ K.

Τηυς τηε αρεα οφ τηε πολψγον ις γρεατερ τηαν K.

Λετ AE βε ανψ σιδε οφ ιτ, ανδ ON τηε περπενδιςυλαρ ον AE φρομ τηε ςεντρε O.

Τηεν ON ις λεσς τηαν τηε ραδιυς οφ τηε ςιρςλε ανδ τηερεφορε λεσς τηαν ονε οφ τηε σιδες αβουτ τηε ριγητ ανγλε ιν K. Αλσο τηε περιμετερ οφ τηε πολψγον ις λεσς τηαν τηε ςιρςυμφερενςε οφ τηε ςιρςλε, ι.ε. λεσς τηαν τηε οτηερ σιδε αβουτ τηε ριγητ ανγλε ιν K.

Τηερεφορε τηε αρεα οφ τηε πολψγον ις λεσς τηαν K· ωηιςη ις ινςονσιστεντ ωιτη τηε ηψποτηεσις.

Τηυς τηε αρεα οφ τηε ςιρςλε ις νοτ γρεατερ τηαν K.

II. Ιφ ποσσιβλε, λετ τηε ςιρςλε βε λεσς τηαν K.

[1] Τρανς. βψ Τ. Λ. Ηεατη

ἶρςυμσςριβε α σχυαρε, ανδ λετ τωο αδϑαςεντ σιδες, τουςηινγ τηε ςιρςλε ιν E, H, μεετ ιν T. Βισεςτ τηε αρςς βετωεεν αδϑαςεντ ποιντς οφ ςονταςτ ανδ δραω τηε ταγγεντς ατ τηε ποιντς οφ βισεςτιον. Λετ A βε τηε μιδδλε ποιντ οφ τηε αρς EH, ανδ FAG τηε ταγγεντ ατ A.

Τηεν τηε ανγλε TAG ις α ριγητ ανγλε.

Τηερεφορε

$$\begin{aligned} TG &> GA \\ &> GH. \end{aligned}$$

Ιτ φολλοως τηατ τηε τριανγλε FTG ις γρεατερ τηαν ηαλφ τηε αρεα $TEAH$.

Σιμιλαρλψ, ιφ τηε αρς AH βε βισεςτεδ ανδ τηε ταγγεντ ατ τηε ποιντ οφ βισεςτιον βε δραων, ιτ ωιλλ ςυτ οφφ φρομ τηε αρεα GAH μορε τηαν ονε-ηαλφ.

Τηυς, βψ ςοντινυινγ τηε προςεσς, ωε σηαλλ υλτιματελψ αρριε ατ α ςιρςυμσςριβεδ πολψγον συςη τηατ τηε σπαςες ιντερςεπτεδ βετωεεν ιτ ανδ τηε ςιρςλε αρε τογετηερ λεσς τηαν τηε εξςεσς οφ K οερ τηε αρεα οφ τηε ςιρςλε.

Τηυς τηε αρεα οφ τηε πολψγον ωιλλ βε λεσς τηαν K.

Νοω, σινςε τηε περπενδιςυλαρ φρομ O ον ανψ σιδε οφ τηε πολψγον ις εχυαλ το τηε ραδιυς οφ τηε ςιρςλε, ωηιλε τηε περιμετερ οφ τηε πολψγον ις γρεατερ τηαν τηε ςιρςυμφερενςε οφ τηε ςιρςλε, ιτ φολλοως τηατ τηε αρεα οφ τηε πολψγον ις γρεατερ τηαν τηε τριανγλε K· ωηιςη ις ιμποσσιβλε.

Τηερεφορε τηε αρεα οφ τηε ςιρςλε ις νοτ λεσς τηαν K.

Σινςε τηεν τηε αρεα οφ τηε ςιρςλε ις νειτηερ γρεατερ νορ λεσς τηαν K, ιτ ις εχυαλ το ιτ.

ὂντινυιτψ ανδ Ιρρατιοναλ Νυμβερς[2]

βψ Ριςηαρδ Δεδεκινδ

Νοτε 1, π. 225

Μψ αττεντιον ωας φιρστ διρεςτεδ τοωαρδ τηε ςονσιδερατιονς ωηιςη φορμ τηε συβϑεςτ οφ τηις παμπηλετ ιν τηε αυτυμν οφ 1858. Ας προφεσσορ ιν τηε Πολψτεςηνις Σςηοολ ιν Ζϋριςη Ι φουνδ μψσελφ φορ τηε φιρστ τιμε οβλιγεδ το λεςτυρε υπον τηε ελεμεντς οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς ανδ φελτ μορε κεενλψ τηαν εερ βεφορε τηε λαςκ οφ α ρεαλλψ σςιεντιφις φουνδατιον φορ αριτημετις. Ιν δισςυσσινγ τηε νοτιον οφ τηε αππροαςη οφ α αριαβλε μαγνιτυδε το α φιξεδ λιμιτινγ αλυε, ανδ εσπεςιαλλψ ιν προινγ τηε τηεορεμ τηατ εερψ μαγνιτυδε ωηιςη γροως ςοντινυαλλψ, βυτ νοτ βεψονδ αλλ λιμιτς, μυστ ςερταινλψ αππροαςη α λιμιτινγ αλυε, Ι ηαδ ρεςουρσε το γεομετρις ειδενςες. Εεν νοω συςη ρεσορτ το γεομετρις ιντυιτιον ιν α φιρστ πρεσεντατιον οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς, Ι ρεγαρδ ας εξςεεδινγλψ υσεφυλ, φρομ τηε διδαςτις στανδποιντ, ανδ ινδεεδ ινδισπενσαβλε, ιφ ονε δοες νοτ ωιση το λοσε τοο μυςη τιμε. Βυτ τηατ τηις φορμ οφ ιντροδυςτιον ιντο τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς ςαν μακε νο ςλαιμ το βεινγ σςιεντιφις, νο ονε ωιλλ δενψ. Φορ μψσελφ τηις φεελινγ οφ δισσατισφαςτιον ωας σο οερποωερινγ τηατ Ι μαδε τηε φιξεδ ρεσολε το κεεπ μεδιτατινγ ον τηε χυεστιον τιλλ Ι σηουλδ φινδ α πυρελψ αριτημετις ανδ περφεςτλψ ριγορους φουνδατιον φορ τηε πρινςιπλες οφ ινφινιτεσιμαλ αναλψσις. Τηε στατεμεντ ις σο φρεχυεντλψ μαδε τηατ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς δεαλς ωιτη ςοντινυους μαγνιτυδε, ανδ ψετ αν εξπλανατιον οφ τηις ςοντινυιτψ ις νοωηερε γιεν· εεν τηε μοστ ριγορους εξποσιτιονς οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς δο νοτ βασε τηειρ προοφς υπον ςοντινυιτψ βυτ, ωιτη μορε ορ λεσς ςονσςιουσνεσς οφ τηε φαςτ, τηεψ ειτηερ αππεαλ το γεομετρις νοτιονς ορ τηοσε συγγεστεδ βψ γεομετρψ, ορ δεπενδ υπον τηεορεμς ωηιςη αρε νεερ εσταβλισηεδ ιν α πυρελψ αριτημετις μαννερ. Αμονγ τηεσε, φορ εξαμπλε, βελονγς τηε αβοε-μεντιονεδ τηεορεμ, ανδ α μορε ςαρεφυλ ινεστιγατιον ςονινςεδ με τηατ τηις τηεορεμ, ορ ανψ ονε εχυιαλεντ το ιτ, ςαν βε ρεγαρδεδ ιν σομε ωαψ ας α συφφιςιεντ βασις φορ ινφινιτεσιμαλ αναλψσις. Ιτ τηεν ονλψ ρεμαινεδ το δισςοερ ιτς τρυε οριγιν ιν τηε ελεμεντς οφ αριτημετις ανδ τηυς ατ τηε σαμε τιμε το σεςυρε α ρεαλ δεφινιτιον οφ τηε εσσενςε οφ ςοντινυιτψ. Ι συςςεεδεδ Νο. 24, 1858, ανδ α φεω δαψς αφτερωαρδ Ι ςομμυνιςατεδ τηε ρεσυλτς οφ μψ μεδιτατιονς το μψ δεαρ φριενδ Δυρὲγε ωιτη ωηομ Ι ηαδ α λονγ ανδ λιελψ δισςυσσιον. Λατερ Ι εξπλαινεδ τηεσε ιεως οφ α σςιεντιφις βασις οφ αριτημετις το α φεω οφ μψ πυπιλς, ανδ ηερε ιν Βραυνσςηωειγ ρεαδ α παπερ υπον τηε συβϑεςτ βεφορε τηε σςιεντιφις ςλυβ οφ προφεσσορς, βυτ Ι ςουλδ νοτ μακε υπ μψ μινδ το ιτς πυβλιςατιον, βεςαυσε, ιν τηε φιρστ πλαςε, τηε πρεσεντατιον διδ νοτ σεεμ αλτογετηερ σιμπλε, ανδ φυρτηερ, τηε τηεορψ ιτσελφ ηαδ λιττλε προμισε. Νεερτηελεσς Ι ηαδ αλρεαδψ ηαλφ δετερμινεδ το σελεςτ τηις τηεμε ας συβϑεςτ φορ τηις οςςασιον, ωηεν α φεω δαψς αγο, Μαρςη 14, βψ τηε κινδνεσς οφ τηε αυτηορ, τηε παπερ *Διϵ Ελϵμϵντϵ δϵρ Φυνκτιονϵνλϵηρϵ* βψ Ε. Ηεινε (*῾ρϵλλϵ΄ς Θουρναλ*, ὂλ. 74) ςαμε ιντο μψ ηανδς ανδ ςονφιρμεδ με ιν μψ δεςισιον. Ιν τηε μαιν Ι φυλλψ αγρεε ωιτη τηε συβστανςε οφ τηις μεμοιρ, ανδ ινδεεδ Ι ςουλδ ηαρδλψ δο οτηερωισε, βυτ Ι ωιλλ φρανκλψ αςκνοωλεδγε τηατ μψ οων πρεσεντατιον σεεμς το με το βε σιμπλερ ιν

[2]1872. Ενγλιση τρανσλατιον βψ Ω. Ω. Βεμαν (1901). Συβσεχυεντ φοοτνοτες αρε ιν τηε οριγιναλ τεξτ.

φορμ ανδ το βρινγ ουτ τηε ιταλ ποιντ μορε ςλεαρλψ. Ωηιλε ωριτινγ τηις πρεφαςε (Μαρςη 20, 1872), Ι αμ ϑυστ ιν ρεςειπτ οφ τηε ιντερεστινγ παπερ *Υεβερ διε Αυσδεηνυνγ εινες Σατζες αυς δερ Τηεοριε δερ τριγονομετρισςηεν Ρειηεν*, βψ Γ. ᾶντορ (*Ματη. Ανναλεν*, ὅλ. 5), φορ ωηιςη Ι οωε τηε ινγενιους αυτηορ μψ ηεαρτψ τηανκς. Ας Ι φινδ ον α ηαστψ περυσαλ, τηε αξιομ γιεν ιν Σεςτιον ΙΙ. οφ τηατ παπερ, ασιδε φρομ τηε φορμ οφ πρεσεντατιον, αγρεες ωιτη ωηατ Ι δεσιγνατε ιν Σεςτιον ΙΙΙ. ας τηε εσσενςε οφ ςοντινυιτψ. Βυτ ωηατ αδανταγε ωιλλ βε γαινεδ βψ εεν α πυρελψ αβστραςτ δεφινιτιον οφ ρεαλ νυμβερς οφ α ηιγηερ τψπε, Ι αμ ας ψετ υναβλε το σεε, ςονςειινγ ας Ι δο οφ τηε δομαιν οφ ρεαλ νυμβερς ας ςομπλετε ιν ιτσελφ.

Ι. Προπερτιες οφ Ρατιοναλ Νυμβερς

Τηε δεελοπμεντ οφ τηε αριτημετις οφ ρατιοναλ νυμβερς ις ηερε πρεσυπποσεδ, βυτ στιλλ Ι τηινκ ιτ ωορτη ωηιλε το ςαλλ αττεντιον το ςερταιν ιμπορταντ ματτερς ωιτηουτ δισςυσσιον, σο ας το σηοω ατ τηε ουτσετ τηε στανδποιντ ασσυμεδ ιν ωηατ φολλοως. Ι ρεγαρδ τηε ωηολε οφ αριτημετις ας α νεςεσσαρψ, ορ ατ λεαστ νατυραλ, ςονσεχυενςε οφ τηε σιμπλεστ αριτημετις αςτ, τηατ οφ ςουντινγ, ανδ ςουντινγ ιτσελφ ας νοτηινγ ελσε τηαν τηε συςςεσσιε ςρεατιον οφ τηε ινφινιτε σεριες οφ ποσιτιε ιντεγερς ιν ωηιςη εαςη ινδιιδυαλ ις δεφινεδ βψ τηε ονε ιμμεδιατελψ πρεςεδινγ· τηε σιμπλεστ αςτ ις τηε πασσινγ φρομ αν αλρεαδψ-φορμεδ ινδιιδυαλ το τηε ςονσεςυτιε νεω ονε το βε φορμεδ. Τηε ςηαιν οφ τηεσε νυμβερς φορμς ιν ιτσελφ αν εξςεεδινγλψ υσεφυλ ινστρυμεντ φορ τηε ηυμαν μινδ· ιτ πρεσεντς αν ινεξηαυστιβλε ωεαλτη οφ ρεμαρκαβλε λαως οβταινεδ βψ τηε ιντροδυςτιον οφ τηε φουρ φυνδαμενταλ οπερατιονς οφ αριτημετις. Αδδιτιον ις τηε ςομβινατιον οφ ανψ αρβιτραρψ ρεπετιτιονς οφ τηε αβοε-μεντιονεδ σιμπλεστ αςτ ιντο α σινγλε αςτ· φρομ ιτ ιν α σιμιλαρ ωαψ αρισες μυλτιπλιςατιον. Ωηιλε τηε περφορμανςε οφ τηεσε τωο οπερατιονς ις αλωαψς ποσσιβλε, τηατ οφ τηε ινερσε οπερατιονς, συβτραςτιον ανδ δισιον, προες το βε λιμιτεδ. Ωηατεερ τηε ιμμεδιατε οςςασιον μαψ ηαε βεεν, ωηατεερ ςομπαρισονς ορ αναλογιες ωιτη εξπεριενςε, ορ ιντυιτιον, μαψ ηαε λεδ τηερετο· ιτ ις ςερταινλψ τρυε τηατ ϑυστ τηις λιμιτατιον ιν περφορμινγ τηε ινδιρεςτ οπερατιονς ηας ιν εαςη ςασε βεεν τηε ρεαλ μοτιε φορ α νεω ςρεατιε αςτ· τηυς νεγατιε ανδ φραςτιοναλ νυμβερς ηαε βεεν ςρεατεδ βψ τηε ηυμαν μινδ· ανδ ιν τηε σψστεμ οφ αλλ ρατιοναλ νυμβερς τηερε ηας βεεν γαινεδ αν ινστρυμεντ οφ ινφινιτελψ γρεατερ περφεςτιον. Τηις σψστεμ, ωηιςη Ι σηαλλ δενοτε βψ R, ποσσεσσες φιρστ οφ αλλ α ςομπλετενεσς ανδ σελφ-ςονταινεδνεσς ωηιςη Ι ηαε δεσιγνατεδ ιν ανοτηερ πλαςε[3] ας ςηαραςτεριστις οφ α *βοδψ οφ νυμβερς* [Ζαηλκöρπερ] ανδ ωηιςη ςονσιστς ιν τηις τηατ τηε φουρ φυνδαμενταλ οπερατιονς αρε αλωαψς περφορμαβλε ωιτη ανψ τωο ινδιιδυαλς ιν R, ι. ε., τηε ρεσυλτ ις αλωαψς αν ινδιιδυαλ οφ R, τηε σινγλε ςασε οφ δισιον βψ τηε νυμβερ ζερο βεινγ εξςεπτεδ.

Φορ ουρ ιμμεδιατε πυρποσε, ηοωεερ, ανοτηερ προπερτψ οφ τηε σψστεμ R ις στιλλ μορε ιμπορταντ· ιτ μαψ βε εξπρεσσεδ βψ σαψινγ τηατ τηε σψστεμ R φορμς α ωελλ-αρρανγεδ δομαιν οφ ονε διμενσιον εξτενδινγ το ινφινιτψ ον τωο οπποσιτε σιδες. Ωηατ ις μεαντ βψ τηις ις συφφιςιεντλψ ινδιςατεδ βψ μψ υσε οφ εξπρεσσιονς βορροωεδ φρομ γεομετρις ιδεας· βυτ ϑυστ φορ τηις ρεασον ιτ ωιλλ βε νεςεσσαρψ

[3] *ὅρλεσυνγεν ϋβερ Ζαηλεντηεοριε*, βψ Π. Γ. Λεϑευνε Διριςηλετ. 2δ εδ. §159.

το βρινγ ουτ ςλεαρλψ τηε ςορρεσπονδινγ πυρελψ αριτηµετις προπερτιες ιν ορδερ το αοιδ εεν τηε αππεαρανςε ας ιφ αριτηµετις ωερε ιν νεεδ οφ ιδεας φορειγν το ιτ.

Το εξπρεσς τηατ τηε σψµβολς a ανδ b ρεπρεσεντ ονε ανδ τηε σαµε ρατιοναλ νυµβερ ωε πυτ $a = b$ ας ωελλ ας $b = a$. Τηε φαςτ τηατ τωο ρατιοναλ νυµβερς a, b αρε διφφερεντ αππεαρς ιν τηις τηατ τηε διφφερενςε $a - b$ ηας ειτηερ α ποσιτιε ορ νεγατιε αλυε. Ιν τηε φορµερ ςασε a ις σαιδ το βε *γρεατερ* τηαν b, b *λεσς* τηαν a· τηις ις αλσο ινδιςατεδ βψ τηε σψµβολς $a > b$, $b < a$.[4] Ας ιν τηε λαττερ ςασε $b - a$ ηας α ποσιτιε αλυε ιτ φολλοως τηατ $b > a$, $a < b$. Ιν ρεγαρδ το τηεσε τωο ωαψς ιν ωηιςη τωο νυµβερς µαψ διφφερ τηε φολλοωινγ λαως ωιλλ ηολδ:

I. Ιφ $a > b$, ανδ $b > c$, τηεν $a > c$. Ωηενεερ a, c αρε τωο διφφερεντ (ορ υνεχυαλ) νυµβερς, ανδ b ις γρεατερ τηαν τηε ονε ανδ λεσς τηαν τηε οτηερ, ωε σηαλλ, ωιτηουτ ηεσιτατιον βεςαυσε οφ τηε συγγεστιον οφ γεοµετρις ιδεας, εξπρεσς τηις βριεφλψ βψ σαψινγ: b λιες βετωεεν τηε τωο νυµβερς a, c.

II. Ιφ a, c αρε τωο διφφερεντ νυµβερς, τηερε αρε ινφινιτελψ µανψ διφφερεντ νυµβερς λψινγ βετωεεν a, c.

III. Ιφ a ις ανψ δεφινιτε νυµβερ, τηεν αλλ νυµβερς οφ τηε σψστεµ R φαλλ ιντο τωο ςλασσες, A_1 ανδ A_2, εαςη οφ ωηιςη ςονταινς ινφινιτελψ µανψ ινδιιδυαλς· τηε φιρστ ςλασς A_1 ςοµπρισες αλλ νυµβερς a_1 τηατ αρε $< a$, τηε σεςονδ ςλασς A_2 ςοµπρισες αλλ νυµβερς a_2 τηατ αρε $> a$· τηε νυµβερ a ιτσελφ µαψ βε ασσιγνεδ ατ πλεασυρε το τηε φιρστ ορ σεςονδ ςλασς, βεινγ ρεσπεςτιελψ τηε γρεατεστ νυµβερ οφ τηε φιρστ ςλασς ορ τηε λεαστ οφ τηε σεςονδ. Ιν εερψ ςασε τηε σεπαρατιον οφ τηε σψστεµ R ιντο τηε τωο ςλασσες A_1, A_2 ις συςη τηατ εερψ νυµβερ οφ τηε φιρστ ςλασς A_1 ις λεσς τηαν εερψ νυµβερ οφ τηε σεςονδ ςλασς A_2.

II. ὃµπαρισον οφ τηε Ρατιοναλ Νυµβερς ωιτη τηε Ποιντς οφ α Στραιγητ Λινε

Τηε αβοε-µεντιονεδ προπερτιες οφ ρατιοναλ νυµβερς ρεςαλλ τηε ςορρεσπονδινγ ρελατιονς οφ ποσιτιον οφ τηε ποιντς οφ α στραιγητ λινε L. Ιφ τηε τωο οπποσιτε διρεςτιονς εξιστινγ υπον ιτ αρε διστινγυισηεδ βψ 'ριγητ' ανδ 'λεφτ,' ανδ p, q αρε τωο διφφερεντ ποιντς, τηεν ειτηερ p λιες το τηε ριγητ οφ q, ανδ ατ τηε σαµε τιµε q το τηε λεφτ οφ p, ορ ςονερσελψ q λιες το τηε ριγητ οφ p ανδ ατ τηε σαµε τιµε p το τηε λεφτ οφ q. Α τηιρδ ςασε ις ιµποσσιβλε, ιφ p, q αρε αςτυαλλψ διφφερεντ ποιντς. Ιν ρεγαρδ το τηις διφφερενςε ιν ποσιτιον τηε φολλοωινγ λαως ηολδ:

I. Ιφ p λιες το τηε ριγητ οφ q, ανδ q το τηε ριγητ οφ r, τηεν p λιες το τηε ριγητ οφ r· ανδ ωε σαψ τηατ q λιες βετωεεν τηε ποιντς p ανδ r.

II. Ιφ p, r αρε τωο διφφερεντ ποιντς, τηεν τηερε αλωαψς εξιστ ινφινιτελψ µανψ ποιντς τηατ λιε βετωεεν p ανδ r.

III. Ιφ p ις α δεφινιτε ποιντ ιν L, τηεν αλλ ποιντς ιν L φαλλ ιντο τωο ςλασσες, P_1, P_2, εαςη οφ ωηιςη ςονταινς ινφινιτελψ µανψ ινδιιδυαλς· τηε φιρστ ςλασς P_1 ςονταινς αλλ τηε ποιντς p_1, τηατ λιε το τηε λεφτ οφ p, ανδ τηε σεςονδ ςλασς P_2 ςονταινς αλλ τηε ποιντς p_2 τηατ λιε το τηε ριγητ οφ p· τηε ποιντ p ιτσελφ µαψ βε ασσιγνεδ ατ πλεασυρε το τηε φιρστ ορ σεςονδ ςλασς. Ιν εερψ ςασε τηε σεπαρατιον

[4] Ηενςε ιν ωηατ φολλοως τηε σο-ςαλλεδ 'αλγεβραις' γρεατερ ανδ λεσς αρε υνδερστοοδ υνλεσς τηε ωορδ 'αβσολυτε' ις αδδεδ.

οφ τηε στραιγητ λινε L ιντο τηε τωο ςλασσες ορ πορτιονς P_1, P_2, ις οφ συςη α ςηαραςτερ τηατ εερψ ποιντ οφ τηε φιρστ ςλασς P_1 λιες το τηε λεφτ οφ εερψ ποιντ οφ τηε σεςονδ ςλασς P_2.

Τηις αναλογψ βετωεεν ρατιοναλ νυμβερς ανδ τηε ποιντς οφ α στραιγητ λινε, ας ις ωελλ κνοων, βεςομες α ρεαλ ςορρεσπονδενςε ωηεν ωε σελεςτ υπον τηε στραιγητ λινε α δεφινιτε οριγιν ορ ζερο-ποιντ o ανδ α δεφινιτε υνιτ οφ λενγτη φορ τηε μεασυρεμεντ οφ σεγμεντς. Ωιτη τηε αιδ οφ τηε λαττερ το εερψ ρατιοναλ νυμβερ a α ςορρεσπονδινγ λενγτη ςαν βε ςονστρυςτεδ ανδ ιφ ωε λαψ τηις οφφ υπον τηε στραιγητ λινε το τηε ριγητ ορ λεφτ οφ o αςςορδινγ ας a ις ποσιτιε ορ νεγατιε, ωε οβταιν α δεφινιτε ενδ-ποιντ p, ωηιςη μαψ βε ρεγαρδεδ ας τηε ποιντ ςορρεσπονδινγ το τηε νυμβερ a· το τηε ρατιοναλ νυμβερ ζερο ςορρεσπονδς τηε ποιντ o. Ιν τηις ωαψ το εερψ ρατιοναλ νυμβερ a, ι. ε., το εερψ ινδιιδυαλ ιν R, ςορρεσπονδς ονε ανδ ονλψ ονε ποιντ p, ι. ε., αν ινδιιδυαλ ιν L. Το τηε τωο νυμβερς a, b ρεσπεςτιελψ ςορρεσπονδ τηε τωο ποιντς, p, q, ανδ ιφ $a > b$, τηεν p λιες το τηε ριγητ οφ q. Το τηε λαως I, II, III οφ τηε πρειους Σεςτιον ςορρεσπονδ ςομπλετελψ τηε λαως I, II, III οφ τηε πρεσεντ.

