Parabolic Partial Differential Equations

Daniel Sierra B
Santiago Bustamante Q

Ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Condiciones de frontera e iniciales

$u(x_i, t)$ $u(x_F, t)$ $u(x, 0) = f(x)$

Forward Difference Method

Expansión en series de Taylor en t de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

Expansión en series de Taylor en x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

siendo h la longitud del paso en x y k la longitud del paso en t

Forward Difference Method

tomando el elemento de matriz w_{ij} como una aproximación a $u(x_i, t_j)$ se obtiene

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

con un error local de truncamiento

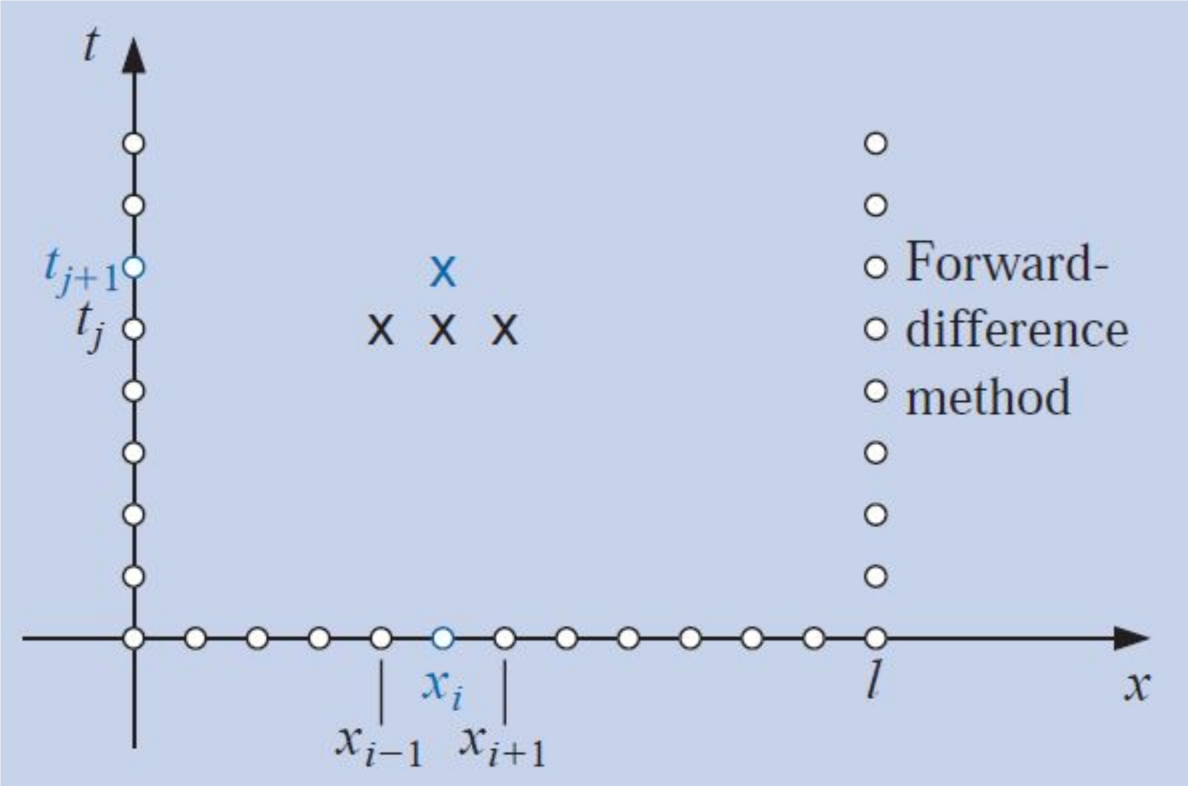
$$\tau_{ij} = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

Forward Difference Method

la solución para el elemento $w_{i,j+1}$ está dada por

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$$

Forward Difference Method



Backward-Difference Method

Expansión en series de Taylor en t de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

