

# Lab 10: Método Gradientes Conjugados

## INF1608 – Análise Numérica

Leonardo Quatrin Campagnolo

lquatrin@tecgraf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Para estes exercícios, considere a representação de matrizes quadradas  $M_{n \times n}$  como um vetor de vetores do Lab 0.

1. Considere o método Gradientes Conjugados para solução de sistemas lineares  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . A versão do método Gradientes Conjugados com pré-condicionador  $M$  é dada por:

```
 $\mathbf{x}_0$  = estimativa inicial  
 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$   
 $\mathbf{d}_0 = \mathbf{z}_0 = M^{-1}\mathbf{r}_0$   
for  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  do  
  if  $\|\mathbf{r}_k\|_2 < tol$  then  
    stop  
  end  
  
   $\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{z}_k}{\mathbf{d}_k^T A \mathbf{d}_k}$   
   $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$   
   $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A \mathbf{d}_k$   
   $\mathbf{z}_{k+1} = M^{-1} \mathbf{r}_{k+1}$   
   $\beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{z}_k}$   
   $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \beta_k \mathbf{d}_k$   
end
```

Se fizermos  $M = I$ , matriz identidade, usamos o método sem pré-condicionador, e as operações com  $M^{-1}$  não precisam ser realizadas. Se fizermos  $M = D$ , matriz diagonal de  $A$ , temos o método com o pré-condicionador de Jacobi.

Implemente duas funções que resolvam um sistema linear pelo método Gradientes Conjugados, sem e com pré-condicionador, dada uma estimativa inicial da solução  $\mathbf{x}$ . Quando a norma-2 do resíduo for menor que a tolerância especificada, a solução é considerada válida e as iterações devem ser interrompidas. As funções devem sobrescrever a solução final em  $\mathbf{x}$  e retornar o número de iterações efetuado. Os protótipos das funções devem ser:

```
int gradconj (int n, double** A, double* b, double* x, double tol);  
int gradconj_jacobi (int n, double** A, double* b, double* x, double tol);
```

2. Complete o teste enviado junto com o laboratório, onde o último teste corresponde à matriz abaixo. Analise e compare a eficiência dos métodos, sem ou com pré-condicionador, achando a solução para os sistemas lineares propostos, usando tolerância  $10^{-7}$  e estimativa inicial igual ao vetor nulo. Seu programa deve exibir na tela o número de iterações e a solução encontrada para cada um dos métodos.

$$\begin{bmatrix}
 1.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.4 & 2.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.4 & 3.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.4 & 4.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0.4 & 5.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 6.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 7.0 & 0.4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 8.0 & 0.4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 9.0 & 0.4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 10.0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_0 \\
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1.4 \\
 2.8 \\
 3.8 \\
 4.8 \\
 5.8 \\
 6.8 \\
 7.8 \\
 8.8 \\
 9.8 \\
 10.4
 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que a solução desse sistema é  $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ .

Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo “gradconj.h” e as implementações em um módulo “gradconj.c”. Escreva o teste em outro módulo “main.c”.

**Entrega:** O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos “gradconj.c”, “gradconj.h” e “main.c”, e *eventuais códigos de laboratórios passados usados na solução*) devem ser enviados até 1 hora depois da aula. O sistema irá receber envios até o final do dia com 1 ponto de desconto na nota.