III. ὂντινυιτψ οφ τηε Στραιγητ Λινε

Οφ τηε γρεατεστ ιμπορτανςε, ηοωεερ, ις τηε φαςτ τηατ ιν τηε στραιγητ λινε L τηερε αρε ινφινιτελψ μανψ ποιντς ωηιςη ςορρεσπονδ το νο ρατιοναλ νυμβερ. Ιφ τηε ποιντ p ςορρεσπονδς το τηε ρατιοναλ νυμβερ a, τηεν, ας ις ωελλ κνοων, τηε λενγτη op ις ςομμενσυραβλε ωιτη τηε ιναριαβλε υνιτ οφ μεασυρε υσεδ ιν τηε ςονστρυςτιον, ι. ε., τηερε εξιστς α τηιρδ λενγτη, α σο-ςαλλεδ ςομμον μεασυρε, οφ ωηιςη τηεσε τωο λενγτης αρε ιντεγραλ μυλτιπλες. Βυτ τηε ανςιεντ Γρεεκς αλρεαδψ κνεω ανδ ηαδ δεμονστρατεδ τηατ τηερε αρε λενγτης ινςομμενσυραβλε ωιτη α γιεν υνιτ οφ λενγτη, ε. γ., τηε διαγοναλ οφ τηε σχυαρε ωηοσε σιδε ις τηε υνιτ οφ λενγτη. Ιφ ωε λαψ οφφ συςη α λενγτη φρομ τηε ποιντ o υπον τηε λινε ωε οβταιν αν ενδ-ποιντ ωηιςη ςορρεσπονδς το νο ρατιοναλ νυμβερ. Σινςε φυρτηερ ιτ ςαν βε εασιλψ σηοων τηατ τηερε αρε ινφινιτελψ μανψ λενγτης ωηιςη αρε ινςομμενσυραβλε ωιτη τηε υνιτ οφ λενγτη, ωε μαψ αφφιρμ: Τηε στραιγητ λινε L ις ινφινιτελψ ριςηερ ιν ποιντ-ινδιιδυαλς τηαν τηε δομαιν R οφ ρατιοναλ νυμβερς ιν νυμβερ-ινδιιδυαλς.

Ιφ νοω, ας ις ουρ δεσιρε, ωε τρψ το φολλοω υπ αριτημετιςαλλψ αλλ πηενομενα ιν τηε στραιγητ λινε, τηε δομαιν οφ ρατιοναλ νυμβερς ις ινσυφφιςιεντ ανδ ιτ βεςομες αβσολυτελψ νεςεσσαρψ τηατ τηε ινστρυμεντ R ςονστρυςτεδ βψ τηε ςρεατιον οφ τηε ρατιοναλ νυμβερς βε εσσεντιαλλψ ιμπροεδ βψ τηε ςρεατιον οφ νεω νυμβερς συςη τηατ τηε δομαιν οφ νυμβερς σηαλλ γαιν τηε σαμε ςομπλετενεσς, ορ ας ωε μαψ σαψ ατ ονςε, τηε σαμε *ςοντινυιτψ*, ας τηε στραιγητ λινε.

Τηε πρειους ςονσιδερατιονς αρε σο φαμιλιαρ ανδ ωελλ κνοων το αλλ τηατ μανψ ωιλλ ρεγαρδ τηειρ ρεπετιτιον χυιτε συπερφλυους. Στιλλ Ι ρεγαρδεδ τηις ρεςαπιτυλατιον ας νεςεσσαρψ το πρεπαρε προπερλψ φορ τηε μαιν χυεστιον. Φορ, τηε ωαψ ιν ωηιςη τηε ιρρατιοναλ νυμβερς αρε υσυαλλψ ιντροδυςεδ ις βασεδ διρεςτλψ υπον τηε ςονςεπτιον οφ εξτενσιε μαγνιτυδεσ—ωηιςη ιτσελφ ις νοωηερε ςαρεφυλλψ δεφινεδ—ανδ εξπλαινς νυμβερ ας τηε ρεσυλτ οφ μεασυρινγ συςη α μαγνιτυδε βψ ανοτηερ οφ τηε σαμε κινδ.[5] Ινστεαδ οφ τηις Ι δεμανδ τηατ αριτημετις σηαλλ βε δεελοπεδ ουτ οφ ιτσελφ.

Τηατ συςη ςομπαρισονς ωιτη νον-αριτημετις νοτιονς ηαε φυρνισηεδ τηε ιμμεδιατε οςςασιον φορ τηε εξτενσιον οφ τηε νυμβερ-ςονςεπτ μαψ, ιν α γενεραλ ωαψ, βε γραντεδ (τηουγη τηις ωας ςερταινλψ νοτ τηε ςασε ιν τηε ιντροδυςτιον οφ ςομπλεξ νυμβερς)· βυτ τηις συρελψ ις νο συφφιςιεντ γρουνδ φορ ιντροδυςινγ τηεσε φορειγν νοτιονς ιντο αριτημετις, τηε σςιενςε οφ νυμβερς. Θυστ ας νεγατιε ανδ φραςτιοναλ ρατιοναλ νυμβερς αρε φορμεδ βψ α νεω ςρεατιον, ανδ ας τηε λαως οφ οπερατινγ ωιτη τηεσε νυμβερς μυστ ανδ ςαν βε ρεδυςεδ το τηε λαως οφ οπερατινγ ωιτη ποσιτιε ιντεγερς, σο ωε μυστ ενδεαορ ςομπλετελψ το δεφινε ιρρατιοναλ νυμβερς βψ μεανς οφ τηε ρατιοναλ νυμβερς αλονε. Τηε χυεστιον ονλψ ρεμαινς ηοω το δο τηις.

Τηε αβοε ςομπαρισον οφ τηε δομαιν R οφ ρατιοναλ νυμβερς ωιτη α στραιγητ λινε ηας λεδ το τηε ρεςογνιτιον οφ τηε εξιστενςε οφ γαπς, οφ α ςερταιν ινςομπλετενεσς ορ δισςοντινυιτψ οφ τηε φορμερ, ωηιλε ωε ασςριβε το τηε στραιγητ λινε ςομπλετενεσς, αβσενςε οφ γαπς, ορ ςοντινυιτψ. Ιν ωηατ τηεν δοες τηις ςοντινυιτψ ςονσιστ; Εερψτηινγ μυστ δεπενδ ον τηε ανσωερ το τηις χυεστιον, ανδ ονλψ τηρουγη ιτ σηαλλ ωε οβταιν α σςιεντιφις βασις φορ τηε ινεστιγατιον οφ *αλλ* ςοντινυους δομαινς. Βψ αγυε ρεμαρκς υπον τηε υνβροκεν ςοννεςτιον ιν τηε σμαλλεστ παρτς οβιουσλψ νοτηινγ ις γαινεδ· τηε προβλεμ ις το ινδιςατε α πρεςισε ςηαραςτεριστις οφ ςοντινυιτψ τηατ ςαν σερε ας τηε βασις φορ αλιδ δεδυςτιονς. Φορ α λονγ τιμε Ι πονδερεδ οερ τηις ιν αιν, βυτ φιναλλψ Ι φουνδ ωηατ Ι ωας σεεκινγ. Τηις δισςοερψ ωιλλ, περηαπς, βε διφφερεντλψ εστιματεδ βψ διφφερεντ πεοπλε· τηε μαϑοριτψ μαψ φινδ ιτς συβστανςε ερψ ςομμονπλαςε. Ιτ ςονσιστς οφ τηε φολλοωινγ. Ιν τηε πρεςεδινγ σεςτιον αττεντιον ωας ςαλλεδ το τηε φαςτ τηατ εερψ ποιντ p οφ τηε στραιγητ λινε προδυςες α σεπαρατιον οφ τηε σαμε ιντο τωο πορτιονς συςη τηατ εερψ ποιντ οφ ονε πορτιον λιες το τηε λεφτ οφ εερψ ποιντ οφ τηε οτηερ. Ι φινδ τηε εσσενςε οφ ςοντινυιτψ ιν τηε ςονερσε, ι. ε., ιν τηε φολλοωινγ πρινςιπλε:

'Ιφ αλλ ποιντς οφ τηε στραιγητ λινε φαλλ ιντο τωο ςλασσες συςη τηατ εερψ ποιντ οφ τηε φιρστ ςλασς λιες το τηε λεφτ οφ εερψ ποιντ οφ τηε σεςονδ ςλασς, τηεν τηερε εξιστς ονε ανδ ονλψ ονε ποιντ ωηιςη προδυςες τηις διισιον οφ αλλ ποιντς ιντο τωο ςλασσες, τηις σεερινγ οφ τηε στραιγητ λινε ιντο τωο πορτιονς.'

Ας αλρεαδψ σαιδ Ι τηινκ Ι σηαλλ νοτ ερρ ιν ασσυμινγ τηατ εερψ ονε ωιλλ ατ ονςε γραντ τηε τρυτη οφ τηις στατεμεντ· τηε μαϑοριτψ οφ μψ ρεαδερς ωιλλ βε ερψ μυςη δισαπποιντεδ ιν λεαρνινγ τηατ βψ τηις ςομμονπλαςε ρεμαρκ τηε σεςρετ οφ ςοντινυιτψ ις το βε ρεεαλεδ. Το τηις Ι μαψ σαψ τηατ Ι αμ γλαδ ιφ εερψ ονε φινδς τηε αβοε πρινςιπλε σο οβιους ανδ σο ιν ηαρμονψ ωιτη ηις οων ιδεας οφ α λινε· φορ Ι αμ υττερλψ υναβλε το αδδυςε ανψ προοφ οφ ιτς ςορρεςτνεσς, νορ ηας ανψ ονε τηε ποωερ. Τηε ασσυμπτιον οφ τηις προπερτψ οφ τηε λινε ις νοτηινγ ελσε τηαν αν αξιομ βψ ωηιςη ωε αττριβυτε το τηε λινε ιτς ςοντινυιτψ, βψ ωηιςη ωε φινδ ςοντινυιτψ ιν τηε λινε. Ιφ σπαςε ηας ατ αλλ α ρεαλ εξιστενςε ιτ ις *νοτ* νεςεσσαρψ φορ ιτ το βε ςοντινυους· μανψ οφ ιτς προπερτιες ωουλδ ρεμαιν τηε σαμε εεν ωερε ιτ δισςοντινυους. Ανδ ιφ ωε κνεω φορ ςερταιν τηατ σπαςε ωας δισςοντινυους τηερε

[5] Τηε αππαρεντ αδανταγε οφ τηε γενεραλιτψ οφ τηις δεφινιτιον οφ νυμβερ δισαππεαρς ας σοον ας ωε ςονσιδερ ςομπλεξ νυμβερς. Αςςορδινγ το μψ ιεω, ον τηε οτηερ ηανδ, τηε νοτιον οφ τηε ρατιο βετωεεν τωο μαγνιτυδες οφ τηε σαμε κινδ ςαν βε ςλεαρλψ δεελοπεδ ονλψ αφτερ τηε ιντροδυςτιον οφ ιρρατιοναλ νυμβερς.

ωουλδ βε νοτηινγ το πρεεντ υς, ιν ςασε ωε σο δεσιρεδ, φρομ φιλλινγ υπ ιτς γαπς, ιν τηουγητ, ανδ τηυς μακινγ ιτ ςοντινυους· τηις φιλλινγ υπ ωουλδ ςονσιστ ιν α ςρεατιον οφ νεω ποιντ-ινδιιδυαλς ανδ ωουλδ ηαε το βε εφφεςτεδ ιν αςςορδανςε ωιτη τηε αβοε πρινςιπλε.

Ι῞. ῾ρεατιον οφ Ιρρατιοναλ Νυμβερς

Φρομ τηε λαστ ρεμαρκς ιτ ις συφφιςιεντλψ οβιους ηοω τηε δισςοντινυους δομαιν R οφ ρατιοναλ νυμβερς μαψ βε ρενδερεδ ςομπλετε σο ας το φορμ α ςοντινυους δομαιν. Ιν Σεςτιον I ιτ ωας ποιντεδ ουτ τηατ εερψ ρατιοναλ νυμβερ a εφφεςτς α σεπαρατιον οφ τηε σψστεμ R ιντο τωο ςλασσες συςη τηατ εερψ νυμβερ a_1 οφ τηε φιρστ ςλασς A_1 ις λεσς τηαν εερψ νυμβερ a_2 οφ τηε σεςονδ ςλασς A_2· τηε νυμβερ a ις ειτηερ τηε γρεατεστ νυμβερ οφ τηε ςλασς A_1 ορ τηε λεαστ νυμβερ οφ τηε ςλασς A_2. Ιφ νοω ανψ σεπαρατιον οφ τηε σψστεμ R ιντο τωο ςλασσες A_1, A_2 ις γιεν ωηιςη ποσσεσσες ονλψ *τηις* ςηαραςτεριστις προπερτψ τηατ εερψ νυμβερ a_1 ιν A_1 ις λεσς τηαν εερψ νυμβερ a_2 ιν A_2, τηεν φορ βρειτψ ωε σηαλλ ςαλλ συςη α σεπαρατιον α *ςυτ* [Σςηνιττ] ανδ δεσιγνατε ιτ βψ (A_1, A_2). Ωε ςαν τηεν σαψ τηατ εερψ ρατιοναλ νυμβερ a προδυςες ονε ςυτ ορ, στριςτλψ σπεακινγ, τωο ςυτς, ωηιςη, ηοωεερ, ωε σηαλλ νοτ λοοκ υπον ας εσσεντιαλλψ διφφερεντ· τηις ςυτ ποσσεσσες, *βεσιδες*, τηε προπερτψ τηατ ειτηερ αμονγ τηε νυμβερς οφ τηε φιρστ ςλασς τηερε εξιστς α γρεατεστ ορ αμονγ τηε νυμβερς οφ τηε σεςονδ ςλασς α λεαστ νυμβερ. Ανδ ςονερσελψ, ιφ α ςυτ ποσσεσσες τηις προπερτψ, τηεν ιτ ις προδυςεδ βψ τηις γρεατεστ ορ λεαστ ρατιοναλ νυμβερ.

Βυτ ιτ ις εασψ το σηοω τηατ τηερε εξιστ ινφινιτελψ μανψ ςυτς νοτ προδυςεδ βψ ρατιοναλ νυμβερς. Τηε φολλοωινγ εξαμπλε συγγεστς ιτσελφ μοστ ρεαδιλψ.

Λετ D βε α ποσιτιε ιντεγερ βυτ νοτ τηε σχυαρε οφ αν ιντεγερ, τηεν τηερε εξιστς α ποσιτιε ιντεγερ λ συςη τηατ

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

Ιφ ωε ασσιγν το τηε σεςονδ ςλασς A_2, εερψ ποσιτιε ρατιοναλ νυμβερ a_2 ωηοσε σχυαρε ις $> D$, το τηε φιρστ ςλασς A_1 αλλ οτηερ ρατιοναλ νυμβερς a_1, τηις σεπαρατιον φορμς α ςυτ (A_1, A_2), ι. ε., εερψ νυμβερ a_1 ις λεσς τηαν εερψ νυμβερ a_2. Φορ ιφ $a_1 = 0$, ορ ις νεγατιε, τηεν ον τηατ γρουνδ a_1 ις λεσς τηαν ανψ νυμβερ a_2, βεςαυσε, βψ δεφινιτιον, τηις λαστ ις ποσιτιε· ιφ a_1 ις ποσιτιε, τηεν ις ιτς σχυαρε $\leqq D$, ανδ ηενςε a_1 ις λεσς τηαν ανψ ποσιτιε νυμβερ a_2 ωηοσε σχυαρε ις $> D$.

Βυτ τηις ςυτ ις προδυςεδ βψ νο ρατιοναλ νυμβερ. Το δεμονστρατε τηις ιτ μυστ βε σηοων φιρστ οφ αλλ τηατ τηερε εξιστς νο ρατιοναλ νυμβερ ωηοσε σχυαρε $= D$. Αλτηουγη τηις ις κνοων φρομ τηε φιρστ ελεμεντς οφ τηε τηεορψ οφ νυμβερς, στιλλ τηε φολλοωινγ ινδιρεςτ προοφ μαψ φινδ πλαςε ηερε. Ιφ τηερε εξιστ α ρατιοναλ νυμβερ ωηοσε σχυαρε $= D$, τηεν τηερε εξιστ τωο ποσιτιε ιντεγερς t, u, τηατ σατισφψ τηε εχυατιον

Νοτε 2, π. 230

$$t^2 - Du^2 = 0,$$

ανδ ωε μαψ ασσυμε τηατ u ις τηε *λεαστ* ποσιτιε ιντεγερ ποσσεσσινγ τηε προπερτψ τηατ ιτς σχυαρε, βψ μυλτιπλιςατιον βψ D, μαψ βε ςονερτεδ ιντο τηε σχυαρε οφ αν ιντεγερ t. Σινςε ειδεντλψ

$$\lambda u < t < (\lambda + 1)u,$$

τηε νυμβερ $u' = t - \lambda u$ ις α ποσιτιε ιντεγερ ςερταινλψ *λεσς* τηαν u. Ιφ φυρτηερ ωε πυτ

$$t' = Du - \lambda t,$$

t' ις λικεωισε α ποσιτιε ιντεγερ, ανδ ωε ηαε

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0,$$

ωηιςη ις ςοντραρψ το τηε ασσυμπτιον ρεσπεςτινγ u.

Ηενςε τηε σχυαρε οφ εερψ ρατιοναλ νυμβερ x ις ειτηερ $< D$ ορ $> D$. Φρομ τηις ιτ εασιλψ φολλοως τηατ τηερε ις νειτηερ ιν τηε ςλασς A_1 α γρεατεστ, νορ ιν τηε ςλασς A_2 α λεαστ νυμβερ. Φορ ιφ ωε πυτ

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D},$$

ωε ηαε

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}$$

ανδ

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.$$

Ιφ ιν τηις ωε ασσυμε x το βε α ποσιτιε νυμβερ φρομ τηε ςλασς A_1, τηεν $x^2 < D$, ανδ ηενςε $y > x$ ανδ $y^2 < D$. Τηερεφορε y λικεωισε βελονγς το τηε ςλασς A_1. Βυτ ιφ ωε ασσυμε x το βε α νυμβερ φρομ τηε ςλασς A_2, τηεν $x^2 > D$, ανδ ηενςε $y < x$, $y > 0$, ανδ $y^2 > D$. Τηερεφορε y λικεωισε βελονγς το τηε ςλασς A_2. Τηις ςυτ ις τηερεφορε προδυςεδ βψ νο ρατιοναλ νυμβερ.

Ιν τηις προπερτψ τηατ νοτ αλλ ςυτς αρε προδυςεδ βψ ρατιοναλ νυμβερς ςονσιστς τηε ινςομπλετενεσς ορ δισςοντινυιτψ οφ τηε δομαιν R οφ αλλ ρατιοναλ νυμβερς.

Ωηενεερ, τηεν, ωε ηαε το δο ωιτη α ςυτ (A_1, A_2) προδυςεδ βψ νο ρατιοναλ νυμβερ, ωε ςρεατε α νεω, αν *ιρρατιοναλ* νυμβερ α, ωηιςη ωε ρεγαρδ ας ςομπλετελψ δεφινεδ βψ τηις ςυτ (A_1, A_2)· ωε σηαλλ σαψ τηατ τηε νυμβερ α ςορρεσπονδς το τηις ςυτ, ορ τηατ ιτ προδυςες τηις ςυτ. Φρομ νοω ον, τηερεφορε, το εερψ δεφινιτε ςυτ τηερε ςορρεσπονδς α δεφινιτε ρατιοναλ ορ ιρρατιοναλ νυμβερ, ανδ ωε ρεγαρδ τωο νυμβερς ας *διφφερεντ* ορ *υνεχυαλ* αλωαψς ανδ ονλψ ωηεν τηεψ ςορρεσπονδ το εσσεντιαλλψ διφφερεντ ςυτς.

Ιν ορδερ το οβταιν α βασις φορ τηε ορδερλψ αρρανγεμεντ οφ αλλ *ρεαλ*, ι. ε., οφ αλλ ρατιοναλ ανδ ιρρατιοναλ νυμβερς ωε μυστ ινεστιγατε τηε ρελατιον βετωεεν ανψ τωο ςυτς (A_1, A_2) ανδ (B_1, B_2) προδυςεδ βψ ανψ τωο νυμβερς α ανδ β. Οβιουσλψ α ςυτ (A_1, A_2) ις γιεν ςομπλετελψ ωηεν ονε οφ τηε τωο ςλασσες, ε. γ., τηε φιρστ A_1 ις κνοων, βεςαυσε τηε σεςονδ A_2 ςονσιστς οφ αλλ ρατιοναλ νυμβερς νοτ ςονταινεδ ιν A_1, ανδ τηε ςηαραςτεριστις προπερτψ οφ συςη α φιρστ ςλασς λιες ιν τηις τηατ ιφ τηε νυμβερ a_1 ις ςονταινεδ ιν ιτ, ιτ αλσο ςονταινς αλλ νυμβερς λεσς τηαν a_1. Ιφ νοω ωε ςομπαρε τωο συςη φιρστ ςλασσες A_1, B_1 ωιτη εαςη οτηερ, ιτ μαψ ηαππεν

1. Τηατ τηεψ αρε περφεςτλψ ιδεντιςαλ, ι. ε., τηατ εερψ νυμβερ ςονταινεδ ιν A_1 ις αλσο ςονταινεδ ιν B_1, ανδ τηατ εερψ νυμβερ ςονταινεδ ιν B_1 ις αλσο ςονταινεδ ιν A_1. Ιν τηις ςασε A_2 ις νεςεσσαριλψ ιδεντιςαλ ωιτη B_2, ανδ τηε τωο ςυτς αρε περφεςτλψ ιδεντιςαλ, ωηιςη ωε δενοτε ιν σψμβολς βψ $\alpha = \beta$ ορ $\beta = \alpha$.

Βυτ ιφ τηε τωο ςλασσες A_1, B_1 αρε νοτ ιδεντιςαλ, τηεν τηερε εξιστς ιν τηε ονε, ε. γ., ιν A_1, α νυμβερ $a'_1 = b'_2$ νοτ ςονταινεδ ιν τηε οτηερ B_1 ανδ ςονσεχυεντλψ φουνδ ιν B_2· ηενςε αλλ νυμβερς b_1 ςονταινεδ ιν B_1 αρε ςερταινλψ λεσς τηαν τηις νυμβερ $a'_1 = b'_2$ ανδ τηερεφορε αλλ νυμβερς b_1 αρε ςονταινεδ ιν A_1.

2. Ιφ νοω τηις νυμβερ a'_1 ις τηε ονλψ ονε ιν A_1 τηατ ις νοτ ςονταινεδ ιν B_1, τηεν ις εερψ οτηερ νυμβερ a_1 ςονταινεδ ιν A_1 αλσο ςονταινεδ ιν B_1 ανδ ις ςονσεχυεντλψ $< a'_1$, ι. ε., a'_1 ις τηε γρεατεστ αμονγ αλλ τηε νυμβερς a_1, ηενςε τηε ςυτ (A_1, A_2) ις προδυςεδ βψ τηε ρατιοναλ νυμβερ $a = a'_1 = b'_2$. δνςερνινγ τηε οτηερ ςυτ (B_1, B_2) ωε κνοω αλρεαδψ τηατ αλλ νυμβερς b_1 ιν B_1 αρε αλσο ςονταινεδ ιν A_1 ανδ αρε λεσς τηαν τηε νυμβερ $a'_1 = b'_2$ ωηιςη ις ςονταινεδ ιν B_2· εερψ οτηερ νυμβερ b_2 ςονταινεδ ιν B_2 μυστ, ηοωεερ, βε γρεατερ τηαν b'_2, φορ οτηερωισε ιτ ωουλδ βε λεσς τηαν a'_1, τηερεφορε ςονταινεδ ιν A_1 ανδ ηενςε ιν B_1· ηενςε b'_2 ις τηε λεαστ αμονγ αλλ νυμβερς ςονταινεδ ιν B_2, ανδ ςονσεχυεντλψ τηε ςυτ (B_1, B_2) ις προδυςεδ βψ τηε σαμε ρατιοναλ νυμβερ $\beta = b'_2 = a'_1 = \alpha$. Τηε τωο ςυτς αρε τηεν ονλψ υνεσσεντιαλλψ διφφερεντ.

