

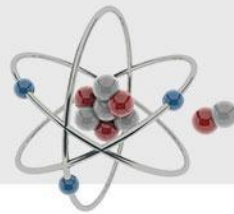
ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL HIPERBÓLICA

FÍSICA COMPUTACIONAL II

DANIEL HENAO, SANTIAGO TABARES
SEBASTIAN ZAPATA, ALEXANDER VALENCIA

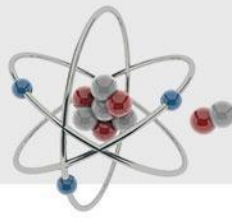
Instituto de Física - Universidad de Antioquia

Contenido



1. Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. Ecuación de onda
2. Solución numérica.
3. Implementación del código.
4. Ejemplos.

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES HIPERBÓLICAS

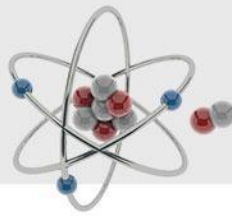


En el caso particular de las ecuaciones diferenciales parciales lineales tenemos:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Donde los coeficientes suelen ser funciones de las variables de diferenciación, en este caso, (x,y).

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES HIPERBÓLICAS

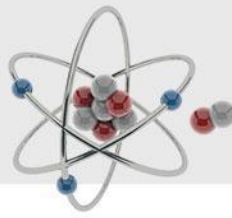


Para saber si una ecuación diferencial lineal es hiperbólica, se hace uso de la relación análoga al discriminante de una ecuación de segundo grado, teniendo que es hiperbólica cuando:

$$B^2 - 4AC > 0$$

Donde A,B y C son coeficientes de la ecuación diferencial parcial lineal.

ECUACIÓN DE ONDA



El caso más conocido de ecuación diferencial parcial hiperbólica es la ecuación de onda, cuya ecuación unidimensional es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Y está sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \text{for } t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad \text{for } 0 \leq x \leq l$$

¿Para qué sirve la ecuación?

Describir el comportamiento ondulatorio de sistemas

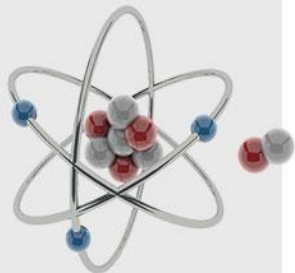
La ecuación diferencial parcial hiperbólica es de segundo orden en: las variables espaciales y la variable temporal. La forma más general de esta ecuación en un problema ondulatorio es:

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - \beta u_t - \gamma u + f(x, t)$$

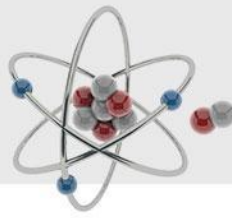
$f(x, t)$ → fuerza externa aplicada

γu → fuerza restauradora proporcional a la desviación del equilibrio

βu_t → fuerza de rozamiento de tipo viscoso proporcional a la velocidad



SOLUCIÓN NUMÉRICA

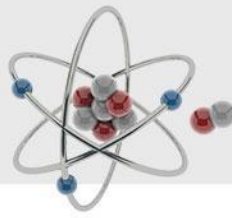


Para establecer el método de solución se selecciona un $m > 0$ y un paso $k > 0$, además la partición de x está dada por $h = l/m$ y finalmente los puntos de red para la posición y el tiempo, toman la forma de $x = ih$, $t = jk$, donde $i = 0, 1, 2, \dots, m$ y $j = 0, 1, 2, \dots$

Ahora aplicamos la definición de cociente de diferencias centradas en la segunda derivada a la ecuación de onda:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

SOLUCIÓN NUMÉRICA



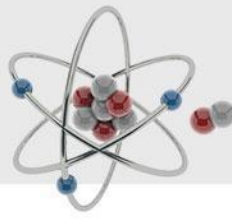
Luego de aplicar el cociente de diferencias centradas en la segunda derivada, obtenemos para la componente temporal:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j)$$

Y para la componente espacial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

SOLUCIÓN NUMÉRICA



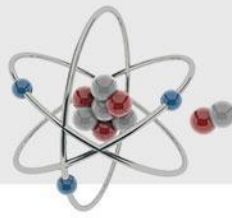
Entonces, reescribiendo nuestra ecuación de onda, obtenemos:

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} = \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right]$$

Despreciando el término de orden superior, llegamos finalmente a la ecuación de diferencias para la ecuación de onda.

