Método Linear Shooting para Resolver Ecuaciones Diferenciales[1]

Maryi A. Carvajal, Juan Pablo Marulanda, Jacobo Parodi

[1] https://github.com/Jumarulanda/cufico2_parcial3

Definición del método

La ecuación diferencial original se define como:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \qquad \text{donde} \qquad y(a) = \alpha \;\; \text{y} \;\; y(b) = \beta$$

Las condiciones que deben cumplir las funciones para que el método dé como resultado valores precisos son:

1) p(x), q(x), r(x) deben ser continuas en [a,b].
2) q(x) debe ser definida positiva en [a,b].

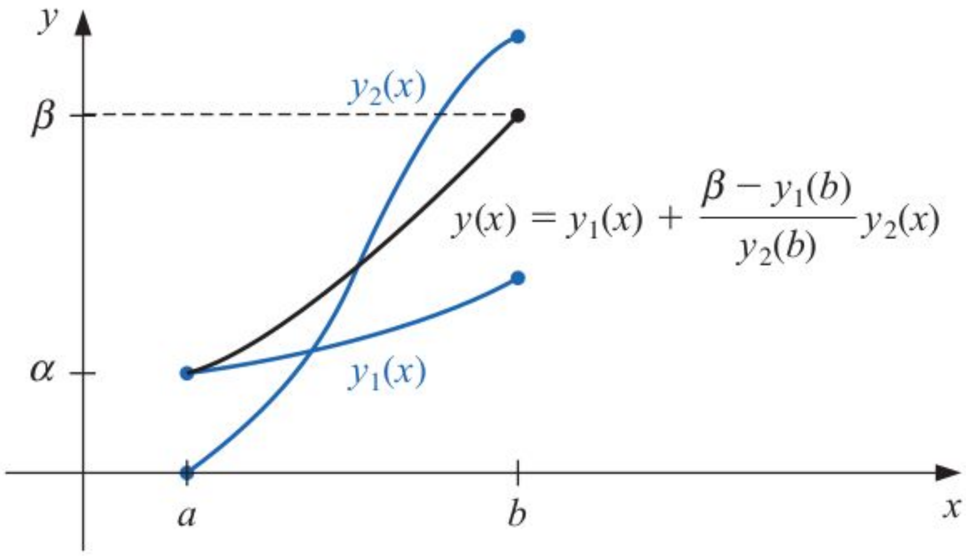
Definición del método

Para implementar el método deben definirse 2 ecuaciones diferenciales auxiliares con condiciones iniciales como:

$$y_1'' = p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) \qquad y_2'' = p(x)y_2' + q(x)y_2$$

$$y_1(a) = \alpha \ \text{ y } \ y_1'(a) = 0 \qquad y_2(0) = 0 \ \text{ y } \ y_2'(a) = 1$$

La solución de la ecuación original se construye a partir de las soluciones de las ecuaciones auxiliares a partir de:



Definición del método

Para resolver las ecuaciones diferenciales auxiliares se usa el método RK4 y por tanto las ecuaciones que son de segundo orden, deben escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales primer orden.

$$\begin{aligned} y_1' &= u_1 \\ u_1' &= p(x)u_1 + q(x)y_1 + r(x) \\ &\text{con } y_1(a) = \alpha \text{ y } u_1(a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2' &= u_2 \\ u_2' &= p(x)u_2 + q(x)y_2 \\ &\text{con } y_2(a) = 0 \text{ y } u_2(a) = 1 \end{aligned}$$