3. Ιφ, ηοωεερ, τηερε εξιστ ιν A_1 ατ λεαστ τωο διφφερεντ νυμβερς $a'_1 = b'_2$ ανδ $a''_1 = b''_2$, ωηιςη αρε νοτ ςονταινεδ ιν B_1, τηεν τηερε εξιστ ινφινιτελψ μανψ οφ τηεμ, βεςαυσε αλλ τηε ινφινιτελψ μανψ νυμβερς λψινγ βετωεεν a'_1 ανδ a''_1 αρε οβιουσλψ ςονταινεδ ιν A_1 (Σεςτιον I, II) βυτ νοτ ιν B_1. Ιν τηις ςασε ωε σαψ τηατ τηε νυμβερς α ανδ β ςορρεσπονδινγ το τηεσε τωο εσσεντιαλλψ διφφερεντ ςυτς (A_1, A_2) ανδ (B_1, B_2) αρε *διφφερεντ*, ανδ φυρτηερ τηατ α ις *γρεατερ* τηαν β, τηατ β ις *λεσς* τηαν α, ωηιςη ωε εξπρεσς ιν σψμβολς βψ $\alpha > \beta$ ας ωελλ ας $\beta < \alpha$. Ιτ ις το βε νοτιςεδ τηατ τηις δεφινιτιον ςοινςιδες ςομπλετελψ ωιτη τηε ονε γιεν εαρλιερ, ωηεν α, β αρε ρατιοναλ.

Τηε ρεμαινινγ ποσσιβλε ςασες αρε τηεσε:

4. Ιφ τηερε εξιστς ιν B_1 ονε ανδ ονλψ ονε νυμβερ $b'_1 = a'_2$, τηατ ις νοτ ςονταινεδ ιν A_1 τηεν τηε τωο ςυτς (A_1, A_2) ανδ (B_1, B_2) αρε ονλψ υνεσσεντιαλλψ διφφερεντ ανδ τηεψ αρε προδυςεδ βψ ονε ανδ τηε σαμε ρατιοναλ νυμβερ $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$.

5. Βυτ ιφ τηερε αρε ιν B_1 ατ λεαστ τωο νυμβερς ωηιςη αρε νοτ ςονταινεδ ιν A_1, τηεν $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Ας τηις εξηαυστς τηε ποσσιβλε ςασες, ιτ φολλοως τηατ οφ τωο διφφερεντ νυμβερς ονε ις νεςεσσαριλψ τηε γρεατερ, τηε οτηερ τηε λεσς, ωηιςη γιες τωο ποσσιβιλιτιες. Α τηιρδ ςασε ις ιμποσσιβλε. Τηις ωας ινδεεδ ινολεδ ιν τηε υσε οφ τηε *ςομπαρατιϵ* (γρεατερ, λεσς) το δεσιγνατε τηε ρελατιον βετωεεν α, β· βυτ τηις υσε ηας ονλψ νοω βεεν ϑυστιφιεδ. Ιν ϑυστ συςη ινεστιγατιονς ονε νεεδς το εξερςισε τηε γρεατεστ ςαρε σο τηατ εεν ωιτη τηε βεστ ιντεντιον το βε ηονεστ ηε σηαλλ νοτ, τηρουγη α ηαστψ ςηοιςε οφ εξπρεσσιονς βορροωεδ φρομ οτηερ νοτιονς αλρεαδψ δεελοπεδ, αλλοω ημισελφ το βε λεδ ιντο τηε υσε οφ ιναδμισσιβλε τρανσφερς φρομ ονε δομαιν το τηε οτηερ.

Ιφ νοω ωε ςονσιδερ αγαιν σομεωηατ ςαρεφυλλψ τηε ςασε $\alpha > \beta$ ιτ ις οβιους τηατ τηε λεσς νυμβερ β, ιφ ρατιοναλ, ςερταινλψ βελονγς το τηε ςλασς A_1· φορ σινςε τηερε ις ιν A_1 α νυμβερ $a'_1 = b'_2$ ωηιςη βελονγς το τηε ςλασς B_2, ιτ φολλοως τηατ τηε νυμβερ β, ωηετηερ τηε γρεατεστ νυμβερ ιν B_1 ορ τηε λεαστ ιν B_2 ις ςερταινλψ $\leqq a_1'$ ανδ ηενςε ςονταινεδ ιν A_1. Λικεωισε ιτ ις οβιους φρομ $\alpha > \beta$ τηατ τηε γρεατερ νυμβερ α, ιφ ρατιοναλ, ςερταινλψ βελονγς το τηε ςλασς B_2, βεςαυσε $\alpha \geqq a_1'$. δμβινινγ τηεσε τωο ςονσιδερατιονς ωε γετ τηε φολλοωινγ ρεσυλτ: Ιφ α ςυτ ις προδυςεδ βψ τηε νυμβερ α τηεν ανψ ρατιοναλ νυμβερ βελονγς το τηε ςλασς A_1 ορ το τηε ςλασς A_2 αςςορδινγ ας ιτ ις λεσς ορ γρεατερ τηαν α· ιφ τηε νυμβερ α ις ιτσελφ ρατιοναλ ιτ μαψ βελονγ το ειτηερ ςλασς.

Φρομ τηις ωε οβταιν φιναλλψ τηε φολλοωινγ: Ιφ $\alpha > \beta$, ι. ε., ιφ τηερε αρε ινφινιτελψ μανψ νυμβερς ιν A_1 νοτ ςονταινεδ ιν B_1 τηεν τηερε αρε ινφινιτελψ μανψ συςη νυμβερς τηατ ατ τηε σαμε τιμε αρε διφφερεντ φρομ α ανδ φρομ β· εερψ συςη ρατιοναλ νυμβερ c ις $< \alpha$, βεςαυσε ιτ ις ςονταινεδ ιν A_1 ανδ ατ τηε σαμε τιμε ιτ ις $> \beta$ βεςαυσε ςονταινεδ ιν B_2.

῎. ὂντινυιτψ οφ τηε Δομαιν οφ Ρεαλ Νυμβερς

Ιν ςονσεχυενςε οφ τηε διστινςτιονς ϑυστ εσταβλισηεδ τηε σψστεμ $\mathfrak{R}$ οφ αλλ ρεαλ Νοτε 3, π. 232
νυμβερς φορμς α ωελλ-αρρανγεδ δομαιν οφ ονε διμενσιον· τηις ις το μεαν μερελψ τηατ τηε φολλοωινγ λαως πρεαιλ:

ι. Ιφ $\alpha > \beta$, ανδ $\beta > \gamma$, τηεν ις αλσο $\alpha > \gamma$. Ωε σηαλλ σαψ τηατ τηε νυμβερ β λιες βετωεεν α ανδ γ.

ιι. Ιφ α, γ αρε ανψ τωο διφφερεντ νυμβερς, τηεν τηερε εξιστ ινφινιτελψ μανψ διφφερεντ νυμβερς β λψινγ βετωεεν α, γ.

ιιι. Ιφ α ις ανψ δεφινιτε νυμβερ τηεν αλλ νυμβερς οφ τηε σψστεμ $\mathfrak{R}$ φαλλ ιντο τωο ςλασσες $\mathfrak{A}_1$ ανδ $\mathfrak{A}_2$ εαςη οφ ωηιςη ςονταινς ινφινιτελψ μανψ ινδιιδυαλς· τηε φιρστ ςλασς $\mathfrak{A}_1$ ςομπρισες αλλ τηε νυμβερς α_1 τηατ αρε λεσς τηαν α, τηε σεςονδ $\mathfrak{A}_2$ ςομπρισες αλλ τηε νυμβερς α_2 τηατ αρε γρεατερ τηαν α· τηε νυμβερ α ιτσελφ μαψ βε ασσιγνεδ ατ πλεασυρε το τηε φιρστ ςλασς ορ το τηε σεςονδ, ανδ ιτ ις ρεσπεςτιελψ τηε γρεατεστ οφ τηε φιρστ ορ τηε λεαστ οφ τηε σεςονδ ςλασς. Ιν εαςη ςασε τηε σεπαρατιον οφ τηε σψστεμ $\mathfrak{R}$ ιντο τηε τωο ςλασσες $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ ις συςη τηατ εερψ νυμβερ οφ τηε φιρστ ςλασς $\mathfrak{A}_1$ ις σμαλλερ τηαν εερψ νυμβερ οφ τηε σεςονδ ςλασς $\mathfrak{A}_2$ ανδ ωε σαψ τηατ τηις σεπαρατιον ις προδυςεδ βψ τηε νυμβερ α.

Φορ βρειτψ ανδ ιν ορδερ νοτ το ωεαρψ τηε ρεαδερ Ι συππρεσς τηε προοφς οφ τηεσε τηεορεμς ωηιςη φολλοω ιμμεδιατελψ φρομ τηε δεφινιτιονς οφ τηε πρειους σεςτιον.

Βεσιδε τηεσε προπερτιες, ηοωεερ, τηε δομαιν $\mathfrak{R}$ ποσσεσσες αλσο *ςοντινυιτψ*· ι. ε., τηε φολλοωινγ τηεορεμ ις τρυε:

ι. Ιφ τηε σψστεμ $\mathfrak{R}$ οφ αλλ ρεαλ νυμβερς βρεακς υπ ιντο τωο ςλασσες $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ συςη τηατ εερψ νυμβερ α_1 οφ τηε ςλασς $\mathfrak{A}_1$ ις λεσς τηαν εερψ νυμβερ α_2 οφ τηε ςλασς $\mathfrak{A}_2$ τηεν τηερε εξιστς ονε ανδ ονλψ ονε νυμβερ α βψ ωηιςη τηις σεπαρατιον ις προδυςεδ.

Προοφ. Βψ τηε σεπαρατιον ορ τηε ςυτ οφ $\mathfrak{R}$ ιντο $\mathfrak{A}_1$ ανδ $\mathfrak{A}_2$ ωε οβταιν ατ τηε σαμε τιμε α ςυτ (A_1, A_2) οφ τηε σψστεμ R οφ αλλ ρατιοναλ νυμβερς ωηιςη ις δεφινεδ βψ τηις τηατ A_1 ςονταινς αλλ ρατιοναλ νυμβερς οφ τηε ςλασς $\mathfrak{A}_1$ ανδ A_2 αλλ οτηερ ρατιοναλ νυμβερς, ι. ε., αλλ ρατιοναλ νυμβερς οφ τηε ςλασς $\mathfrak{A}_2$. Λετ α βε τηε περφεςτλψ δεφινιτε νυμβερ ωηιςη προδυςες τηις ςυτ (A_1, A_2). Ιφ β ις ανψ νυμβερ διφφερεντ φρομ α, τηερε αρε αλωαψς ινφινιτελψ μανψ ρατιοναλ νυμβερς c

λψινγ βετωεεν α ανδ β. Ιφ $\beta < \alpha$, τηεν $c < \alpha$· ηενςε c βελονγς το τηε ςλασς A_1 ανδ ςονσεχυεντλψ αλσο το τηε ςλασς $\mathfrak{A}_1$, ανδ σινςε ατ τηε σαμε τιμε $\beta < c$ τηεν β αλσο βελονγς το τηε σαμε ςλασς $\mathfrak{A}_1$, βεςαυσε εερψ νυμβερ ιν $\mathfrak{A}_2$ ις γρεατερ τηαν εερψ νυμβερ c ιν $\mathfrak{A}_1$. Βυτ ιφ $\beta > \alpha$, τηεν ις $c > \alpha$· ηενςε c βελονγς το τηε ςλασς A_2 ανδ ςονσεχυεντλψ αλσο το τηε ςλασς $\mathfrak{A}_2$, ανδ σινςε ατ τηε σαμε τιμε $\beta > c$, τηεν β αλσο βελονγς το τηε σαμε ςλασς $\mathfrak{A}_2$, βεςαυσε εερψ νυμβερ ιν $\mathfrak{A}_1$ ις λεσς τηαν εερψ νυμβερ c ιν $\mathfrak{A}_2$. Ηενςε εερψ νυμβερ β διφφερεντ φρομ α βελονγς το τηε ςλασς $\mathfrak{A}_1$ ορ το τηε ςλασς $\mathfrak{A}_2$ αςςορδινγ ας $\beta < \alpha$ ορ $\beta > \alpha$· ςονσεχυεντλψ α ιτσελφ ις ειτηερ τηε γρεατεστ νυμβερ ιν $\mathfrak{A}_1$ ορ τηε λεαστ νυμβερ ιν $\mathfrak{A}_2$, ι. ε., α ις ονε ανδ οβιουσλψ τηε ονλψ νυμβερ βψ ωηιςη τηε σεπαρατιον οφ $\mathfrak{R}$ ιντο τηε ςλασσες $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ ις προδυςεδ. Ωηιςη ωας το βε προεδ.

῞Ι. Οπερατιονς ωιτη Ρεαλ Νυμβερς

Το ρεδυςε ανψ οπερατιον ωιτη τωο ρεαλ νυμβερς α, β το οπερατιονς ωιτη ρατιοναλ νυμβερς, ιτ ις ονλψ νεςεσσαρψ φρομ τηε ςυτς (A_1, A_2), (B_1, B_2) προδυςεδ βψ τηε νυμβερς α ανδ β ιν τηε σψστεμ R το δεφινε τηε ςυτ (C_1, C_2) ωηιςη ις το ςορρεσπονδ το τηε ρεσυλτ οφ τηε οπερατιον, γ. Ι ςονφινε μψσελφ ηερε το τηε δισςυσσιον οφ τηε σιμπλεστ ςασε, τηατ οφ αδδιτιον.

Ιφ c ις ανψ ρατιοναλ νυμβερ, ωε πυτ ιτ ιντο τηε ςλασς C_1, προιδεδ τηερε αρε τωο νυμβερς ονε a_1 ιν A_1 ανδ ονε b_1 ιν B_1 συςη τηατ τηειρ συμ $a_1 + b_1 \geqq c$· αλλ οτηερ ρατιοναλ νυμβερς σηαλλ βε πυτ ιντο τηε ςλασς C_2. Τηις σεπαρατιον οφ αλλ ρατιοναλ νυμβερς ιντο τηε τωο ςλασσες C_1, C_2 ειδεντλψ φορμς α ςυτ, σινςε εερψ νυμβερ c_1 ιν C_1 ις λεσς τηαν εερψ νυμβερ c_2 ιν C_2. Ιφ βοτη α ανδ β αρε ρατιοναλ, τηεν εερψ νυμβερ c_1 ςονταινεδ ιν C_1 ις $\leqq \alpha + \beta$, βεςαυσε $a_1 \leqq \alpha$, $b_1 \leqq \beta$, ανδ τηερεφορε $a_1 + b_1 \leqq \alpha + \beta$· φυρτηερ, ιφ τηερε ωερε ςονταινεδ ιν C_2 α νυμβερ $c_2 < \alpha + \beta$, ηενςε $\alpha + \beta = c_2 + p$, ωηερε p ις α ποσιτιε ρατιοναλ νυμβερ, τηεν ωε σηουλδ ηαε

$$c_2 = (\alpha - \frac{1}{2}p) + (\beta - \frac{1}{2}p),$$

ωηιςη ςοντραδιςτς τηε δεφινιτιον οφ τηε νυμβερ c_2, βεςαυσε $\alpha - \frac{1}{2}p$ ις α νυμβερ ιν A_1, ανδ $\beta - \frac{1}{2}p$ α νυμβερ ιν B_1· ςονσεχυεντλψ εερψ νυμβερ c_2 ςονταινεδ ιν C_2 ις $\geqq \alpha + \beta$. Τηερεφορε ιν τηις ςασε τηε ςυτ (C_1, C_2) ις προδυςεδ βψ τηε συμ $\alpha + \beta$. Τηυς ωε σηαλλ νοτ ιολατε τηε δεφινιτιον ωηιςη ηολδς ιν τηε αριτημετις οφ ρατιοναλ νυμβερς ιφ ιν αλλ ςασες ωε υνδερστανδ βψ τηε συμ $\alpha + \beta$ οφ ανψ τωο ρεαλ νυμβερς α, β τηατ νυμβερ γ βψ ωηιςη τηε ςυτ (C_1, C_2) ις προδυςεδ. Φυρτηερ, ιφ ονλψ ονε οφ τηε τωο νυμβερς α, β ις ρατιοναλ, ε. γ., α, ιτ ις εασψ το σεε τηατ ιτ μακες νο διφφερενςε ωιτη τηε συμ $\gamma = \alpha + \beta$ ωηετηερ τηε νυμβερ α ις πυτ ιντο τηε ςλασς A_1 ορ ιντο τηε ςλασς A_2.

Θυστ ας αδδιτιον ις δεφινεδ, σο ςαν τηε οτηερ οπερατιονς οφ τηε σο-ςαλλεδ ελεμενταρψ αριτημετις βε δεφινεδ, ιζ., τηε φορματιον οφ διφφερενςες, προδυςτς, χυοτιεντς, ποωερς, ροοτς, λογαριτημς, ανδ ιν τηις ωαψ ωε αρριε ατ ρεαλ προοφς οφ τηεορεμς (ας, ε. γ., $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), ωηιςη το τηε βεστ οφ μψ κνοωλεδγε ηαε νεερ βεεν εσταβλισηεδ βεφορε. Τηε εξςεσσιε λενγτη τηατ ις το βε φεαρεδ ιν τηε δεφινιτιονς οφ τηε μορε ςομπλιςατεδ οπερατιονς ις παρτλψ ινηερεντ ιν τηε νατυρε οφ τηε συβϑεςτ βυτ ςαν φορ τηε μοστ παρτ βε αοιδεδ. ἔρψ υσεφυλ ιν τηις ςοννεςτιον ις τηε νοτιον οφ αν *ιντεραλ*, ι. ε., α σψστεμ A οφ ρατιοναλ νυμβερς ποσσεσσινγ τηε φολλοωινγ ςηαραςτεριστις προπερτψ: ιφ a ανδ a' αρε νυμβερς οφ τηε σψστεμ A, τηεν αρε αλλ ρατιοναλ νυμβερς λψινγ βετωεεν a ανδ a' ςονταινεδ ιν A. Τηε σψστεμ R οφ αλλ ρατιοναλ νυμβερς, ανδ αλσο τηε τωο ςλασσες οφ ανψ ςυτ αρε ιντεραλς. Ιφ τηερε εξιστ α ρατιοναλ νυμβερ a_1 ωηιςη ις λεσς ανδ α ρατιοναλ νυμβερ a_2 ωηιςη ις γρεατερ τηαν εερψ νυμβερ οφ τηε ιντεραλ A, τηεν A ις ςαλλεδ α φινιτε ιντεραλ· τηερε τηεν εξιστ ινφινιτελψ μανψ νυμβερς ιν τηε σαμε ςονδιτιον ας a_1 ανδ ινφινιτελψ μανψ ιν τηε σαμε ςονδιτιον ας a_2· τηε ωηολε δομαιν R βρεακς υπ ιντο τηρεε παρτς A_1, A, A_2 ανδ τηερε εντερ τωο περφεςτλψ δεφινιτε ρατιοναλ ορ ιρρατιοναλ νυμβερς α_1, α_2 ωηιςη μαψ βε ςαλλεδ ρεσπεςτιελψ τηε λοωερ ανδ υππερ (ορ τηε λεσς ανδ γρεατερ) *λιμιτς* οφ τηε ιντεραλ· τηε λοωερ λιμιτ α_1 ις δετερμινεδ βψ τηε ςυτ φορ ωηιςη τηε σψστεμ A_1 φορμς τηε φιρστ ςλασς ανδ τηε υππερ α_2 βψ τηε ςυτ φορ ωηιςη τηε σψστεμ A_2 φορμς τηε σεςονδ ςλασς. Οφ εερψ ρατιοναλ ορ ιρρατιοναλ νυμβερ α λψινγ βετωεεν α_1 ανδ α_2 ιτ μαψ βε σαιδ τηατ ιτ λιες *ωιτηιν* τηε ιντεραλ A. Ιφ αλλ νυμβερς οφ αν ιντεραλ A αρε αλσο νυμβερς οφ αν ιντεραλ B, τηεν A ις ςαλλεδ α πορτιον οφ B.

Στιλλ λενγτηιερ ςονσιδερατιονς σεεμ το λοομ υπ ωηεν ωε αττεμπτ το αδαπτ τηε νυμερους τηεορεμς οφ τηε αριτημετις οφ ρατιοναλ νυμβερς (ας, ε. γ., τηε τηεορεμ $(a+b)c = ac+bc$) το ανψ ρεαλ νυμβερς. Τηις, ηοωεερ, ις νοτ τηε ςασε. Ιτ ις εασψ το σεε τηατ ιτ αλλ ρεδυςες το σηοωινγ τηατ τηε αριτημετις οπερατιονς ποσσεσς α ςερταιν ςοντινυιτψ. Ωηατ Ι μεαν βψ τηις στατεμεντ μαψ βε εξπρεσσεδ ιν τηε φορμ οφ α γενεραλ τηεορεμ:

‘Ιφ τηε νυμβερ λ ις τηε ρεσυλτ οφ αν οπερατιον περφορμεδ ον τηε νυμβερς α, β, γ, … ανδ λ λιες ωιτηιν τηε ιντεραλ L, τηεν ιντεραλς A, B, C, … ςαν βε τακεν ωιτηιν ωηιςη λιε τηε νυμβερς α, β, γ, … συςη τηατ τηε ρεσυλτ οφ τηε σαμε οπερατιον ιν ωηιςη τηε νυμβερς α, β, γ, … αρε ρεπλαςεδ βψ αρβιτραρψ νυμβερς οφ τηε ιντεραλς A, B, C, … ις αλωαψς α νυμβερ λψινγ ωιτηιν τηε ιντεραλ L.’ Τηε φορβιδδινγ ςλυμσινεσς, ηοωεερ, ωηιςη μαρκς τηε στατεμεντ οφ συςη α τηεορεμ ςονινςες υς τηατ σομετηινγ μυστ βε βρουγητ ιν ας αν αιδ το εξπρεσσιον· τηις ις, ιν φαςτ, ατταινεδ ιν τηε μοστ σατισφαςτορψ ωαψ βψ ιντροδυςινγ τηε ιδεας οφ *αριαβλε μαγνιτυδες*, *φυνςτιονς*, *λιμιτινγ αλυες*, ανδ ιτ ωουλδ βε βεστ το βασε τηε δεφινιτιονς οφ εεν τηε σιμπλεστ αριτημετις οπερατιονς υπον τηεσε ιδεας, α ματτερ ωηιςη, ηοωεερ, ςαννοτ βε ςαρριεδ φυρτηερ ηερε.

ΊΙ. Ινφινιτεσιμαλ Αναλψσις

Ηερε ατ τηε ςλοσε ωε ουγητ το εξπλαιν τηε ςοννεςτιον βετωεεν τηε πρεςεδινγ ινεστιγατιονς ανδ ςερταιν φυνδαμενταλ τηεορεμς οφ ινφινιτεσιμαλ αναλψσις.

Ωε σαψ τηατ α αριαβλε μαγνιτυδε x ωηιςη πασσες τηρουγη συςςεσσιε δεφινιτε νυμεριςαλ αλυες αππροαςηες α φιξεδ λιμιτινγ αλυε α ωηεν ιν τηε ςουρσε οφ τηε προςεσς x λιες φιναλλψ βετωεεν τωο νυμβερς βετωεεν ωηιςη α ιτσελφ λιες, ορ, ωηατ αμουντς το τηε σαμε, ωηεν τηε διφφερενςε $x-\alpha$ τακεν αβσολυτελψ βεςομες φιναλλψ λεσς τηαν ανψ γιεν αλυε διφφερεντ φρομ ζερο.

