PUC-RIO
INF1036 - Probabilidade Computacional

Material 6 – Variáveis Aleatórias

Professora - Ana Carolina Letichevsky*

2022.1

*Material Adaptado de Professor Hélio Lopes

Variáveis aleatórias

Uma **variável aleatória** é uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.

As variáveis aleatórias podem ser classificadas em:

- **Discreta:** Tem um número finito ou contável de possíveis resultados a serem listados;
- **Contínua:** Tem um número infinito de possíveis resultados representados por um intervalo na reta numérica;
- **Mista:** Pode tanto assumir valores discretos quanto assumir todos os valores em um determinado intervalo.

Distribuições

Diversas situações reais muitas vezes se aproximam de certas **distribuições estocásticas** definidas por algumas hipóteses, daí a importância de se conhecer e manipular algumas destas distribuições tão presentes em nosso cotidiano.

As distribuições de probabilidade podem ser **contínuas** ou **discretas**, dependendo se elas definem probabilidades para **variáveis contínuas** ou **discretas**.

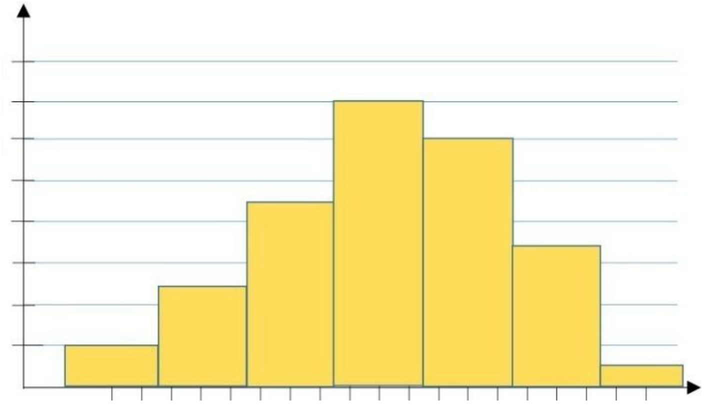
Com uma **distribuição de probabilidade discreta**, cada valor possível da variável aleatória discreta pode ser associado a uma probabilidade diferente de zero. Deste modo, uma distribuição de probabilidade discreta é, por vezes, apresentada em forma de tabela.

As **probabilidades de variáveis aleatórias contínuas** são definidas como a área sob a curva da sua distribuição. Assim, apenas as faixas de valores podem ter uma probabilidade diferente de zero. A probabilidade de que uma variável aleatória contínua seja igual a algum valor é sempre zero.

Distribuições Discretas e Contínuas

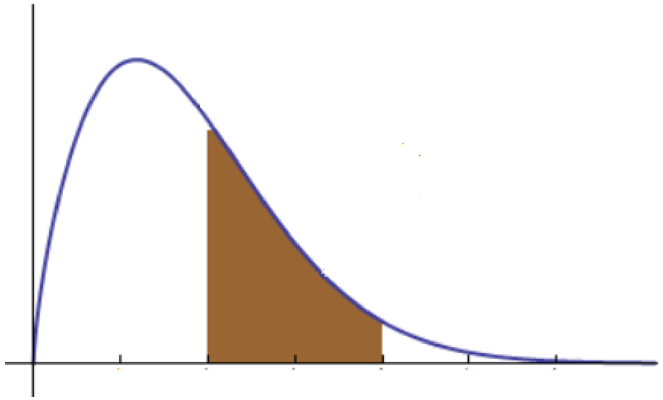
Variável aleatória discreta

Distribuição de probabilidade discreta



Variável aleatória contínua

Distribuição de probabilidade contínua



Distribuições Discretas

Exemplo 1) Uma urna possui 10 bolas sendo 3 com o número 1 e 7 com o número 2.

a) Definimos a variável X como o número de bolas obtidas em uma extração aleatória.

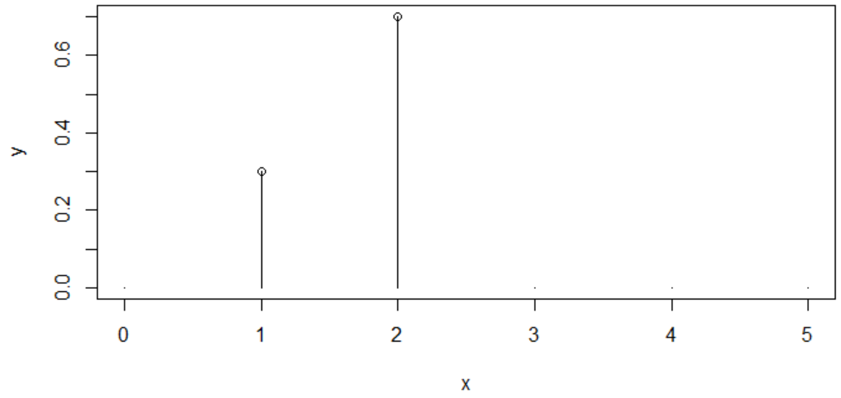
Podemos definir de forma geral a **probabilidade** de ocorrência de um determinado evento como:

$$P(X = x) = f(x)$$

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} 0{,}3, se\ x = 1 \\ 0{,}7, se\ x = 2 \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

Função de probabilidade.

```
x <- 0:5
y <- c (0, 0.3, 0.7, 0, 0, 0)
plot (x, y, type = 'h')
points (1, 0.3)
points (2, 0.7)
```



Distribuições Discretas

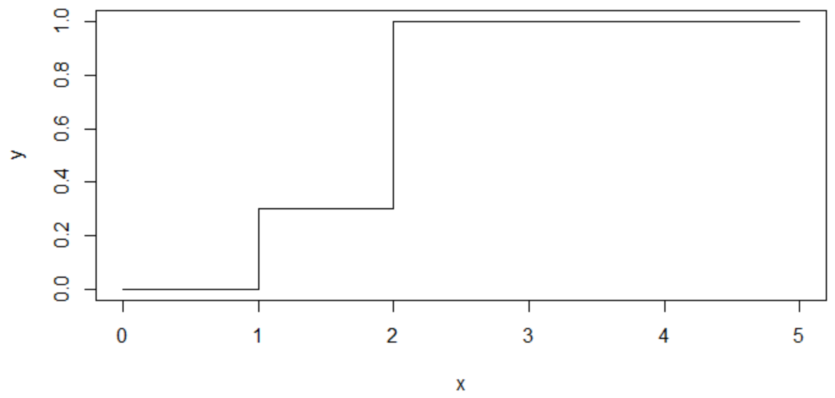
Exemplo 1, continuação) Uma urna possui 10 bolas sendo 3 com o número 1 e 7 com o número 2.

a) Definimos a variável X como o número de bolas obtidas em uma extração aleatória.

