الکترودینامیک اجسام دوار

دانیال حکیمی

دانشگاه صنعتی شریف

۶ تیر ۱۴۰۳

فهرست مطالب

چکیده

در این درس مقاله قصد داریم الکترودینامیک اجسام دوار را بررسی کنیم. در ابتدا سعی میکنیم معادلات مکسول را در دستگاه دوار بدست آوریم سپس برای بررسی بیشتر یک دستگاه دوار یک دوقطبی ایده آل چرخان را درنظر میگیریم. در بسیاری از کتاب های مرجع این مسئله با روش دو دوقطبی متعامد ساکن و متغییر حل شده است ، در اینجا ما با محاسبه ی پتانسیل های لنارد ویشرت به روش نسبیتی ، فرم کلی پتانسیل الکتریکی و پتانسیل برداری را حساب میکنیم سپس با نوشتن این معادلات برای یک دوقطبی ایده آل چرخان ، پتانسیل الکتریکی عمومی آنرا بدست می آوریم سپس نشان میدهیم که حالت خاص آن به همان جواب های متداول کتاب های مرجع تبدیل میشود. جهت بررسی بیشتر ما در این بخش به بررسی تابش این دوقطبی می پردازیم و توان اتلافی آنرا حساب میکنیم. بخش هیجان انگیز ماجرا از اینجا شروع میشود! در ادامه با استفاده از فرمول عمومی که برای پتانسیل الکتریکی یک دوقطبی ایده آل چرخان بدست آوردیم سطوح هم پتانسیل این دوقطبی ایده آل چرخان را بدست می آوریم و مشاهده میکنیم نمودار های رسم شده با این روش به طرز شگفت انگیزی با نتیجه شبیه سازی که از روشی دیگر استفاده شده است سازگاری دارد ! و ما با روشی دیگر این سازگاری را ثابت کردیم !

در نهایت به تشابهی تاریخی و اشاره به روش های جایگزین و ایده های دیگر برای گسترش این درس مقاله میپردازیم.

امید است این درس مقاله مورد توجه استاد محترم واقع شود.

۱ معادلات مکسول در دستگاه چرخان

ابتدا سعی میکنیم معادلات مکسول در دستگاه چرخان را بدست آوریم. با توجه به استفاده های آینده، در این محاسبات فرض میکنیم سرعت بسیار کمتر از سرعت نور است لذا از $\frac{\nu^2}{c^2}$ و مراتب بالاتر صرف نظر میکنیم. این به علت آن است که در بخش های بعدی قرار است یک دوقطبی ایده آل را که با سرعت زاویه ای محدود، در حال چرخش هست برسی کنیم. در این مثال باتوجه به ایده آل بودن و میل کردن فاصله ی دوران به صفر و محدود بودن سرعت زاویه ای، سرعت هر ذره به صفر میل میکند و در مقابل سرعت نور کوچک است به عبارتی طول موج منتسب به موج منتشر شده بسیار بزرگتر از ابعاد دوقطبی است. این تقریب سودمندی های زیادی دارد یکی از آنها آن است که میتوانیم اثرات نسبیتی را تقریب بزنیم ، از طرفی باتوجه به ایده آل بودن دوقطبی ، ابعاد آن به صفر می رود و شتاب مرکز گرا ناچیز میشود که خود کمک بزرگی در جهت ایده آل سازی و تقریبا لخت گرفتن دستگاه است.

با توجه به تقریب مذکور فاکتور لورنتز را در تمام این محاسبات برابر ۱ میگیریم زیرا عامل زیر رادیکال از مرتبه ی دوم نسبت به تقریب بحث شده است و از آن صرف نظر میکنیم. با توجه به عدم حرکت انتقالی دو دستگاه نسبت به یکدیگر و تقریب مذکور میتوانیم نیروی لورنتز را ناوردا بگیریم. (البته واضح است در حالت کلی اینطور نیست و این نیرو تحت تبدیلات نسبیتی تبدیل میشود اما با توجه به تقریب گفته شده جهت "۱" گرفتن ضریب گاما و همینطور صرف نظر از مراتب بالای نسبت سرعت به سرعت نور میتوان این فرض را درنظر گرفت.) علاوه بر این، کوچک بودن سرعت حرکت نسبت به سرعت نور به ما اجازه میدهد که از کندشدن ساعت ها و تغییر طول ها و همینطور مشکلاتی مانند پارادوکس ارنست صرف نظر کنیم.