Expansión en series de Taylor en x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

siendo h la longitud del paso en x y k la longitud del paso en t

Backward-Difference Method

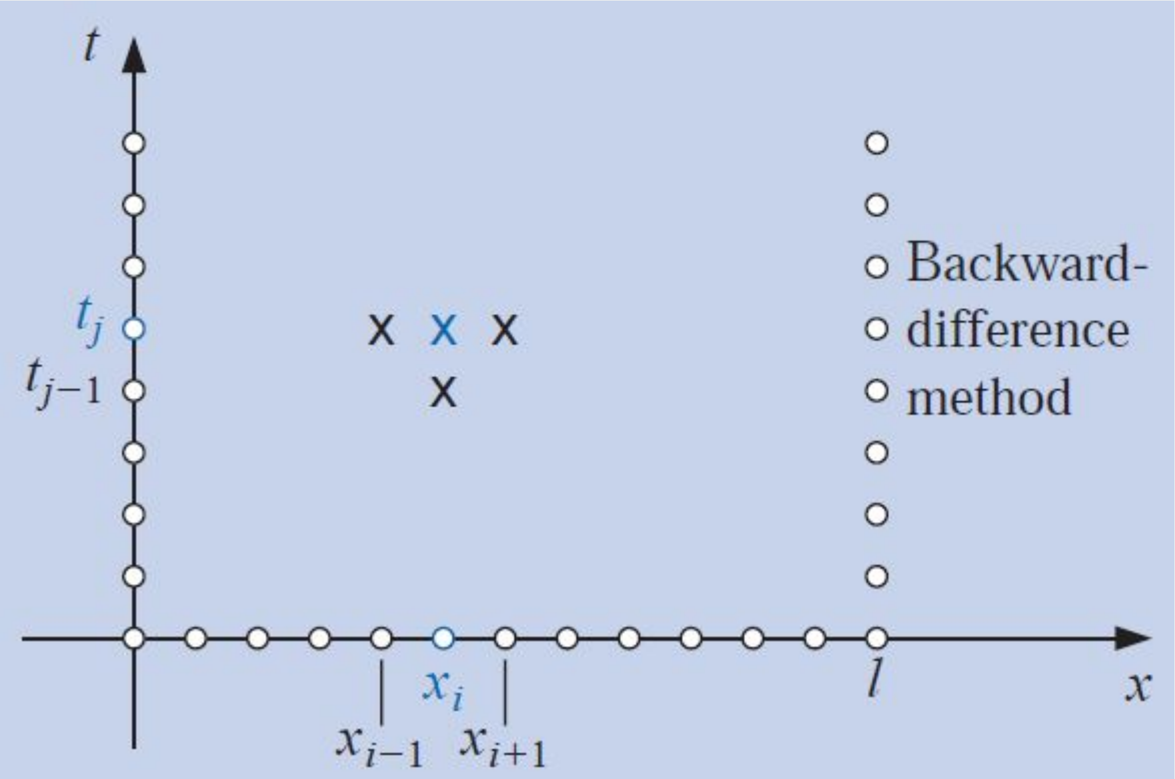
tomando el elemento de matriz w_{ij} como una aproximación a $u(x_i, t_j)$ se obtiene