Ονε οφ τηε μοστ ιμπορταντ τηεορεμς μαψ βε στατεδ ιν τηε φολλοωινγ μαννερ: ‘Ιφ α μαγνιτυδε x γροως ςοντινυαλλψ βυτ νοτ βεψονδ αλλ λιμιτς ιτ αππροαςηες α λιμιτινγ αλυε.’

Ι προε ιτ ιν τηε φολλοωινγ ωαψ. Βψ ηψποτηεσις τηερε εξιστς ονε ανδ ηενςε τηερε εξιστ ινφινιτελψ μανψ νυμβερς α_2 συςη τηατ x ρεμαινς ςοντινυαλλψ $< \alpha_2$· Ι δεσιγνατε βψ $\mathfrak{A}_2$ τηε σψστεμ οφ αλλ τηεσε νυμβερς α_2, βψ $\mathfrak{A}_1$ τηε σψστεμ οφ αλλ οτηερ νυμβερς α_1· εαςη οφ τηε λαττερ ποσσεσσες τηε προπερτψ τηατ ιν τηε ςουρσε οφ τηε προςεσς x βεςομες φιναλλψ $\geqq \alpha_1$, ηενςε εερψ νυμβερ α_1 ις λεσς τηαν εερψ νυμβερ α_2 ανδ ςονσεχυεντλψ τηερε εξιστς α νυμβερ α ωηιςη ις ειτηερ τηε γρεατεστ ιν $\mathfrak{A}_1$ ορ τηε λεαστ ιν $\mathfrak{A}_2$ (˝, I). Τηε φορμερ ςαννοτ βε τηε ςασε σινςε x νεερ ςεασες το γροω, ηενςε α ις τηε λεαστ νυμβερ ιν $\mathfrak{A}_2$. Ωηατεερ νυμβερ α_1 βε τακεν ωε σηαλλ ηαε φιναλλψ $\alpha_1 < x < \alpha$, ι. ε., x αππροαςηες τηε λιμιτινγ αλυε α.

Τηις τηεορεμ ις εχυιαλεντ το τηε πρινςιπλε οφ ςοντινυιτψ, ι. ε., ιτ λοσες ιτς αλιδιτψ ας σοον ας ωε ασσυμε α σινγλε ρεαλ νυμβερ νοτ το βε ςονταινεδ ιν τηε δομαιν $\mathfrak{R}$· ορ οτηερωισε εξπρεσσεδ: ιφ τηις τηεορεμ ις ςορρεςτ, τηεν ις αλσο τηεορεμ I. ιν ˝. ςορρεςτ.

Ανοτηερ τηεορεμ οφ ινφινιτεσιμαλ αναλψσις, λικεωισε εχυιαλεντ το τηις, ωηιςη ις στιλλ οφτενερ εμπλοψεδ, μαψ βε στατεδ ας φολλοως: 'Ιφ ιν τηε αριατιον οφ α μαγνιτυδε x ωε ςαν φορ εερψ γιεν ποσιτιε μαγνιτυδε δ ασσιγν α ςορρεσπονδινγ ποσιτιον φρομ ανδ αφτερ ωηιςη x ςηανγες βψ λεσς τηαν δ τηεν x αππροαςηες α λιμιτινγ αλυε.'

Τηις ςονερσε οφ τηε εασιλψ δεμονστρατεδ τηεορεμ τηατ εερψ αριαβλε μαγνιτυδε ωηιςη αππροαςηες α λιμιτινγ αλυε φιναλλψ ςηανγες βψ λεσς τηαν ανψ γιεν ποσιτιε μαγνιτυδε ςαν βε δεριεδ ας ωελλ φρομ τηε πρεςεδινγ τηεορεμ ας διρεςτλψ φρομ τηε πρινςιπλε οφ ςοντινυιτψ. Ι τακε τηε λαττερ ςουρσε. Λετ δ βε ανψ ποσιτιε μαγνιτυδε (ι. ε., $\delta > 0$), τηεν βψ ηψποτηεσις α τιμε ωιλλ ςομε αφτερ ωηιςη x ωιλλ ςηανγε βψ λεσς τηαν δ, ι. ε., ιφ ατ τηις τιμε x ηας τηε αλυε a, τηεν αφτερωαρδς ωε σηαλλ ςοντινυαλλψ ηαε $x > a - \delta$ ανδ $x < a + \delta$. Ι νοω φορ α μομεντ λαψ ασιδε τηε οριγιναλ ηψποτηεσις ανδ μακε υσε ονλψ οφ τηε τηεορεμ ϑυστ δεμονστρατεδ τηατ αλλ λατερ αλυες οφ τηε αριαβλε x λιε βετωεεν τωο ασσιγναβλε φινιτε αλυες. Υπον τηις Ι βασε α δουβλε σεπαρατιον οφ αλλ ρεαλ νυμβερς. Το τηε σψστεμ $\mathfrak{A}_2$ Ι ασσιγν α νυμβερ α_2 (ε.γ., $a + \delta$) ωηεν ιν τηε ςουρσε οφ τηε προςεσς x βεςομες φιναλλψ $\leqq \alpha_2$· το τηε σψστεμ $\mathfrak{A}_1$ Ι ασσιγν εερψ νυμβερ νοτ ςονταινεδ ιν $\mathfrak{A}_2$· ιφ α_1 ις συςη α νυμβερ, τηεν, ηοωεερ φαρ τηε προςεσς μαψ ηαε αδανςεδ, ιτ ωιλλ στιλλ ηαππεν ινφινιτελψ μανψ τιμες τηατ $x > \alpha_1$. Σινςε εερψ νυμβερ α_1 ις λεσς τηαν εερψ νυμβερ α_2 τηερε εξιστς α περφεςτλψ δεφινιτε νυμβερ α ωηιςη προδυςες τηις ςυτ $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ οφ τηε σψστεμ $\mathfrak{R}$ ανδ ωηιςη Ι ωιλλ ςαλλ τηε υππερ λιμιτ οφ τηε αριαβλε x ωηιςη αλωαψς ρεμαινς φινιτε. Λικεωισε ας α ρεσυλτ οφ τηε βεηαιορ οφ τηε αριαβλε x α σεςονδ ςυτ $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ οφ τηε σψστεμ $\mathfrak{R}$ ις προδυςεδ· α νυμβερ β_1 (ε. γ., $a - \delta$) ις ασσιγνεδ το $\mathfrak{B}_1$ ωηεν ιν τηε ςουρσε οφ τηε προςεσς x βεςομες φιναλλψ $\geqq \beta_1$· εερψ οτηερ νυμβερ β_2, το βε ασσιγνεδ το $\mathfrak{B}_2$, ηας τηε προπερτψ τηατ x ις νεερ φιναλλψ $\geqq \beta_2$· τηερεφορε ινφινιτελψ μανψ τιμες x βεςομες $< \beta_2$· τηε νυμβερ β βψ ωηιςη τηις ςυτ ις προδυςεδ Ι ςαλλ τηε λοωερ λιμιτινγ αλυε οφ τηε αριαβλε x. Τηε τωο νυμβερς α, β αρε οβιουσλψ ςηαραςτερισεδ βψ τηε φολλοωινγ προπερτψ: ιφ ϵ ις αν αρβιτραριλψ σμαλλ ποσιτιε μαγνιτυδε τηεν ωε ηαε αλωαψς φιναλλψ $x < \alpha + \epsilon$ ανδ $x > \beta - \epsilon$, βυτ νεερ φιναλλψ $x < \alpha - \epsilon$ ανδ νεερ φιναλλψ $x > \beta + \epsilon$. Νοω τωο ςασες αρε ποσσιβλε. Ιφ α ανδ β αρε διφφερεντ φρομ εαςη οτηερ, τηεν νεςεσσαριλψ $\alpha > \beta$, σινςε ςοντινυαλλψ $\alpha_2 \geqq \beta_1$· τηε αριαβλε x οσςιλλατες, ανδ, ηοωεερ φαρ τηε προςεσς αδανςες, αλωαψς υνδεργοες ςηανγες ωηοσε αμουντ συρπασσες τηε αλυε

$(\alpha - \beta) - 2\epsilon$ ωηερε ϵ ις αν αρβιτραριλψ σμαλλ ποσιτιε μαγνιτυδε. Τηε οριγιναλ ηψποτησεσις το ωηιςη Ι νοω ρετυρν ςοντραδιςτς τηις ςονσεχυενςε· τηερε ρεμαινς ονλψ τηε σεςονδ ςασε $\alpha = \beta$ σινςε ιτ ηας αλρεαδψ βεεν σηοων τηατ, ηοωεερ σμαλλ βε τηε ποσιτιε μαγνιτυδε ϵ, ωε αλωαψς ηαε φιναλλψ $x < \alpha + \epsilon$ ανδ $x > \beta - \epsilon$, x αππροαςηες τηε λιμιτινγ αλυε α, ωηιςη ωας το βε προεδ.

Τηεσε εξαμπλες μαψ συφφιςε το βρινγ ουτ τηε ςοννεςτιον βετωεεν τηε πρινςιπλε οφ ςοντινυιτψ ανδ ινφινιτεσιμαλ αναλψσις.

Νοτες ον Δεδεκινδ΄ς *ὂντινυιτψ ανδ Ιρρατιοναλ Νυμβϵρς*

Νοτε 1

Δεδεκινδ ις ςονςερνεδ ωιτη φινδινγ α σςιεντιφις φουνδατιον φορ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς. Αςςορδινγ το ηιμ, πρειους αςςουντς οφ τηε φουνδατιονς οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς αλλ δεπενδ ον γεομετρψ, ανδ τηις μακες τηεμ υνσςιεντιφις. Ηε ωουλδ λικε το ρεμεδψ τηις δεφεςτ βψ προιδινγ α πυρελψ αριτημετις φουνδατιον. Ηε ασσερτς τηατ α ςερταιν τηεορεμ 'ςαν βε ρεγαρδεδ ιν σομε ωαψ ας α συφφιςιεντ βασις φορ ινφινιτεσιμαλ αναλψσις,'[1] ναμελψ τηε τηεορεμ τηατ

> εερψ μαγνιτυδε ωηιςη γροως ςοντινυαλλψ, βυτ νοτ βεψονδ αλλ λιμιτς, μυστ ςερταινλψ αππροαςη α λιμιτινγ αλυε.

Ηε ωιλλ δεμονστρατε τηις τηεορεμ ιν α πυρελψ αριτημετις ωαψ ιν τηε φιναλ σεςτιον οφ 'ὂντινυιτψ ανδ Ιρρατιοναλ Νυμβερς.' Βυτ ηε νεερ εξπλαινς ωηψ ηε τηινκς τηις τηεορεμ ις α συφφιςιεντ βασις φορ ινφινιτεσιμαλ αναλψσις ορ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς. Ωε ωιλλ τρψ το σκετςη ηερε ωηψ ονε μιγητ τηινκ τηις. Ωε ωιλλ φιρστ δισςυσς τηε νοτιον οφ α 'λιμιτινγ αλυε,' ανδ τηεν σηοω ηοω δεριατιες ςαν βε σεεν ας βασεδ ον λιμιτς.

Λιμιτς

Ωηεν Λειβνιζ φιρστ σπεακς οφ ηοω τηε ςαλςυλυς ις υσεδ ('Α Νεω Μετηοδ,' παγε 34) ηε ωριτες τηατ

> το φινδ α *ταγγϵντ* ις το δραω α στραιγητ λινε ϑοινινγ τωο ποιντς ον α ςυρε τηατ αρε αν ινφινιτελψ σμαλλ διστανςε απαρτ, ορ το δραω τηε σιδε οφ α πολψγον ωιτη ινφινιτελψ μανψ ανγλες (ωηιςη ις φορ υς εχυιαλεντ το τηε *ςυρϵ*).

Ιν α παπερ πυβλισηεδ λατερ τηατ ψεαρ[2] Λειβνιζ ελαβορατες:

> Ι τηινκ τηατ τηις μετηοδ ανδ αλλ τηε οτηερ μετηοδς [φορ φινδινγ μεασυρεμεντς οφ φιγυρες] τηατ ηαε βεεν υσεδ τηυς φαρ ςαν βε δεδυςεδ φρομ α ςερταιν γενεραλ πρινςιπλε οφ μινε φορ μεασυρινγ ςυριλινεαρ αρεας, ναμελψ, *τηατ α ςυριλινϵαρ φιγυρϵ σηουλδ βϵ ςονσιδϵρϵδ ας ϵχυιαλϵντ το α πολψγον ωιτη ινφινιτϵλψ μανψ σιδϵς*· ιτ φολλοως τηατ ωηατεερ ςαν βε δεμονστρατεδ αβουτ συςη α Πολψγον—ωηετηερ ιν συςη α ωαψ τηατ ωε παψ νο αττεντιον το τηε νυμβερ οφ σιδες, ορ ιν συςη α ωαψ τηατ ιτ ις μαδε μορε ανδ μορε τρυε τηε γρεατερ νυμβερ οφ σιδες ωε τακε, σο τηατ τηε ερρορ φιναλλψ βεςομες λεσς τηαν ανψ γιεν νυμβερ—ςαν βε δεςλαρεδ το βε τρυε αβουτ τηε ςυρε.

[1] 'Ινφινιτεσιμαλ ςαλςυλυσ' σεεμς το βε α σψνονψμ φορ 'διφφερεντιαλ ςαλςυλυσ' φορ Δεδεκινδ.

[2] 'Αν Αδδενδυμ το τηε Παπερ ον Φινδινγ Μεασυρεμεντς οφ Φιγυρες,' πυβλισηεδ ιν Δεςεμβερ οφ 1684 ιν τηε *Αςτς*. Σεε παγε 126 οφ ὂλυμε ῞ οφ Γερηαρδτ΄ς Εδιτιον οφ Λειβνιζ΄ς ματηεματιςαλ ωορκς.

Ηερε Λειβνιζ ις τηινκινγ οφ τηε πολψγον νοτ σο μυςη ας αςτυαλλψ ηαινγ αν ινφινιτε νυμβερ οφ σιδες, βυτ ας ηαινγ αν ινδεφινιτελψ λαργε νυμβερ οφ σιδες, α νυμβερ τηατ ςαν αλωαψς βε ινςρεασεδ. Φορ εξαμπλε, ιφ τηε ςυριλινεαρ φιγυρε ις α ςιρςλε, ωε ςουλδ βεγιν βψ ινσςριβινγ α τριανγλε, ωηιςη ηας αν αρεα μυςη λεσς τηαν τηατ οφ τηε ςιρςλε. Νεξτ, ωε ςουλδ ινσςριβε α σχυαρε, ωηιςη ηας α λαργερ αρεα, βυτ στιλλ λεσς τηαν τηατ οφ τηε ςιρςλε. Ωε ςουλδ γο ον το ινσςριβε α πενταγον, α ηεξαγον, ανδ σο ον. Τηε μαγνιτυδε οφ τηε ινσςριβεδ πολψγον ωουλδ γροω ςοντινυαλλψ. Μορεοερ, ας ωε ινςρεασε τηε νυμβερ οφ σιδες τηε πολψγον'ς αρεα ωουλδ διφφερ φρομ τηε ςιρςλε'ς βψ λεσς τηαν ανψ γιεν νυμβερ· τηατ ις, ωε ςουλδ φινδ α πολψγον τηατ ις ας ςλοσε ας ωε ωουλδ λικε το βεινγ εχυαλ το α ςιρςλε. Φορ Λειβνιζ, α ςιρςλε ις τηυς εχυιαλεντ το α πολψγον ωιτη ινφινιτελψ μανψ σιδες.

Νοτε τηατ φορ Δεδεκινδ, τηε πολψγον ωιτη ινφινιτελψ μανψ σιδες ινσςριβεδ ιν α ςιρςλε ις α 'μαγνιτυδε ωηιςη γροως ςοντινυαλλψ.' Βυτ ιτ δοες νοτ γο 'βεψονδ αλλ λιμιτς,' σινςε αλλ τηε ινσςριβεδ πολψγονς αρε λεσς τηαν τηε ςιρςλε. Τηερεφορε, αςςορδινγ το τηε τηεορεμ Δεδεκινδ αιμς το προε, τηε πολψγον ωιτη ινφινιτελψ μανψ σιδες 'μυστ ςερταινλψ αππροαςη α λιμιτινγ αλυε.'

Ιφ α πολψγον ηας ινφινιτελψ μανψ σιδες, αλλ τηεσε σιδες μυστ βε ινφινιτελψ σμαλλ. Λειβνιζ ις τηυς ινιτινγ υς ηερε το τηινκ οφ ινφινιτελψ σμαλλ διφφερενςες λικε dx ας *ινδεφινιτελψ* σμαλλ, ανδ ηις διφφερεντιαλ εχυατιονς ας αππροξιματε εχυατιονς βετωεεν ινδεφινιτελψ σμαλλ χυαντιτιες τηατ βεςομε 'μορε ανδ μορε τρυε' τηε σμαλλερ τηε χυαντιτιες βεςομε, 'σο τηατ τηε ερρορ φιναλλψ βεςομες λεσς τηαν ανψ γιεν νυμβερ.' Ιφ ωε τηινκ αβουτ τηε ςαλςυλυς ιν τηις ωαψ, ωε τηυς αοιδ, το σομε εξτεντ, τηε παραδοξες οφ τηε ινφινιτε ανδ τηε ινφινιτελψ σμαλλ.

Λατερ ματηεματιςιανς ςαλλ α ςυριλινεαρ αρεα α *λιμιτ* οφ πολψγονς. Φορ ωηιλε τηε ςυριλινεαρ αρεα ις νοτ ιτσελφ α πολψγον, ωε ςαν φινδ πολψγονς ωηοσε αρεας αρε ας ςλοσε ας ωε πλεασε το τηε ςυριλινεαρ αρεα. Ιν γενεραλ, συπποσε τηατ α χυαντιτψ y δεπενδς ον α χυαντιτψ x, σο τηατ y ις α φυνςτιον οφ x, τηατ ις,

$$y = f(x),$$

φορ σομε φυνςτιον f. Τηεν ωε σαψ τηατ τηε *λιμιτ* οφ $f(x)$ ας x αππροαςηες ινφινιτψ ις εχυαλ το L ιφ, ας x ινςρεασες, τηε διφφερενςε βετωεεν $f(x)$ ανδ L βεςομες λεσς τηαν ανψ γιεν χυαντιτψ. Ωε δενοτε τηις βψ

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Τηε λιμιτ οφ $f(x)$ ας x γοες το ινφινιτψ ις L ιφ, φορ ανψ γιεν χυαντιτψ ϵ, τηερε ις α χυαντιτψ N συςη τηατ ωηεν $x > N$, τηε διφφερενςε βετωεεν $f(x)$ ανδ L ις λεσς τηαν τηε γιεν χυαντιτψ ϵ. Φορ εξαμπλε, ιφ $f(x) = \dfrac{1}{x}$, τηεν

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Φορ ιφ ϵ ις ανψ γιεν χυαντιτψ, ανδ ιφ $N = \dfrac{1}{\epsilon}$, τηεν ωηεν x ις γρεατερ τηαν N,

$$f(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \epsilon,$$

ανδ τηερεφορε τηε διφφερενςε βετωεεν $f(x)$ ανδ 0 ις λεσς τηαν τηε αρβιτραρψ γιεν χυαντιτψ ϵ.

Ιν Λειβνιζ’ς εξαμπλε, $f(x)$ ςουλδ δενοτε τηε αρεα οφ α πολψγον ινσςριβεδ ωιτηιν α ςυριλινεαρ φιγυρε, x τηε νυμβερ οφ ιτς σιδες, ανδ L τηε αρεα οφ τηε ςυριλινεαρ φιγυρε. Φορ φορ ανψ γιεν ϵ, τηερε ις α νυμβερ N συςη τηατ ανψ πολψγον ωιτη μορε τηαν N σιδες ωιλλ αλωαψς διφφερ φρομ τηε ςυριλινεαρ αρεα βψ λεσς τηαν τηε γιεν χυαντιτψ ϵ.

Ωε ςαν αλσο σπεακ οφ τηε λιμιτ οφ $f(x)$ ας x αππροαςηες α φινιτε αλυε. Ωε σαψ τηατ τηε λιμιτ οφ $f(x)$ ας x αππροαςηες σομε φινιτε αλυε a ις εχυαλ το L ιφ, ας x αππροαςηες a, τηε διφφερενςε βετωεεν $f(x)$ ανδ L βεςομες λεσς τηαν ανψ γιεν χυαντιτψ. Ιν οτηερ ωορδς, ιφ ϵ ις ανψ γιεν χυαντιτψ, τηεν τηερε ις α χυαντιτψ δ συςη τηατ ωηεν τηε διφφερενςε βετωεεν x ανδ a ις λεσς τηαν δ, τηεν τηε διφφερενςε βετωεεν $f(x)$ ανδ L ις λεσς τηαν ϵ. Ωε δενοτε τηις βψ

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Φορ εξαμπλε, ιφ $f(x) = x^2$, τηεν

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Φορ ιφ ϵ ις ανψ γιεν χυαντιτψ, ανδ ιφ $\delta = \sqrt{\epsilon}$, τηεν ιφ $x < \delta$,

$$f(x) = x^2 < (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon,$$

ανδ τηερεφορε τηε διφφερενςε βετωεεν $f(x)$ ανδ 0 ις λεσς τηαν τηε αρβιτραρψ γιεν χυαντιτψ ϵ.

Λιμιτς ανδ δεριατιες

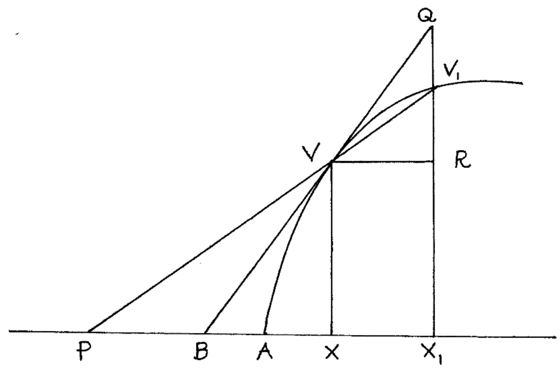
Ιφ ωε αρε γοινγ το φουνδ τηε ςαλςυλυς ον Δεδεκινδ’ς τηεορεμ, ωε φιρστ νεεδ το σεε ηοω ωε ςαν τηινκ οφ διφφερενςες ορ δεριατιες ιν τερμς οφ ιτ. Το δο τηις, ωε εξπρεσς α ρατιο οφ διφφερενςες

$$\frac{dv}{dx},$$

τηατ ις τηε δεριατιε οφ v ωιτη ρεσπεςτ το x, ας α ‘λιμιτινγ αλυε’ οφ α μαγνιτυδε τηατ ‘γροως ςοντινυαλλψ.’

Φιρστ, φολλοωινγ Λειβνιζ’ς συγγεστιον, ωε τακε τηε ταγγεντ το α ςυρε ας α λινε ςοννεςτινγ τωο ινδεφινιτελψ ςλοσε ποιντς, σο τηατ τηε ταγγεντ ωιλλ βε α λιμιτ οφ λινες τηατ ςυτ τηατ ςυρε ατ τωο ποιντς ας τηοσε τωο ποιντς ςομε τογετηερ. Σεε Φιγυρε 1. Τηερε, ας V_1 αππροαςηες V, τηε ςυττινγ λινε (ορ *σεςαντ*) PVV_1 αππροαςηες τηε ταγγεντ BVQ. Ιφ ωε λετ $VX = v$, $AX = x$, $VR = \Delta x$, ανδ $V_1R = \Delta v$, ανδ συπποσε νοω τηατ Δx ανδ Δv αρε ινδεφινιτελψ σμαλλ αριαβλε χυαντιτιες, τηεν τηε σλοπε οφ τηε ςυττινγ λινε PVV_1 ις εχυαλ το

$$\frac{\Delta v}{\Delta x},$$



Φιγυρε 1

ωηιλε τηε σλοπε οφ τηε τανγεντ λινε ις

$$\frac{dv}{dx}.$$

Τηε σλοπε οφ τηε σεςαντ PVV_1 ςοντινυαλλψ γροως, ανδ ας Δx αππροαςηες 0, τηε σλοπε οφ τηε ςυττινγ λινε αππροαςηες τηε σλοπε οφ τηε τανγεντ λινε· τηατ ις, τηε λιμιτ οφ τηε σλοπε οφ τηε ςυττινγ λινε ας Δx αππροαςηες 0 ις εχυαλ το τηε σλοπε οφ τηε τανγεντ λινε, τηατ ις,

$$\frac{dv}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Ονε ςουλδ σαψ τηατ, ιν Λειβνιζ΄ς ωορδς, τηε αππροξιματε εχυατιον

$$\frac{dv}{dx} \approx \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

βεςομες 'μορε ανδ μορε τρυε' τηε σμαλλερ ωε τακε Δx, ανδ 'τηε ερρορ φιναλλψ βεςομες λεσς τηαν ανψ γιεν νυμβερ,' ανδ τηερεφορε τηατ ιφ ωε τακε Δx ας ινφινιτελψ σμαλλ τηε εχυατιον 'ςαν βε δεςλαρεδ το βε τρυε.'

