Lab 11: Otimização sem restrição

INF1608 – Análise Numérica

Leonardo Quatrin Campagnolo
lquatrin@tecgraf.puc-rio.br
Departamento de Informática, PUC-Rio

Neste trabalho, iremos implementar alguns métodos de otimização sem restrição, vistos na última aula.

1. O **Método da Seção Áurea** (msa) consiste em determinar o mínimo de uma função em um intervalo $[a, b]$, considerando que a função objetiva é unimodal. Em cada iteração, duas estimativas x_1 e x_2 são definidas para determinar em qual intervalo o mínimo da função deve estar. Como vimos na aula passada, se considerarmos o intervalo $[a, b] = [0, 1]$, x_2 estará posicionado em $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e x_1 em $1 - g$. Para um intervalo $[a, b]$ qualquer, x_1 e x_2 são calculados da seguinte forma:

   ```
   x_1 = a + (1-g) (b-a)
   x_2 = a +    g  (b-a)
   ```

   A partir dos pontos x_1 e x_2, um novo intervalo é definido da seguite forma: Se $f(x_1) \leq f(x_2)$, ajusta intervalo para $[a, b \leftarrow x_2]$. Senão, ajusta intervalo para $[a \leftarrow x_1, b]$. Podemos implementar este método apenas atualizando os limites a e b do intervalo em cada iteração (veja o algoritmo no slide da aula passada). No entanto, é importante armazenar os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para *minimizar o número de avaliações da função objetivo*. Ao final, deve-se retornar o ponto médio do intervalo $\frac{a+b}{2}$.

   Implemente o **Método da Seção Áurea**. Sua função deve receber como parâmetros o intervalo $[a, b]$, a *função objetivo*, $f(x)$, e um ponteiro x_{min} que deve ser preenchido com o valor de x onde a função tem valor mínimo dado pelo método. A função deve retornar o número de iterações executadas para se alcançar o resultado, seguindo o protótipo abaixo. O método deve retornar após 50 iterações ou após o erro chegar em $|x - x_{sol}| \leq 10^{-5}$ (lembre-se que o erro progressivo em cada iteração pode ser estimado em $\frac{b-a}{2}$).

   ```
   int msa (double a, double b, double (*f) (double x),
            double tol, double* xmin);
   ```

2. O **Método da Interpolação Parabólica Sucessiva** (mips) parte de 3 estimativas iniciais r, s e t, ajusta uma parábola interpolante e estima que o mínimo da parábola, x, é um próximo candidato a ser o ponto de mínimo da função:

$$x = \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s) - f(r))(t-r)(t-s)}{2[(s-r)(f(t) - f(s)) - (f(s) - f(r))(t-s)]}$$

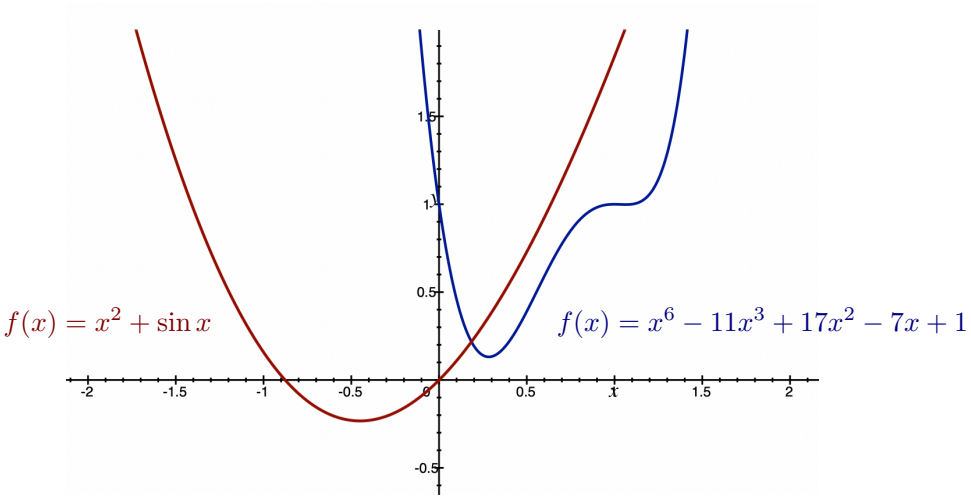
   Se o denominador da expressão acima for zero (na prática se $< 10^{-10}$), faz-se $x = (r + s + t)/3$. Essa estimativa substitui a menos recente, isto é, r passa a ter o valor de s, s de t e t

de x. O método continua iterando até que o critério de convergência seja atendido ou que um número máximo de iterações seja alcançado. *Após 3 iterações*, pode-se adotar como critério de convergência a diferença entre o valor da função nas duas últimas estimativas: $|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$, onde $\epsilon = 10^{-6}$ representa a tolerância requerida. O valor de x onde a função tem valor mínimo é então expresso pela média das estimativas: $x_{min} = \frac{s+t}{2}$.

Implemente uma função que codifica o **Método da Interpolação Parabólica Sucessiva** como descrito acima. Sua função deve receber como parâmetros a primeira estimativa inicial, r, e um valor de incremento, δ. As duas outras estimativas iniciais devem ser dadas por: $s = r - \delta$ e $t = r + \delta$. A função também recebe como parâmetros a *função objetivo*, $f(x)$, e um ponteiro x_{min} que deve ser preenchido com o valor de x onde a função tem valor mínimo dado pelo método. A função deve ainda retornar o número de iterações executadas para se alcançar o resultado, seguindo o protótipo abaixo. Se o método não convergir em até 50 iterações, a função deve retornar zero. *A implementação deve minimizar o número de avaliações da função $f(x)$.*

```
int mips (double r, double delta, double (*f) (double x),
          double tol,  double* xmin);
```

3. Para testar seu código, determine os valores mínimos das funções ilustradas abaixo. Compare o uso de diferentes estimativas e o número de iterações necessário para o método convergir.



Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo "otimizacao.h" e as implementações em um módulo "otimizacao.c". Escreva o teste em outro módulo "main.c".

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos "otimizacao.c", "otimizacao.h" e "main.c") deve ser enviado via página da disciplina no EAD até 1 hora após o final da aula. O sistema receberá trabalhos com atraso (com perda de 1 ponto na avaliação) até o final do dia.