حال فرض کنیم دستگاه دواری داریم که با سرعت زاویه ای امگا که در جهت محور z است در حال دوارن نسبت به دستگاه ساکنی است که مبدا مشترک دارند، به عبارتی حرکت فقط دورانی است و انتقال نداریم. در این بخش از مختصات پریم دار جهت اشاره به دستگاه دوار استفاده خواهیم کرد. از طرفی جهت سهولت محاسبات و نوشتار، فرض میکنیم ضریب گذردهی خلاء و ثابت تراوایی خلاء دارای مقدار ۱ هستند که یعنی سرعت نور نیز برابر ۱ میشود. از طرفی با توجه به رایج بودن سیستم گاوسی به خصوص در نسبیت در این بخش از این روش نیز بهره میبریم.

از آنجایی که در آینده فرض میکنیم دو قطبی در صفحه ی عمود بر z میچرخد، در واقع انتخاب دستگاه ما، یک دستگاه دوبعدی دوار با سرعت زاویه ای امگا در جهت محور z است، این باعث میشود ما از مختصات قطبی تخت استفاده کنیم چون به نوعی زاویه ی θ برابر ۹۰ درجه است .(در واقع ما از دستگاه استوانه ای استفاده میکنیم.)

با توجه به تقاریب و موضوعات ذکر شده، تبدیل بین دو دستگاه مختصات به شرح زیر است :

$$\begin{aligned} r &= r' \\ \phi' &= \phi - \omega t \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{۱}$$

به وضوح این تبدیل حجم را ثابت نگه میدارد، پس با توجه به پایستگی بارالکتریکی، تبدیلات چگالی جریان و چگالی بار به فرم زیر است :

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho \\ \vec{J'} &= \vec{J} - \rho\vec{\nu} \end{aligned} \tag{۲}$$

که ν سرعت مشاهده گر نسبت به دستگاه آزمایشگاه است. باتوجه به تقاریب ذکر شده با توجه به تبدیل نسبیتی میدان ها داریم :

$$\vec{E'} \approx \vec{E} + \frac{\vec{\nu}}{c} \times \vec{B} \tag{۳}$$

$$\vec{B'} \approx \vec{B} \tag{۴}$$

حال سعی کنیم معادلات مکسول را در دستگاه چرخان حساب کنیم ، باتوجه به معادلات ۱ ، بازه ی فاصله ، مساحت و حجم باید در هردو دستگاه یکی باشند یعنی :

$$\vec{\nabla}' = \vec{\nabla} \tag{۵}$$

پس به وضوح معادله ی $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ تبدیل میشود به معادله ی زیر :

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{B'} = 0 \tag{۶}$$

با توجه به معادله ی ۴ به راحتی میتوان از معادله ی $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ با استفاده از تبدیلات ذکر شده به معادله ی زیر رسید :

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' = 4\pi\rho' + \vec{\nabla}' \cdot (\frac{\vec{\nu}}{c} \times \vec{B}') = 4\pi\rho' + \vec{B}' \cdot (\vec{\nabla}' \times \frac{\vec{\nu}}{c}) - \frac{\vec{\nu}}{c} \cdot (\vec{\nabla}' \times \vec{B}') \qquad (۷)$$

باتوجه به معادلات ۲ ، ۳ ، ۴ و $\vec{\nu} = \vec{\omega} \times \vec{x'}$ معادله ی زیر بدست میآید :

$$\vec{\nabla}' \times \vec{\nu} = \vec{\omega}(\vec{\nabla}' \cdot \vec{x'}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}')\vec{x'} = 2\vec{\omega}$$

پس معادله ی ۷ به شکل زیر در می آید :

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' = 4\pi\rho' + (\frac{2\vec{\omega} \cdot \vec{B}'}{c}) - \frac{\vec{\nu}}{c} \cdot (\vec{\nabla}' \times \vec{B}') \qquad (۸)$$

واضح هست که با درنظر گرفتن تبدیل نسبیتی زمان میتوانیم به جزییات بیشتری برسیم اما با توجه به تقریب های گفته شده صرف نظر میکنیم. حال سعی میکنیم رابطه ای بین مشتق های زمانی پتانسیل برداری در دو دستگاه پیدا کنیم :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{\nu} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \qquad (۹)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt'} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t'} + (\vec{\nu'} \cdot \vec{\nabla}')\vec{A}$$

چون در دستگاه چسبیده $\nu' = 0$ پس :

$$\frac{d\vec{A}}{dt'} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}$$

با استفاده از ۹ و استفاده از این ایده که چون دستگاه ها فقط نسبت به هم دوران دارند و سرعت مولفه ی شعاعی ندارد پس دیورژانس آن صفر است (این را به طور مستقیم نیز میتوانیم حساب کنیم) داریم :

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t'} + \vec{\omega} \times \vec{A} - (\vec{\nu} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \qquad (۱۰)$$

در مختصات دکارتی (و نه مختصات های دیگر مانند کروی یا استوانه ای) میتوانیم از معادلات زیر استفاده کنیم :

$$\vec{\omega} \times \vec{A} = \vec{\omega} \times (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{x} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\omega} \times \vec{x}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nu}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nu} \times \vec{A}) = \vec{\nu}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nu}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nu} - (\vec{\nu} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nu}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{\omega} \times \vec{A} - (\vec{\nu} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