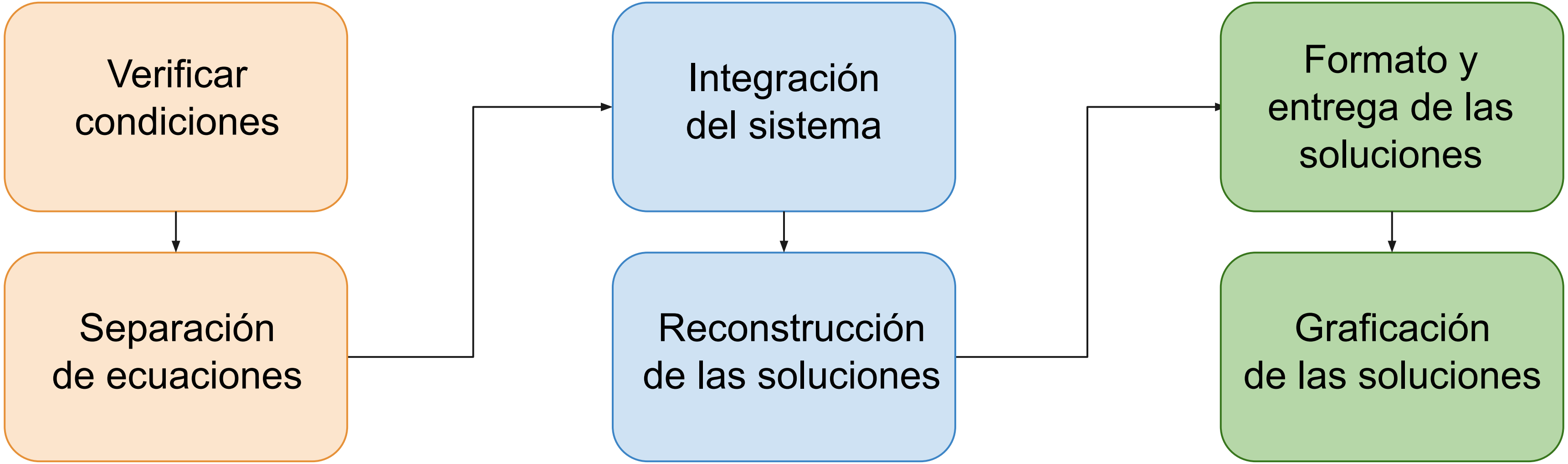
Puede verse que la forma funcional de y_1 y de y_2 es la misma, de modo que basta con instanciarla una sola vez. Con esto, tendremos 3 funciones auxiliares que habría que integrar con el Runge-Kutta.

Código modular

Verificación y construcción del sistema de ecuaciones

Integración del sistema y reconstrucción de las soluciones

Formato y visualización de las soluciones



Método de integración por Runge-Kutta

Ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

Integrando esta ecuación en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{d}x \; f(x, y)$$

Puede ahora expandirse a $f(x, y)$ en una serie de taylor alrededor de $x_{t+1/2}$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{d}x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x - x_{n+1/2})^n f^{(n)}(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$$

Para el RK de orden 4, se toma la serie hasta el término de orden 2

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \qquad \mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right),$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right), \qquad \mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3).$$

Solución de ecuaciones diferenciales

Ejemplo libro Burden

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2},$$

Para $1 \leq x \leq 2,$

Con $y(1) = 1 \qquad y(2) = 2,$

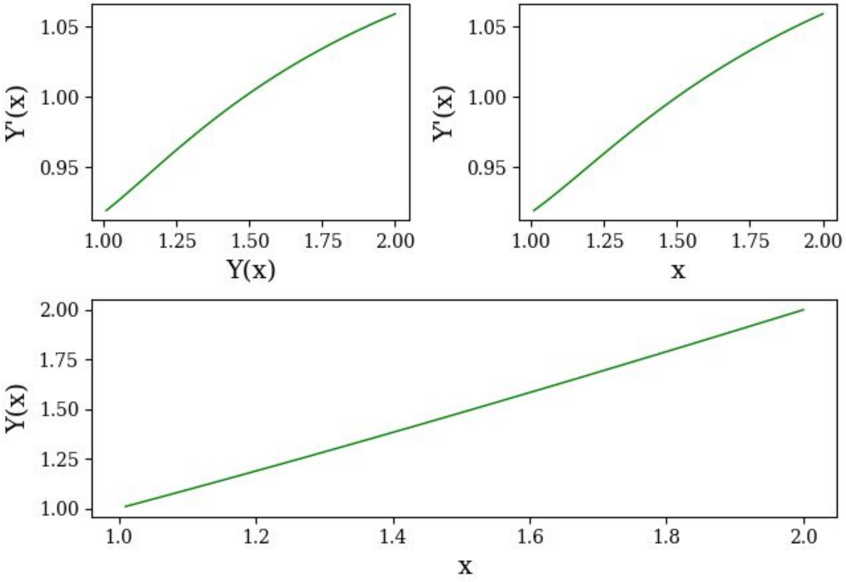
Solución analítica:

