PUC-RIO
INF1036 - Probabilidade Computacional

Material 9 – Gerando Variáveis Aleatórias – Método Polar

Professora - Ana Carolina Letichevsky*

2022.1

*Material Adaptado de Professor Hélio Lopes

Método da Inversa

Distribuição	Função de Densidade de Probabilidade	Inversa da Função de Distribuição Acumulada
Uniforme $\mathcal{U}(a,b)$ $a \leq x \leq b$	$\frac{1}{b-a}$	$a+(b-a)u$
Exponencial $\mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda > 0; x \geq 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$-\frac{1}{\lambda} ln(1-u)$
Beta $\mathcal{B}(\alpha,1)$ $\alpha > 0;\ 0 \leq x \leq 1$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$u^{\frac{1}{\alpha}}$
Beta $\mathcal{B}(1,\beta)$ $\beta > 0;\ 0 \leq x \leq 1$	$\beta(1-x)^{\beta-1}$	$1-(1-u)^{\frac{1}{\beta}}$
Logística $\mathcal{L}\ (\alpha,\beta)$ $\beta > 0;\ -\infty \leq x;\ \alpha < \infty$	$\frac{e^{-(x-\alpha)/\beta}}{\beta[1+e^{-(x-\alpha)/\beta}]^2}$	$\alpha+\beta ln[u/(1-u)]$
Weibull $\mathcal{W}\ (\alpha.\beta)$ $\alpha,\beta > 0;\ x \geq 0$	$\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^{\alpha}}$	$\beta[-ln(1-u)]^{1/\alpha}$
Cauchy $\mathcal{C}\ (\alpha,\beta)$ $\beta > 0;\ -\infty \leq x;\ \alpha < \infty$	$\frac{1}{\pi}\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$	$\alpha+\beta \tan\pi\,[u-(1/2)]$

Método Polar

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, a função de densidade de probabilidade de sua ocorrência simultânea pode ser representada por uma função com valores $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ para qualquer par de valores (x, y).

Costuma-se referir a essa função como Densidade de Probabilidade Conjunta de X e Y e ela deve satisfazer a:

- $f(x, y) \geq 0$ para todos (x, y)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$
- Para qualquer região A no plano xy temos: $P[(x, y) \in A] = \iint_A \; f(x, y)$

Dizemos que X e Y são independentes se e somente se:

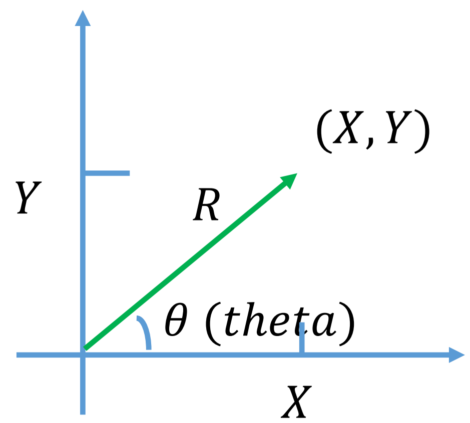
$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y) \qquad \forall (x, y)$$

Ou seja, a densidade conjunta é o produto das densidades individuais.

Método Polar

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias normais padrão, $Normal\ (0,1)$, e independentes. Considere ainda que R e θ sejam as coordenadas polares do vetor (X,Y):

$$\begin{cases} R^2 = X^2 + Y^2 \\ \tan(\theta) = Y/X \\ X = R\cos(\theta) \\ Y = R\,\mathrm{sen}\ (\theta) \end{cases}$$



$Coordenada\ Polar$

Como X e Y são independentes, pelo que já vimos, a sua densidade conjunta é o produto de suas densidades individuais, assim:

$$f(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

Método Polar

Para determinar a densidade conjunta de R^2 (d) e θ devemos fazer a mudança de variáveis:

$$f(d,\theta) \Rightarrow \qquad d = x^2 + y^2 \quad \text{e} \qquad \theta = \arctan(y/x)$$

Como a Jacobiana da transformação – o determinante da matriz composta pelas derivadas de d e θ em relação a x e y – é igual a 2, segue:

$$f(d,\theta) = \frac{1}{2} . \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \qquad 0 < d < \infty, 0 < \theta < 2\pi$$

Observe que essa densidade é o produto da densidade exponencial com $\lambda = \frac{1}{2}$, dada por ($\lambda e^{-\lambda d} = \frac{1}{2} e^{-\frac{d}{2}}$), e da uniforme em $(0, 2\pi)$, dada por ($\frac{1}{b-a} = \frac{1}{2\pi-0} = \frac{1}{2\pi}$).