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

SOLUCIÓN NUMÉRICA



Ahora definimos:

$$\lambda = \alpha k / h$$

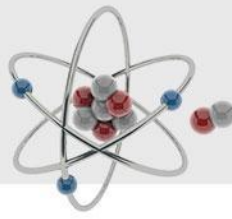
Con lo que podemos reescribir la ecuación de diferencias como:

$$w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$$

Donde las condiciones de frontera están dadas por:

$$w_{i,0} = f(x_i) \quad \text{y} \quad w_{0,j} = w_{m,j} = 0$$

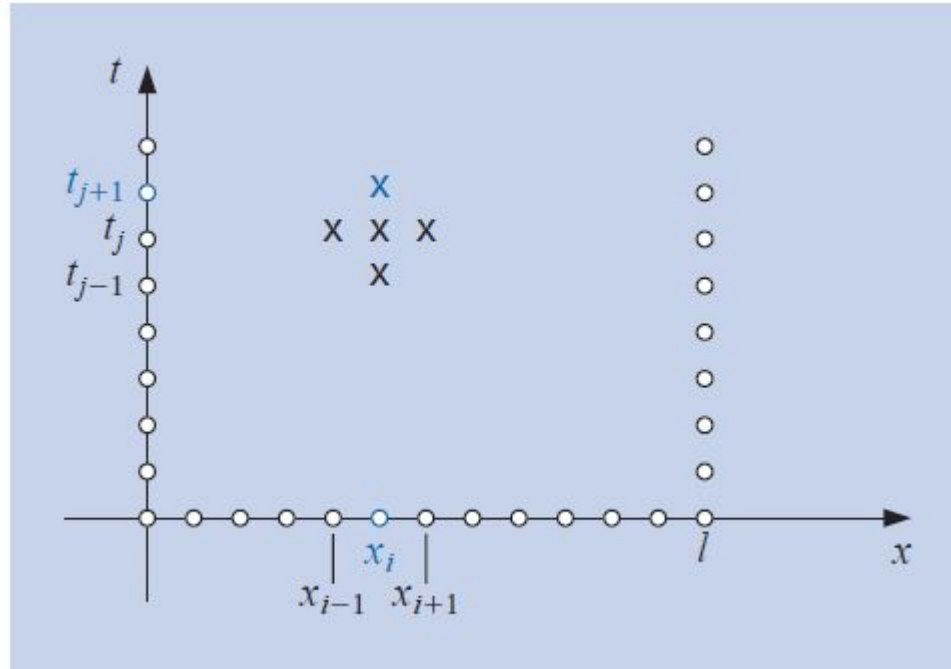
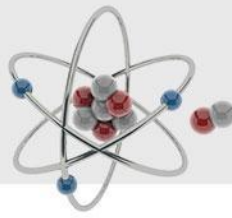
SOLUCIÓN NUMÉRICA



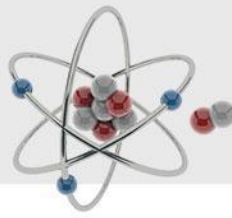
Finalmente, reescribimos el sistema de ecuaciones en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN NUMÉRICA



SOLUCIÓN NUMÉRICA



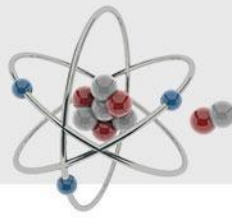
Se utilizará una expansión en series de Maclaurin, la cual brinda un error en orden 3.