Função de probabilidade acumulada:

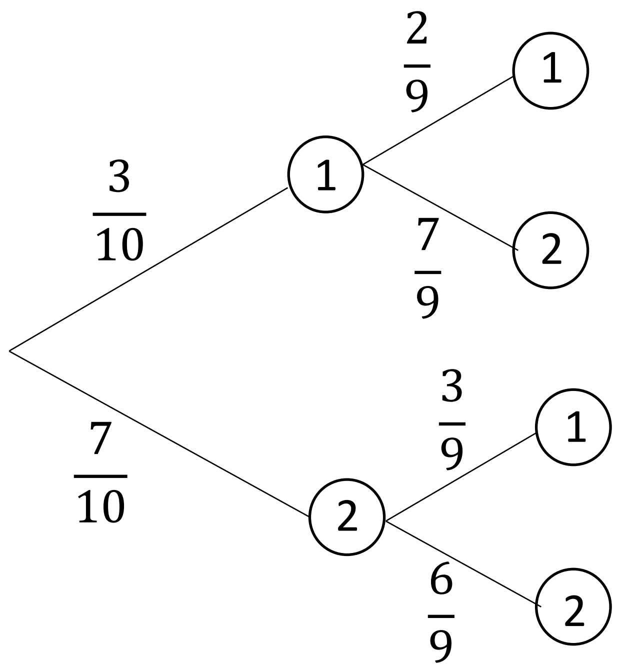
$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 1 \\ 0{,}3, se\ 1 \leq\ x\ < 2 \\ 1, se\ x \geq 2 \end{cases}$$

```
x <- 0:5
y <- c (0, 0.3, 1, 1, 1, 1)
plot (x, y, type ='s')
```



Exemplo 1 , continuação) Uma urna possui 10 bolas sendo 3 com o número 1 e 7 com o número 2.

b) Definimos a variável Y como o número de bolas com o número 1 obtidas em duas extrações

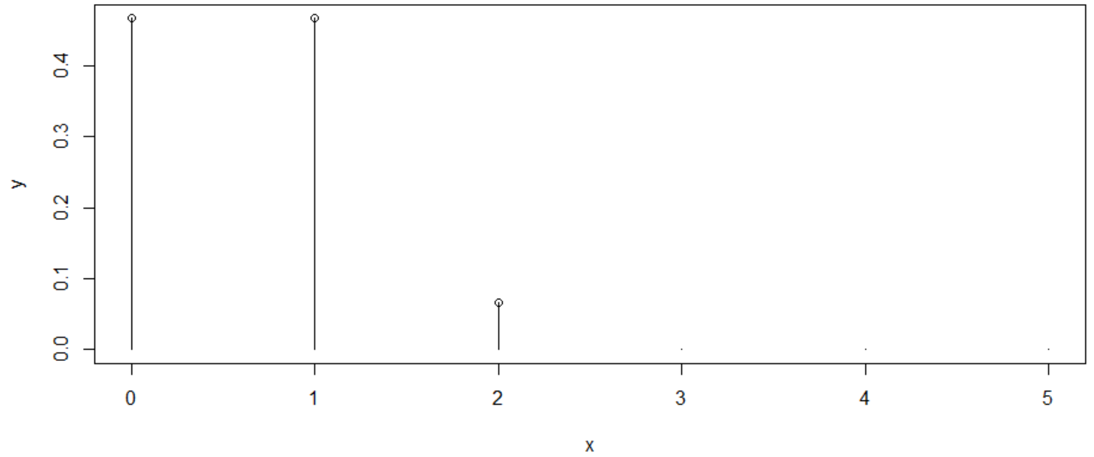


Resultados Possíveis	Probabilidades	Y
1 1	6/90	2
1 2	21/90	1
2 1	21/90	1
2 2	42/90	0

Exemplo 1 , continuação) Uma urna possui 10 bolas sendo 3 com o número 1 e 7 com o número 2.

b) Definimos a variável Y como o número de bolas com o número 1 obtidas em duas extrações.

$$P(Y = y) = f(y) = \begin{cases} \frac{14}{30}, se\ y = 0 \\ \frac{14}{30}, se\ y = 1 \\ \frac{2}{30}, se\ y = 2 \end{cases}$$




```
x <- 0:5
y <- c (14/30, 14/30, 2/30, 0, 0, 0)
plot (x, y, type = 'h')
points (0, 14/30)
points (1, 14/30)
points (2, 2/30)
```

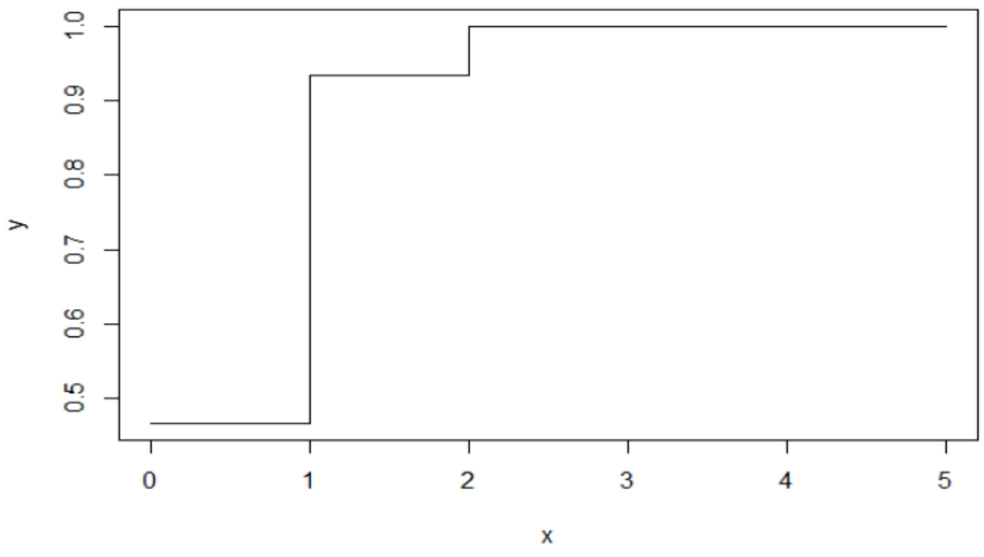
Distribuições Discretas

Exemplo 1 , continuação) Uma urna possui 10 bolas sendo 3 com o número 1 e 7 com o número 2.

b) Definimos a variável Y como o número de bolas com o número 1 obtidas em duas extrações