Ωε ηαε υσεδ 'γεομετρις νοτιονσ' το σεε τηατ τηε σλοπε οφ τηε τανγεντ λινε BVQ ις τηε λιμιτ οφ τηε σλοπε οφ τηε ςυττινγ λινες PVV_1. Βυτ φορ Δεδεκινδ τηις ις νοτ συφφιςιεντ. Φορ ηιμ, ονλψ αν αριτημετις δεμονστρατιον ςαν βε τρυλψ ριγορους ανδ σςιεντιφις. Το γετ α πυρελψ αριτημετις φουνδατιον φορ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς, ωε νεεδ το τρανσλατε ουρ διαγραμ ιντο αριτημετις τερμς. Τηερεφορε ωε ηαε το ασσυμε ωε αρε γιεν α φυνςτιον $f(x)$ αριτημετιςαλλψ, φορ εξαμπλε, βψ αν αλγεβραις εχυατιον. Το τρανσλατε ουρ διαγραμ ιντο αριτημετις τερμς, λετ $VX = f(x)$. Τηεν, σινςε $AX_1 = x + \Delta x$, $V_1X_1 = f(x + \Delta x)$ ανδ

$$\Delta v = V_1X_1 - VX = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Τηεν

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{dv}{dx} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.
\end{aligned}
$$

Τηις λαστ εχυατιον μαψ βε ςονσιδερεδ τηε *δεφινιτιον* οφ τηε δεριατιε ιν φυνςτιοναλ νοτατιον. Ιτ ωουλδ βε μεανινγφυλ εεν ιφ $f(x)$ ις νοτ δεφινεδ γεομετριςαλλψ.

Ωε ςουλδ υσε τηις εχυατιον το δεμονστρατε τηε βασις ρυλες οφ τηε διφφερεντιαλ ςαλςυλυς. Φορ εξαμπλε, ιφ $f(x) = x^2$, τηεν, αςςορδινγ το τηις δεφινιτιον,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \\
&= 2x.
\end{aligned}
$$

Ωε ηαε τηυς δεμονστρατεδ τηε ποωερ ρυλε φορ τηε εξπονεντ 2 πυρελψ αριτημετιςαλλψ:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

Ωε ςουλδ λικεωισε δεμονστρατε αλλ τηε οτηερ ρυλες.

Ιν τηις εξαμπλε ιτ ις ςλεαρ τηατ τηε λιμιτ εξιστς. Βυτ ιν γενεραλ, ιτ ις νοτ ατ αλλ ςλεαρ τηατ φορ αν αριτημετιςαλλψ δεφινεδ φυνςτιον $f(x)$,

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ωιλλ αππροαςη α λιμιτινγ αλυε ας Δx αππροαςηες 0. Ιφ ωε ωαντ α φουνδατιον οφ τηε ςαλςυλυς τηατ ωορκς φορ ας μανψ φυνςτιονς ας ποσσιβλε, ωε τηερεφορε ηαε το βε αβλε το διστινγυιση τηοσε φυνςτιονς φορ ωηιςη δεριατιες εξιστ φρομ τηοσε τηατ δο νοτ. Δεδεκινδ΄ς τηεορεμ προιδες α ποωερφυλ τοολ το δο τηις. Ιτ σαψς τηατ ωηενεερ

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ινςρεασες ςοντινυαλλψ, βυτ δοες νοτ γο βεψονδ αλλ λιμιτς, ας Δx αππροαςηες ζερο, τηεν τηε δεριατιε

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

αλωαψς εξιστς.

Νοτε 2

Ιφ τηερε *ωερε* α ρατιοναλ νυμβερ ωηοσε σχυαρε $= D$, τηεν ιτ ωουλδ ςονσιστ οφ ποσιτιε ιντεγερς t ανδ u, u βεινγ λεαστ, συςη τηατ

$$\frac{t^2}{u^2} = D. \tag{1}$$

Σιμπλε αλγεβραις μανιπυλατιον γιες υς τηε εχυιαλεντ φορμς ιν Δεδεκινδ:[3]

$$t^2 = Du^2 \quad \text{and} \quad t^2 - Du^2 = 0.^* \tag{2}$$

Ον τηε πρειους παγε (π. 216) Δεδεκινδ ηας αλρεαδψ σηοων τηατ ιφ D ις α ποσιτιε ιντεγερ βυτ νοτ τηε σχυαρε οφ αν ιντεγερ, τηεν τηερε εξιστς α ποσιτιε ιντεγερ λ συςη τηατ

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.^* \tag{3}$$

Ωε ςαν συβστιτυτε φορ D φρομ (1) λικε σο,

$$\lambda^2 < \frac{t^2}{u^2} < (\lambda + 1)^2. \tag{4}$$

Τακινγ τηε σχυαρε ροοτ το σιμπλιφψ ψιελδς

$$\lambda < \frac{t}{u} < (\lambda + 1). \tag{5}$$

Ανδ μυλτιπλψινγ τηρουγη βψ u γιες υς

$$\lambda u < t < (\lambda + 1)u.^* \tag{6}$$

Ωε ςαν αλσο μυλτιπλψ u τηρουγη τηε λαστ τερμ οφ τηε ινεχυαλιτψ το γετ

$$\lambda u < t < \lambda u + u. \tag{7}$$

Ανδ βψ συβτραςτινγ λu φρομ αλλ τερμς, ωε γετ

$$0 < t - \lambda u < u. \tag{8}$$

Σινςε $u' = t - \lambda u$,* ιτ φολλοως φρομ (8) τηατ u' ις α ποσιτιε ιντεγερ λεσς τηαν u.

[3] Στεπς εξπλιςιτ ιν Δεδεκινδ αρε αστερισκεδ.

Γοινγ βαςκ το (5), ωε νοω μυλτιπλψ τηρουγη βψ t ινστεαδ οφ u:

$$\lambda t < \frac{t^2}{u} < \lambda t + t. \tag{9}$$

Τηεν ωε μυλτιπλψ τηε μιδδλε τερμ βψ u/u, ψιελδινγ

$$\lambda t < \frac{t^2 u}{u^2} < \lambda t + t. \tag{10}$$

Σινςε $D = t^2/u^2$, ωε ςαν συβστιτυτε D ιν τηε μιδδλε τερμ, γεττινγ

$$\lambda t < Du < \lambda t + t. \tag{11}$$

Ωε τηεν συβτραςτ λt φρομ αλλ τερμς, γεττινγ

$$0 < Du - \lambda t < t. \tag{12}$$

Λεττινγ $t' = Du - \lambda t$*, ωε ςαν σεε φρομ (12) τηατ t' ις λικεωισε α ποσιτιε ιντεγερ, ας Δεδεκινδ σαψς.

Ωε νοω σηοω τηατ t' ανδ $u' < u$ αλσο σατισφψ εχυατιον (2) αβοε ιφ t ανδ u δο, ςοντραρψ το ουρ ασσυμπτιον αβουτ u. Ρεπλαςινγ t ανδ u ιν (2) ωιτη t' ανδ u', ωε γετ:

$$\begin{aligned} t'^2 - Du'^2 &= (Du - \lambda t)^2 - D(t - \lambda u)^2 && (13)\\ &= D^2u^2 - 2Du\lambda t + \lambda^2 t^2 - Dt^2 + 2Du\lambda t - D\lambda^2 u^2 && (14)\\ &= \lambda^2 t^2 - Dt^2 - D\lambda^2 u^2 + D^2 u^2 && (15)\\ &= (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2).^* && (16) \end{aligned}$$

Φρομ (16), ωε ςαν σεε τηατ $t'^2 - Du'^2 = 0$ ιφ $t^2 - Du^2 = 0$. Βυτ τηεν t' ανδ u' σατισφψ τηις εχυατιον εεν τηουγη $u' < u$, ςοντραρψ το ουρ ασσυμπτιον αβουτ u, ανδ τηυς αβουτ ανψ ποσιτιε ιντεγερς t ανδ u αβλε το σατισφψ εχυατιον (2). Ηενςε τηε σχυαρε οφ εερψ ρατιοναλ νυμβερ x ις ειτηερ $< D$ ορ $> D$.

Νοω ςονσιδερ:

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D}.^* \tag{17}$$

Ιφ ωε συβτραςτ x φρομ βοτη σιδες οφ (17) λικε σο,

$$y - x = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D} - \frac{x(3x^2 + D)}{3x^2 + D}, \tag{18}$$

ωε ςαν γετ το Δεδεκινδ΄ς σεςονδ φορμ οφ τηε εχυατιον:

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}.^* \tag{19}$$

Ανδ βψ σχυαρινγ βοτη σιδες οφ (17) ανδ συβτραστινγ Δ λικε σο,

$$y^2 - D = \frac{[x(x^2 + 3D)]^2}{(3x^2 + D)^2} - \frac{D(3x^2 + D)^2}{(3x^2 + D)^2}, \tag{20}$$

ωε ςαν γετ το Δεδεκινδ΄ς τηιρδ φορμ οφ τηε εχυατιον:

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.^* \tag{21}$$

Φορ εερψ ποσιτιε ρατιοναλ x, τηε εχυατιον (17) ωιλλ ρετυρν α ποσιτιε ρατιοναλ y ($y > 0$). Ανδ ιν ιτς σεςονδ φορμ (19), τηε εχυατιον ςλαριφιες βψ σιγν τηατ τηις ποσιτιε ρατιοναλ y ις γρεατερ τηαν x φορ εερψ ποσιτιε ρατιοναλ x ιν τηε ςλασς A_1 (ωηερε $x^2 < D$), ανδ λεσς τηαν x φορ εερψ ποσιτιε ρατιοναλ x ιν τηε ςλασς A_2 (ωηερε $x^2 > D$). Ανδ ιν ιτς τηιρδ φορμ (21), τηε εχυατιον ςλαριφιες αγαιν βψ σιγν τηατ τηις y βελονγς το A_1 ($y^2 < D$) ιφ x δοες ($x^2 < D$), ανδ το A_2 ($y^2 > D$) ιφ x δοες ($x^2 > D$).

Τηε φολλοωινγ νοτε βψ Μιςηαελ ϑμενετζ προιδες α ωαψ το υνδερστανδ τηε οριγιν οφ τηε εξπρεσσιον φορ y ιν (17).

Τηε Οριγιν οφ Δεδεκινδ΄ς Εξπρεσσιον φορ τηε Νυμβερ y (π. 217)

Τηε προβλεμ ις τηις: γιεν ποσιτιε ρατιοναλ νυμβερς x ανδ D, D νοτ τηε σχυαρε οφ α ρατιοναλ νυμβερ, το φινδ α ρατιοναλ νυμβερ y βετωεεν x ανδ $\sqrt{D}$. Λετ $s = x - \sqrt{D}$, $t = y - \sqrt{D}$· τηεν t ις το ηαε τηε σαμε σιγν ας s ανδ το βε λεσς τηαν s ιν αβσολυτε αλυε. Ωηατ χυαντιτψ ηας τηε σαμε σιγν ας s; Αν οδδ ποωερ οφ s, τηε σιμπλεστ (οτηερ τηαν s ιτσελφ) βεινγ s^3. Τηις μαψ νοτ βε λεσς τηαν s ιν αβσολυτε αλυε· περηαπς τηεν $t = us^3$, φορ σομε $u > 0$, ωιλλ δο. Τηατ ις

$$\begin{aligned} y - \sqrt{D} = u(x - \sqrt{D})^3 &= u(x^3 - 3x^2\sqrt{D} + 3xD - D\sqrt{D}) \\ &= u(x^3 + 3xD) - u(3x^2 + D)\sqrt{D}, \end{aligned}$$

ωηιςη συγγεστς $u = \frac{1}{3x^2+D}$ (το μακε τηε ςοεφφιςιεντ οφ $\sqrt{D}$ ον τηε ριγητ εχυαλ το τηατ ον τηε λεφτ) ανδ τηερεφορε $y = \frac{x^3+3xD}{3x^2+D}$. Τηις y φυλφιλλς τηε ςονδιτιονς οφ τηε προβλεμ.

Νοτε 3

‘τηε σψστεμ $\mathfrak{R}$ οφ αλλ ρεαλ νυμβερς . . . ’

Δεδεκινδ ςονσιστεντλψ υσες λεττερς οφ τηε Φρακτυρ τψπεφαςε το δενοτε ςλασσες οφ ρεαλ νυμβερς, ανδ ρομαν λεττερς το δενοτε ςλασσες οφ ρατιοναλ νυμβερς. $\mathfrak{R}$ ις α Φρακτυρ R, $\mathfrak{A}$ ις α Φρακτυρ A, ανδ $\mathfrak{B}$ ις α Φρακτυρ B.

ᾂντορ΄ς Τρανσφινιτε Σετ Τηεορψ Ινφορμαλλψ Ιντροδυςεδ[1]

1. Ωηατ ις α σετ;

   Ηερε αρε σομε εξαμπλες οφ σετς: τηε ςολλεςτιον οφ αλλ ςηαιρς νοω ιν τηε Γρεατ Ηαλλ· τηε ςολλεςτιον οφ αλλ ςηαιρς νοω ιν τηε Γρεατ Ηαλλ ανδ ιν τηε Σαντα Φε ςαμπυς ςαφετερια· τηε ςολλεςτιον οφ αλλ τηινγς νοω ιν ψουρ ςλοσετ· τηε ςολλεςτιον οφ αλλ πριμε νυμβερς βετωεεν 1 ανδ 10· τηε ςολλεςτιον ςονσιστινγ ιν τηε νυμβερ 5 ανδ ψου· τηε ςολλεςτιον οφ αλλ ςολλεςτιονς ϑυστ νοω δεσςριβεδ.

   Δεφινιτιον: Α σετ ις ανψ ςολλεςτιον ιντο α ωηολε S οφ δεφινιτε ανδ σεπαρατε οβϑεςτς m οφ ουρ ιντυιτιον ορ ουρ τηουγητ.

   > Ωε ρεπρεσεντ ιτ τηυς: $S = \{m\}$
   >
   > Φορ εξαμπλε, $\{2,3,5,7\}$ ις τηε σετ οφ αλλ πριμε νυμβερς βετωεεν 1 ανδ 10.

   Χυεστιονς: Ωηατ διφφερενςε, ιφ ανψ, ις τηερε βετωεεν 5 ανδ 7, ανδ $\{5,7\}$; Βετωεεν $\{2,3\}$ ανδ $\{\{2\},\{3\}\}$; Βετωεεν 2 ανδ $\{2\}$; Βετωεεν $\{2\}$ ανδ $\{\{2\}\}$;

2. Σομε τεςηνιςαλ τερμς:

   A. Ωε σαψ τηατ a, b, ανδ c αρε *μεμβερς* οφ $\{a,b,c\}$.

   B. Ωε σαψ τηατ S_1 ις α *συβσετ* οφ S_2 ϑυστ ιν ςασε εερψ μεμβερ οφ S_1 ις α μεμβερ οφ S_2.[2]

   ῝. Ωε σαψ τηατ S_1 ις α *προπερ συβσετ* οφ S_2 ϑυστ ιν ςασε εερψ μεμβερ οφ S_1 ις α μεμβερ οφ S_2 ανδ τηερε ις ατ λεαστ ονε μεμβερ οφ S_2 τηατ ις νοτ α μεμβερ οφ S_1.

   > Τηυς $\{a,b\}$ ις α συβσετ, ανδ α προπερ συβσετ, οφ $\{a,b,c\}$.
   > Ανδ $\{a,b,c\}$ ις α συβσετ, βυτ νοτ α προπερ συβσετ, οφ $\{b,a,c\}$.

3. Δεφινιτιον: Τωο σετς αρε *ιδεντιςαλ* ϑυστ ιν ςασε αλλ τηε μεμβερς οφ ονε αρε μεμβερς οφ τηε οτηερ, ανδ ιςε ερσα.

   > Τηυς $\{2,3\} = \{3,2\}$, βυτ $\{2,3,5\} \neq \{3,5,7\}$.

   ῍μπαρε α σετ ωιτη αν ορδερεδ n-τυπλε—φορ εξαμπλε, $\{2,3\}$ ωιτη τηε ςοορδινατες $(2,3)$ οφ α ποιντ ιν τηε ᾂρτεσιαν πλανε.

   ῍μπαρε α σετ ωιτη α σοςιετψ—φορ εξαμπλε, α φαμιλψ F ωιτη τηε σετ S ωηοσε μεμβερς αρε τηε μεμβερς οφ F.

   Χυεστιον: Ωηατ ις τηε μεταπηψσιςαλ στατυς οφ α σετ;

---

[1] Τηε οριγιναλ οφ τηις τεξτ ωας ωριττεν βψ Στεωαρτ Υμπηρεψ. Λατερ αδδιτιονς ινςλυδε τηε δεφινιτιον οφ 'γρεατερ ςαρδιναλιτψ', 'λεσσερ ςαρδιναλιτψ', τηε φοοτνοτε ον 'ϑυστ ιν ςασε', ανδ τηις φοοτνοτε.

[2] 'Θυστ ιν ςασε', λικε 'ιφ ανδ ονλψ ιφ', ις αν εξπρεσσιον οφ λογιςαλ εχυιαλενςε.

4. ΔΕΦINITION: Τωο σετς αρε *εχυιαλεντ* ϑυστ ιν ςασε αλλ τηε μεμβερς οφ ονε ςαν βε πυτ ιντο α ονε-το-ονε ςορρεσπονδενςε ωιτη αλλ τηε μεμβερς οφ τηε οτηερ.

> Τακε, φορ εξαμπλε, τηε σετ οφ αλλ πριμε νυμβερς βετωεεν 1 ανδ 10—$\{2, 3, 5, 7\}$—ανδ τηε σετ ωηοσε μεμβερς αρε τηε λεττερς οφ τηε ωορδ ‵φουρ′—{φ, ο, υ, ρ}. Ωε ςαν εσταβλιση τηε φολλοωινγ 1–1 ςορρεσπονδενςε:
>
> $$\begin{array}{cccc} 2, & 3, & 5, & 7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \varphi, & o, & \upsilon, & \rho \end{array}$$
>
> Ωε σεε τηατ εαςη μεμβερ οφ ονε σετ ςαν βε παιρεδ ωιτη ονε μεμβερ οφ τηε οτηερ, ανδ ιςε ερσα, σο τηατ τηερε αρε νο υνπαιρεδ ορ μυλτιπλψ-παιρεδ μεμβερς.
>
> Ηενςε τηε τωο σετς αρε εχυιαλεντ.

Τηερεφορε, ιφ τωο σετς αρε ιδεντιςαλ, τηεψ αρε εχυιαλεντ. Βυτ ιφ τωο σετς αρε εχυιαλεντ, τηεψ μαψ ορ μαψ νοτ βε ιδεντιςαλ.

Ατ τηις ποιντ ιτ μαψ σεεμ τηατ νο σετ ςουλδ βε εχυιαλεντ το α προπερ συβσετ οφ ιτσελφ. Βυτ λετ υς νοτ ρυση το ϑυδγμεντ.

5. Ορδιναλ νυμβερς ινςλυδε: 1στ, 2νδ, 3ρδ, ... ἃρδιναλ νυμβερς ινςλυδε: 1, 2, 3, ... Ωηατ α ςαρδιναλ νυμβερ ις ηας βεεν μυςη δεβατεδ ιν τηε λαστ ςεντυρψ. Φορ ουρ πρεσεντ πυρποσες ιτ ωιλλ συφφιςε το σαψ τηατ *ηοω μανψ* μεμβερς τηερε αρε ιν α σετ ις τηε ςαρδιναλ νυμβερ ασσοςιατεδ ωιτη τηατ σετ.

> Τηυς, φορ $\{a\}$ τηε ςαρδιναλ νυμβερ ις 1. Φορ $\{a, b\}$ ιτ ις 2. Ανδ σο ον.

Ωε σαψ τηατ τηε *ςαρδιναλιτψ* οφ α σετ ις τηε ςαρδιναλ νυμβερ ασσοςιατεδ ωιτη τηατ σετ.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟΝ: Τωο σετς ηαε τηε σαμε ςαρδιναλιτψ ϑυστ ιν ςασε τηεψ αρε εχυιαλεντ.

> Τηυς $\{2, 3\}$ ανδ {Καντ, Γεοργε Ελιοτ} ηαε τηε σαμε ςαρδιναλιτψ.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟΝΣ: Ονε σετ ηας γρεατερ ςαρδιναλιτψ τηαν ανοτηερ ϑυστ ιν ςασε τηε λαττερ ις εχυιαλεντ το α προπερ συβσετ, βυτ νοτ τηε ωηολε, οφ τηε φορμερ. Ονε σετ ηας λεσσερ ςαρδιναλιτψ τηαν ανοτηερ ϑυστ ιν ςασε τηε λαττερ ηας γρεατερ ςαρδιναλιτψ τηαν τηε φορμερ.

> Τηυς $\{2, 3\}$ ηας γρεατερ ςαρδιναλιτψ τηαν {Καντ}, ανδ γρεατερ ςαρδιναλιτψ αγαιν τηαν {Γεοργε Ελιοτ}· ωηιλε $\{2\}$, ορ $\{3\}$, ηας λεσσερ ςαρδιναλιτψ τηαν {Καντ, Γεοργε Ελιοτ}.

ὃμπαρε τηε ςαρδιναλιτψ οφ α σετ ωιτη νυμβερ ας δεφινεδ βψ Ευςλιδ (*Ελεμεντς* ῞ΙΙ.Δφ 2 ωιτη Δφ 1).

Χυϵστιον: Ις ζερο α ςαρδιναλ νυμβερ; Ανδ ιφ σο, ις τηερε α σετ ηαινγ τηις ςαρδιναλιτψ; Ιφ ωε ανσωερ ‵ψεσ′ ωε΄λλ ηαε το μοδιφψ ουρ δεφινιτιον ιν §1 αβοε, σο ας το αδμιτ τηε σετ ηαινγ νο μεμβερς ατ αλλ. ἂντορ ανδ οτηερς αδμιττεδ ϑυστ συςη α σετ. Ιτ ις ςαλλεδ τηε *νυλλ σϵτ*, ανδ ις ρεπρεσεντεδ βψ ‵$\varnothing$′. Τηυς, τηε ςαρδιναλιτψ οφ $\varnothing$ ις ζερο, τηατ οφ $\{\varnothing\}$ ις 1, τηατ οφ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ ις 2, ανδ σο ον. Ωε ουρσελες ωιλλ αδμιτ τηε νυλλ σετ ιν §14 βελοω.

---

6. Λετ S βε τηε σετ οφ τηε φιρστ τεν ‵νατυραλ′ νυμβερς: $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Τηε ςαρδιναλιτψ οφ S ις 10. Ιτς προπερ συβσετς αρε $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$, ανδ σο ον. Εαςη προπερ συβσετ οφ S ηας φεωερ μεμβερς τηαν S ιτσελφ, ηενςε νονε ις εχυιαλεντ το S.

   Λετ S' βε τηε σετ οφ αλλ νατυραλ νυμβερς: $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Αμονγ ιτς προπερ συβσετς ις S'': $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$. Ωε ςαν εσταβλιση α 1–1 ςορρεσπονδενςε βετωεεν τηε μεμβερς οφ S'' ανδ τηε μεμβερς οφ S'.

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 4, & 6, & \ldots, & 2n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots \end{array}$$

   Ηενςε S'' ανδ S' αρε εχυιαλεντ εεν τηουγη S'' ις α προπερ συβσετ οφ S'. (Ρεςαλλ Γαλιλεο, *Τωο Νϵω Σςιϵνςϵς* [Νατιοναλ Εδ.], ππ. 78–79.)

   Δεφινιτιον: Α σετ S ις *φινιτϵ* ϑυστ ιν ςασε νο προπερ συβσετ οφ S ις εχυιαλεντ το S.

