PUC-RIO
INF1036 - Probabilidade Computacional

Material 4 - Probabilidade

Professora - Ana Carolina Letichevsky*

2022.1

*Material Adaptado de Professor Hélio Lopes

Probabilidade

Conforme mencionado no material 3 existe uma abordagem simples para definir probabilidade quando o conjunto amostral S é finito, que consiste em contar o número de elementos de um evento E, $n(E)$, e dividí-lo pelo número de elementos do conjunto S, $n(S)$.

Com isso, a probabilidade de ocorrência do evento E é dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Probabilidade

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)},$$

implica que cada possível saída de um experimento tem exatamente a mesma probabilidade:

$$\zeta \in S \Rightarrow P(\{\zeta\}) = \frac{1}{n(S)}$$

Onde:

- S é o conjunto de possíveis resultados (saídas) de um experimento;
- ζ são os elementos de S, que são chamados de ponto amostral ou simplesmente de amostra;
- E representa um evento, ou seja, qualquer subconjunto possível dos espaço amostral S.

Probabilidade

Exemplo 1) Considere o experimento de jogar uma vez uma moeda justa (não viciada) “Cara (H) ou Coroa (T)”.

- Espaço amostral: $S = \{H, T\}$.
- Se é indicado o evento obter cara: $E = \{H\} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{2}$

```
def probabilidade(e, s):
    retorno = len(e) / len(s)
    return (retorno)

S = ['H', 'T']
E = ['H']
p = probabilidade(E, S)
print(p)
```

Probabilidade

Exemplo 2) Considere o experimento de jogar duas vezes uma moeda justa (não viciada) “Cara (H) ou Coroa (T)”.

- Espaço amostral: $S = \{HH, HT, TH, TT\}$.
- Se é indicado o evento conter pelo menos uma “Cara”: $E = \{HH, HT, TH\}$.
- $\Rightarrow P(E) = \frac{3}{4}$

```
S = ['HH', 'HT', 'TH', 'TT']
E = ['HH', 'HT', 'TH']
p = probabilidade(E, S)
print(p)
```

Probabilidade

Exemplo 3) Considere o experimento de jogar uma vez um dado honesto e observar o número mostrado na face de cima.

- Espaço amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Evento: $E = \{2, 4, 6\}$ (número mostrado na face de cima é par).
- $\Rightarrow P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

```
S = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
E = [2, 4, 6]
p = probabilidade(E, S)
print(p)
```

Probabilidade

Exemplo 4) Três moedas são jogadas simultaneamente. (Cara (H) e Coroa (T))

a) Qual é a probabilidade de obter duas caras?

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

Se E indica o evento "obter duas caras" temos que

$$E = \{HHT, HTH, THH\}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

Probabilidade

Exemplo 4) Três moedas são jogadas simultaneamente. (Cara (H) e Coroa (T))

a) Qual é a probabilidade de obter duas caras?

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

$$E = \{HHT, HTH, THH\}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

```
S = ['HHH', 'HHT', 'HTH', 'HTT', 'THH', 'THT', 'TTH', 'TTT']
E = ['HHT', 'HTH', 'THH']
p = probabilidade(E, S)
print(p)
```

Probabilidade

Exemplo 4) Três moedas são jogadas simultaneamente. (Cara (H) e Coroa (T))

b) Qual é a probabilidade de obter pelo menos duas caras?

Se E denota o evento "obter pelo menos duas caras" temos

$$E = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$$

$$P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

```
S = ['HHH', 'HHT', 'HTH', 'HTT', 'THH', 'THT', 'TTH', 'TTT']
E = ['HHT', 'HTH', 'THH', 'HHH']
p = probabilidade(E, S)
print(p)
```

Probabilidade

Nos quatro exemplos anteriores:

1. Descrevemos os possíveis resultados do experimento e calculamos o seu número;

2. Descrevemos os resultados do evento E e calculamos o seu número;

3. Calculamos a probabilidade dividindo $n(E)$ por $n(S)$.

Probabilidade

Laplace chamava os elementos de E como os **casos favoráveis** e os elementos de S como os **casos possíveis**.

$$\text{probabilidade} = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}}$$

Essa abordagem de contagem é bastante simples quando S possui baixa cardinalidade.

Quando a cardinalidade de S é alta, muitas vezes podemos usar as técnicas clássicas de análise combinatória que estudamos no material 3.

Vamos retomar o princípio de multiplicação.

