**Probabilidade Computacional – 1º. Trabalho – 2022.1**

**Professora: Ana Carolina Letichevsky**

**Você recebeu um trabalho com 5 questões, cada uma valendo 2,0 pontos, que devem ser resolvidas utilizando R ou Python, dependendo do que for solicitado no enunciado da questão. Caso não seja indicada a linguagem a ser utilizada, você poderá selecionar uma das duas linguagens para implementar a sua solução. A resolução deverá ser feita em arquivos separados, um para cada questão. Os arquivos deverão ser entregues seguindo o padrão "INF1036_MATRICULA_QX.R" ou "INF1036_MATRICULA_QX.py", onde "MATRICULA" deve ser a sua matrícula e "X" deve ser o número da questão.**

O trabalho é individual, e todas as atividades relacionadas à solução do trabalho proposto devem ser realizadas, respeitando-se o código de ética do CTC disponível na plataforma EAD, e devem incluir o que se descreve a seguir.

- A implementação das questões 1 a 5. O código implementado nos moldes estabelecidos no enunciado deverá ser enviado, por meio da plataforma EAD, até 20/04/2022, às 17h.
- A documentação de cada um dos códigos criados no próprio arquivo.

Como parte da avaliação, também será realizada uma apresentação oral, com duração de 4 a 6 minutos, conforme sorteio, nos dias 03/05 e 05/05.

A pontuação acima mencionada se refere exclusivamente à parte escrita do presente trabalho.

1) Em simulação estocástica, nos interessa ter uma sequência de números pseudo-aleatórios distribuídos de forma uniforme entre 0 e 1.

Um possível algoritmo que pode ser utilizado para gerar a sequência desejada é o LCG e cuja relação de recorrência é apresentada a seguir:

$x_k = (a \times x_{k-1} + c) \ mod \ M$

$u_k = x_k / M$

Outro possível método para geração de números pseudo-aleatórios, chamado aqui de algoritmo LM, toma como base o lançamento de uma moeda comum que pode gerar dois eventos, cara ou coroa, cada um com probabilidade $0{,}5$. Transformando estes eventos em números binários sendo cara = 0 e coroa = 1, podemos, assim, gerar números decimais a partir de números binários segundo a formulação abaixo usando os lançamentos de uma moeda para definir os coeficientes $a_i$:

$$Número = a_n 2^{(n-1)} + \cdots + a_4 2^3 + a_3 2^2 + a_2 2^1 + a_1 2^0$$

Por exemplo, se $n = 5$, o que equivale a fazer $5$ lançamentos de uma moeda, podemos criar $32$ números decimais de $0$ a $(2^5 - 1) = 31$. Supondo um número binário de $5$ dígitos $(a_5 a_4 a_3 a_2 a_1) = 10011$, obtido a partir de $5$ lançamentos de uma moeda, obtemos o número decimal:

$$Número = 1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$$

$$Número = 1x16 + 0x8 + 0x4 + 1x2 + 1x1 = 19$$

Se dividirmos o número obtido 19 pelo total de possíveis números 31, geramos o valor $0{,}6129$ que consequentemente está no intervalo $[0, 1]$. Assim, a partir deste processo, é possível gerar números pseudo-aleatórios com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

Um algoritmo mais robusto que os apresentados acima é o Mersenne Twister que fornece uma geração rápida com alta qualidade de aleatoriedade.

A partir do que foi exposto e usando os conceitos de simulação, faça: (2,0 pontos)

a) Construa um código baseado no LM e LCG para realizar uma simulação com $10.000$ lançamentos simultâneos de uma moeda e de um dado (6 faces), ambos honestos, e apresentar em quantos lançamentos o resultado obtido foi cara e face $4$. O LM deve ser utilizado para tratar o lançamento da moeda e o LCG para tratar o lançamento do dado.

b) Construa um código baseado no Mersenne Twister e LM para realizar uma simulação com $10.000$ lançamentos simultâneos de uma moeda e de um dado (6 faces), ambos honestos, e apresentar em quantos lançamentos o resultado obtido foi cara e face $4$. O Mersenne Twister deve ser utilizado para tratar o lançamento da moeda e o LM para tratar o lançamento do dado.

c) Construa um código baseado no LCG e no LM para realizar uma simulação com $10.000$ lançamentos simultâneos de uma moeda viciada (probabilidade de obter cara é 0,4) e de um dado (6 faces) honesto e apresentar a probabilidade de se obter pelo menos um dos resultados: cara e face $4$; coroa e face $2$ ou $6$. O LCG deve ser utilizado para tratar o lançamento da moeda e o LM para tratar o lançamento do dado.

2) Suponha que há 3 moedas, cada uma de uma cor diferente, mas todas com probabilidades $2/3$ de obter cara e $1/3$ de obter coroa.

Considere um experimento que consiste em lançar, em sequência as moedas.

Considere também dois eventos:

$A$ = "obter uma cara e uma coroa nos dois primeiros lançamentos, em qualquer ordem", e

$B$ = "obter duas caras nos dois últimos lançamentos".

Considerando o que foi exposto, resolva os itens abaixo:

a) Utilizando simulação calcule $P(A)$ e $P(B)$.

b) $A$ e $B$ são eventos independentes?

3) Uma prova é composta por questões de múltipla escolha com 5 alternativas e apenas uma correta. Dos alunos de uma turma, sabe-se que 50% sabem resolver a questão de número 12. Sabe-se ainda que os que não sabem fazer "chutam" a resposta, ou seja, escolhem de forma aleatória uma alternativa.

Um aluno da turma é escolhido ao acaso.

a) Resolva por simulação:

a.1) Qual é a probabilidade de que ele tenha acertado a questão 12?

a.2) Dado que o aluno acertou a questão 12, qual é a probabilidade de que ele tenha "chutado"?

a.3) Se a prova é composta por 15 questões e o aluno não sabe resolver nenhuma, ou seja, escolhe aleatoriamente todas as respostas, qual a probabilidade de ele obter uma nota superior a 4?

b) Refaça o item a.3 de forma analítica.

4) A função de densidade $f(x)$ de uma variável aleatória $X$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} c(x^3 - x^4) & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

Usando simulação, faça:

a) Determine o valor de $c$, sabendo que $c$ é inteiro e pertence ao intervalo $[15, 25]$.

b) Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

5) Suponha que 3 jogadores, Paulo, Sandra e Caio, com dinheiro para gastar, irão participar de um jogo de apostas que consiste na realização de uma sequência de rodadas de apostas onde cada um participa, a cada rodada, com a mesma quantia monetária, no caso $R\$ 1{,}00$, sendo que o vencedor da rodada fica com o dinheiro apostado por todos na rodada. O valor que cada jogador possui para gastar é uma variável discreta e em cada aposta cada jogador tem uma probabilidade constante de vencer e se um dos jogadores perder todo o seu dinheiro o jogo termina. Supondo que os jogadores Paulo, Sandra e Caio iniciarão o jogo com R$ 120,00, R$ 180,00 e R$ 210,00 respectivamente e que apresentam probabilidade de vitória em cada rodada dada por 0,4, 0,4 e 0,2 respectivamente, faça:

a) Simule um jogo de até 500 rodadas e calcule a quantia final com que cada um ficou.

b) Simule 20 jogos de até 500 rodadas e calcule a quantia final média com que cada um ficou.