پس معادله ی ۱۰ به شکل زیر در می آید :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nu}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nu} \times \vec{A}) \qquad (۱۱)$$

میتوانیم مشتق جزیی میدان مغناطیسی را به صورت زیر بنویسیم :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t'} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nu} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \times (\vec{\nu} \times \vec{B}')$$

نتیجتا خواهیم داشت :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}' \times (\vec{E}' - \frac{\vec{\nu}}{c} \times \vec{B}') = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} - \vec{\nabla}' \times (\frac{\vec{\nu}}{c} \times \vec{B}')$$

که نتیجه میدهد :

$$\vec{\nabla}' \times \vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \qquad (۱۲)$$

با توجه به معادله ی ۱۱ و معادله ی دیورژانس میدان الکتریکی مکسول و همینطور معادله ی تبدیل که در ۳ بدست آوردیم میتوان مشتق جزیی زمانی میدان الکتریکی را محاسبه کرد :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\vec{\nu} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nu} \times \vec{E}) = \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} - \frac{\vec{\nu}}{c} \times \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \times (\vec{\nu} \times (\vec{E}' - \frac{\vec{\nu}}{c} \times \vec{B}'))$$

درنهایت داریم :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}'\times\vec{B}'=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}'+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}'}{\partial t'}-\frac{\vec{\nu}}{c^2}\times\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}+\vec{\nabla}'\times\left[\frac{\vec{\nu}}{c}\times\left(\vec{E}'-\frac{\vec{\nu}}{c}\times\vec{B}'\right)\right] \quad (۱۳)$$

تا به اینجای کار تمام معادلات مکسول برای دستگاه چرخان را استخراج کردیم. (معادلات ۶ ، ۸ ،۱۲ ، ۱۳) در ادامه قصد داریم یک دستگاه چرخان خاص ، یعنی دوقطبی ایده آل دوار را بررسی کنیم. ابتدا در بخش بعد معادلات لنارد ویشرت را با روشی نسبیتی بدست می آوریم.

۲ محاسبه ی نسبیتی پتانسیل های لنارد ویشرت

در اینجا قصد داریم پتانسیل لنارد ویشرت را با روش نسبیتی حساب کنیم پس به دستگاه مرجع متصل به جسم میرویم میدانیم در آنجا چون ذره ساکن است و شرایط استاتیک است پتانسیل الکتریکی از معادله ی معروف آن در الکترواستاتیک بدست می آید. البته باید توجه کرد که در واقع اگر دستگاه شتاب دار باشد باید دستگاه همراهی که در هر لحظه لخت است استفاده کنیم. البته در مثالی که جلوتر برسی خواهیم کرد به دلیل کوچک بودن ابعاد دوقطبی و تقاریب بحث شده اثرات نالختی ناچیز هستند و اهمیت زیادی ندارند .(در نمادگذاری این درس مقاله منظور از ستاره ، دستگاه همراه ذره میباشد و کمیت های بدون ستاره در دستگاه آزمایشگاه هستند از طرفی به دلیل اهمیت زمان تاخیری در محاسبه ی نسبیتی فقط در این بخش از درس مقاله برای زمان تاخیری از نماد کروشه استفاده میکنیم و در بقیه ی درس مقاله فرض میکنیم این نماد محفوظ است و از نوشتن مکرر آن پرهیز میکنیم) . با توجه به تبدیلات نسبیتی میدان ها که از نظریه نسبیت خاص میدانیم ، پتانسیل الکتریکی و پتانسیل برداری باهم تشکیل یک چهاربردار را میدهند که باید تحت تبدیلات لورنتز تبدیل شوند(مجددا به تقریب گفته شده برای لخت بودن اشاره میکنیم . هرچندکه میتوانیم این تقریب را درنظر نگیریم و دستگاه را طوری انتخاب کنیم که همراه جسم باشد و هرلحظه لخت باشد ، نمونه ی این دستگاه ها در مکانیک جسم صلب برای نوشتن معادلات اویلر استفاده میشود). پس میتوانیم معادلات زیر را بنویسیم :

$$V=[\gamma]\left(V^{\star}+[\vec{\beta}c]\cdot\vec{A}^{\star}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\left[\frac{\gamma}{R^{\star}}\right] \quad (۱۴)$$

$$\vec{A}_{\parallel}=[\gamma]\left(\vec{A}^{\star}_{\parallel}+[\frac{\vec{\beta}}{c}]V^{\star}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}q\left[\frac{\gamma\vec{\beta}}{R^{\star}}\right] \quad (۱۵)$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'} \tag{۱۶}$$