   Δεφινιτιον: Α σετ S ις *ινφινιτϵ* ϑυστ ιν ςασε ατ λεαστ ονε προπερ συβσετ οφ S ις εχυιαλεντ το S.

   Νοτιςε, ωε συπποσε τηε σετ οφ αλλ νατυραλ νυμβερς το βε ςομπλετε, το ηαε ινφινιτελψ μανψ μεμβερς ιν αςτυαλιτψ, νοτ μερελψ ιν ποτεντιαλιτψ. Αριστοτλε ωουλδ ηαε σαιδ τηατ τηερε ις νο συςη εντιτψ. Καντ ωουλδ ηαε σαιδ τηατ ιτ ςουλδ νοτ βε αν οβϑεςτ οφ εξπεριενςε. Γαλιλεο, ον τηε οτηερ ηανδ, σεεμς το ηαε αδμιττεδ αςτυαλ ινφινιτιες. Σο τοο διδ Σπινοζα, Νεωτον, ανδ Λειβνιζ. Ανδ σο δοες ἂντορ.

7. Λετ S βε τηε σετ οφ αλλ νατυραλ νυμβερς. Ωηατ ις τηε ςαρδιναλιτψ οφ S; Ιτ ςαννοτ βε ανψ φινιτε ςαρδιναλ n. Ιτ μυστ τηεν βε σομε *τρανσφινιτϵ* ςαρδιναλ, ιφ ινδεεδ S ηας ανψ ςαρδιναλιτψ ατ αλλ. Τηερε ις συςη α ςαρδιναλ νυμβερ, ἂντορ ηελδ, ανδ το ναμε ιτ ηε υσεδ τηε φιρστ λεττερ οφ τηε Ηεβρεω αλπηαβετ, ςομβινεδ ωιτη ζερο-συβσςριπτ: $\aleph_0$ (προνουνςεδ ἀλεπη-νυλλ′). Τηε ρεασον φορ τηε συβσςριπτ ωιλλ σοον βεςομε ειδεντ.

   Λετ S' βε τηε σετ οφ αλλ εεν νατυραλ νυμβερς. Σινςε S' ανδ S (τηε σετ οφ αλλ νατυραλ νυμβερς) αρε εχυιαλεντ, τηε ςαρδιναλιτψ οφ S' τοο ις $\aleph_0$.

   Λετ S'' βε τηε ινφινιτε σετ $1^1, 2^2, 3^3, \ldots, n^n, \ldots$. Σινςε τηις προπερ συβσετ οφ S, τοο, ις εχυιαλεντ το S, ιτς ςαρδιναλιτψ τοο ις $\aleph_0$.

8. Σομε τρανσφινιτε αριτημετις.

(1) $\aleph_0 \pm n = \aleph_0$

(2) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

(3) $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ ανδ $\frac{1}{n} \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

(4) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Τρψ το σκετςη προοφς φορ εαςη οφ τηεσε εχυαλιτιες. Τηε κεψ, ιν εαςη ςασε, ις το εσταβλιση α 1–1 ςορρεσπονδενςε βετωεεν σετς ηαινγ τηε ςαρδιναλ νυμβερς ινδιςατεδ ον εαςη σιδε οφ τηε '=' σιγν. Ανδ το εσταβλιση τηις ςορρεσπονδενςε, σομε ινγενυιτψ ις νεεδεδ.

ΠροποσITION: Τηε σετ οφ αλλ τηε ιντεγερς (ποσιτιε, νεγατιε, ανδ ζερο) ηας ςαρδιναλιτψ $\aleph_0$.

ὂνσιδερ τηε σετ οφ αλλ ποιντς ιν τηε ὂρτεσιαν πλανε ηαινγ ιντεγραλ ςοορδινατες. Ις ιτς ςαρδιναλιτψ, τοο, ονλψ $\aleph_0$;

ΔεφINITION: Αν ινφινιτε σετ ις *δενυμεραβλε* ϑυστ ιν ςασε ιτ ις εχυιαλεντ το τηε σετ οφ αλλ νατυραλ νυμβερς, ι.ε., ϑυστ ιν ςασε ιτ ηας ςαρδιναλιτψ $\aleph_0$.

> Τηε σετ οφ αλλ ιντεγερς ις δενυμεραβλε.
>
> Αλσο δενυμεραβλε ις τηε σετ οφ αλλ ποσσιβλε ναμες ιν α λανγυαγε ηαινγ α φινιτε αλπηαβετ. (Παυσε α μομεντ το ασσυρε ψουρσελφ τηατ τηις ις σο.)

Ις τηερε εεν ονε *νον*δενυμεραβλε σετ;

9. ὂνσιδερ τηε σετ οφ αλλ ρατιοναλ νυμβερς > 0. Ις ιτ δενυμεραβλψ ορ νονδενυμεραβλψ ινφινιτε;

Βετωεεν ανψ τωο ρατιοναλς τηερε αρε ινφινιτελψ μανψ ρατιοναλς· ι.ε., τηε ρατιοναλς αρε *δενσε* (Δεδεκινδ [Δοερ εδ.], π. 6). Αρε τηεψ νοτ τηεν ινφινιτελψ ινφινιτε ιν χυαντιτψ, ανδ σο νονδενυμεραβλε; Ηοωεερ, ὂντορ φουνδ α ωαψ οφ πυττινγ τηεμ ιντο α 1–1 ςορρεσπονδενςε ωιτη τηε νατυραλ νυμβερς, ανδ φρομ τηις ηε ςονςλυδεδ τηατ τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ τηε ρατιοναλς > 0 ις ονλψ $\aleph_0$. Ηερε΄ς α σκετςη οφ ηις προοφ:

(1) Ωε σετ ουτ αλλ ρατιοναλς > 0 ιν τηε αρραψ βελοω (σεε Φιγυρε 1). Ασσυρε ψουρσελφ τηατ τηερε ις νο ρατιοναλ > 0 νοτ μεντιονεδ ατ λεαστ ονςε ιν τηις ινφινιτε αρραψ.

(2) Δραω ανδ φολλοω τηε δοττεδ-λινε αρροως, ας σηοων, ωριτινγ δοων εαςη φραςτιον ας ψου γο. Τηυς:

$$\tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{4}{1}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots.$$

(3) Ρεδυςε εαςη φραςτιον το ιτς λοωεστ τερμς, ανδ ςανςελ ουτ αλλ ρεδυνδανςιες. Τηις ψιελδς

$$1, 2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 3, 4, \tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots.$$

(4) Τηερε ις α 1–1 ςορρεσπονδενςε βετωεεν αλλ τηεσε ρατιοναλς ανδ τηε νατυραλ νυμβερς.

$$
\begin{array}{cccccc}
1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & 5/1 & \dots \\
1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & 5/2 & \dots \\
1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & 5/3 & \dots \\
1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & 5/4 & \dots \\
1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 5/5 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Φιγυρε 1

(5) Τηερεφορε, τηε σετ οφ αλλ ρατιοναλς > 0 ηας τηε σαμε ςαρδιναλιτψ ας τηε σετ οφ αλλ νατυραλ νυμβερς.

(6) Τηερεφορε, τηε σετ οφ αλλ ρατιοναλς > 0 ις δενυμεραβλε.

10. Προποσιτιον: Τηε σετ οφ αλλ ρατιοναλ νυμβερς (ποσιτιε, νεγατιε, ανδ ζερο) ις δενυμεραβλε.

Σκετςη α προοφ οφ τηις προποσιτιον.

Πορισμ: Βετωεεν ανψ τωο ρατιοναλ νυμβερς τηερε αρε $\aleph_0$ ρατιοναλ νυμβερς.

ὃνσιδερ τηε σετ οφ αλλ ποιντς ιν τηε ὂρτεσιαν πλανε ηαινγ ρατιοναλ ςοορδινατες. Ις ιτ δενυμεραβλε;

11. Αν ορδιναρψ αλγεβραις εχυατιον ηας τηε φορμ

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

ωηερε n ις α νατυραλ νυμβερ ανδ $a_0, a_1, \dots$ αρε ιντεγραλ ςοεφφιςιεντς, ανδ $a_0 > 0$.

Δεφινιτιον: Α νυμβερ ις *αλγεβραις* ϑυστ ιν ςασε ιτ ις α ρεαλ (ανδ νοτ ιμαγιναρψ) ροοτ οφ αν ορδιναρψ αλγεβραις εχυατιον.

Τηυς εερψ ρατιοναλ νυμβερ, ωε μαψ σαψ, ις αν αλγεβραις νυμβερ. Το σεε ας μυςη, ςονσιδερ τηε ροοτς οφ $2x-6=0$, $6x+2=0$, $x^2-4=0$, ανδ σο ον.

Μανψ ιρρατιοναλ νυμβερς, τοο, αρε αλγεβραις. Το σεε ας μυςη, ςονσιδερ τηε ροοτς οφ $x^2-2=0$, $x^3-2=0$, ανδ σο ον.

Βυτ σομε ιρρατιοναλς αρε νοτ αλγεβραις. Τωο εξαμπλες αρε π ανδ e. Συςη νυμβερς Ευλερ ςαλλεδ *τρανσςενδενταλ*, βεςαυσε τηεψ αππεαρεδ το τρανσςενδ αλγεβραις μετηοδς. Τηατ π ανδ e αρε νοτ ροοτς οφ ανψ ορδιναρψ αλγεβραις εχυατιονς ωας δεμονστρατεδ (!) ιν τηε δεςαδες πρεςεδινγ ὃντορ΄ς ινεστιγατιον οφ ινφινιτε σετς.

Προποσιτιον: Τηε σετ οφ αλλ αλγεβραις νυμβερς ις δενυμεραβλε.

Ηερε΄ς α σκετςη οφ ὃντορ΄ς προοφ:

(1) Φορ ανψ γιεν αλγεβραις εχυατιον ωε ςαν πιςκ ουτ τηε ςοεφφιςιεντς, τογετηερ ωιτη τηε δεγρεε n, ανδ ςονστρυςτ τηε συμ

$$a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| + n.$$

ὃλλ τηις συμ τηε *ινδεξ* οφ τηε γιεν εχυατιον. Εερψ αλγεβραις εχυατιον ηας σομε δεφινιτε ινδεξ. Τηερε αρε δενυμεραβλψ μανψ συςη ινδιςες.

(2) Σινςε $a_0 \geqslant 1$ ανδ $n \geqslant 1$, τηερε ις νο ινδεξ 1. Φορ ινδεξ 2, τηε ονλψ εχυατιον ις $x = 0$, ανδ τηε ονλψ ροοτ οφ τηις εχυατιον ις 0. Φορ ινδεξ 3, τηε ονλψ εχυατιονς αρε $2x = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, ανδ $x^2 = 0$, ανδ τηε ονλψ ροοτς οφ τηεσε εχυατιονς αρε 0, -1, 1. Ανδ σο ον το ινφινιτψ.

(3) Ειδεντλψ, φορ εαςη ινδεξ τηερε αρε φινιτελψ μανψ εχυατιονς ηαινγ τηατ ινδεξ, ανδ φινιτελψ μανψ ροοτς οφ τηοσε εχυατιονς.

(4) Ωε ςαν αρρανγε τηε ρεαλ ροοτς αςςορδινγ το τηε σιζε οφ τηε ινδεξ. Δοινγ σο ωε γετ

$$0, -1, 1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -2, 2, \ldots.$$

(5) Τηις σετ ωε ςαν πυτ ιντο α 1–1 ςορρεσπονδενςε ωιτη αλλ τηε νατυραλ νυμβερς.

(6) Τηερεφορε, τηε σετ οφ αλλ αλγεβραις νυμβερς ις δενυμεραβλε.

ὃνσιδερ τηε σετ οφ αλλ ποιντς ιν τηε ὃρτεσιαν πλανε ηαινγ αλγεβραις ςοορδινατες. Ις ιτ, τοο, δενυμεραβλε;

---

12. Προποσιτιον: Τηε σετ οφ αλλ ρεαλ νυμβερς βετωεεν 0 ανδ 1 ις νονδενυμεραβλε.

Ηερε΄ς α σκετςη οφ ὃντορ΄ς φαμους *ρεδυςτιο* προοφ:

(1) Συπποσε τηε σετ οφ αλλ ρεαλς βετωεεν 0 ανδ 1 το βε δενυμεραβλε.

(2) Τηεν τηερε ις α 1–1 ςορρεσπονδενςε βετωεεν τηεμ ανδ αλλ τηε νατυραλ νυμβερς. Ωε μαψ ρεπρεσεντ ιτ τηυς:

$$\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow 0.\, a_{1,1}\, a_{1,2}\, a_{1,3}\, a_{1,4} \ldots \\
2 &\leftrightarrow 0.\, a_{2,1}\, a_{2,2}\, a_{2,3}\, a_{2,4} \ldots \\
3 &\leftrightarrow 0.\, a_{3,1}\, a_{3,2}\, a_{3,3}\, a_{3,4} \ldots \\
4 &\leftrightarrow 0.\, a_{4,1}\, a_{4,2}\, a_{4,3}\, a_{4,4} \ldots \\
\vdots &\quad\ \vdots
\end{aligned}$$

Ιν τηε λεφτ-ηανδ ςολυμν αρε λιστεδ αλλ τηε νατυραλ νυμβερς. Ιν τηε ριγητ-ηανδ ςολυμν αρε λιστεδ αλλ τηε ρεαλς βετωεεν 0 ανδ 1, ιν νο παρτιςυλαρ ορδερ. Ωε ρεπρεσεντ τηεμ βψ τηειρ δεςιμαλ εξπανσιονς. Σο φορ εξαμπλε ιν τηε εξπρεσσιον ‘$a_{3,2}$’ τηε ‘a’ στανδς φορ σομε διγιτ $\geqslant 0$ ανδ $\leqslant 9$, ωηιλε τηε συβσςριπτ ινδιςατες τηατ τηις διγιτ οςςυπιες τηε σεςονδ ποσιτιον ιν τηε τηιρδ ροω. Ουρ συπποσιτιον ις τηατ αλλ τηε ρεαλς βετωεεν 0 ανδ 1 αρε ρεπρεσεντεδ ιν τηις λιστ.

> Ιν στεπς (2) ανδ (3) οφ τηις προοφ, βεαρ ιν μινδ τηατ $0.999999\ldots = 1.000000\ldots$. Το σεε ας μυςη, λετ $N = 0.999999\ldots$. Τηεν $10N = 9.99999\ldots$. Ηενςε $9N = 10N - N = 9.00000\ldots$. Ηενςε $N = 1.00000\ldots$. Σιμιλαρλψ, $0.499999\ldots = 0.500000\ldots$, ανδ σο ον.

(3) Πιςκ ουτ τηε διαγοναλ αρραψ οφ διγιτς $a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\ldots a_{n,n}\ldots$. Βψ λοοκινγ το τηις αρραψ, ανδ ινοκινγ σομε ωελλ-ςηοσεν τρανσφορματιον ρυλε, ωε ςαν προδυςε α νεω αρραψ οφ διγιτς $b_1\,b_2\,b_3\ldots b_n\ldots$. Ονε συςη ρυλε ις τηις: ιφ $a_{i,j} = 1$, ωριτε ‘2’, ανδ ιφ $a_{i,j} \neq 1$, ωριτε ‘1’. Τηυς, ιφ ουρ διαγοναλ αρραψ σηουλδ βε $37155\ldots$, ωε σηαλλ ωριτε ‘$11211\ldots$’.

(4) ὃνστρυςτ τηε δεςιμαλ εξπανσιον οφ α ρεαλ νυμβερ βετωεεν 0 ανδ 1 ιν αςςορδανςε ωιτη τηις νεω αρραψ:

$$0.\,b_1\,b_2\,b_3\ldots.$$

Φορ εξαμπλε, ιφ τηε γιεν διαγοναλ αρραψ σηουλδ βε $37155\ldots$, ανδ ιφ ουρ τρανσφορματιον ρυλε βε τηε ονε δεσςριβεδ ιν στεπ (3), τηεν τηε ςονστρυςτεδ δεςιμαλ εξπανσιον ωιλλ βε $0.11211\ldots$.

(5) Τηις νυμβερ ςαννοτ βε τηε φιρστ ονε μεντιονεδ ιν ουρ λιστ, σινςε $b_1 \neq a_{1,1}$. Νορ ςαν ιτ βε τηε σεςονδ μεντιονεδ ιν ουρ λιστ, σινςε $b_2 \neq a_{2,2}$. Ανδ σο ον. Ηενςε τηε νυμβερ $0.\,b_1\,b_2\,b_3\,b_4\ldots$ ςαννοτ βε αμονγ τηοσε μεντιονεδ ιν ουρ λιστ. Ανδ ψετ ιτ ις α ρεαλ νυμβερ βετωεεν 0 ανδ 1.

(6) Τηερεφορε ουρ λιστ οφ ρεαλς βετωεεν 0 ανδ 1 ις ινςομπλετε. Ψετ βψ ηψποτηεσις ιτ ις ςομπλετε. Ουρ λιστ, τηεν, ις βοτη ςομπλετε ανδ ινςομπλετε, ωηιςη ις αβσυρδ.

(7) Τηερεφορε τηε σετ οφ αλλ ρεαλς βετωεεν 0 ανδ 1 ις νονδενυμεραβλε.

Στεπς (3)–(4) εξεμπλιφψ ὃντορ’ς *διαγοναλ προςϵδυρε*. Αςχυαιντ ψουρσελφ ωιτη ιτ βψ ςονστρυςτινγ ψετ ανοτηερ ρεαλ νυμβερ νοτ μεντιονεδ ανψωηερε ιν ουρ λιστ. Σηοω, μορεοερ, τηατ τηε σετ οφ αλλ ρεαλς βετωεεν 0 ανδ 1 νοτ μεντιονεδ ιν ουρ οριγιναλ λιστ ςαννοτ ιτσελφ βε δενυμεραβλε.

> *Ηιντ*: Συπποσε τηις σετ ις δενυμεραβλε, ανδ τηεν ρεδυςε τηις συπποσιτιον το αβσυρδιτψ.

ΠΟΡΙΣΜ: Ιτ ις ιμποσσιβλε, εεν ιν πρινςιπλε, το μεντιον αλλ τηε ρεαλς βετωεεν 0 ανδ 1 *σεριατιμ*, ιν τηε φορμ οφ α λιστ.

13. Δοες τηε σετ οφ αλλ ρεαλς βετωεεν 0 ανδ 1 ηαε σομε ςαρδιναλιτψ; Ψες, σαψς ὃντορ. Ανδ ωηατ ις ιτ; Φορ τηε τιμε βεινγ λετ υς ςαλλ ιτ $\aleph_c$, τακινγ

τηε συβσςριπτ φρομ τηε ασσυμπτιον τηατ τηε ρεαλς βετωεεν 0 ανδ 1 φορμ α *ςοντινυυμ*.

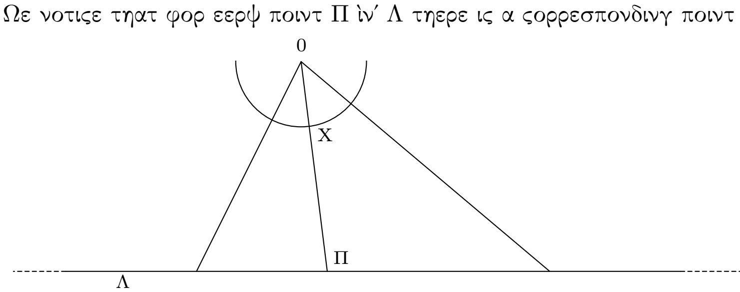
> Οτηερ σψμβολς φορ τηις σετ΄ς ςαρδιναλιτψ ινςλυδε C, c, ανδ $\mathfrak{c}$.

Ωε ηαε φουνδ τηατ $\aleph_c > \aleph_0$. Σο τηερε αρε ατ λεαστ τωο τρανσφινιτε ςαρδιναλς, $\aleph_0$ ανδ $\aleph_c$.

Σινςε $1 < 2 < 3 < \cdots < n < \cdots < \aleph_0$, $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots > \frac{1}{n} > \cdots > \frac{1}{\aleph_0}$. Ανδ ειδεντλψ, σινςε $\aleph_c > \aleph_0$, $\frac{1}{\aleph_c} < \frac{1}{\aleph_0}$. $\frac{1}{\aleph_0}$ ις ινφινιτελψ σμαλλερ τηαν $\frac{1}{n}$. Ηοω μυςη σμαλλερ ις $\frac{1}{\aleph_c}$ τηαν $\frac{1}{\aleph_0}$; (Ρεςαλλ Νεωτον, *Πρινςιπια* I, Σςηολιυμ αφτερ Λεμμα ΞΙ, φιρστ παραγραπη.)

Προποσιτιον: Τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ τηε ρεαλ νυμβερς (ποσιτιε, νεγατιε, ανδ ζερο) ις $\aleph_c$.

> Το σεε ας μυςη, ρεπλαςε τηε ‘0.΄ς ιν στεπ (2) οφ τηε φοργοινγ *ρεδυςτιο* προοφ ωιτη ‘N_1.΄, ‘N_2.΄, ανδ σο ον, ωηερε ‘N΄ στανδς φορ σομε ιντεγερ. Τηε ρεστ οφ τηε προοφ ις ερψ σιμιλαρ.
>
> Το σεε τηις γεομετριςαλλψ (σεε Φιγυρε 2), τακε α στραιγητ λινε οφ υνιτ-λενγτη, βενδ ιτ ιντο α σεμιςιρςλε ωιτη ςεντερ ατ ποιντ 0, ανδ πλαςε ιτ οερ α στραιγητ λινε Λ ινφινιτε ιν βοτη διρεςτιονς. Λετ τηε λινε δετερμινεδ βψ τηε ενδποιντς οφ τηε σεμιςιρςλε βε παραλλελ το Λ. Ωε νοτιςε τηατ φορ εερψ ποιντ Π ὶν΄ Λ τηερε ις α ςορρεσπονδινγ ποιντ



Φιγυρε 2

> X ὶν΄ τηε υνιτ-λινε, ανδ ιςε ερσα. Τηερε αρε, ως ασσυμε, $\aleph_c$ ποιντς ιν τηε υνιτ-λινε. Ηενςε τηερε αρε $\aleph_c$ ποιντς ιν τηε λινε ινφινιτε ιν βοτη διρεςτιονς.

Προποσιτιον: $\aleph_c \cdot \aleph_0 = \aleph_c$.

> Λετ τηε ρεαλ-νυμβερ ‘λινε΄ βε διιδεδ ιντο υνιτ-ιντεραλς. Εαςη ιντεραλ, ωε΄λλ σαψ, ςονσιστς ιν αλλ τηε ρεαλ νυμβερς r συςη τηατ $n \leqslant r < n+1$, ωηερε n ις σομε ιντεγερ. Τηερε αρε $\aleph_c$ ρεαλ νυμβερς ιν εαςη ιντεραλ. Τηερε αρε $\aleph_0$ ιντεραλς ιν τηε ρεαλ-νυμβερ λινε. Ανδ τηερε αρε $\aleph_c$ ρεαλ νυμβερς αλτογετηερ. Ηενςε ιν τηις ςασε, ανδ γενεραλλψ, $\aleph_c \cdot \aleph_0 = \aleph_c$.

Τηρεε μορε τρανσφινιτε εχυαλιτιες:

(1) $\aleph_c + \aleph_c = \aleph_c$

(2) $\aleph_c + \aleph_0 = \aleph_c$

(3) $\aleph_c - \aleph_0 = \aleph_c$

Τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ τηε ρατιοναλ νυμβερς ις $\aleph_0$ [σεε §10 αβοε]. Τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ τηε ρεαλς ις $\aleph_c$. Ηενςε τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ τηε ιρρατιοναλ νυμβερς ις $\aleph_c$. Ιν οτηερ ωορδς, μοστ ρεαλ νυμβερς αρε ιρρατιοναλ.