Função de probabilidade acumulada:

$$P(Y \leq y) = F(y) = \begin{cases} 0, se\ y < 0 \\ \frac{14}{30}, se\ 0 \leq y < 1 \\ \frac{28}{30}, se\ 1 \leq y < 2 \\ \frac{30}{30}, se\ y \geq 2 \end{cases}$$




```
x <- 0:5
y <- c (14/30, 28/30, 30/30, 30/30, 30/30, 30/30)
plot (x, y, type ='s')
```

Variáveis aleatórias

A função **sample()** do R permite criar uma amostra de números pseudo-aleatórios de um vetor qualquer com ou sem reposição.

```
n <- 100000 #100000 escolhas a realizar, ou seja, um número muito grande
bolinhas <- 1:10 #bolinhas de 1 a 10
caixa <- bolinhas #caixa com 10 bolinhas
numero.bolinhas <- length(bolinhas)
total.bolinha.escolhida <- rep (0, numero.bolinhas)
probabilidade.bolinha.escolhida <- rep (0, numero.bolinhas)
#n escolhas de bolinhas com repetição
for (i in 1:n) {
   bolinha <- sample (caixa, 1)
   total.bolinha.escolhida [bolinha] <- total.bolinha.escolhida [bolinha] + 1
}
#probabilidade de escolha de cada bolinha
for (i in 1:numero.bolinhas) {
   probabilidade <-  total.bolinha.escolhida [i] / n
   print (paste ('Probabilidade da bolinha [', i, '] = ', probabilidade))
}
```

Variáveis aleatórias

Como esperado, ao repetir o processo infinitas vezes, a probabilidade de escolha de cada bolinha é de 0,1.

```
Probabilidade da bolinha [   1 ] =  0.10044
Probabilidade da bolinha [   2 ] =  0.09918
Probabilidade da bolinha [   3 ] =  0.09919
Probabilidade da bolinha [   4 ] =  0.09972
Probabilidade da bolinha [   5 ] =  0.10138
Probabilidade da bolinha [   6 ] =  0.09983
Probabilidade da bolinha [   7 ] =  0.10104
Probabilidade da bolinha [   8 ] =  0.09925
Probabilidade da bolinha [   9 ] =  0.09932
Probabilidade da bolinha [  10 ] =  0.10065
```

Variáveis aleatórias

As funções **choice()**, **choices()** e **sample()** do Python permitem criar amostras de números pseudo-aleatórios de um vetor qualquer com ou sem reposição dependo da função usada.

```
import random

n = 100000 #100000 escolhas a realizar, ou seja, um número muito grande
bolinhas = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] #bolinhas de 1 a 10
caixa = bolinhas #caixa com 10 bolinhas
numerobolinhas = len(bolinhas)
totalbolinhaescolhida = [0]*numerobolinhas # vetor de tamanho numerobolinhas com 0
probabilidadebolinhaescolhida = [0]*numerobolinhas
#n escolhas de bolinhas com repetição
for i in range(1, n):
   bolinha = random.choice(caixa)
   totalbolinhaescolhida [bolinha - 1] = totalbolinhaescolhida [bolinha - 1] + 1
#probabilidade de escolha de cada bolinha
for i in range(1, numerobolinhas):
   probabilidade =  totalbolinhaescolhida [i - 1] / n
   print ('Probabilidade da bolinha [' + str(i) + '] = ' + str(probabilidade))
```

Distribuições Discretas

Agora vamos retomar o Exemplo 1. Uma urna possui 10 bolas sendo 3 com o número 1 e 7 com o número 2 e vamos refazer os itens a) e b) utilizando simulação.

a) Definimos a variável X como o número de bolas obtidas em uma extração aleatória.

```
import random
n = 100000 #100000 escolhas a realizar, ou seja, um número muito grande
bolinhas = [1,1,1,2,2,2,2,2,2,2] # bolinhas 1 e 2
caixa = bolinhas # caixa com 10 bolinhas
numerobolinhas = len(bolinhas)
totalbolinhaescolhida = [0]*numerobolinhas # vetor de tamanho numerobolinhas com 0s
probabilidadebolinhaescolhida = [0]*numerobolinhas # vetor de tamanho numerobolinhas com 0s
contb1 = 0
contb2 = 0
for i in range(n):
   bolinha = random.choice(caixa)
   if (bolinha == 1):
       contb1 = contb1 + 1
   if (bolinha == 2):
       contb2 = contb2 + 1
probb1 = (contb1/n)
print(probb1)
probb2 = (contb2/n)
print(probb2)
```

Distribuições Discretas

b) Definimos a variável Y como o número de bolas com o número 1 obtidas em duas extrações.

```
import random
n = 100000 # escolhas a realizar, ou seja, um número muito grande
bolinhas = [1,1,1,2,2,2,2,2,2,2] # bolinhas 1 e 2
caixa = bolinhas #caixa com 10 bolinhas
numerobolinhas = len(bolinhas)
totalbolinhaescolhida = [0]*numerobolinhas
probabilidadebolinhaescolhida = [0]*numerobolinhas
contb11 = 0
contb12 = 0
contb21 = 0
contb22 = 0
for i in range(n):
   bolas = random.sample(caixa, 2) # sem reposição
   if (bolas[0] == 1):
       if (bolas[1] == 1):
           contb11 = contb11 + 1
       else:
           contb12 = contb12 + 1
   else:
       if (bolas[1] == 1):
           contb21 = contb21 + 1
       else:
           contb22 = contb22 + 1
```

```
probb11 = (contb11/n)
print(probb11)
probb12 = (contb12/n)
print(probb12)
probb21 = (contb21/n)
print(probb21)
probb22 = (contb22/n)
print(probb22)
```

Distribuição Binomial

A Distribuição Binomial descreve o **número de sucessos** que ocorrem em um determinado número de experimentos de **Bernoulli**. Um ensaio de Bernoulli é definido por:

- Em cada ensaio considera-se somente a ocorrência ou não ocorrência de um certo evento que será denominado sucesso e cuja não ocorrência será denominada falha.
- Os ensaios são independentes.
- A probabilidade de sucesso, p, é a mesma para cada ensaio.
- A probabilidade de falha, $1 - p$, é a mesma para cada ensaio.

Para um experimento que consiste na realização de n ensaios independentes de Bernoulli, a probabilidade de um ponto amostral com sucessos nos k primeiros ensaios e falhas nos $n - k$ ensaios seguintes é $p^k(1-p)^{n-k}$.