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i)$$

Pero la segunda derivada es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) = \alpha^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) = \alpha^2 f''(x_i)$$

SOLUCIÓN NUMÉRICA



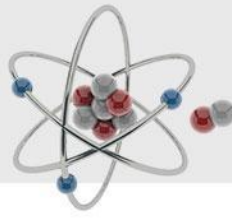
Con lo cual, se obtiene

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i)$$

Se aplica nuevamente el cociente de diferencias centradas para la segunda derivada.

$$u(x_i, t_1) \quad f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \quad (k^3 + h^2 k^2)$$

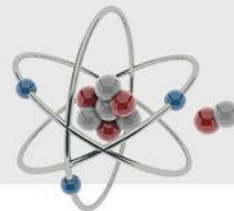
SOLUCIÓN NUMÉRICA



Y finalmente retomando el valor definido para lambda, es posible reescribir la ecuación de diferencias para el primer instante de tiempo como

$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i-1}) + kg(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

PSEUDO-CÓDIGO



INPUT endpoint l ; maximum time T ; constant α ; integers $m \geq 2, N \geq 2$.

OUTPUT approximations $w_{i,j}$ to $u(x_i, t_j)$ for each $i = 0, \dots, m$ and $j = 0, \dots, N$.

Step 1 Set $h = l/m$;
 $k = T/N$;
 $\lambda = k\alpha/h$.

Step 2 For $j = 1, \dots, N$ set $w_{0,j} = 0$;
 $w_{m,j} = 0$;

Step 3 Set $w_{0,0} = f(0)$;
 $w_{m,0} = f(l)$.

Step 4 For $i = 1, \dots, m-1$ *(Initialize for $t = 0$ and $t = k$.)*
 set $w_{i,0} = f(ih)$;
 $w_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(ih) + \frac{\lambda^2}{2}[f((i+1)h) + f((i-1)h)] + kg(ih)$.

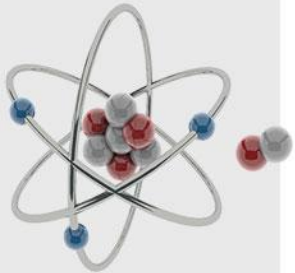
Step 5 For $j = 1, \dots, N-1$ *(Perform matrix multiplication.)*
 for $i = 1, \dots, m-1$
 set $w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$.

Step 6 For $j = 0, \dots, N$
 set $t = jk$;
 for $i = 0, \dots, m$
 set $x = ih$;
 OUTPUT $(x, t, w_{i,j})$.

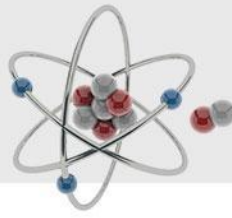
Step 7 **STOP.** *(The procedure is complete.)*

Funcionamiento del código

<https://github.com/STabaresG/parcial3>



EJEMPLOS.

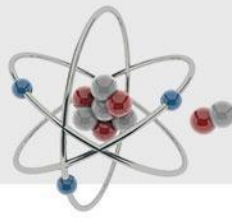


Vibraciones de una cuerda.

No está sometida a perturbaciones por la acción de otras fuerzas.

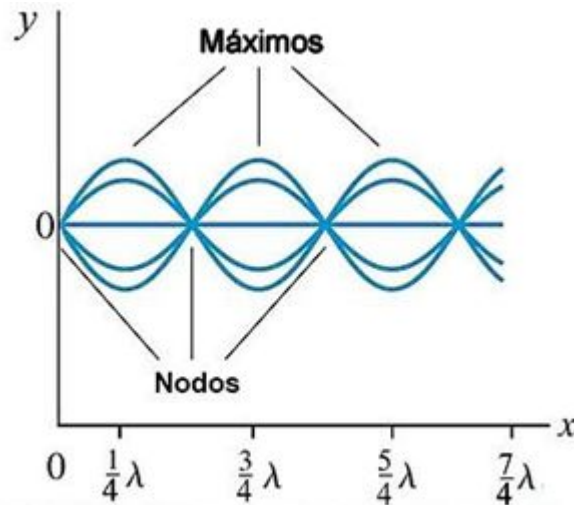
Una perturbación puede variar la forma de la cuerda a partir de su estado de equilibrio y se propaga a lo largo de ella.

Ondas estacionarias.