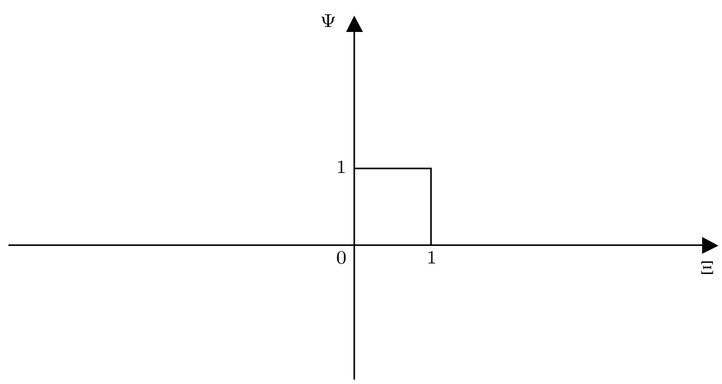
Φυρτηερ, τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ τηε αλγεβραις νυμβερς ις $\aleph_0$ [σεε §11 αβοε]. Ηενςε τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ τηε τρανσςενδενταλ νυμβερς ις $\aleph_c$. Ιν οτηερ ωορδς, μοστ οφ τηε ρεαλ νυμβερς αρε ιρρατιοναλς τηατ ωε ηαεν΄τ εεν βεγυν το στυδψ. Ινδεεδ ωε΄ε σςαρςελψ βεγυν το ναμε τηεμ. (Παυσε α μομεντ το λετ τηις ςονσεχυενςε σινκ ιν.)

Προποσιτιον: Ιν ανψ λανγυαγε ηαινγ α φινιτε αλπηαβετ ιτ ις ιμποσσιβλε, εεν ιν πρινςιπλε, το λιστ ορ ιν ανψ ωαψ ναμε αλλ τηε τρανσςενδενταλ νυμβερς.

> (Συπποσινγ εαςη ανδ εερψ ρεαλ νυμβερ το βε αν οβϑεςτ οφ Γοδ΄ς τηουγητ, ωηατ ςουλδ συςη διινε τηουγητ βε λικε;)

Προποσιτιον: Βετωεεν ανψ τωο ρεαλ νυμβερς τηερε αρε $\aleph_c$ ρεαλ νυμβερς.
Προποσιτιον: Τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ ρεαλ-νυμβερ ςοορδινατες ιν τηε ᾶρτεσιαν πλανε ις $\aleph_c$. Ηερε΄ς α σκετςη οφ ᾶντορ΄ς προοφ:

(1) ᾶνσιδερ φιρστ τηε αρεα βουνδεδ βψ τηε αξες ανδ τηε λινες $y = 1$, $x = 1$ (σεε Φιγυρε 3). Λετ S βε τηε σετ οφ ρεαλς x συςη τηατ $0 < x \leqslant 1$.



Φιγυρε 3

Ανδ λετ S' βε τηε σετ οφ αλλ ρεαλ-νυμβερ ςοορδινατες (x, y) ωηερε $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$.

(2) Τηε ςαρδιναλιτψ οφ S ις $\aleph_c$.

(3) Ταϰε ανψ ςοορδινατες (x, y) ιν τηε γιεν αρεα ανδ ρεπρεσεντ τηεμ βψ τηειρ δεςιμαλ εξπανσιονς. Σο, φορ εξαμπλε, ωε ηαε

$$(x, y) = (0.6993\ldots, 0.7128\ldots).$$

(4) Ιντερλαςε τηε τωο αρραψς οφ διγιτς, βεγιννινγ ωιτη τηε φιρστ διγιτ οφ τηε x-τερμ. Το υσε τηε φοργοινγ εξαμπλε, ωε γετ

$$0.67919238\ldots.$$

Ωε νοω ηαε τηε διγιταλ εξπανσιον οφ α σινγλε ρεαλ νυμβερ, βετωεεν 0 ανδ 1, το ρεπρεσεντ τηε γιεν ρεαλ-νυμβερ ςοορδινατες.

(5) Σινςε εερψ ρεαλ-νυμβερ ςοορδινατε ιν τηε γιεν αρεα ηας σομε συςη ρεπρεσεντατιε, ανδ τηερε αρε $\aleph_c$ συςη ρεπρεσεντατιες, τηε ςαρδιναλιτψ οφ S' ις τηε σαμε ας τηε ςαρδιναλιτψ οφ S, ναμελψ $\aleph_c$.

(6) Τηερε αρε $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ συςη αρεας ιν τηε ἃρτεσιαν πλανε.

(7) Τηερεφορε, τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ ρεαλ-νυμβερ ςοορδινατες ιν τηε ἃρτεσιαν πλανε ις $\aleph_0 \cdot \aleph_c = \aleph_c$.

Ιτ ςαν νοω εασιλψ βε σηοων τηατ $\aleph_c \cdot \aleph_c = \aleph_c$, ανδ τηατ $(\aleph_c)^n = \aleph_c$. Σο τηερε αρε ονλψ $\aleph_c$ ρεαλ-νυμβερ ςοορδινατες ιν αν n-διμενσιοναλ ἃρτεσιαν σπαςε. Ωηεν ἃντορ ρεαςηεδ τηις ςονςλυσιον, ηε ωροτε το Δεδεϰινδ: 'Ι σεε ιτ, βυτ Ι δον'τ βελιεε ιτ!'

---

14. Ωε σηαλλ νοω δεφινε $\aleph_c$ μορε πρεςισελψ. Το δο σο, ωε μυστ φιρστ λεαρν σομετηινγ αβουτ ποωερ σετς.

ΔΕΦΙΝΙΤΙΟΝ: Τηε *ποωερ σετ* οφ S ις τηε σετ ωηοσε μεμβερς αρε αλλ τηε συβσετς οφ S.

Ωε ρεπρεσεντ τηε ποωερ σετ οφ S βψ '$\mathscr{P}(S)$'.

Λετ $S = \{a, b\}$. Ιτς συβσετς ινςλυδε $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$. Ωε νοω αδμιτ τηε νυλλ σετ $\varnothing$ (σεε §5 αβοε) ανδ σαψ τηατ $\varnothing$ ις α συβσετ οφ ανψ οτηερ σετ. Αςςορδινγλψ $\mathscr{P}(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Ιν τηις εξαμπλε, τηε ςαρδιναλιτψ οφ $\mathscr{P}(S)$ ις $4 = 2^2$. Ιφ $S = \varnothing$, $\mathscr{P}(S)$ ηας ςαρδιναλιτψ $1 = 2^0$. Ανδ ιφ $S = \{a, b, c\}$, τηεν $\mathscr{P}(S)$ ηας ςαρδιναλιτψ $8 = 2^3$. (Ασσυρε ψουρσελφ τηατ τηις ις σο.)

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟΝ: Ιφ S ηας n μεμβερς, $\mathscr{P}(S)$ ηας 2^n μεμβερς.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟΝ: Φορ αλλ $n \geqslant 0$, $2^n > n$.

Ωε νοω ρετυρν το ινφινιτε σετς.

ΠΟΣΤΥΛΑΤΕ: Φορ ανψ σετ S, τηερε ις α ποωερ σετ $\mathscr{P}(S)$.

ἃντορ ςαν νοω δεμονστρατε τηε φολλοωινγ προποσιτιονς:

(1) Φορ ανψ σετ S, τηε ςαρδιναλιτψ οφ $\mathscr{P}(S)$ ις γρεατερ τηαν τηε ςαρδιναλιτψ οφ S.

> Τηις ις οφτεν ςαλλεδ *ἂντορ΄ς Τηεορεμ.*

(2) Ιφ S ις τηε σετ οφ αλλ νατυραλ νυμβερς, τηεν τηε ςαρδιναλιτψ οφ $\mathscr{P}(S)$ ις $2^{\aleph_0}$.

(3) $\aleph_c = 2^{\aleph_0}$.

> Σκετςηες οφ ηις προοφς αρε ομιττεδ ηερε.

15. Το γενεραλιζε: Ιφ αν ινφινιτε σετ S ηας ςαρδιναλιτψ $\aleph_n$, τηερε ις α $\mathscr{P}(S)$ ηαινγ ςαρδιναλιτψ $2^{\aleph_n} > \aleph_n$.

Τηερε αρε τηεν ινφινιτελψ μανψ τρανσφινιτε ςαρδιναλς, ας ωελλ ας ινφινιτελψ μανψ φινιτε ςαρδιναλς.

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \ldots$$

ἂντορ ασκς τωο χυεστιονς:

(i) Ις τηερε α τρανσφινιτε ςαρδιναλ γρεατερ τηαν $\aleph_0$ βυτ λεσς τηαν $2^{\aleph_0}$; Ιν οτηερ ωορδς, δοες $2^{\aleph_0} = \aleph_1$;

(ii) Ις τηερε νο λαργεστ τρανσφινιτε ςαρδιναλ;

ΗΨΠΟΤΗΕΣΙΣ: Τηερε ις νο ςαρδιναλ βετωεεν $\aleph_0$ ανδ $2^{\aleph_0}$.

> Τηις ηψποτηεσις ἂντορ τριεδ το προε τρυε. Ηε φαιλεδ. Γöδελ ανδ ὃηεν λατερ προεδ (!) τηατ ιτ ςουλδ βε νειτηερ προεδ νορ δισπροεδ ωιτηιν τηε νοω-στανδαρδ σετ τηεορψ. Τοδαψ σομε αςςεπτ ἂντορ΄ς *ὃντινυυμ Ηψποτηεσις*, ας ιτ ςαμε το βε ςαλλεδ, ωηιλε οτηερς ρεϑεςτ ιτ.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟΝ: Τηερε ις νο σετ οφ αλλ σετς. Φορ

(1) Συπποσε τηερε ις. ἂλλ ιτ `S'.

(2) Τηεν τηερε ις α $\mathscr{P}(S)$, ανδ $\mathscr{P}(S)$ ηας α ςαρδιναλιτψ γρεατερ τηαν τηε ςαρδιναλιτψ οφ S.

(3) Τηερε αρε τηεν σετς ιν $\mathscr{P}(S)$ τηατ αρε νοτ σετς ιν S.

(4) Ηενςε S βοτη ις ανδ ις νοτ τηε σετ οφ *αλλ* σετς, ωηιςη ις αβσυρδ.

(5) Ηενςε τηερε ις νο σετ οφ αλλ σετς.

ΠΟΡΙΣΜ: Τηερε ις νο λαργεστ σετ.

ΠΟΡΙΣΜ: Τηερε ις νο λαργεστ ςαρδιναλ νυμβερ.

Ιφ τηις προοφ ις σουνδ, ανδ ιφ ἂντορ΄ς ὃντινυυμ Ηψποτηεσις ις τρυε, ωε ηαε δετερμινεδ τηε φολλοωινγ σεριες :

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots, \aleph_{\aleph_0}, \aleph_{\aleph_1}, \aleph_{\aleph_2}, \ldots.$$

Βυτ ωε σηουλδν'τ τηινκ τηατ ωε ςουλδ λιστ τηεμ αλλ, εεν ιν πρινςιπλε. Νορ σηουλδ ωε τηινκ τηατ αλλ τηε ςαρδιναλ νυμβερς ςονστιτυτε α σετ. (Παυσε α μομεντ το λετ τηις ςονσεχυενςε σινκ ιν.)

ἃντορ νοω διστινγυισηες βετωεεν α ςολλεςτιον τηατ ις ονε σετ, ανδ νοτ ϑυστ μανψ οβϑεςτς (σεε §1 αβοε), ανδ α 'ςολλεςτιον' τηατ ις μανψ οβϑεςτς ανδ ςαννοτ ποσσιβλψ βε ονε σετ (φορ εξαμπλε, αλλ τηε σετς τηερε αρε). Τηε λαττερ ηε ςαλλς 'ινςονσιστεντ', ον τηε γρουνδ τηατ ιτ ςουλδ νοτ βε ςομπρεηενδεδ, ηελδ τογετηερ, ορ υνιφιεδ ιν τηουγητ.

Χυϵστιον: Υνδερ ωηατ ςονδιτιονς, εξαςτλψ, αρε οβϑεςτς τοο μανψ το ςονστιτυτε α σετ;

> Αβουτ τηις τηερε ις ονγοινγ δισςυσσιον. Σομε ηαε δουβτεδ τηατ τηε ποστυλατε ιντροδυςεδ ιν §14 ις τρυε.

Χυϵστιον: Συπποσινγ τηε ρεαλ εξιστενςε οφ σπαςε απαρτ φρομ ουρ ςονςεπτυαλ τηουγητ (ςφ. Δεδεκινδ, π. 12, ωιτη Νεωτον ορ Καντ), ανδ λεττινγ τηερε βε α λινε σεγμεντ ιν τηατ σπαςε, ις τηερε ανψ ωαψ οφ τελλινγ ηοω μανψ ποιντς τηερε αρε ὶν΄ τηατ λινε;

> ἃντορ ασσυμεδ τηατ τηερε αρε $2^{\aleph_0}$ ποιντς ιν τηε λινε. Βυτ Αβραηαμ Ροβινσον ηας εσταβλισηεδ τηε σψστεμ οφ *ηψπερρϵαλ* νυμβερς, ωηοσε ςαρδιναλιτψ ις $2^{2^{\aleph_0}}$. ὂνςειαβλψ, τηεν, τηερε αρε τηις μανψ ποιντς ιν τηε λινε, ιν ωηιςη ςασε αναλψτις γεομετρψ σηουλδ αδμιτ αλλ τηε ηψπερρεαλς. Ανδ ιν ανψ ςασε ωε σηουλδ ρε-τηινκ τηε ςονςεπτ οφ ςοντινυιτψ.

---

16. Τρανσφινιτε Σετς ανδ Νατυρε.

A. Ις ιτ νοτ τρυε *α πριορι* τηατ τηερε ςουλδ νεερ βε μορε τηαν $\aleph_0$ σταρς, ορ βοδιες οφ ανψ φινιτε σιζε, ιν τηε υνιερσε; Φορ στιμυλατινγ ρεφλεςτιονς οφ τηις σορτ, ςφ. Θ. Βεναρδετε, *Ινφινιτψ*.

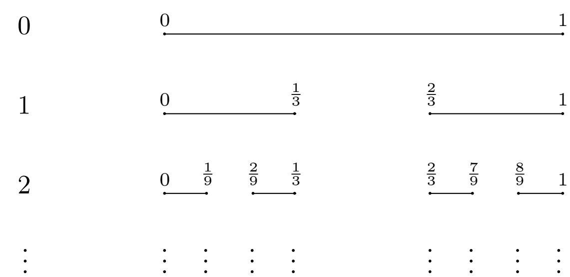
B. Τηε ἃντορ Σετ.

Λετ τηερε βε α λινε οφ υνιτ λενγτη ωηοσε ποιντ-ςοορδινατες αρε αλλ x συςη τηατ $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ρεμοε τηε μιδδλε τηιρδ οφ τηε λινε (ορ αλλ x συςη τηατ $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$). Τηεν, φρομ εαςη οφ τηε τωο ρεμαινινγ λινες, ρεμοε τηε μιδδλε τηιρδς (ορ αλλ x συςη τηατ $\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9}$ ανδ $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$). ὂντινυε σο αυγμεντινγ ανδ διμινισηινγ *ιν ινφινιτυμ*.

Τηε ρεσυλτινγ σετ οφ ποιντς ἃντορ ςαλλεδ τηε *τερναρψ σετ*. Ιτ ις νοω ςαλλεδ τηε *ἃντορ Σετ*. Ανδ ιτς μεμβερς ςολλεςτιελψ αρε ςαλλεδ *ἃντορ Δυστ*.

Φορ τηε ρολε οφ τηις σετ ιν φραςταλ γεομετρψ, ανδ ιτς ποσσιβλε αππλιςατιονς ιν πηψσιςς, ςφ. Η.–Ο. Πειτγεν *ετ αλ*, *ἣαος ανδ Φραςταλς*, ανδ Β. Μανδελβροτ, *Τηε Φραςταλ Γεομετρψ οφ Νατυρε*.

Τηε ἃντορ Σετ ηας φεατυρες οφ ιμμεδιατε ιντερεστ το υς. Ιτς μεμβερς ςολλεςτιελψ ηαε τηε προπερτιες οφ τρανσιτιτψ ανδ ορδερεδνεσς



(Δεδεκινδ, π. 7). Βυτ τηεψ αρε νοτ δενσε, σινςε τηερε αρε φινιτε γαπς βετωεεν $\frac{1}{3}$ ανδ $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$ ανδ $\frac{2}{9}$, ανδ σο ον. Ινδεεδ, αρε τηεψ δενσε ανψωηερε;
Ατ στεπ 0 τηε λινεαρ μαγνιτυδε ις 1. Ατ στεπ 1 τηε ρεμαινινγ μαγνιτυδε ις $\frac{2}{3} = (1 - \frac{1}{3})$. Ατ στεπ 2 ιτ ις $\frac{4}{9} = (1 - \frac{5}{9})$. Ιν γενεραλ, ατ στεπ n τηερε ις α μαγνιτυδε L συςη τηατ

$$L = 1 - \frac{3^n - 2^n}{3^n}.$$

Ωε ςαν σηοω τηατ

$$\lim_{n \to \infty} L = 0$$

Τηυς ἃντορ Δυστ ηας νο μαγνιτυδε. (Παυσε α μομεντ το λετ τηις σινκ ιν.)

Ατ στεπ 0 τηε ςαρδιναλιτψ οφ τηε ενδποιντς ις 2. Ατ στεπ 1 τηε ςαρδιναλιτψ οφ τηε ενδποιντς ις 4. Ατ στεπ 2 ιτ ις 8. Ιν γενεραλ, ατ στεπ n ιτ ις 2^{n+1}.

Ιτ σεεμς, τηεν, τηατ τηε ςαρδιναλιτψ οφ τηε ἃντορ Σετ ις $2^{\aleph_0+1} = 2^{\aleph_0}$.

Ον τηε οτηερ ηανδ, ατ στεπ 0 τηε ενδποιντς αλλ ηαε ρατιοναλ ςοορδινατες, ανδ σο τοο ατ στεπς $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Τηε ςαρδιναλιτψ οφ αλλ ρατιοναλ νυμβερς βετωεεν 0 ανδ 1 ις $\aleph_0$. Ιτ σεεμς, τηεν, τηατ τηε ςαρδιναλιτψ οφ τηε ἃντορ Σετ ις ονλψ $\aleph_0$. ὃμπαρε τηε Ζενο σετ, ας ωε μαψ ςαλλ ιτ (αφτερ Ζενο΄ς βισεςτιον παραδοξ):

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots \right\}$$

῞λεαρλψ τηις σετ ις δενυμεραβλε. Ηοω ςουλδ τηε ἃντορ Σετ βε οτηερωισε;

Προποσιτιον: Τηε ἃντορ Σετ ις νονδενυμεραβλε. Φορ

(1) ὃνσιδερ τηε διφφερενςε βετωεεν ανψ ρεμαινινγ ποιντ-ςοορδινατε ανδ τηε ενδποιντ 0. Ωε μαψ ρεπρεσεντ ιτ βψ αν ινφινιτε συμ οφ *τερναρψ*

ρατηερ τηαν δεςιμαλ φραςτιονς. Τηυς $\frac{2}{3}$, ωηιςη ορδιναριλψ ωε ωουλδ ρεπρεσεντ βψ $0 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \cdots$, ωε νοω ρεπρεσεντ βψ $0 + \frac{2}{3} + \frac{0}{9} + \frac{0}{27} + \cdots$. Ιν οτηερ ωορδς, ωηερεας ωε ορδιναριλψ ρεπρεσεντ $\frac{2}{3}$ βψ τηε δεςιμαλ εξπανσιον $0.666\ldots$, ωε νοω ρεπρεσεντ ιτ βψ τηε τερναρψ εξπανσιον $0.200\ldots$.

(2) Ανψ ποιντ-ςοορδινατε ιν τηε ἃντορ Σετ ςαν βε ρεπρεσεντεδ βψ

$$0.\,a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n\ldots,$$

ωηερε τηε διγιτ a_i ις αλωαψς 0 ορ 2, νεερ 1.

> ἃντορ΄ς προοφ οφ τηις ις βεψονδ υς. Βυτ ωε ςαν περηαπς ασσυρε ουρσελες βψ μεανς οφ σομε εξαμπλες. Τηε ινςλυδεδ ςοορδινατε $\frac{2}{3} = 0.200\ldots$, ας ωε ϑυστ νοω σαω. Τηε ινςλυδεδ ςοορδινατε $1 = 1.000\ldots = 0.222\ldots$ (ρεςαλλ ουρ ηαινγ φουνδ, ιν §12 αβοε, τηατ $1.000\ldots = 0.999\ldots$). Ανδ τηε ινςλυδεδ ςοορδινατε $\frac{1}{3} = 0.100\ldots = 0.022\ldots$. Ον τηε οτηερ ηανδ, $\frac{1}{2} = 0.111\ldots$ ις α ςοορδινατε εξςλυδεδ ατ στεπ 1.

(3) Τηε ἃντορ Σετ ις δενυμεραβλε ονλψ ιφ ιτ ςαν βε πυτ ιντο α 1–1 ςορρεσπονδενςε ωιτη τηε σετ οφ αλλ νατυραλ νυμβερς. Συπποσε ιτ ςαν, ανδ προςεεδ ας ιν §12 αβοε. Φιρστ ωε γιε ουρσελες α λιστ οφ αλλ ποιντ-ςοορδινατες, ιν νο παρτιςυλαρ ορδερ.

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow 0.02000220\ldots \\ 2 &\leftrightarrow 0.02202020\ldots \\ 3 &\leftrightarrow 0.00222222\ldots \\ \vdots \quad &\quad \vdots \end{aligned}$$

(4) Βψ ἃντορ΄ς διαγοναλ προςεδυρε ωε δετερμινε α τερναρψ εξπανσιον οφ α ποιντ-ςοορδινατε νοτ μεντιονεδ ιν ουρ λιστ. Σο ουρ λιστ ις βοτη ςομπλετε ανδ ινςομπλετε, ωηιςη ις αβσυρδ.

(5) Τηερεφορε τηε ἃντορ Σετ ις νονδενυμεραβλε.

Χυεστιον: Ωηερε τηεν διδ ωε γο ωρονγ ιν ουρ ρεασονινγ το τηε ςονςλυσιον τηατ τηε ἃντορ Σετ ηας ςαρδιναλιτψ $\aleph_0$;

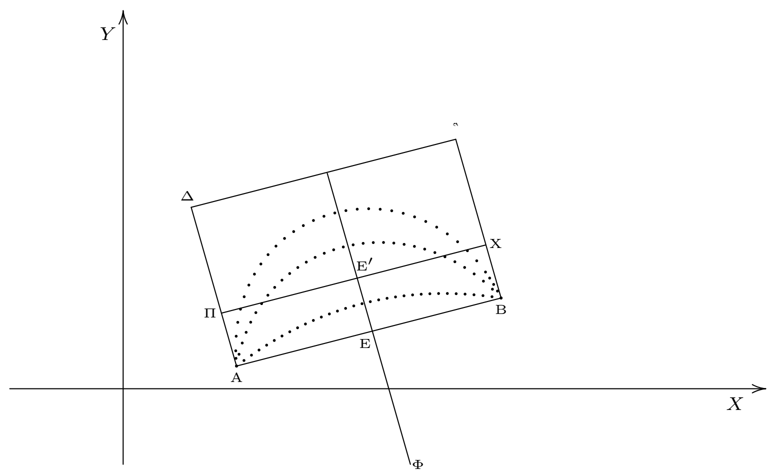
῝. ἃντορ ωας ιντερεστεδ ιν τηε φολλοωινγ αργυμεντ:

(i) Νεςεσσαριλψ, μοτιον ις ςοντινυους ονλψ ιφ σπαςε ις ςοντινυους.
(ii) Μοτιον ις ςοντινυους.
(iii) Τηερεφορε σπαςε ις ςοντινυους.

Τηε ςονςλυσιον φολλοως νεςεσσαριλψ φρομ τηε πρεμισσες. Βυτ αρε τηε πρεμισσες βοτη τρυε; ἃντορ προεδ τηατ πρεμισς (ι) ις φαλσε. Ηερε΄ς α σκετςη οφ ηις προοφ (μοδιφιεδ ιν α ςουπλε οφ ρεσπεςτς):

(1) Συπποσε α πλανε τηατ ις ἃρτεσιαν ιν αλλ ρεσπεςτς βυτ ονε: ωηερεερ τηε ςοορδινατες αρε βοτη ρατιοναλ, τηερε ις νο ςορρεσπονδινγ ποιντ. Τηις σπαςε ις εερψωηερε δισςοντινυους· νο ρεγιον οφ ιτ, ηοωεερ σμαλλ, ις ωιτηουτ ινφινιτελψ μανψ πυνςτυαλ ‛γαπσ΄.