Distribuição Binomial

O número de pontos do espaço amostral que satisfaz essa condição é igual ao número de maneiras com que podemos escolher k ensaios para a ocorrência de sucesso dentre o total de n ensaios, pois nos $n - k$ restantes deverão ocorrer falhas. Este número é igual ao número de combinações de n elementos tomados k a k, ou seja:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Seja X o número de sucessos obtidos na realização de n ensaios de Bernoulli independentes. Se X tem distribuição **Binomial** com parâmetros n e p, em que p é a probabilidade de sucesso em cada ensaio, então sua fdp é:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) p^k (1-p)^{n-k}$$

Distribuição Binomial

A função acumulada da distribuição da **Binomial** (n, p) é dada por:

$$P(X \leq k) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

A função acumulada $F(x)$ da distribuição **Binomial** é o somatório das probabilidades individuais de cada ponto da $f(x)$ até que um determinado valor k seja obtido.

Distribuição Binomial

Exemplo 1) Suponha que, para uma máquina que produz peças automotivas, a probabilidade de se obter uma peça defeituosa (sucesso) é $p = 0{,}1$. Das peças produzidas por esta máquina, seleciona-se uma amostra de 10 peças para análise. Qual a probabilidade de se obter:

a) Uma peça defeituosa?

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left(\frac{10!}{1!(10-1)!}\right) 0{,}1^1 (1-0{,}1)^{10-1} = 0{,}387$$

b) Nenhuma peça defeituosa?

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}1^0 (1-0{,}1)^{10-0} = 0{,}349$$

c) Duas peças defeituosas?

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0{,}1^2 (1-0{,}1)^{10-2} = 0{,}194$$

Distribuição Binomial

Exemplo 1) Suponha que, para uma máquina que produz peças automotivas, a probabilidade de se obter uma peça defeituosa (sucesso) é $p = 0,1$. Das peças produzidas por esta máquina, seleciona-se uma amostra de 10 peças para análise. Qual a probabilidade de se obter:

d) No mínimo duas peças defeituosas?

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + \cdots + P(X = 10) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0,264$$

e) No máximo duas peças defeituosas?

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,930$$

Distribuições no R

No R, o trabalho com uma **variável aleatória** $\boldsymbol{X}$ está baseado em 4 procedimentos identificados pelas letras $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{r}$ que, adicionadas previamente ao código das **distribuições,** permitem o seu uso com **diferentes propósitos**:

- **rdistrib**: Gera **números aleatórios** baseados na distribuição definida. Necessita de argumentos especificando o tamanho da amostra, além dos parâmetros requeridos pela distribuição de interesse;
- **pdistrib**: Calcula a **função de probabilidade acumulada** $\boldsymbol{F(x)}$**;**
- **ddistrib**: Calcula a **distribuição de probabilidade** $\boldsymbol{f(x)}$;
- **qdistrib**: Calcula o **quantil** correspondente a uma dada probabilidade.

Distribuições no Python

No Python, o trabalho com uma **variável aleatória** $\boldsymbol{X}$ pode ser realizado através do módulo stats da biblioteca SciPy. Ele apresenta métodos comuns, como rvs, pdf, cdf, ppf e stats, às distribuições que permitem o seu uso com **diferentes propósitos**:

- **rvs**: Gera **números aleatórios** baseados na distribuição definida;
- **cdf**: Calcula a **função de probabilidade acumulada** $\boldsymbol{F(x)}$**;**
- **pdf**: Calcula a **distribuição de probabilidade** $\boldsymbol{f(x)}$;
- **ppf**: Percent Point Function (inverse of cdf — percentiles).
- **stats**: Return mean, variance, skew, and/or kurtosis.

Distribuição Binomial no R

Distribuição	Sintaxe	Opções
Binomial (**binom**)	**dbinom** (x, n, p, opções) **pbinom** (q, n, p, opções) **qbinom** (prob, n, p, opções) **rbinom** (obs, n, p)	**x**: número de sucessos em n ensaios de Bernoulli. **p**: probabilidade de sucesso. **q**: número máximo de sucessos em ensaios de Bernoulli. **prob**: probabilidade em n ensaios de Bernoulli. **obs**: número de observações. **n**: número de ensaios de Bernoulli.

Distribuição Binomial

Exemplo 2) Suponha que, para uma máquina que produz peças automotivas, a probabilidade de se obter uma peça defeituosa (sucesso) é $p = 0{,}1$. Das peças produzidas por esta máquina, seleciona-se uma amostra de 10 peças para análise. Qual a probabilidade de se obter:

a) Uma peça defeituosa?

```
dbinom(1, 10, 0.1)
0.3874205
```

b) Nenhuma peça defeituosa?

```
dbinom(0, 10, 0.1)
0.3486784
```

c) Duas peças defeituosas?

```
dbinom(2, 10, 0.1)
0.1937102
```

Distribuição Binomial

Exemplo 2) Suponha que, para uma máquina que produz peças automotivas, a probabilidade de se obter uma peça defeituosa (sucesso) é $p = 0{,}1$. Das peças produzidas por esta máquina, seleciona-se uma amostra de 10 peças para análise. Qual a probabilidade de se obter:

d) No mínimo duas peças defeituosas?

```
1 - pbinom(1, 10, 0.1)
0.2639011
```

e) No máximo duas peças defeituosas?

```
pbinom(2, 10, 0.1)
0.9298092
```

Distribuição Binomial

```
nsamples <- 1000000
namostra <- 10; cont.defeituosa <- 0; npeca.sem.defeito <- 0; npeca.defeituosa <- rep(0, 10)
for (i in 1:nsamples) {
  cont.defeituosa <- 0
  for (j in 1:namostra) { # seleciono 10 peças
    peca.selecionada.defeituosa <- sample(c(T, F), 1, prob = c(0.1, 0.9))
    if (peca.selecionada.defeituosa) {
      cont.defeituosa <- cont.defeituosa + 1
    }
  }
  if (cont.defeituosa > 0) { # npeca.defeituosa[i] contém o total de peças i defeituosas
    npeca.defeituosa[cont.defeituosa] <- npeca.defeituosa[cont.defeituosa] + 1
  } else {
    npeca.sem.defeito <- npeca.sem.defeito + 1
  }
}
prob.nenhuma.defeituosa <- npeca.sem.defeito/nsamples
print(prob.nenhuma.defeituosa)
prob.uma.defeituosa <- npeca.defeituosa[1]/nsamples
print(prob.uma.defeituosa)
prob.duas.defeituosas <- npeca.defeituosa[2]/nsamples
print(prob.duas.defeituosas)
prob.minimo.duas.defeituosas <- sum(npeca.defeituosa[2:10])/nsamples # filtro no vetor
print(prob.minimo.duas.defeituosas)
prob.maximo.duas.defeituosas <- (npeca.sem.defeito + sum(npeca.defeituosa[1:2]))/nsamples
print(prob.maximo.duas.defeituosas)
```