$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

con un error local de truncamiento

$$\tau_{ij} = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

Backward-Difference Method



Crank-Nicolson Method

Se obtiene promediando el Forward-Difference method para el paso de tiempo j

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

y el Backward-Difference method para el paso de tiempo j+1

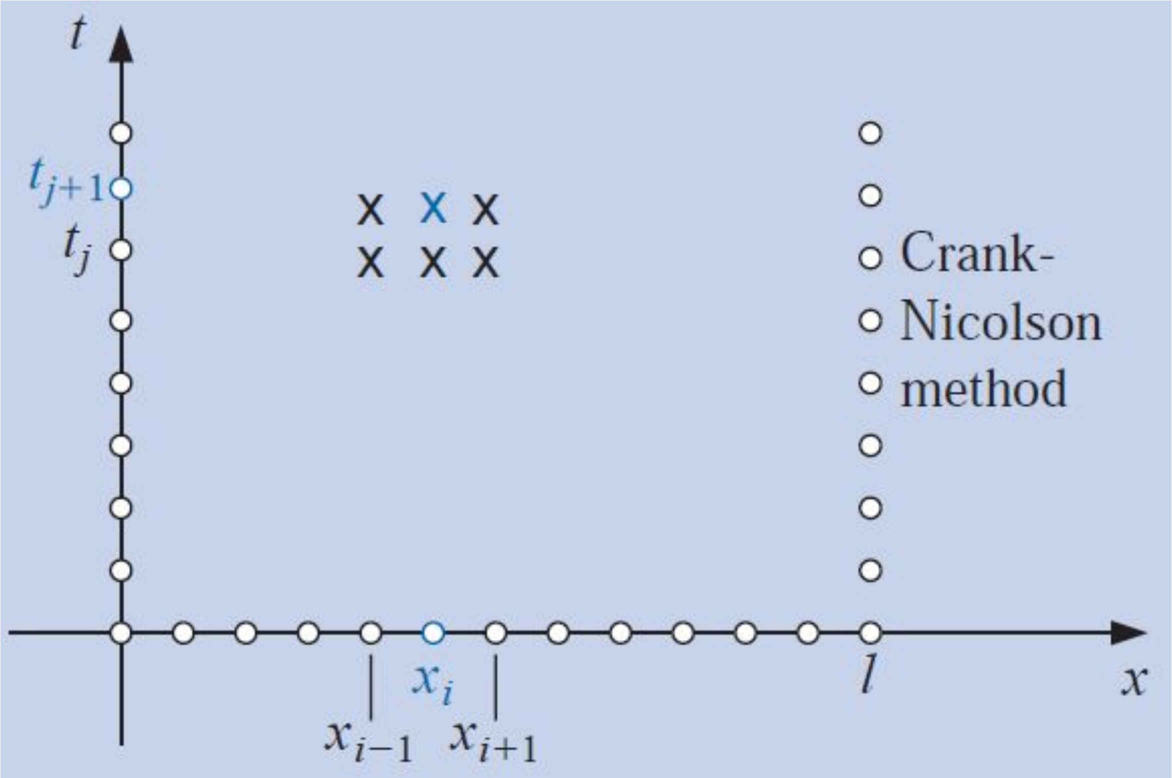
$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