$$\boxed{y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x),}$$

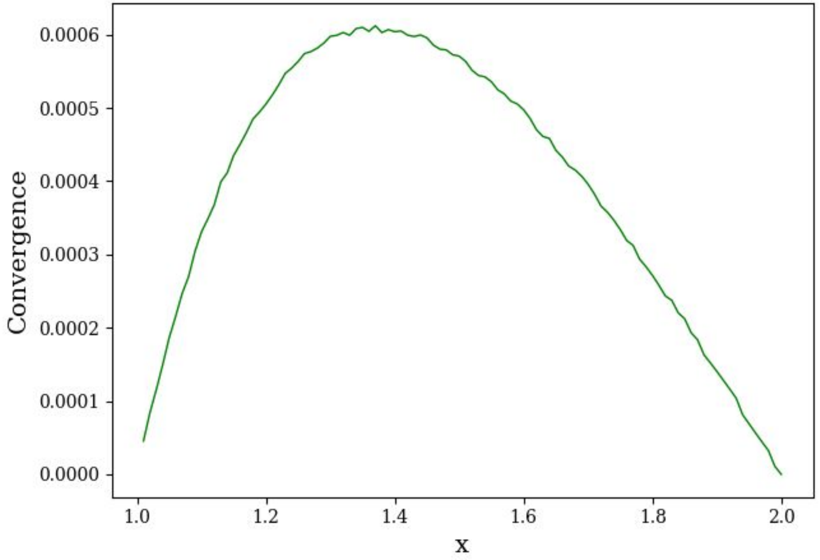
Siendo: $\boxed{c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12\sin(\ln 2) - 4\cos(\ln 2)]}$

$$\boxed{c_1 = \frac{11}{10} - c_2}$$

Resultados



Y'(x)
1.05
1.00
0.95
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
Y(x)
Y'(x)
1.05
1.00
0.95
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
x
Y(x)
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
x



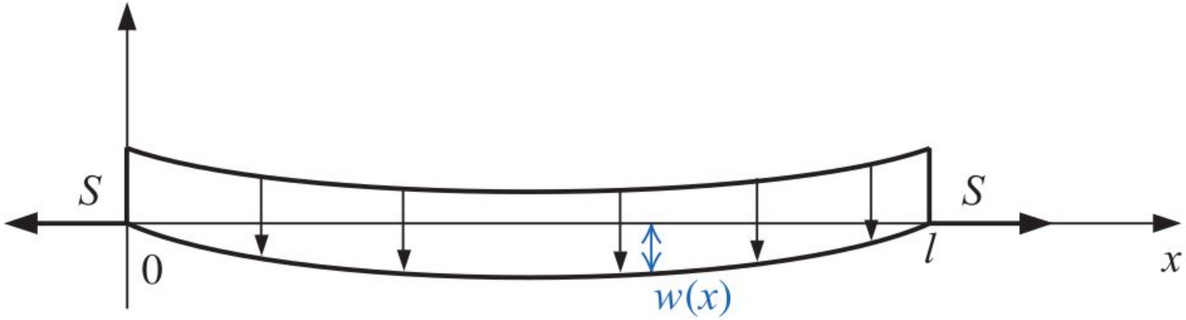
Convergence
0.0006
0.0005
0.0004
0.0003
0.0002
0.0001
0.0000
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
x