Distribuição Binomial

Exemplo 3) Considere que a probabilidade de certa peça artesanal ser produzida com perfeição por uma pessoa que está em treinamento é igual a $0{,}5$. Considere que a pessoa produza 6 peças por vez.

a) Obter a distribuição de probabilidades do número de peças perfeitas produzidas pela pessoa em 6 peças.

```
vetor.probabilidade <- dbinom (0:6, 6, 0.5)
vetor.probabilidade
0.015625 0.093750 0.234375 0.312500 0.234375 0.093750
0.015625
intervalo <- 0:6
intervalo
0 1 2 3 4 5 6
```

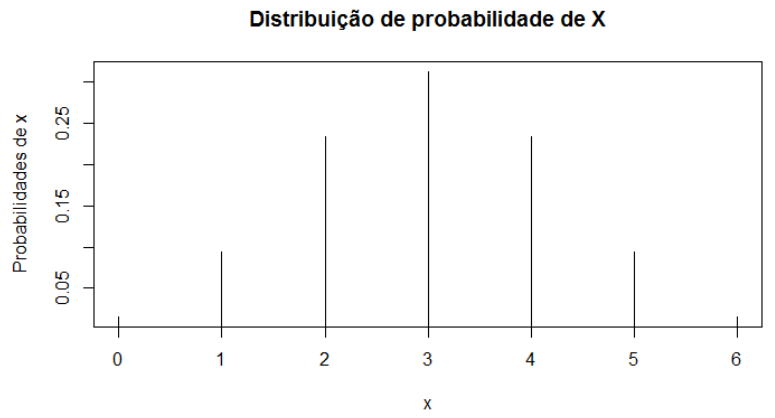
Distribuição Binomial

Exemplo 3) Considere que a probabilidade de certa peça artesanal ser produzida com perfeição por uma pessoa que está em treinamento é igual a $0{,}5$. Considere que a pessoa produza 6 peças por vez.

b) Construir o gráfico de distribuição de probabilidade obtida no item a.

```
vetor.probabilidade
0.015625 0.093750 0.234375 0.312500 0.234375 0.093750 0.015625
intervalo <- 0:6
intervalo
0 1 2 3 4 5 6
```

```
plot(intervalo, #intervalo desejado
      vetor.probabilidade, #valores de probabilidade
      type="h", #traço do eixo ao ponto
      xlab='x',
      ylab='Probabilidades de x',
      main='Distribuição de probabilidade de X')
```



Distribuição Binomial

```
nsamples <- 1000000
namostra <- 6; cont.defeituosa <- 0; npeca.sem.defeito <- 0; npeca.defeituosa <- rep(0, 6)
for (i in 1:nsamples) {
  cont.defeituosa <- 0
  for (j in 1:namostra) { # são produzidas 6 peças
    peca.selecionada.defeituosa <- sample(c(T, F), 1, prob = c(0.5, 0.5))
    if (peca.selecionada.defeituosa) {
      cont.defeituosa <- cont.defeituosa + 1
    }
  }
  if (cont.defeituosa > 0) { # npeca.defeituosa[i] contém o total de peças i defeituosas
    npeca.defeituosa[cont.defeituosa] <- npeca.defeituosa[cont.defeituosa] + 1
  } else {
    npeca.sem.defeito <- npeca.sem.defeito + 1
  }
}
vetor.probabilidade <- c(npeca.sem.defeito, npeca.defeituosa)
vetor.probabilidade <- vetor.probabilidade / nsamples
intervalo <- 0:6
plot(intervalo,
     vetor.probabilidade, #valores de probabilidade
     type="h", #traço do eixo ao ponto
     xlab='x',
     ylab='Probabilidades de x',
     main='Distribuição de probabilidade de X')
```

Distribuição Poisson

Em muitas situações, nos deparamos com situações em que o número de ensaios n é grande $(n \to \infty)$ e p é pequeno $(p \to 0)$, no cálculo da função **Binomial**, o que nos leva a algumas dificuldades. Nestes casos, trabalhamos com a distribuição **Poisson**.

A distribuição de **Poisson** é utilizada quando não é prático ou mesmo possível determinar o número de fracassos ou o número total de provas de um experimento.

É muito útil para descrever as probabilidades do número de ocorrências num campo ou intervalo contínuo, em geral, de tempo ou espaço.

A probabilidade de que existam exatamente k ocorrências (k sendo um inteiro não negativo, $k = 0, 1, 2, \ldots$) é:

$$f(k; \lambda) = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

λ é um número real, que indica a taxa de ocorrência por unidade de medida.

Distribuição Poisson

Exemplo 1) A análise das estradas feita por uma empresa aponta que ocorrem, em média, 4 buracos por Km. A análise aponta, ainda, que a quantidade de buracos segue uma distribuição Poisson. Qual a probabilidade de que um Km qualquer contenha:

a) Um buraco?

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-4}4^1}{1!}=0{,}073$$

b) Dois buracos?

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-4}4^2}{2!}=0{,}147$$

c) Nenhum buraco?

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-4}4^0}{0!}=0{,}018$$

d) Pelo menos um buraco?

$$P(X\geq k)=1-P(X<k)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}=0{,}982$$

Distribuições no R

No R, o trabalho com uma **variável aleatória** $\boldsymbol{X}$ está baseado em 4 procedimentos identificados pelas letras $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{r}$ que, adicionadas previamente ao código das **distribuições,** permitem o seu uso com **diferentes propósitos**:

- **rdistrib**: Gera **números aleatórios** baseados na distribuição definida. Necessita de argumentos especificando o tamanho da amostra, além dos parâmetros requeridos pela distribuição de interesse;
- **pdistrib**: Calcula a **função de probabilidade acumulada** $\boldsymbol{F(x)}$**;**
- **ddistrib**: Calcula a **distribuição de probabilidade** $\boldsymbol{f(x)}$;
- **qdistrib**: Calcula o **quantil** correspondente a uma dada probabilidade.