که $\vec{r}$ و $\vec{r'}$ به ترتیب مکان برسی پتانسیل و مکان ذره متحرک میباشند.
واضح است که مولفه های عمودی پتانسیل برداری در هردو دستگاه صفر هستند.

$$\vec{A}_{\parallel} = (\vec{A} \cdot [\hat{\beta}])[\hat{\beta}] \tag{۱۷}$$

$$\vec{A}_{\perp} = \vec{A} - \vec{A}_{\parallel} = \vec{A} - (\vec{A} \cdot [\hat{\beta}])[\hat{\beta}] \tag{۱۸}$$

$$[R^{\star}] = \Delta x_0^{\star} = [\gamma] \left(\Delta x_0 - [\vec{\beta}] \cdot \Delta \vec{x} \right) = [\gamma(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})] = [\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R})R] \tag{۱۹}$$

با قرار دادن معادله ی ۱۹ در معادله ی ۱۴ به معادله پتانسیل الکتریکی لنارد ویشرت میرسیم.
همینطور با قرار دادن معادله ی ۱۹ در معادله ی ۱۵ و استفاده از معادله ی ۱۸ و استفاده از این نکته که مولفه ی عموی پتانسیل برداری صفر است ، پتانسیل برداری لنارد ویشرت بدست می آید.

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\nu}}{c}} \tag{۲۰}$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{\nu}}{c^2} V \tag{۲۱}$$

تمام پارامتر های سمت راست هر معادله در زمان تاخیری حساب میشود.

۳ محاسبه ی میدان های ناشی از یک دوقطبی ایده آل چرخان

حال با توجه به پتانسیل لنارد ویشرت سعی میکنیم پتانسیل برآیند یک دوقطبی ایده آل را حساب کنیم ، فرض کنید دوقطبی پادساعتگرد میچرخد ، از طرفی فرض می کنیم که صفحه ی چرخش در صفحه ی $x-y$ باشد یعنی ω در جهت محور z است.

$$V_{\pm} = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_{\pm} - \frac{\vec{R_{\pm}} \cdot \vec{\nu_{\pm}}}{c}} \tag{۲۲}$$

که تمام پارامتر ها در زمان تاخیری محاسبه شده است که به شکل زیر تعریف میشود :

$$t_r = t - \frac{R}{c} \tag{۲۳}$$

$$\vec{r'_{\pm}} = \pm\frac{a}{2}(\cos{(\omega t_r)}\ \hat{x} + \sin{(\omega t_r)}\ \hat{y}) \tag{۲۴}$$

$$\vec{\nu_{\pm}} = \vec{\omega} \times \vec{r'_{\pm}} \tag{۲۵}$$

با توجه به معادلات ۲۴ و ۲۵ و درنظر گرفتن این نکته که سرعت زاویه را در جهت محور z گرفتیم ، میتوان سرعت هر ذره ی دوقطبی را حساب کرد :

$$\vec{\nu_{\pm}} = \pm\frac{\omega a}{2}(-\sin{(\omega t_r)}\ \hat{x} + \cos{(\omega t_r)}\ \hat{y}) \tag{۲۶}$$

$$R\pm = \sqrt{r^2 + {r'_{\pm}}^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r'}_{\pm}} \tag{۲۷}$$

با توجه به معادله ۲۷ و استفاده از معادله ی ۲۴ میتوان نوشت :

$$R\pm = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} + \mp a(x\ \cos{(\omega t_r)} + y\ \sin{(\omega t_r)})} \tag{۲۸}$$

که در اینجا x و y مختصات متناظر برای بردار r هستند یعنی : $\vec{r}=(x,y,z)$

$$\frac{-\vec{R}_{\pm}\cdot\vec{\nu}_{\pm}}{c}=-\frac{(\vec{r}-\vec{r'}_{\pm})\cdot\vec{\nu}_{\pm}=\vec{r}\cdot\vec{\nu}_{\pm}}{c}=\frac{\mp\frac{\omega a}{2}(-x\ \sin(\omega t_r)\ +y\ \cos(\omega t_r))}{c} \tag{۲۹}$$

$$V\pm=\frac{\pm q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}+\mp a(x\ \cos(\omega t_r)+y\ \sin(\omega t_r))}\mp\frac{\omega a}{2c}(-x\ \sin(\omega t_r)\ +\ y\ \cos(\omega t_r))} \tag{۳۰}$$

$$V_{\pm}\approx\frac{\pm q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r\mp\frac{a}{2r}(x\ \cos(\omega t_r)+y\ \sin(\omega t_r))\mp\frac{\omega a}{2c}(-x\ \sin(\omega t_r)\ +\ y\ \cos(\omega t_r))} \tag{۳۱}$$

$$V_{\pm}\approx\frac{\pm q}{4\pi\epsilon_0 r}(1\pm\frac{a}{2r^2}(x\ \cos(\omega t_r)+y\ \sin(\omega t_r))\pm\frac{\omega a}{2cr}(-x\ \sin(\omega t_r)+y\ \cos(\omega t_r))) \tag{۳۲}$$

در این مرحله باید از تقاریب ذکر شده استفاده کنیم برای دوقطبی ایده آل میدانیم که اندازه ی دوقطبی در مقابل طول موج منتشر شده و همینطور فاصله ی اندازه گیری پتانسیل کوچک است ، در واقع اگر دوقطبی ایده آل باشد این فرض تقریب نیست چون تمام مراتب بالاتر واقعا به صفر میروند.