Barra con corte transversal rectangular

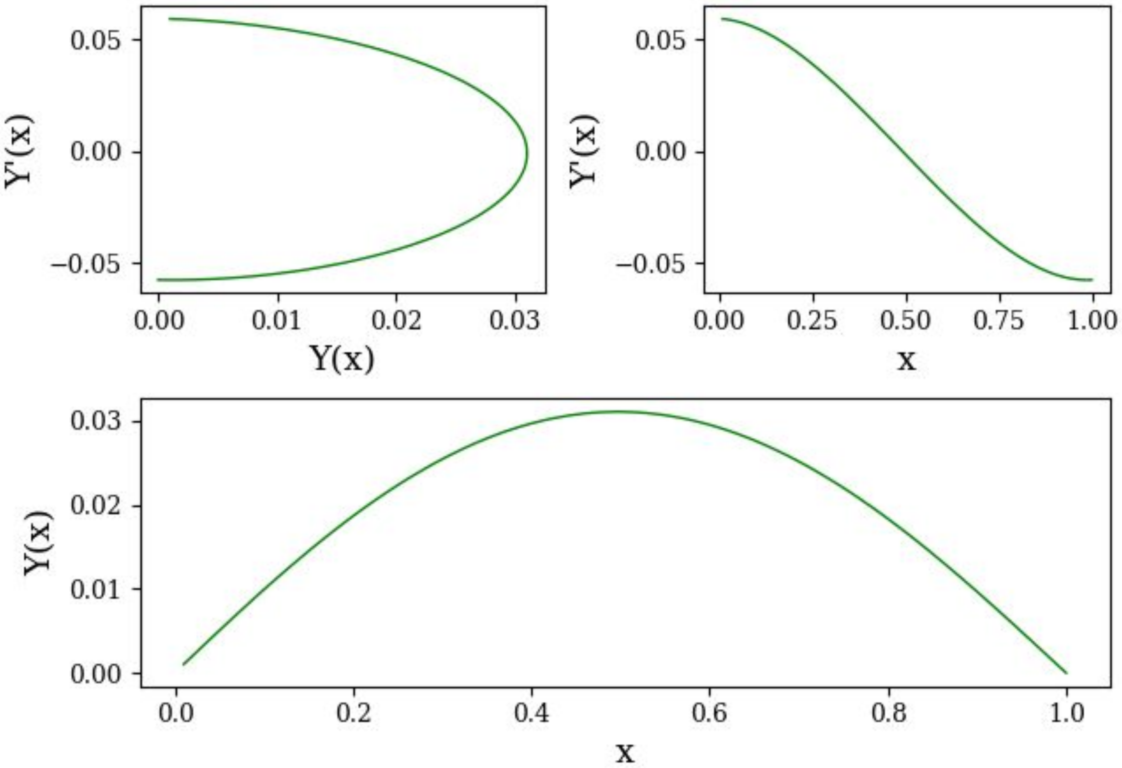
$$\frac{d^2 w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{qx}{2EI}(x - l),$$

Para $w(0) = 0 \qquad w(l) = 0.$

Siendo w la distancia de deflección



Resultados



0.05
0.00
−0.05
Y'(x)
0.00
0.01
0.02
0.03
Y(x)
0.05
0.00
−0.05
Y'(x)
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x
0.03
0.02
0.01
0.00
Y(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x

Potencial electrostático entre dos esferas concéntricas.

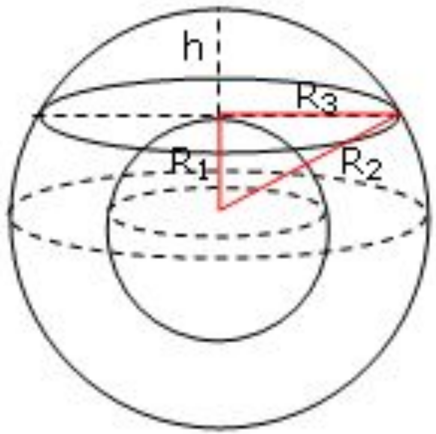
$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2,$$