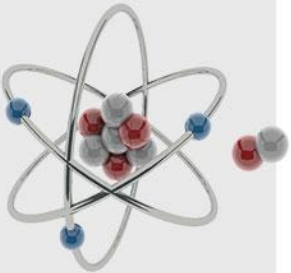


No son ondas de propagación.

Son los distintos modos de vibración de la cuerda.

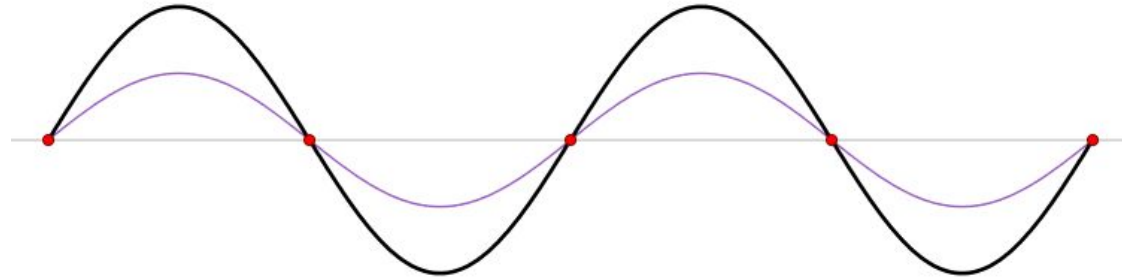


Sólo hay ciertas frecuencias a las que se producen ondas estacionarias y se conocen como frecuencias de resonancia.

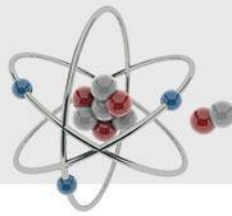


Las ondas estacionarias se pueden formar por la suma de una onda y su onda reflejada sobre un mismo eje.

Un ejemplo numérico lo define la siguiente expresión y se explica a continuación:



Punto 2 - Burden 12.3



2. Approximate the solution to the wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 0.5, \quad 0 < t;$$

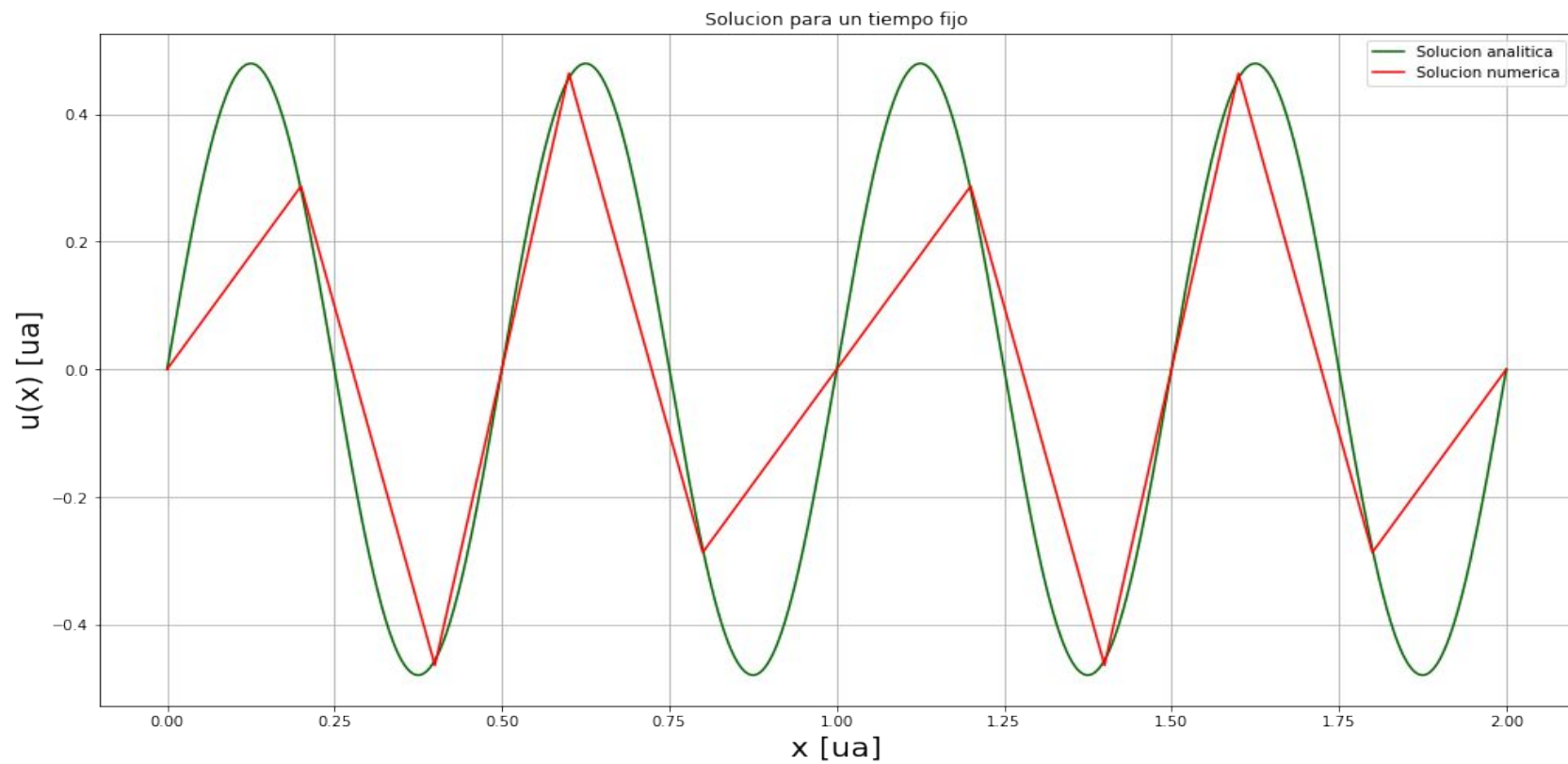
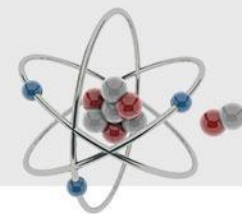
$$u(0, t) = u(0.5, t) = 0, \quad 0 < t,$$

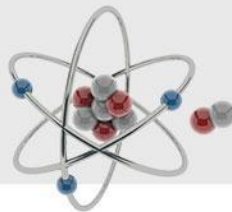
$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 0.5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin 4\pi x, \quad 0 \leq x \leq 0.5,$$

using the Finite-Difference Algorithm 12.4 with $m = 4$, $N = 4$ and $T = 0.5$. Compare your results at $t = 0.5$ to the actual solution $u(x, t) = \sin t \sin 4\pi x$.