میتوان فرض سومی نیز گرفت که طول موج منتسب به موج الکترومغناطیسی منتشر شده نیز در مقابل فاصله ی اندازه گیری شده کوچک است . این فرض برای ارجاع دادن به بعضی از فرمولها در پاره ای از مراجع انجام گرفته است و میتوان بدون این فرض رابطه ی کلی پتانسیل دو قطبی چرخان را نیز محاسبه کرد.

ابتدا فرض سوم را نادیده گرفته و محاسبات را انجام میدهیم میدانیم طبق اصل برهمنهی پتانسیل برآیند برابر جمع دوپتانسیل ناشی از دوبار مثبت و منفی است پس خواهیم داشت :

$$V=V_{+}+V_{-} \tag{۳۳}$$

$$V\approx\frac{qa}{4\pi\epsilon_0 r^2}(\frac{1}{r}(x\ \cos(\omega t_r)+y\ \sin(\omega t_r))+\frac{\omega}{c}(-x\ \sin(\omega t_r)\ +\ y\ \cos(\omega t_r))) \tag{۳۴}$$

این معادله معادله ی کلی پتانسیل اسکالر یک دو قطبی ایده آل چرخان است . میدانیم که گشتاور دوقطبی بنابر تعریف آن برابر حاصل ضرب اندازه ی بار در فاصله ی بار ها میباشد همچنین با استفاده از تبدیل مختصات دکارتی به قطبی ، x و y را بر اساس پارامتر های قطبی مینویسیم، حال اگر از فرض سوم در تقریب زدن استفاده کنیم یعنی فرض کنیم طول موج منتسب به موج منتشر شده بسیار کوچک تر از فاصله ی اندازه گیری است خواهیم داشت :

$$V \approx -\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c}(\frac{\sin\theta}{r})(\cos(\phi)\sin(\omega t_r) - \sin(\phi)\cos(\omega t_r)) \tag{۳۵}$$

با توجه به مقدار زمان تاخیری و تقاریب گفته شده خواهیم داشت :

$$V \approx -\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c}(\frac{\sin\theta}{r})(\cos(\phi)\sin(\omega t - \omega\frac{r}{c}) - \sin(\phi)\cos(\omega t - \omega\frac{r}{c})) \tag{۳۶}$$

این معادله را میتوان به راحتی با در نظر گرفتن دو دوقطبی متعامد متغییر و ساکن بدست آورد. میدانیم که گشتاور دوقطبی یک دوقطبی چرخان به صورت $\vec{p} = p_0(\cos(\omega t_r)\ \hat{x} + \sin(\omega t_r)\ \hat{y})$ هست . به لحاظ شهودی این معادله به این معناست که دو دوقطبی داریم یکی در امتداد محور x و دیگری در امتداد محور y و اندازه ی بار روی هر دوقطبی با آهنگی مشخص تغییر میکند (میتوان فرض کرد این دو با اختلاف فازی معادل $\frac{\pi}{2}$ درحال تغییر بار و به عبارتی نوسان بار هستند) واضح است که اگر از معادله ی تاخیری پتانسیل الکتریکی یک دوقطبی ساکن و متغییر استفاده کنیم ($V \approx -\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c}(\frac{1}{r})(z\sin(\omega t - \omega\frac{r}{c}))$) و با درنظر گرفتن اینکه به جای محور z باید محور های ایکس و وای را قرار داد (زیرا دوقطبی های ساکن در امتداد این محورها هستند) و همچنین در نظر گرفتن این نکته که این دو دوقطبی اختلاف فاز معادل $\frac{\pi}{2}$ دارند و با استفاده از اصل برهمنهی میتوان پتانسیل ناشی از این دو را باهم جمع کنیم به طور مجدد به معادله ی ۳۶ خواهیم رسید. با توجه به معادلات لنارد ویشرت به راحتی میتوانیم پتانسیل برداری را نیز حساب کنیم. از طرفی میدانیم :

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}V \tag{۳۷}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{۳۸}$$