Distribuição Poisson no R

Distribuição	Sintaxe	Opções
Poisson (**pois**)	**dpois** (x, lambda, opções)	**x**: vetor contendo o número de ocorrências. **lambda**: número médio de eventos ocorrendo no intervalo considerado. **q**: vetor contendo os quantis. **prob**: vetor contendo as probabilidades. **obs**: número de observações.
	ppois (q, lambda, opções)	
	qpois (prob, lambda, opções)	
	rpois (obs, lambda)	

Distribuição Poisson

Exemplo 2) A análise das estradas feita por uma empresa aponta que ocorrem, em média, 4 buracos por Km. A análise aponta, ainda, que a quantidade de buracos segue uma distribuição Poisson. Qual a probabilidade de que um Km qualquer contenha:

a) Um buraco?

```
dpois (1, 4)
0.07326256
```

b) Dois buracos?

```
dpois (2, 4)
0.1465251
```

c) Nenhum buraco?

```
dpois (0, 4)
0.01831564
```

d) Pelo menos um buraco?

```
1 - dpois (0, 4)
0.9816844
```

Distribuição Poisson

Exemplo 2, continuação) A análise das estradas feita por uma empresa aponta que ocorrem, em média, 4 buracos por Km. A análise aponta, ainda, que a quantidade de buracos segue uma distribuição Poisson. Qual a probabilidade de que um Km qualquer contenha:

a) Um buraco?

```
nsamples <- 1000000; nkm.sem.buraco <- 0; nkm.com.buraco <- rep(0, 30)
for (i in 1:nsamples) {
  buraco <- rpois(1, 4) # uso de rpois com lambda = 4 e pegando uma observação
  if (buraco > 0) {
    nkm.com.buraco[buraco] <- nkm.com.buraco[buraco] + 1
  } else {
    nkm.sem.buraco <- nkm.sem.buraco + 1
  }
}
prob.um.buraco <- nkm.com.buraco[1] / nsamples
print(prob.um.buraco)
```

Distribuição Poisson

Exemplo 2, continuação) A análise das estradas feita por uma empresa aponta que ocorrem, em média, 4 buracos por Km. A análise aponta, ainda, que a quantidade de buracos segue uma distribuição Poisson. Qual a probabilidade de que um Km qualquer contenha:

b) Dois buracos?

```
nsamples <- 1000000; nkm.sem.buraco <- 0; nkm.com.buraco <- rep(0, 30)
for (i in 1:nsamples) {
  buraco <- rpois(1, 4) # uso de rpois com lambda = 4 e pegando uma observação
  if (buraco > 0) {
    nkm.com.buraco[buraco] <- nkm.com.buraco[buraco] + 1
  } else {
    nkm.sem.buraco <- nkm.sem.buraco + 1
  }
}
prob.dois.buracos <- nkm.com.buraco[2] / nsamples
print(prob.dois.buracos)
```

Distribuição Poisson

Exemplo 2, continuação) A análise das estradas feita por uma empresa aponta que ocorrem, em média, 4 buracos por Km. A análise aponta, ainda, que a quantidade de buracos segue uma distribuição Poisson. Qual a probabilidade de que um Km qualquer contenha:

c) Nenhum buraco?

```
nsamples <- 1000000; nkm.sem.buraco <- 0; nkm.com.buraco <- rep(0, 30)
for (i in 1:nsamples) {
  buraco <- rpois(1, 4) # uso de rpois com lambda = 4 e pegando uma observação
  if (buraco > 0) {
    nkm.com.buraco[buraco] <- nkm.com.buraco[buraco] + 1
  } else {
    nkm.sem.buraco <- nkm.sem.buraco + 1
  }
}
prob.nenhum.buraco <- nkm.sem.buraco / nsamples
print(prob.nenhum.buraco)
```

Distribuição Poisson

Exemplo 2, continuação) A análise das estradas feita por uma empresa aponta que ocorrem, em média, 4 buracos por Km. A análise aponta, ainda, que a quantidade de buracos segue uma distribuição Poisson. Qual a probabilidade de que um Km qualquer contenha:

d) Pelo menos um buraco?

```
nsamples <- 1000000; nkm.sem.buraco <- 0; nkm.com.buraco <- rep(0, 30)
for (i in 1:nsamples) {
  buraco <- rpois(1, 4) # uso de rpois com lambda = 4 e pegando uma observação
  if (buraco > 0) {
    nkm.com.buraco[buraco] <- nkm.com.buraco[buraco] + 1
  } else {
    nkm.sem.buraco <- nkm.sem.buraco + 1
  }
}
prob.pelo.menos.um.buraco <- sum(nkm.com.buraco[1:10]) / nsamples
print(prob.pelo.menos.um.buraco)
```

Distribuição Geométrica

Descreve a quantidade de experimentos de **Bernoulli** que precisam ser realizados até a ocorrência do primeiro sucesso.

Para introduzir o modelo de variável geométrica, vamos retomar uma sequência de ensaios de **Bernoulli**, que é definida por:

- Em cada ensaio, considera-se somente a ocorrência ou não ocorrência de um certo evento que será denominado sucesso e cuja não ocorrência será denominada falha.

- Os ensaios são independentes.

- A probabilidade de sucesso, p, é a mesma para cada ensaio.

- A probabilidade de falha, $1 - p$, é a mesma para cada ensaio.

Seja X a variável aleatória que fornece o número de falhas até o primeiro sucesso, ela tem distribuição **Geométrica** com parâmetro p, $0 < p < 1$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

Distribuição Geométrica

Exemplo 1) Suponha que a probabilidade de um equipamento eletrônico ser defeituoso é de 0,2. Realizaram-se testes na produção de um determinado lote. Determine a probabilidade do primeiro defeito encontrado:

a) Ocorrer no sétimo equipamento do teste:

$$P(7) = (0{,}2)(1 - 0{,}2)^{7-1} = 0{,}0524 = 5{,}24\%$$

b) Não ocorrer no quarto equipamento testado:

$$1 - P(4) = 1 - [(0{,}2)(1 - 0{,}2)^{4-1}]$$

$$= 1 - 0{,}1024 = 0{,}8976 = 89{,}76\%$$

Distribuições no R

No R, o trabalho com uma **variável aleatória** $\boldsymbol{X}$ está baseado em 4 procedimentos identificados pelas letras $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{r}$ que, adicionadas previamente ao código das **distribuições,** permitem o seu uso com **diferentes propósitos**:

- **rdistrib**: Gera **números aleatórios** baseados na distribuição definida. Necessita de argumentos especificando o tamanho da amostra, além dos parâmetros requeridos pela distribuição de interesse;
- **pdistrib**: Calcula a **função de probabilidade acumulada** $\boldsymbol{F(x)}$**;**
- **ddistrib**: Calcula a **distribuição de probabilidade** $\boldsymbol{f(x)}$;
- **qdistrib**: Calcula o **quantil** correspondente a uma dada probabilidade.

Distribuição Geométrica no R

Distribuição	Sintaxe	Opções
Geométrica (**geom**)	**dgeom**(x, prob, opções) **pgeom**(q, prob, opções) **qgeom**(p, prob, opções) **rgeom**(n, prob)	**x**: vetor contendo o número de falhas ocorridas em uma sequência de Bernoulli antes do sucesso. **prob**: probabilidade de sucesso em cada tentativa. **q**: vetor contendo os quantis. **p**: vetor contendo as probabilidades . **n**: número de observações.