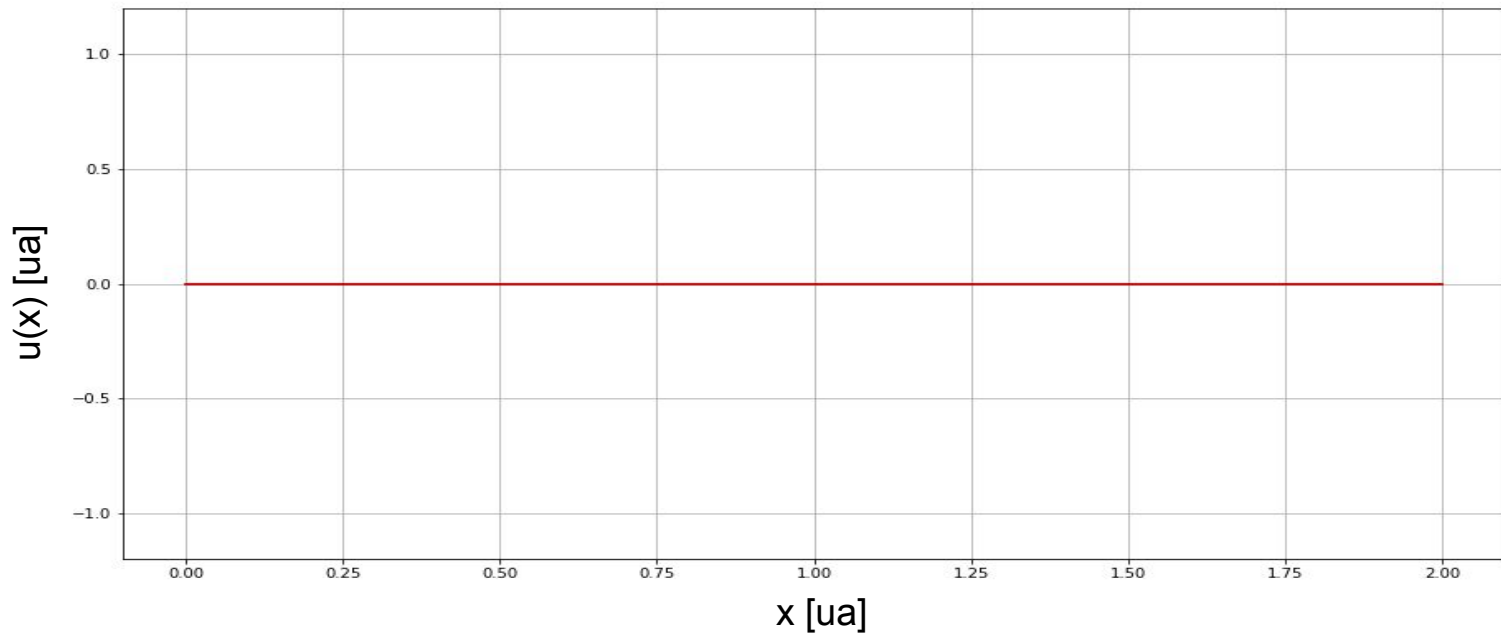
***Se realizó con $m = 10$, $N = 10$ y $l=2$ ($0 < x < 2$).**



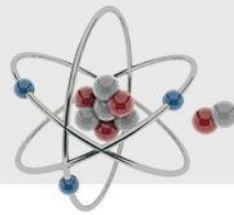


Con $m = 100$, $N = 100$, $T = 10$ y $l = 2$ ($0 < x < 2$)

Cuerda con extremos fijos

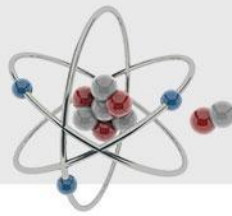


Errores

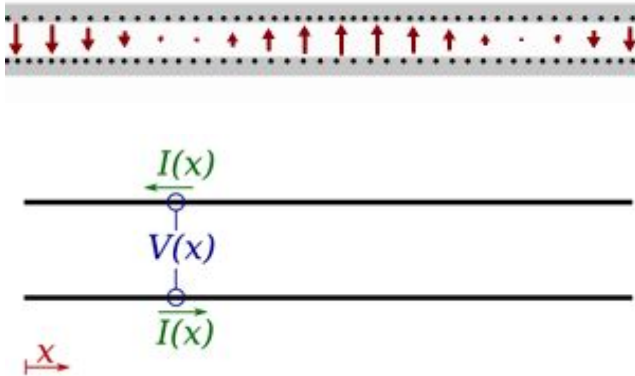


<https://github.com/STabaresG/parcial3/tree/main/errorespunto2>

Ejemplo.



Líneas de transmisión.

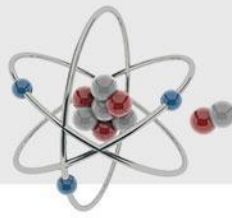


Las ondas electromagnéticas pueden reflejarse formar patrones a lo largo de la línea.

El modelo es aplicable en todas las frecuencias, incluidas las que hay en pulsos de corriente continua.

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Líneas de transmisión eléctricas.