پس با توجه به معادله ی ۳۶ و با توجه به معادله ی لنارد ویشرت برای پتانسیل برداری به نتایج زیر میرسیم :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r}\left\{\cos[\omega(t-r/c)]\left(\hat{x}-\frac{x}{r}\hat{r}\right)+\sin[\omega(t-r/c)]\left(\hat{y}-\frac{y}{r}\hat{r}\right)\right\} \tag{۳۹}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{r}\times\vec{E} \tag{۴۰}$$

حال سعی کنیم بردار پوئینتینگ را حساب کنیم تا به برسی تابش و توان این دوقطبی بپردازیم. واضح است از مراتبی از میدان الکتریکی و مغناطیسی استفاده میکنیم که به فرم $\frac{1}{r}$ باشند زیرا ضرب آنها از مرتبه منفی دو میشود و جواب انتگرال روی بردار پوئینتینگ محدود و غیر صفر میشود. باتوجه به عمود بودن میدان بر جهت انتشار داریم :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\hat{r} \tag{۴۱}$$

با جایگذاری مقادیر و نگه داشتن مراتب ذکر شده ، به نتیجه ی زیر میرسیم :

$$\vec{S} = \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{p_0\omega^2}{4\pi r}\right)^2\left\{1-(\sin\theta\cos[\omega(t-r/c)-\phi])^2\right\}\hat{\mathbf{r}} \tag{۴۲}$$

$$<\vec{S}> = \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{p_0\omega^2}{4\pi r}\right)^2(1-\frac{1}{2}\sin^2(\theta))\hat{r} \tag{۴۳}$$

پس داریم :

$$P = \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{16\pi^2 c}2\pi\left[\int_0^\pi \sin\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta\right] = \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{8\pi c}\left(2-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right) = \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{6\pi c} \tag{۴۴}$$

۴ برسی سطوح هم پتانسیل دوقطبی ایده آل چرخان

برای برسی سطوح هم پتانسیل دوقطبی دوار از معادله ی عمومی ۳۴ استفاده می کنیم یعنی دیگر تقریب سوم و پتانسیل هایی که از آن بدست آمده را تا اطلاع ثانوی در نظر نمیگیریم و حالت عمومی تر را در معادلات برسی میکنیم. فرض کنید

سطح هم پتانسیلی داریم که پتانسیل آن تماما V_0 باشد. با استفاده از اتحاد سینوس جمع زوایا و اتحاد $a\sin(x) + b\cos(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\arctan(\frac{b}{a}))$ ، معادله ی سطح هم پتانسیل به شکل زیر خواهد بود :

$$r = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 V_0}\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{\omega^2}{c^2}}\sin(\omega t - \frac{\omega r}{c} - \phi - \arctan(\frac{c}{\omega r}))\sin(\theta) \quad (۴۵)$$

در این معادله r ، θ و ϕ ، پارامتر های مختصات قطبی هستند. حال میخواهیم این نمودار را رسم کنیم ، برای رسم این نمودار دو حالت کاربردی را در نظر میگیریم :

۱. $r \gg \lambda$

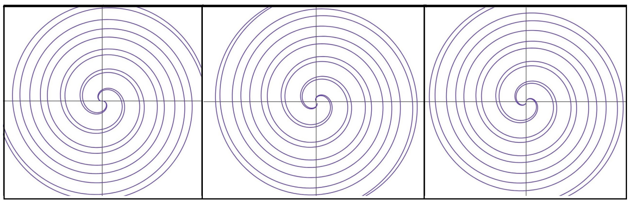
۲. $r \ll \lambda$

از طرفی برای راحتی دیدن نمودار ها آنها را در دو بعد و در صفحه ی دوقطبی رسم میکنیم ، به عبارتی خطوط هم پتانسیل واقع در $z=0$ را رسم میکنیم.

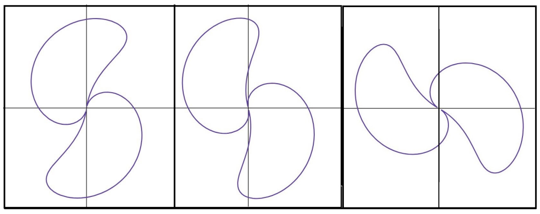
۱.۴ $r \gg \lambda$

$$x^2+y^2 = \frac{p_0^2\omega^2}{32\pi^2\epsilon_0^2 V_0^2 c^2} - \frac{p_0^2\omega^2}{32\pi^2\epsilon_0^2 V_0^2 c^2}\cos(2\omega t - \frac{2\omega}{c}\sqrt{(x^2+y^2)} - 2\arctan(\frac{y}{x})) \quad (۴۶)$$

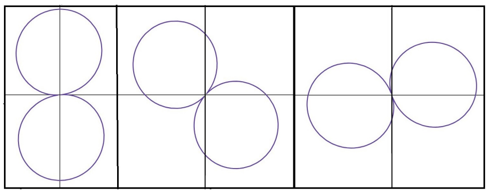
نمودار مربوط به این معادله را رسم میکنیم ، این نمودار ها در شکل های زیر آمده اند. در هر شکل سه جدول وجود دارد که نمودار موجود در هر جدول خطوط هم پتانسیل را در زمانی مشخص نشان میدهد. در واقع هر شکل نماینده ی یک سرعت زاویه ای مشخص است و نمودار های داخل مستطیل های هرشکل نماینده ی یک زمان مشخص مرتبط با آن سرعت زاویه ای است.