Distribuição Geométrica

Exemplo 2) Suponha que a probabilidade de um equipamento eletrônico ser defeituoso é de 0,2. Realizaram-se testes na produção de um determinado lote. Determine a probabilidade do primeiro defeito encontrado:

a) Ocorrer no sétimo equipamento do teste:

```
dgeom(6, 0.2)

0.0524288
```

b) Não ocorrer no quarto equipamento testado:

```
1 - dgeom(3, 0.2)

0.8976
```

Distribuição Geométrica

Exemplo 2, continuação) Suponha que a probabilidade de um equipamento eletrônico ser defeituoso é de 0,2. Realizaram-se testes na produção de um determinado lote. Determine a probabilidade do primeiro defeito encontrado:

a) Ocorrer no sétimo equipamento do teste:

```
nsamples <- 10000000
n.sem.defeito <- 0; n.com.defeito <- rep(0, 100)
for (i in 1:nsamples) {
  defeito <- rgeom(1, 0.2) # uso de rgeom com prob = 0.2 e pegando uma observação
  if (defeito > 0) {
    n.com.defeito[defeito] <- n.com.defeito[defeito] + 1
  } else {
    n.sem.defeito <- n.sem.defeito + 1
  }
}
prob.ocorrer.setimo <- n.com.defeito[6] / nsamples # seis sem defeito e o sétimo com defeito
print(prob.ocorrer.setimo)
```

Distribuição Geométrica

Exemplo 2, continuação) Suponha que a probabilidade de um equipamento eletrônico ser defeituoso é de 0,2. Realizaram-se testes na produção de um determinado lote. Determine a probabilidade do primeiro defeito encontrado:

b) Não ocorrer no quarto equipamento testado:

```
nsamples <- 10000000
n.sem.defeito <- 0; n.com.defeito <- rep(0, 100)
for (i in 1:nsamples) {
  defeito <- rgeom(1, 0.2) # uso de rgeom com prob = 0.2 e pegando uma observação
  if (defeito > 0) {
    n.com.defeito[defeito] <- n.com.defeito[defeito] + 1
  } else {
    n.sem.defeito <- n.sem.defeito + 1
  }
}
# para não ocorrer no quarto não há três sucessos seguido de um erro
prob.nao.ocorrer.quarto <- (n.sem.defeito + sum(n.com.defeito) - n.com.defeito[3]) / nsamples
print(prob.nao.ocorrer.quarto)
```

Distribuição Geométrica

Exemplo 3) A probabilidade de uma regulagem bem sucedida na montagem de um determinado tipo de produto é de 0.80. Assuma que as tentativas são independentes.

a) Qual é a probabilidade de que a primeira regulagem bem sucedida requeira exatamente quatro tentativas?

```
dgeom (3, 0.8)
0.0064
```

Na função dgeom(x, p) x representa o número de fracassos, sendo neste caso $x = 4 - 1 = 3$.

b) Qual é a probabilidade de que a primeira regulagem bem sucedida requeira no máximo quatro tentativas ?

```
dgeom (0, 0.8) + dgeom (1, 0.8) + dgeom (2, 0.8) + dgeom (3, 0.8)
0.9984
```

c) Qual é a probabilidade de que a primeira regulagem bem sucedida requeira ao menos quatro tentativas ?

```
1 - (dgeom (0, 0.8) + dgeom (1, 0.8) + dgeom (2, 0.8))
0.008
```

Distribuição Geométrica

Exemplo 3, continuação) A probabilidade de uma regulagem bem sucedida na montagem de um determinado tipo de produto é de 0.80. Assuma que as tentativas são independentes.

a) Qual é a probabilidade de que a primeira regulagem bem sucedida requeira exatamente quatro tentativas?

```
nsamples <- 10000000
n.bem.sucedida <- 0; n.mal.sucedida <- rep(0, 100)
for (i in 1:nsamples) {
  regulagem <- rgeom(1, 0.8) # uso de rgeom com prob = 0.8 e pegando uma observação
  if (regulagem > 0) {
    n.mal.sucedida[regulagem] <- n.mal.sucedida[regulagem] + 1
  } else {
    n.bem.sucedida <- n.bem.sucedida + 1
  }
}
prob.quatro.tentativas <- n.mal.sucedida[3] / nsamples
print(prob.quatro.tentativas)
```

Distribuição Geométrica

Exemplo 3, continuação) A probabilidade de uma regulagem bem sucedida na montagem de um determinado tipo de produto é de 0.80. Assuma que as tentativas são independentes.

b) Qual é a probabilidade de que a primeira regulagem bem sucedida requeira no máximo quatro tentativas ?

```
nsamples <- 10000000
n.bem.sucedida <- 0; n.mal.sucedida <- rep(0, 100)
for (i in 1:nsamples) {
  regulagem <- rgeom(1, 0.8) # uso de rgeom com prob = 0.8 e pegando uma observação
  if (regulagem > 0) {
    n.mal.sucedida[regulagem] <- n.mal.sucedida[regulagem] + 1
  } else {
    n.bem.sucedida <- n.bem.sucedida + 1
  }
}
prob.no.maximo.quatro <- (n.bem.sucedida + sum(n.mal.sucedida[1:3])) / nsamples
print(prob.no.maximo.quatro)
```

Distribuição Geométrica

Exemplo 3, continuação) A probabilidade de uma regulagem bem sucedida na montagem de um determinado tipo de produto é de 0.80. Assuma que as tentativas são independentes.

c) Qual é a probabilidade de que a primeira regulagem bem sucedida requeira ao menos quatro tentativas ?

```
nsamples <- 10000000
n.bem.sucedida <- 0; n.mal.sucedida <- rep(0, 100)
for (i in 1:nsamples) {
  regulagem <- rgeom(1, 0.8) # uso de rgeom com prob = 0.8 e pegando uma observação
  if (regulagem > 0) {
    n.mal.sucedida[regulagem] <- n.mal.sucedida[regulagem] + 1
  } else {
    n.bem.sucedida <- n.bem.sucedida + 1
  }
}
prob.ao.menos.quatro <- (1 - sum(n.mal.sucedida[3:100])) / nsamples
print(prob.ao.menos.quatro)
```

Distribuição Hipergeométrica

É utilizada quando se consideram extrações aleatórias, sem reposição, de uma população dividida segundo dois atributos.