Punto 8 - Burden 12.3

8. In an electric transmission line of length l that carries alternating current of high frequency (called a "lossless" line), the voltage V and current i are described by

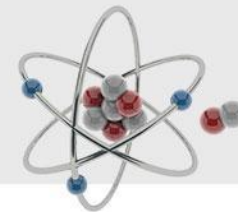
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t;$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t;$$

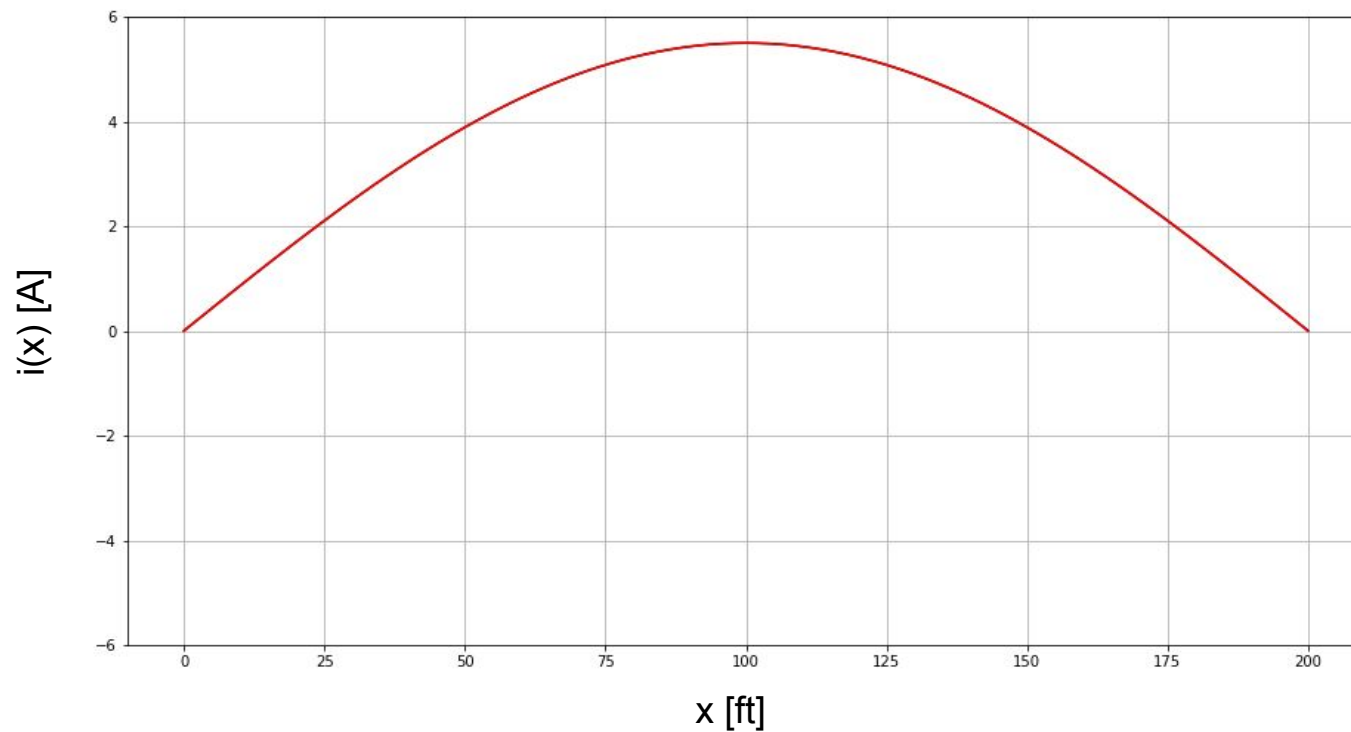
$$i(0, t) = i(200, t) = 0, \quad 0 < t;$$

$$i(x, 0) = 5.5 \sin \frac{\pi x}{200}, \quad 0 \leq x \leq 200;$$

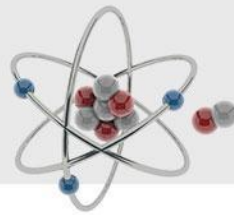
$$\frac{\partial i}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 200.$$



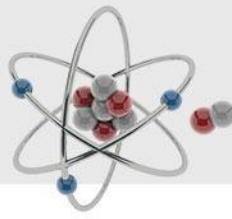
Corriente en línea de transmisión



Errores



<https://github.com/STabaresG/parcial3/tree/main/errorespunto8>



¡Muchas gracias!