شکل ۱: نمودارهای مربوط به منحنی هم پتانسیل به ازای یک پتانسیل مشخص با سرعت زاویه ای شماره ی ۱ در سه زمان مختلف



شکل ۲: نمودارهای مربوط به منحنی هم پتانسیل به ازای یک پتانسیل مشخص با سرعت زاویه ای شماره ی ۲ در سه زمان مختلف



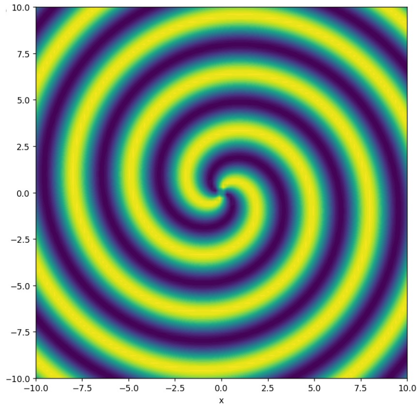
شکل ۳: نمودارهای مربوط به منحنی هم پتانسیل به ازای یک پتانسیل مشخص با سرعت زاویه ای شماره ی ۳ در سه زمان مختلف

همانطور که از اشکال بالا میبینیم ، به وضوح این نتیجه با کد پایتون "شبیه سازی شماره ی ۱" سازگار است به عبارتی خطوط هم پتانسیل روی منحنی های مارپیچ قراردارد. در شبیه سازی سه بعدی "شبیه سازی شماره ۱" اگر از بالا به پایین نگاه کنیم همین منحنی های هم پتانسیل را میبینیم. در واقع نقاط هم پتانسیل مانند قله ها ، دره ها یا ... بر روی جبه های موج هستند. محاسبه ی مستقیم سرعت انتشار این امواج به دلیل تابعیت پیچیده ی مختصه ی شعاعی مقداری حجیم و وقت گیر است ، اما با توجه به معادلات مکسول و در واقع دالامبرین تابع پتانسیل ، انتظار میرود پتانسیل الکتریکی

نقاط فضا برای حالت متغییر و به نوعی انتشار موج الکترومغناطیسی همان سرعت نور باشد. در واقع در محیط خلاء چگالی بار صفر است و دالامبرین تابع پتانسیل برابر صفر میشود که یعنی :

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

این در واقع همان معادله ی موج معروف هست که یعنی سرعت انتشار برای پتانسیل متغیر (برای مثال نوسان کننده) برابر سرعت نور است. همینطور کد پایتون و فیلم انیمیشن مربوط به منحنی هم پتانسیل نیز تحت عنوان "شبیه سازی شماره ۲ " به پیوست ارسال شده که قابل دسترسی و مشاهده است.



شکل ۴: نمودار مربوط به منحنی هم پتانسیل به ازای یک پتانسیل مشخص با سرعت زاویه ای مشخص در زمان مشخص

۲.۴ $r \ll \lambda$

$$x^2 + y^2 = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0}\cos{(\omega t - \frac{\omega\sqrt{x^2+y^2}}{c})} \qquad (۴۷)$$

اگر درجه تقریب را مرتبه یک نسبت به عامل تقریب بگیریم داریم :

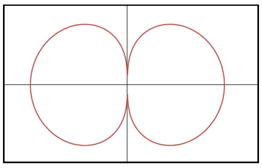
$$x^2 + y^2 = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0}(\cos{(\omega t)} + \frac{\omega\sqrt{x^2+y^2}}{c}\sin{(\omega t)}) \qquad (۴۸)$$

با توجه به اتحاد $a\sin(x)+b\cos(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right)$ و استفاده از تقریب مذکور داریم:

$$x^2+y^2=\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0}(\cos(\omega t)) \tag{۴۹}$$

که معادله ی یک دایره با شعاع متغییر است. این مشابه یک تک قطبی متغییر است . این نتیجه منطقی است زیرا با توجه به تقریب مذکور یعنی اگر طول موج انتشار مشخصی داشته باشیم مقدار فاصله ی مورد برسی را نسبت به این طول موج بسیار کوچک میگیریم که یعنی بسیار به دوقطبی نزدیک میشویم که باتوجه به ایده آل بودن انتظار دایره بودن و متقارن بودن سطح پتانسیل میرفت.