Considere uma população com N objetos nos quais M são classificados como do tipo A e $N - M$ são classificados como do tipo B. Seja X a variável aleatória que conta o número de objetos classificados como do tipo A em uma amostra de tamanho n. Então a distribuição de probabilidade de X é dada por:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo 1) Um banco de investimentos possui 20 clientes com mais de $R\$ \; 100 \; milhões$ aplicados. Destes, 5 moram fora do Brasil:

a) Ao retirar 3 ao acaso, qual a probabilidade de que 2 deles morem fora do Brasil?

$$P(X = 2) = \frac{C\binom{5}{2}\,C\binom{20-5}{3-2}}{C\binom{20}{3}} = \frac{10\ x\ 15}{1140} = 0{,}1315 = 13{,}15\%$$

b) Ao retirar 5 ao acaso, qual a probabilidade de que todos morem no Brasil?

$$P(X = 5) = \frac{C\binom{5}{0}\,C\binom{20-5}{5}}{C\binom{20}{5}} = 0{,}1937 = 19{,}37\%$$

Distribuições no R

No R, o trabalho com uma **variável aleatória** $\boldsymbol{X}$ está baseado em 4 procedimentos identificados pelas letras $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{r}$ que, adicionadas previamente ao código das **distribuições,** permitem o seu uso com **diferentes propósitos**:

- **rdistrib**: Gera **números aleatórios** baseados na distribuição definida. Necessita de argumentos especificando o tamanho da amostra, além dos parâmetros requeridos pela distribuição de interesse;
- **pdistrib**: Calcula a **função de probabilidade acumulada** $\boldsymbol{F(x)}$**;**
- **ddistrib**: Calcula a **distribuição de probabilidade** $\boldsymbol{f(x)}$;
- **qdistrib**: Calcula o **quantil** correspondente a uma dada probabilidade.

Distribuição Hipergeométrica no R

Distribuição	Sintaxe	Opções
Hipergeométrica (**hyper**)	**dhyper**(x, m, n, k, opções) **phyper**(q, m, n, k, opções) **qhyper**(p, m, n, k, opções) **rhyper**(nn, m, n, k)	**x**: vetor contendo o número de elementos com a característica A extraídos sem reposição de uma urna que contém elementos com características A e B. **m**: número de elementos com a característica A. **n**: número de elementos com a característica B. **k**: número de elementos extraídos da urna. **q**: vetor contendo os quantis. **p**: vetor contendo as probabilidades. **nn**: número de observações.

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo 1, continuação) Um banco de investimentos possui 20 clientes com mais de $R\$\ 100\ milhões$ aplicados. Destes, 5 moram fora do Brasil:

a) Ao retirar 3 ao acaso, qual a probabilidade de que 2 deles morem fora do Brasil?

```
dhyper(2, 5, 15, 3)
0.1315789
```

b) Ao retirar 5 ao acaso, qual a probabilidade de que todos morem no Brasil?

```
dhyper(0, 5, 15, 5)
0.193692
```

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo 1, continuação) Um banco de investimentos possui 20 clientes com mais de $R\$ \, 100 \; milhões$ aplicados. Destes, 5 moram fora do Brasil:

a) Ao retirar 3 ao acaso, qual a probabilidade de que 2 deles morem fora do Brasil?

```
nsamples <- 10000000
nobservacao <- 20
n.obs.fora <- 5
n.obs.Brasil <- 15
n.extraido <- 3
n.mora.fora <- rep(0, 100)
n.mora.brasil <- 0
for (i in 1:nsamples) {
  cliente <- rhyper(1, n.obs.fora, n.obs.Brasil, n.extraido) # uma observação
  if (cliente > 0) {
    n.mora.fora[cliente] <- n.mora.fora[cliente] + 1
  } else {
    n.mora.brasil <- n.mora.brasil + 1
  }
}
prob.dois.mora.fora <- n.mora.fora[2] / nsamples
print(prob.dois.mora.fora)
```

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo 1, continuação) Um banco de investimentos possui 20 clientes com mais de $R\$\ 100\ milhões$ aplicados. Destes, 5 moram fora do Brasil:

b) Ao retirar 5 ao acaso, qual a probabilidade de que todos morem no Brasil?

```
nsamples <- 10000000
nobservacao <- 20
n.obs.fora <- 5
n.obs.Brasil <- 15
n.extraido <- 5
n.mora.fora <- rep(0, 100)
n.mora.brasil <- 0
for (i in 1:nsamples) {
  cliente <- rhyper(1, n.obs.fora, n.obs.Brasil, n.extraido) # uma observação
  if (cliente > 0) {
    n.mora.fora[cliente] <- n.mora.fora[cliente] + 1
  } else {
    n.mora.brasil <- n.mora.brasil + 1
  }
}
prob.todos.mora.Brasil <- n.mora.brasil / nsamples
print(prob.todos.mora.Brasil)
```

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo 2) Uma urna contém 15 bolas, sendo 10 brancas e 5 vermelhas. Uma amostra de extensão 4, não ordenada e sem reposição, é retirada ao acaso da urna. Determine qual é a probabilidade de que três bolas sejam vermelhas.

```
dhyper (3, 5, 10, 4)

0.07326007
```

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo 2, continuação) Uma urna contém 15 bolas, sendo 10 brancas e 5 vermelhas. Uma amostra de extensão 4, não ordenada e sem reposição, é retirada ao acaso da urna. Determine qual é a probabilidade de que três bolas sejam vermelhas.

```
nsamples <- 10000000
nobservacao <- 15
n.obs.branca <- 10
n.obs.vermelha <- 5
n.extraido <- 4
n.bola.vermelha <- rep(0, 100)
n.bola.branca <- 0
for (i in 1:nsamples) {
  bola <- rhyper(1, n.obs.vermelha, n.obs.branca, n.extraido) # uma observação
  if (bola > 0) {
    n.bola.vermelha[bola] <- n.bola.vermelha[bola] + 1
  } else {
    n.bola.branca <- n.bola.branca + 1
  }
}
prob.tres.bola.vermelha <- n.bola.vermelha[3] / nsamples
print(prob.tres.bola.vermelha)
```

Distribuições no Python

Utilizando o Python, refaça todo os exemplos deste material que foram resolvidos em R, inclusive os que foram resolvidos por simulação.

Dica: módulo stats da biblioteca SciPy. Utilize métodos comuns, como rvs, pdf, cdf, ppf e stats, às distribuições:

- **rvs**: Gera **números aleatórios** baseados na distribuição definida;
- **cdf**: Calcula a **função de probabilidade acumulada $F(x)$;**
- **pdf**: Calcula a **distribuição de probabilidade $f(x)$**;
- **ppf**: Percent Point Function (inverse of cdf — percentiles).
- **stats**: Return mean, variance, skew, and/or kurtosis.