Crank-Nicolson Method

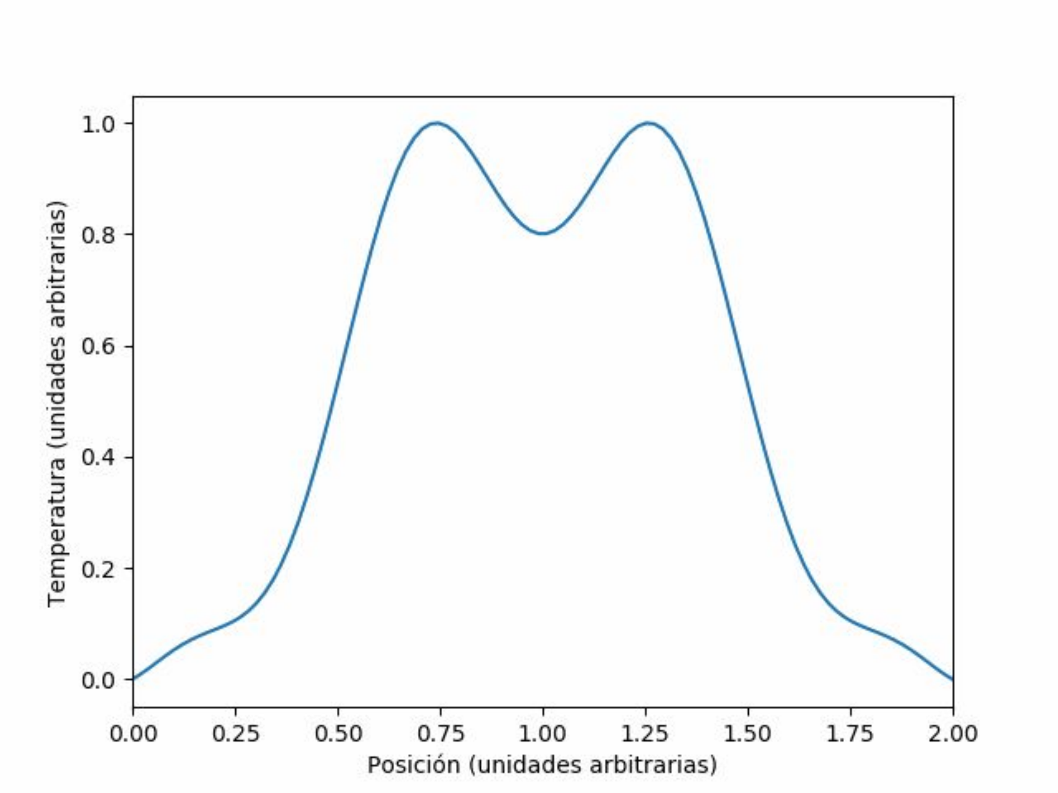
Obteniendo la expresión

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2}\right] = 0$$

Crank-Nicolson Method

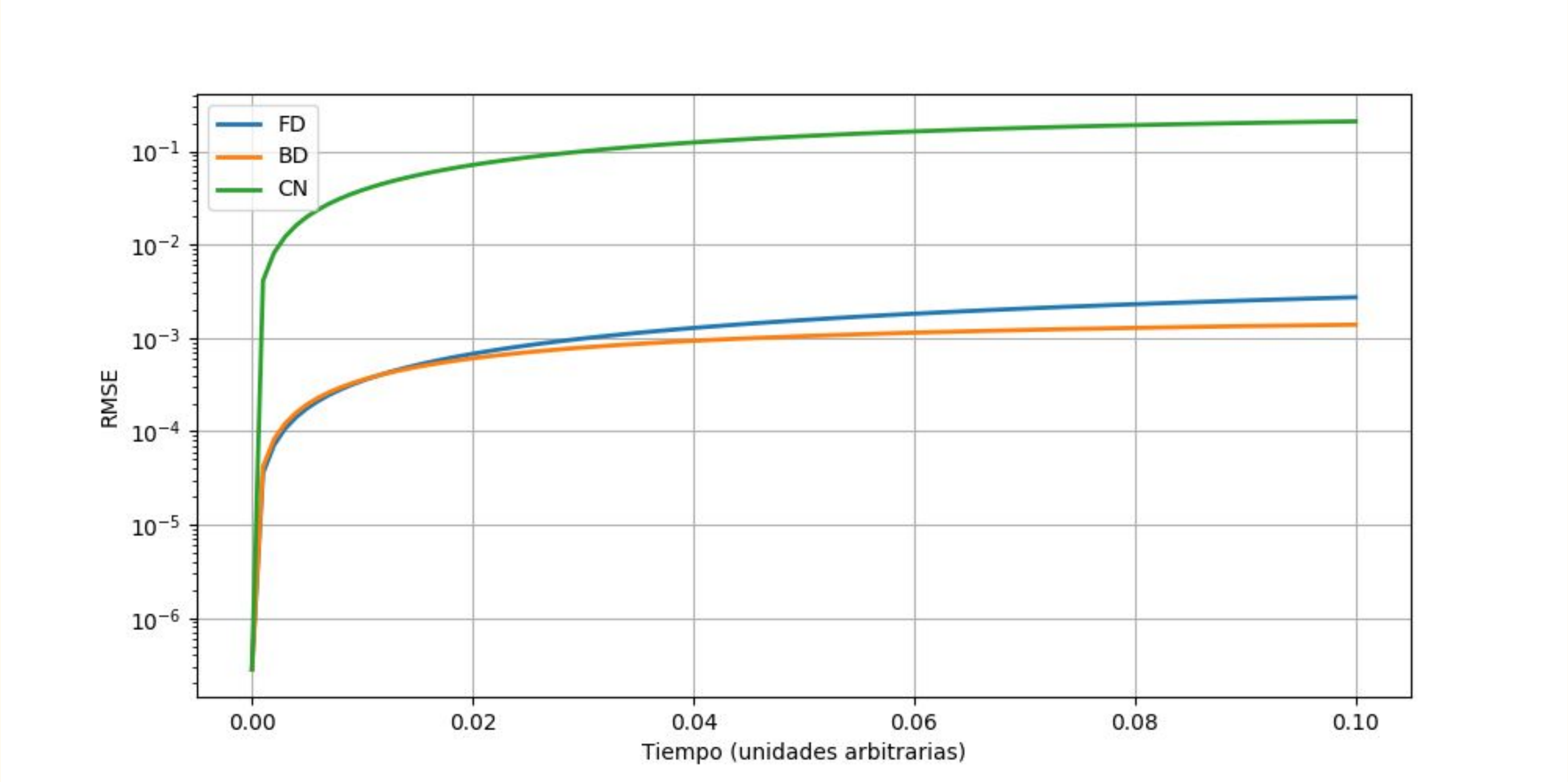


Resultados



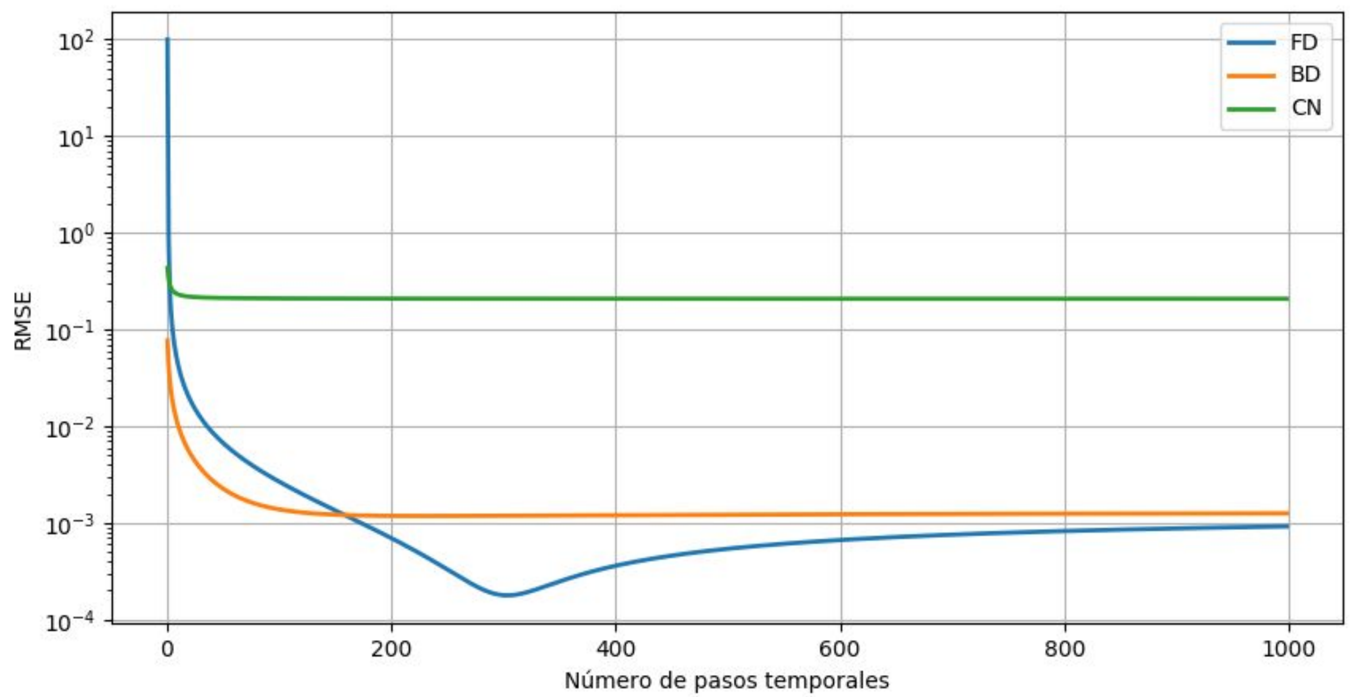
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Temperatura (unidades arbitrarias)
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
Posición (unidades arbitrarias)

Resultados



FD
BD
CN
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
RMSE
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
Tiempo (unidades arbitrarias)

Resultados



FD
BD
CN
RMSE
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0
200
400
600
800
1000
Número de pasos temporales

¡Gracias por escuchar!

Link al git:

https://github.com/santiagobusta/ParabollicPartialDifferentialEqs