یکی دیگر از حالات مهم حالتی است که سرعت زاویه ای صفر باشد. به عبارتی دوقطبی ساکن باشد. نمودار این حالت باتوجه به فرمول ۴۵ به صورت زیر خواهد بود :



شکل ۵: نمودار مربوط به منحنی هم پتانسیل دوقطبی ساکن به ازای یک پتانسیل مشخص

همانطور که میبنیم به طرز شگفت انگیزی این اشکال باهم ارتباط دارند، برای مثال به شکل ۲ توجه کنید، شکل ۵ مدل کشیده شده و چرخیده ی اشکال موجود در شکل ۲ هستند!

۵ نتیجه گیری و ایده های دیگر

مقایسه ی منحنی های هم پتانسیل برای دوقطبی ایده آل ساکن و دوقطبی ایده آل دوار ، نشان میدهد چرا زمانی دانشمندان به نظریه ی اتر علاقه مند بودند در واقع اگر در دستگاه دوار چسبیده به جسم برویم یک باد اتری دوار (گرداب اتری) وجود دارد که به نظر می آید خطوط هم پتانسیل را با خود میکشد! به لحاظ شهودی این پدیده بسیار جالب به نظر می آید.

البته انواع نگاه کلاسیک دیگری نیز به موضوع وجود دارد، مثلا در نظر گرفتن سطوح هم پتانسیل به عنوان یک تک جسم غیرصلب(ژله ای) که حرکت دوار دارند نیز به نوعی روشی دیگر برای برسی این ایده است، به این صورت که به علت اینرسی این اجسام ژله ای دوار دچار تغییر شکل میشوند. یکی از راه های برسی خواص مواد گفته شده در دو ایده ی بالا نوشتن

معادلات است، برای مثال برای حالت اتری با نوشتن همین معادلات و استفاده از فیزیک سیالات میتوان انتظار داشت خواص مادی اتر را تا حدی محاسبه کرد و یا برای حالت جسم ژله ای نیز با فرض برقرار بودن قوانین مکانیک کلاسیک و قرارگیری در دستگاه چسبیده به دوقطبی دوار و برسی نیروهای مجاز در این دستگاه ، محاسبه ی تنسور تنش و استفاده از تکنیک های مختلف در فیزیک سیالات و فیزیک جامدات و تعریف درست کمیت های مدول یانگ ، میتوان به خواص فرضی این مواد ، برای برقراری درست تئوری الکترومغناطیسی رسید.

به عبارتی همانطور که فیزیکدانان سعی داشتند با وارد نمودن اتر و سپس تنظیم خواص آن برای درست بودن تئوری الکترومغناطیسی و سپس آزمایش برای برسی درست بودن این خواص محاسبه شده ، تئوری را با آزمایش را سازگار کنند ، در اینجا نیز میتوان به چنین کارهایی پرداخت که باتوجه به محدودیت حجم درس مقاله و حجیم بودن محاسبات مربوط به آنها از انجام آنها صرف نظر میشود و صرفا به بیان آنها و شهود مرتبط با آنها بسنده میکنیم، در واقع با توجه به نمودار های رسم شده معرفی چیزی به نام اتر برای اذهان قرن ۱۸ و ۱۹ به شکل جالبی قابل درک است و علت پافشاری آنها بر این نظریه بهتر مشخص میشود چون به نوعی با تجربیات روزمره آنها سازگار بوده است.

با دیدگاه نسبیتی نیز میتوان کارهای بسیاری در این درس مقاله انجام داد، برای مثال ما تبدیلات چهاربرداری پتانسیل ها را میدانیم، همچنین تبدیل میدان ها را نیز با توجه به ماتریس پادمتقارن میدان میدانیم ، پس میتوانیم این تبدیلات را بنویسیم، پس میتوانیم با نوشتن این تبدیلات به نوعی تبدیلات خود این اشکال را نیز بدست آوریم که بسیار جالب توجه هستند چون ما تبدیل اشکال فیزیکی در نسبیت را با توجه به تبدیلات لورنتز به راحتی در دو دستگاه مرجع مختلف میتوانیم بدست آوریم، در اینجا تبدیل شکل دو میدان پتانسیلی (در واقع سطوح هم پتانسیل) به هم را میتوانیم با تبدیلات نسبیتی به دست آوریم! مجددا با توجه به محدودیت حجم مقاله صرفا به این مورد اشاره شد و از محاسبات آن پرهیز میکنیم.

به طور کلی به نظر می آید نظریه ی الکترومغناطیس درهای بزرگی را به پژوهش و تحقیق و شاخه های نوین علم فیزیک باز میکند که با فراگیری درست آن میتوان آهسته به دنیای بزرگ فیزیک و تحقیقات آن قدم گذاشت.