Runge-Kutta

José David Ruiz Álvarez

josed.ruiz@udea.edu.co

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Antioquia

28 de abril de 2020

1. Método de Runge-Kutta

Se define el método de Runge-Kutta de orden 4, o método clásico de Runge-Kutta, por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{1}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \tag{2}$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}) \tag{3}$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}) \tag{4}$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + hk_3) \tag{5}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{6}$$

siguiendo la definicion de un problema de ecuación diferencial ordinaria $y' = f(x, y);\ y(x_0) = y_0$.

Ejercicio 1: Implemente el método de Runge-Kutta de orden 4 en python y utilícelo para encontrar soluciones a la ecuación diferencial, $y' = x - y$ con valor inicial $x_0 = 0;\ y_0 = 1$.

Ejercicio 2: Compare las soluciones encontradas con el método de Runge-Kutta con el método de Euler y método de Euler mejorado.

2. Método de Runge-Kutta generalizado

El método de Runge-Kutta de orden 4 hace parte de la familia de métodos de Runge-Kutta, cuya generalización se puede escribir a través de las siguientes ecuaciones:

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{7}$$
$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{8}$$
$$k_2 = f(x_n + hc_2, y_n + h(a_{21}k_1)) \tag{9}$$
$$k_3 = f(x_n + hc_3, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)) \tag{10}$$
$$... \tag{11}$$
$$k_s = f(x_n + hc_s, y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + ... + a_{s,s-1}k_{s-1})) \tag{12}$$
$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i \tag{13}$$

Los valores de las constantes a_{ij}, b_i, c_i definen la estabilidad del método. El método de Euler es un método de Runge-Kutta de orden 1. El método clásico de Runge-Kutta tiene $c_2 = c_3 = 1/2$, $c_4 = 1$, $a_{21} = a_{32} = 1/2$, $a_{43} = 1$, $b_1 = b_4 = 1/6$, $b_2 = b_3 = 1/3$ y el resto de coeficientes son cero.

Ejercicio 3: Implemente el método de Runge-Kutta de orden 3 definido por $c_2 = 1/2$, $c_3 = 1$, $a_{21} = 1/2$, $a_{31} = -1$, $a_{32} = 2$, $b_1 = b_3 = 1/6$, $b_2 = 2/3$ y el resto de coeficientes son cero en python y utilícelo para encontrar soluciones a la ecuación diferencial, $y' = x - y$ con valor inicial $x_0 = 0$; $y_0 = 1$.

Ejercicio 4: Compare las soluciones encontradas con el método de Runge-Kutta de orden 3 con el método de Euler, método de Euler mejorado y el método de Runge-Kutta de orden 4.