Para

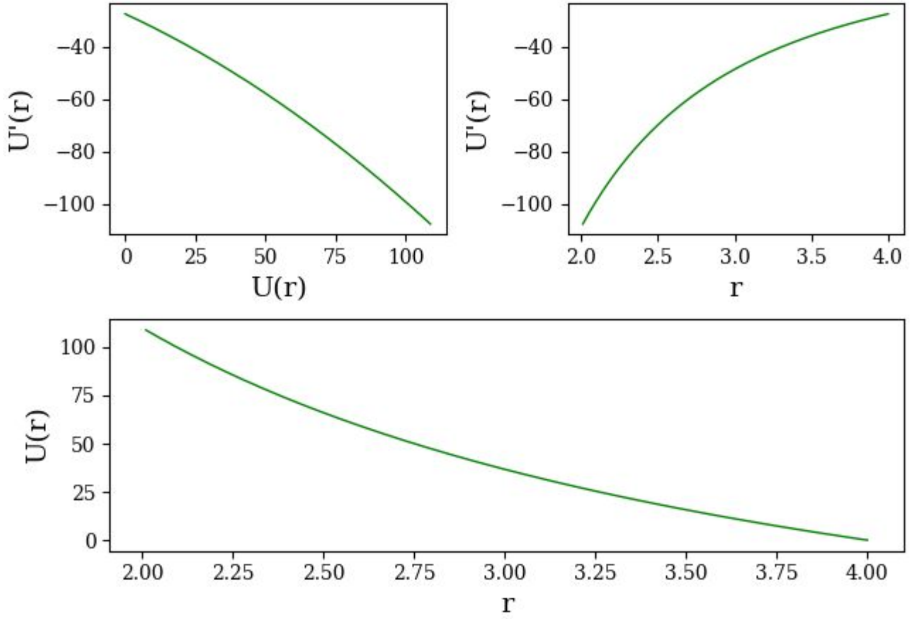
$$u(R_1) = V_1, \quad u(R_2) = 0.$$

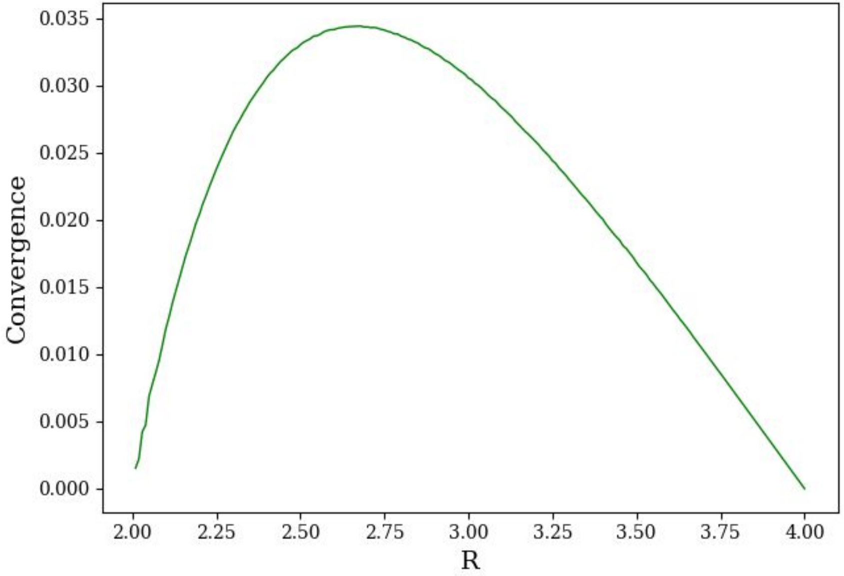
Solución analítica:

$$\boxed{u(r) = \frac{V_1 R_1}{r}\left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right).}$$



Resultados


U'(r)
−40
−60
−80
−100
0
25
50
75
100
U(r)
U'(r)
−40
−60
−80
−100
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
r
U(r)
100
75
50
25
0
2.00
2.25
2.50
2.75
3.00
3.25
3.50
3.75
4.00
r


Convergence
0.035
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
2.00
2.25
2.50
2.75
3.00
3.25
3.50
3.75
4.00
R