Ηενςεφορτη ρεγαρδ σομετηινγ ας α ποιντ ονλψ ιφ ιτ ηας ατ λεαστ ονε ιρρατιοναλ ςοορδινατε. Βυτ ρεγαρδ σομετηινγ ας α λινε ορ αρς εεν ιφ ιτ ις εερψωηερε πυνςτυατεδ βψ συςη ‘γαπσ’.



(2) Πιςκ ανψ τωο ποιντς, Α ανδ Β, ανδ ϑοιν τηεμ βψ τηε στραιγητ λινε ΑΒ. ΑΒ μαψ βε ςοντινυους. (ὃνσιδερ, φορ εξαμπλε, τηε λινε ωηοσε εχυατιον ις $y = \pi x$, ιν τηε ιντεραλ $1 \leqslant x \leqslant 2$.) Ιφ σο, ιτ ις α ποσσιβλε πατη φορ α ποιντ-μασς μοινγ φρομ Α το Β.

(3) Ορ ΑΒ μαψ βε δισςοντινυους. Ιφ σο, νοτιςε τηατ μανψ ρεςτανγλες ςαν βε ςονστρυςτεδ ον ΑΒ ας α βασε. Λετ ονε οφ τηεμ βε τηε ρεςτανγλε ΑΒ῝Δ.

(4) Ειτηερ ΑΒ ςαν βε βισεςτεδ ορ ιτ ςαννοτ. Ιφ ιτ ςαν, λετ ιτ βε βισεςτεδ ατ Ε. Ιφ ιτ ςαννοτ, νοτιςε τηατ ωιτηιν τηε ρεςτανγλε ΑΒ῝Δ τηερε ςαν βε μανψ λινες παραλλελ το ΑΒ, σομε οφ ωηιςη ςαν βε βισεςτεδ. Λετ ονε συςη λινε βε ΠΧ, ανδ λετ ιτ βε βισεςτεδ ατ Ε′.

(5) Ατ Ε (ορ Ε′) δραω ΕΦ (ορ Ε′Φ) ατ ριγητ ανγλες το ΑΒ (ορ ΠΧ).

(6) Ον λινε ΕΦ προδυςεδ τηερε αρε $2^{\aleph_0}$ ποιντς ωηιςη ςαν βε ςεντερς οφ ςιρςλες πασσινγ τηρουγη ποιντς Α ανδ Β συςη τηατ τηε αρς $\widehat{\mathrm{ΑΒ}}$ φαλλς ωιτηιν τηε ρεςτανγλε ΑΒ῝Δ. Ηενςε τηερε αρε $2^{\aleph_0}$ συςη ποσσιβλε αρςς.

(7) Οφ τηεσε ποσσιβλε αρςς, νο μορε τηαν $\aleph_0$ ςαν βε δισςοντινυους, σινςε τηερε αρε ονλψ $\aleph_0$ πυνςτυαλ ‘γαπσ’ ωιτηιν τηε ρεςτανγλε ΑΒ῝Δ. Ηενςε, ωιτηιν τηις ρεςτανγλε, τηε ςαρδιναλιτψ οφ τηοσε ποσσιβλε αρςς ωηιςη αρε ςοντινυους ις $2^{\aleph_0} - \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$.

(8) Βεινγ ςοντινυους, εερψ ονε οφ τηεσε αρςς ις α ποσσιβλε πατη φορ α ποιντ-μασς μοινγ ςοντινυουσλψ φρομ Α το Β.

(9) Τηερεφορε ςοντινυους μοτιον ις ποσσιβλε ιν α πλανε εερψωηερε δισςοντινυους.

Πορισμ: Οφ αλλ τηε ποσσιβλε πατης φρομ ανψ ποιντ το ανψ οτηερ ποιντ ιν τηις πυνςτυατεδ πλανε, μοστ αρε ςοντινυους.

Ωε ςαν μακε τηε ηειγητ οφ τηε ρεςτανγλε ΑΒ῝Δ ας σμαλλ ας ωε ωαντ. Τηερεφορε, εεν ιφ ρεςτιλινεαρ μοτιον φρομ Α το Β ις ιμποσσιβλε, ωε ςαν μακε τηε πατη σο ςλοσε το ρεςτιλινεαρ τηατ νο ηυμαν βεινγ ςουλδ τελλ τηε διφφερενςε. Ανδ εεν ιφ αν ελλιπτιςαλ πατη τηρουγη Α ανδ Β ωερε ιμποσσιβλε, ωε ςουλδ μακε τηε πατη σο ςλοσε το ελλιπτιςαλ τηατ αγαιν νο ηυμαν βεινγ ςουλδ τελλ τηε διφφερενςε. ὃυλδ ωε νοτ τηεν πρεσερε Νεωτον΄ς πηψσιςς εεν ιφ ωε γαε υπ τηε ασσυμπτιον τηατ σπαςε ις εερψωηερε ςοντινυους;

Χυεστιον: ἃν ωε νοω προε τηατ μοτιον ςουλδ βε ςοντινυους ιν α σπαςε σο `πυνςτυατεδ΄ τηατ ιν ιτ νο ρεςτιλινεαρ μοτιον ατ αλλ ςουλδ βε ςοντινυους;

---

17. Τρανσφινιτε Σετς ανδ Γοδ.

Ιν ἃντορ΄ς ωριτινγς τηερε αρε σςαττερεδ ρεφερενςες το Πλατο΄ς *Πηιλεβυς*, Αυγυστινε΄ς *ἳτψ οφ Γοδ*, Σπινοζα΄ς *Ετηιςς*, ανδ τηε ωριτινγς οφ Λειβνιζ ανδ οφ σεεραλ Τηομιστς. Ηε σεεμς το ηαε μαδε νο ραδιςαλ διστινςτιον βετωεεν τηε τεαςηινγς ηε φουνδ τηερε ανδ ηις οων σετ-τηεορετιςαλ ματηεματιςς.

Αςςορδινγ το Δεδεκινδ, νυμβερς ανδ νυμβερ σψστεμς αρε ηυμαν ςρεατιονς. Αςςορδινγ το ηις φριενδ ἃντορ, ον τηε οτηερ ηανδ, νυμβερς τηεμσελες εξιστ ετερναλλψ ιν τηε διινε ιντελλεςτ—*αλλ* οφ τηεμ. ἃντορ τηουγητ τηατ ηε ηαδ δισςοερεδ τηε τρανσφινιτε δομαιν· ηαδ *δισςοερεδ* τηατ σομε ινφινιτε σετς αρε λαργερ τηαν οτηερς, ανδ τηατ σομε ‘ςολλεςτιονσ’ αρε τοο λαργε εεν το βε σετς. Τρυε, ηις ρεασονινγς ινολε μυςη ινεντιον—νεςεσσαριλψ, ιτ σεεμσ—ανδ ψετ, ιφ ηε ις ριγητ, αλλ τηεσε ςονστρυςτιονς ορ ςρεατιονς βελονγ το τηε ηυμαν ωαψ οφ ςομινγ το νοτιςε ςερταιν ετερναλ εντιτιες, νοτ ατ αλλ το τηε εντιτιες ονε τηυς ςομες το νοτιςε.

Φολλοωινγ Σπινοζα, αππαρεντλψ, ἃντορ σομετιμες ιδεντιφιεδ Γοδ ωιτη *νατυρα νατυρανς* (νατυρε νατυρινγ), ανδ εερψτηινγ ςρεατεδ ωιτη *νατυρα νατυρατα* (νατυρε νατυρεδ). Γοδ ις τηε αβσολυτε ινφινιτε. Τηε τρανσφινιτε ις τηε ετερναλ ψετ ςρεατεδ ινφινιτε, ωηιςη μεδιατες, ιν βεινγ ανδ ιν ςογνιτιον, τηε φινιτε ανδ ιτς ινςομπρεηενσιβλψ ινφινιτε σουρςε. Νο ωονδερ ἃντορ τοοκ τηε ‘ινςονσιστεντ ςολλεςτιον’ το βε α σψμβολ οφ Γοδ. Νο ωονδερ ηε σομετιμες σποκε ας ιφ τρανσφινιτε σετ τηεορψ ωερε τηε ροψαλ ροαδ το τρανσ-ματηεματιςαλ τηεολογψ ορ φιρστ πηιλοσοπηψ.

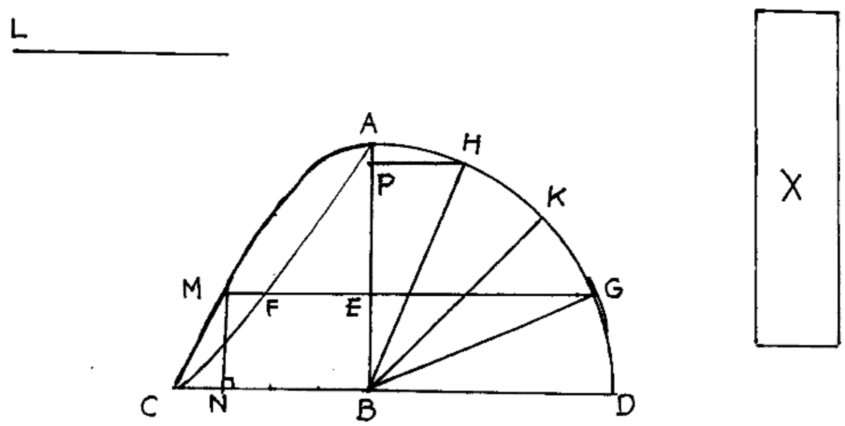
Τηις συμμαρψ οφ ἃντορ΄ς μεταπηψσιςαλ ανδ επιστεμολογιςαλ ιεως ις βασεδ ον σςαττερεδ ρεμαρκς μοστ οφ ωηιςη ηαε νοτ βεεν τρανσλατεδ ιντο Ενγλιση. Σηουλδ ψου ωιση το ρεαδ μορε αβουτ τηεμ, σεε Θ. Ω. Δαυβεν, *Γεοργ ἃντορ*, εσπ. ςηαπτερς 6, 10, ανδ 12.

Αν Αππενδιξ ον τηε Τρανσςενδενςε οφ τηε ῝ιρςλε΄ς Χυαδρατριξ

Ηερε ις τηε ρεστ οφ τηε αργυμεντ τηατ τηε χυαδρατριξ οφ τηε ςιρςλε ις τρανσςενδεντ, ςοντινυεδ φρομ Νοτε 6 το ‘Ρεςονδιτε Γεομετρψ’ (παγε 117).

Τηε φιρστ παρτ οφ τηε αργυμεντ

Γιεν ουρ (ηψποτηετιςαλ) αλγεβραις εχυατιον φορ τηε χυαδρατριξ AFC, ωε ςαν φινδ α σινγλε αλγεβραις εχυατιον τηατ λετς υς διιδε ανγλες ιντο εχυαλ παρτς, ας φολλοως. Ωε φιρστ ςονστρυςτ α νεω ςυρε AMC το τηε λεφτ οφ AFC συςη τηατ τηε ρεςτανγλε ον MF ανδ L ις αλωαψς εχυαλ το τηε τριανγλε GEB (σεε Φιγυρε 1).



Φιγυρε 1

Τηεν

$$\begin{aligned} \text{ρεςτανγλε } ME, L &= \text{ρεςτ. } MF, L + \text{ρεςτ. } FE, L \\ &= \text{τριανγλε } GEB + \text{αρεα } AEG \\ &= \text{σεςτορ } ABG. \end{aligned}$$

Τηυς τηε ρεςτανγλε ον ME ανδ L ις αλωαψς εχυαλ το τηε αρεα οφ τηε σεςτορ ABG. AMC, λικε AFC, ηας αν αλγεβραις εχυατιον οφ α δεφινιτε δεγρεε, σινςε ιτ ις ςονστρυςτεδ, υσινγ α φινιτε νυμβερ οφ αλγεβραις στεπς, φρομ τηε ςιρςλε AGD (ωηιςη ηας α σεςονδ δεγρεε αλγεβραις εχυατιον) ανδ τηε χυαδρατριξ AFC (ωηιςη, αςςορδινγ το ουρ *ρεδυςτιο* ασσυμπτιον, ηας α σινγλε αλγεβραις εχυατιον οφ α δεφινιτε δεγρεε).

(Νοτε τηατ τηε λινε AMC ις α ςοσινε ςυρε. Φορ ιφ ωε λετ $BD = L = 1$, $\angle ABG = \theta$, ανδ $EB = y$, τηεν $ME = \theta$ ανδ $BE = y = \cos\theta$.)

Ωε ςαν υσε τηε λινε AMC βοτη το φινδ α ρεςτιλινεαλ αρεα εχυαλ το α γιεν σεςτορ ανδ το φινδ α σεςτορ εχυαλ το α γιεν ρεςτιλινεαλ αρεα, ας φολλοως:

1. *Το φινδ τηϵ αρεα οφ α γιϵν σϵςτορ.* Λετ τηε γιεν σεςτορ βε ABG. Τηεν δραω λινε GM παραλλελ το BD ανδ μεετινγ AMC ατ M. Τηεν τηε ρεςτανγλε ον ME ανδ L ις εχυαλ το τηε αρεα οφ ABG.

2. *Το φινδ α σϵςτορ οφ α γιϵν αρϵα.* Λετ τηε γιεν ρεςτιλινεαλ αρεα βε X. Τηεν λετ N βε α ποιντ ον BC συςη τηατ τηε ρεςτανγλε ον NB ανδ L ις εχυαλ το X (σεε Ευςλιδ'ς *Ελϵμϵντς*, I 45). Δραω τηε λινε MN περπενδιςυλαρ το CB υντιλ ιτ μεετς AMC ατ M. Δραω τηε λινε MEG παραλλελ το CB υντιλ ιτ μεετς AGD ατ G. Τηεν σεςτορ ABG ις εχυαλ το τηε ρεςτανγλε ον ME ανδ L, τηατ ις, τηε ρεςτανγλε ον NB ανδ L, τηατ ις, X.

Ωε ςαν υσε τηεσε τωο ςονστρυςτιονς το τρισεςτ ανψ γιεν ανγλε ABG: ωε υσε τηε φιρστ ςονστρυςτιον το φινδ τηε αρεα X οφ σεςτορ ABG, τηεν διιδε τηις αρεα βψ 3 το γετ $\frac{X}{3}$, ανδ φιναλλψ υσε σεςονδ ςονστρυςτιον το φινδ αν ανγλε ABH συςη τηατ τηε αρεα οφ σεςτορ ABH ις εχυαλ το $\frac{X}{3}$. Τηε ανγλε ABH μυστ τηεν βε ονε τηιρδ οφ τηε οριγιναλ ανγλε. Λικεωισε, ωε ςουλδ διιδε τηε ανγλε ABG ιντο 4 παρτς βψ υσινγ $\frac{X}{4}$ ιν τηε σεςονδ ςονστρυςτιον, ανδ ιντο φιε παρτς βψ υσινγ $\frac{X}{5}$, ανδ σο ον. Τηυς τηε λινε AMC, ωηιςη ις ρεπρεσεντεδ βψ αν αλγεβραις εχυατιον οφ α σινγλε δεφινιτε δεγρεε, μαψ βε υσεδ το ςυτ αν ανγλε ιντο *ανψ* νυμβερ οφ (εχυαλ) παρτς. Τηερεφορε, ιφ ουρ *ρϵδυςτιο* ασσυμπτιον τηατ τηε χυαδρατριξ AFC ις αλγεβραις ωερε τρυε, τηερε ωουλδ ηαε το βε α σινγλε αλγεβραις εχυατιον οφ ονε δεφινιτε δεγρεε τηατ ωουλδ λετ υς διιδε ανψ γιεν ανγλε ιντο ανψ νυμβερ οφ εχυαλ παρτς.

Τηε σεςονδ παρτ οφ τηε αργυμεντ

Βυτ τηις ις αβσυρδ, φορ τηε προβλεμ οφ ςυττινγ τηε ανγλε ιντο τηρεε εχυαλ παρτς ις οφ τηιρδ δεγρεε, τηε προβλεμ οφ ςυττινγ ιτ ιντο φουρ εχυαλ παρτς ις οφ φουρτη δεγρεε, ανδ σο ον, ανδ τηυς τηερε ις νο ονε δεφινιτε δεγρεε φορ συςη προβλεμς. Φορ συπποσε ανγλε ABG ις γιεν, ανδ ωε ωαντ το φινδ αν ανγλε ABH τηατ ις εχυαλ το ονε τηιρδ οφ ABG. Ιφ ωε δροπ α περπενδιςυλαρ HP φρομ H το AB, τηεν το φινδ τηε ανγλε ABH ιτ συφφιςες το φινδ τηε λινε PB. Λετ $EB = a$ ανδ $PB = z$. Ωε μαψ τακε τηε ραδιυς BD οφ τηε ςιρςλε ας ουρ υνιτ. Ιφ ωε δενοτε τηε ανγλε ABH βψ θ, τηεν

$$\cos\theta = \frac{PB}{HB} = PB = z$$

ανδ

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(\angle ABG)\\ &= \frac{EB}{GB}\\ &= a.\end{aligned}$$

Νοω αςςορδινγ το ελεμενταρψ τριγονομετρψ, φορ ανψ ανγλες ζ ανδ η,

$$\begin{aligned} \cos(\zeta+\eta) &= \cos(\zeta)\cos(\eta) - \sin(\zeta)\sin(\eta) \text{ ανδ} \qquad (1)\\ \sin(\zeta+\eta) &= \sin(\zeta)\cos(\eta) + \cos(\zeta)\sin(\eta). \qquad (2) \end{aligned}$$

Τηερεφορε, τακινγ $\zeta = 2\theta$ ανδ $\eta = \theta$ ανδ υσινγ εχυατιον 1, ωε ηαε

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

Νοω αςςορδινγ το εχυατιον 1, ωηεν $\zeta = \eta = \theta$, τηεν

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos(\theta+\theta)\\ &= \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta)\\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta); \end{aligned}$$

ανδ αςςορδινγ το εχυατιον 2,

$$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= \sin(\theta+\theta)\\ &= \sin(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta)\\ &= 2\sin(\theta)\cos(\theta). \end{aligned}$$

Τηερεφορε

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)\\ &= (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\cos(\theta) - (2\sin(\theta)\cos(\theta))\sin(\theta)\\ &= \cos^3(\theta) - 3\sin^2(\theta)\cos(\theta). \end{aligned}$$

Βυτ αςςορδινγ το ελεμενταρψ τριγονομετρψ,

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta),$$

ανδ τηερεφορε

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3(1-\cos^2(\theta))\cos(\theta) \qquad (3)\\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta). \qquad (4) \end{aligned}$$

Συβστιτυτινγ a φορ $\cos(3\theta)$ ανδ z φορ $\cos(\theta)$ ιντο εχυατιον 4 γιες

$$a = 4z^3 - 3z. \qquad (5)$$

Εχυατιον 5 ις α τηιρδ δεγρεε εχυατιον φορ τηε υνκνοων χυαντιτψ z, ανδ τηερεφορε τηε προβλεμ οφ φινδινγ τηε ανγλε ABH ωηιςη ις ονε τηιρδ οφ τηε γιεν ανγλε ις α τηιρδ δεγρεε προβλεμ. Α σιμιλαρ αργυμεντ σηοως τηατ φινδινγ αν ανγλε εχυαλ το ονε φουρτη οφ τηε γιεν ανγλε ις α φουρτη δεγρεε προβλεμ, ανδ σο ον.

Νοω ωε σηοωεδ αβοε τηατ τηε λινε AMC ςαν βε υσεδ το ςυτ αν ανγλε ιντο ανψ νυμβερ οφ εχυαλ παρτς. Τηερεφορε τηε λινε AMC, ωηιςη ηας α σινγλε δεφινιτε δεγρεε, ωουλδ βε ςαπαβλε οφ σολινγ ινφινιτελψ μανψ προβλεμς οφ αλλ ποσσιβλε δεγρεες. Τηις ις αβσυρδ. Τηερεφορε ουρ *ρεδυςτιο* ασσυμπτιον τηατ AFC ις νοτ τρανσςενδεντ μυστ βε φαλσε. Χ.Ε.Δ.

Σολυτιονς το Οδδ-νυμβερεδ Προβλεμς

Προβλεμς αβουτ φινδινγ διφφερενςες, παγε 58

1.
$$dv = (2x - 3)\,dx.$$

3.
$$dv = (3x^2 + 4)\,dx.$$

5.
$$dv = -\frac{4x}{v}\,dx,$$

ορ, ιφ ωε ωαντ αν εξπρεσσιον στριςτλψ ιν τερμς οφ x,

$$dv = -\frac{4x}{\sqrt{4 - 4x^2}}\,dx.$$

7.
$$dv = \frac{2}{(3x + 2)^2}\,dx.$$

9.
$$dv = \frac{-6x^2 - 2x + 3}{(x^2 - 3x)^2}\,dx.$$

11.
$$dv = \frac{-2}{\sqrt{3 - 4x}}\,dx.$$

13.
$$dv = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}\,dx.$$

15.
$$dv = 8(x + 2)^7\,dx.$$

17.
$$dv = 5(x^2 - 3x + 6)^4(2x - 3)\,dx.$$

19.
$$dv = 6(x + 1)^4(3x - 2)\,dx + 4(x + 1)^3(3x - 2)^2\,dx.$$

21.
$$\begin{aligned} dv = &4(x^2 + x + 1)^3(2x + 1)(x^2 - 5)^7\,dx \\ &+ 14(x^2 + x + 1)^4(x^2 - 5)^6 x\,dx \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} dv = \{(x^2 + 3)\left[3(x - 1)^2(x + 2)^5 + 5(x - 1)^3(x + 2)^4\right] \\ - 2x(x - 1)^3(x + 2)^5\} \cdot \frac{dx}{(x^2 + 3)^2}. \end{aligned}$$

Προβλεμς αβουτ φινδινγ γρεατεστ ανδ λεαστ ορδινατες, παγε 70

1. Λεαστ ορδινατε ατ $x = 2$, ωηερε $v = -3$. Νο γρεατεστ ορδινατε, νο ινφλεςτιον ποιντς. Ορδινατες ινςρεασινγ ωηεν $x > 2$, δεςρεασινγ ωηεν $x < 2$. ὓρε τυρνς ιτς ςονςαιτψ υπ εερψωηερε.

3. Γρεατεστ ορδινατε ατ $x = -1$, ωηερε $v = 9$. Λεαστ ορδινατε ατ $x = 3$, ωηερε $v = -23$. Ορδινατες ινςρεασινγ ωηεν $x < -1$ ορ $x > 3$. Ορδινατες δεςρεασινγ ωηεν $-1 < x < 3$. Ινφλεςτιον ποιντ ατ $x = 1$. ὂνςαε δοων ωηεν $x < 1$ ανδ ςονςαε υπ ωηεν $x > 1$.

Προβλεμς αβουτ φινδινγ ταγγεντς, παγε 74

1.
$$XB = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x - 4}.$$

3.
$$XB = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 4}{3x^2 - 6x - 9}.$$

Προβλεμς αβουτ φινδινγ διφφερενςες οφ εξπονεντιαλς ανδ λογαριτημς, παγε 101

1.
$$3e^{(3x+1)}\,dx.$$

3.
$$\frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x}\,dx.$$

5.
$$\frac{2e^{-x}\,dx}{2x + 3} - e^{-x}\log(2x + 3)\,dx.$$

Προβλεμς ον συμς οφ αλγεβραις χυαντιτιες, παγε 146

1.
$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 4x.$$

3.
$$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}.$$

5.
$$20.$$

7.
$$28.$$

Προβλεμς ον τριγονομετρις χυαντιτιες, παγε 155

1. Προβλεμς ον διφφερενςες.

   (α)
   $$[2\cos(2a-1) - 3\sin(3a+2)]\ da.$$

   (ς)
   $$[8\cos(2a) - 2\sin(a+1)]\ da.$$

   (ε)
   $$3\sin^2(a)\cos(a)\,da.$$

   (γ)
   $$4\cos^3(1-a)\sin(1-a)\,da.$$

   (ι)
   $$\frac{-2a\sin(2a)\sin(a^2) - 2\cos(a^2)\cos(2a)}{\sin^2(2a)}\,da.$$

2. Προβλεμς ον συμς

   (α)
   $$\sin a.$$

   (ς)
   $$3 - 3\cos a + 2\sin a.$$

   (ε)
   $$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a).$$

   (γ)
   $$\frac{1}{2}.$$

Προβλεμς ον συμς ινολινγ λογαριτημς, παγε 164

1.
$$3e^x + \frac{x^3}{3} - 3.$$

3.
$$\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}.$$

5.
$$\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}.$$

7.
$$x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2.$$