Método Polar

Observe que essa densidade é o produto da densidade exponencial com $\lambda = \frac{1}{2}$, dada por ($\lambda e^{-\lambda d} = \frac{1}{2} e^{-\frac{d}{2}}$), e da uniforme em $(0, 2\pi)$, dada por ($\frac{1}{b-a} = \frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}$).

$$f(d,\theta) = \frac{1}{2} . \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{d}{2}}$$

$$f(d,\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{d}{2}}$$

$\text{Uniforme}(0, 2\pi)$ $\qquad$ $\text{Exponencial}(\frac{1}{2})$

Método da Inversa ↓ $\qquad$ Método da Inversa ↓

θ $\qquad$ d

Método Polar

Para gerar um par de variáveis aleatórias Normais padrão independentes entre si, X e Y, siga o seguinte algoritmo:

Passo 1: gere independentemente duas uniformes: U_1 e U_2

Passo 2: gere:

d a partir da inversa da exponencial $(-\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U_1))$.

θ a partir da inversa da uniforme $(2\pi U_2)$.

$$d = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U_1)$$

$$\theta = 2\pi U_2$$

Passo 3: Faça:

$$R = raiz\ (d)$$

$$X = R\ cos(\theta)$$

$$Y = R\ sen\ (\theta)$$

Método Polar

Exemplo 3) Gere um par de variáveis aleatórias Y e X com função densidade de probabilidade $Normal\ (0, 1)$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

# Gera v.a. exponencial a partir da inversa da exponencial
def exponencial(nsamples, taxa):
    x = np.zeros(nsamples)
    u = np.random.sample(nsamples)
    for i in range(nsamples):
        x[i] = -math.log(1.0-u[i])/taxa
    return x

# Gera v.a. uniforme de parâmetros "a" e "b" a partir da inversa da uniforme
def uniform(nsamples, a, b):
    x = np.zeros(nsamples)
    u = np.random.sample(nsamples)
    for i in range(nsamples):
        x[i] = a + (b-a)*u[i]
    return x
```

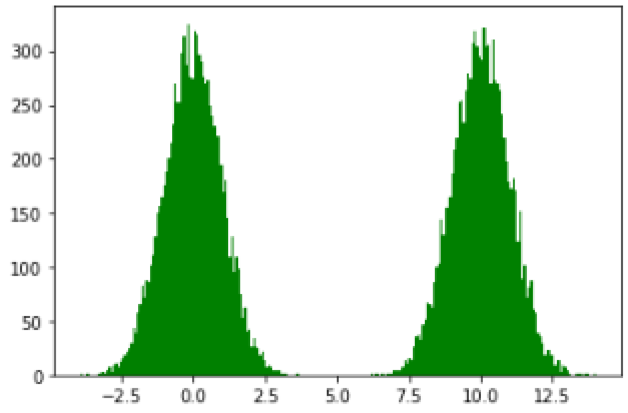
Método Polar

Continuação Exemplo 3) Gere um par de variáveis aleatórias Y e X com função densidade de probabilidade $Normal\ (0, 1)$.

```
def normalPolar(nsamples):
    x = np.zeros(nsamples)
    y = np.zeros(nsamples)
    d = exponencial(nsamples, 0.5)
    theta = uniform(nsamples, 0, 2*math.pi)
    for i in range(nsamples):
        r = math.sqrt(d[i])
        x[i] = r*math.cos(theta[i])
        y[i] = r*math.sin(theta[i])
    return (x, y) # retorna as duas v.a.

# par[0] contém X, par[1] contém Y
parVA = normalPolar(10000)
print(np.mean(parVA[0])); print(np.varVA(parVA[1]))

plt.hist(parVA[0], bins=100, facecolor='green’)
# Deslocada para a posição 10 só para mostrar na tela
plt.hist(parVA[1] + 10, bins=100, facecolor='green'); plt.show()
```



Método Polar

Exercício 4) Gere um par de variáveis aleatórias Y e X com função densidade de probabilidade $Normal\ (0, 1)$.

```
exponencial <- function (nsamples, taxa) {
  X <- rep(0, nsamples) # nsamples posições com 0
  U <- runif(nsamples) # nsamples valores em [0.0, 1.0)
  for (i in 1:nsamples) {
    X[i] <- - log(1.0 - U[i])/taxa # Inversa da Exponencial
  }
  return (X)
}

uniform <- function (nsamples, a, b) {
  X <- rep(0, nsamples) # nsamples posições com 0
  U <- runif(nsamples) # nsamples valores em [0.0, 1.0)
  for (i in 1:nsamples) {
    X[i] <- a + (b-a)*U[i] #Inversa da Uniforme
  }
  return (X)
}
```

Método Polar

Continuação Exercício 4) Gere um par de variáveis aleatórias Y e X com função densidade de probabilidade $Normal\ (0, 1)$.

```
normalPolar <- function (nsamples) {
  X <- rep(0, nsamples)
  Y <- rep(0, nsamples)
  d <- exponencial(nsamples, 0.5)
  theta = uniform(nsamples, 0, 2*pi)
  for (i in 1:nsamples) {
    r = sqrt(d[i])
    X[i] <- r*cos(theta[i])
    Y[i] <- r*sin(theta[i])
  }
  return (data.frame(X, Y))
}

parVA <- normalPolar(10000);
par(mfrow = c(1,2)) #uma linha com duas colunas de gráficos
hist(parVA$X, breaks = 100, col = 'green')
hist(parVA$Y, breaks = 100, col = 'green')
```