Se um certo experimento pode ser feito com r diferentes formas, e para cada uma dessas formas, outro experimento pode ser feito com k formas diferentes, então o experimento combinado pode ser feito com rk formas diferentes.

Exemplo 1) Se uma senha consiste em três letras, ache a probabilidade que uma senha escolhida aleatoriamente não possua letras repetidas.

Seja $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$, o conjunto das 23 letras do alfabeto.

O espaço amostral de todas as possíveis senhas de três letras é dado por:

$$S = A^3 = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \{\alpha, \beta, \gamma\} \subset A\}$$

O evento de interesse é

$$E = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in A^3 : \alpha \neq \beta \neq \gamma\}$$

Exemplo 1) Se uma senha consiste em três letras, ache a probabilidade que uma senha escolhida aleatoriamente não possua letras repetidas.

$$S = A^3 = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \{\alpha, \beta, \gamma\} \subset A\}$$

Para contar a cardinalidade de S pense que:

- Existem 23 possibilidades para a escolha de α;
- Para cada α existem 23 escolhas para (α, β);
- Para cada (α, β) existem 23 escolhas para (α, β, γ).

Portanto, $n(S) = 23^3 = 12167$ possíveis senhas.

Exemplo 1) Se uma senha consiste em três letras, ache a probabilidade que uma senha escolhida aleatoriamente não possua letras repetidas.

$$E = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in A^3 : \alpha \neq \beta \neq \gamma\}$$

Para contar o número de senhas em E, note que:

- Existem 23 possibilidades para a escolha de α;
- Para cada α existem 22 possibilidades para escolha de (α, β);
- Para cada par (α, β) existem 21 possibilidades de escolha de (α, β, γ).

Portanto, $n(E) \ = 23\ x\ 22\ x\ 21 = \ 10626$ senhas.

Exemplo 1) Se uma senha consiste em três letras, ache a probabilidade que uma senha escolhida aleatoriamente não possua letras repetidas.

$n(S) = 23^3 = 12167$ possíveis senhas.

$n(E) = 23\ x\ 22\ x\ 21 = 10626$ senhas.

Portanto,

$$P(E) = \frac{23\ x\ 22\ x\ 21}{23\ x\ 23\ x\ 23} = \frac{10626}{12167} \approx 0.8733459.$$

```
ns = 23**3
ne = 23*22*21
prob = ne / ns
print(prob)
```

Probabilidade e Problemas de Contagem

Em problemas de contagem, muitas vezes nos deparamos com situações onde existe uma coleção de n objetos distintos, e que alguém escolhe aleatoriamente p objetos dessa coleção. Esse processo de escolha, geralmente chamamos de **amostragem**.

Se após a escolha aleatória de um objeto:

- ele pode ser devolvido à coleção, dizemos que esse mecanismo de escolha é uma **amostragem com reposição** e nesse caso p pode ser qualquer número inteiro positivo.

- ele não pode ser devolvido à coleção, dizemos que esse mecanismo de escolha é uma **amostragem sem reposição** e nesse caso o maior valor possível para p é n.

Probabilidade e Problemas de Contagem

Para esses dois mecanismos de escolha (**amostragem com ou sem reposição**), podemos estar interessados ou não na ordem em que os objetos são escolhidos. Portanto, temos quatro caso a considerar:

1. Amostragem sem reposição e com ordem;	Arranjo ou Permutação
2. Amostragem sem reposição e sem ordem;	Combinação
3. Amostragem com reposição e com ordem;	Arranjo com Repetição ou Permutação com Reposição
4. Amostragem com reposição e sem ordem.	Combinação Completa (Combinação com Repetição)

Probabilidade e Problemas de Contagem

Exemplo 2) Considere que existem quatro objetos distintos $\{a, b, c, d\}$ e que o experimento consiste em escolher aleatoriamente 2 objetos desses 4 de acordo com cada um dos processos de amostragem.

- Caso 1. (sem reposição e com ordem)

- Caso 2. (sem reposição e sem ordem)

- Caso 3. (com reposição e com ordem)

- Caso 4. (com reposição e sem ordem)

Probabilidade e Problemas de Contagem

Exemplo 2) Considere que existem quatro objetos distintos $\{a, b, c, d\}$ e que o experimento consiste em escolher aleatoriamente 2 objetos desses 4 de acordo com cada um dos processos de amostragem.

Caso 1. (sem reposição e com ordem)

$$S = \{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\}$$

Caso 1: Arranjo

$$n(S) = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 4\ x\ 3 = 12$$

```
def arranjo(n, p):
    return (fatorial(n) / fatorial(n - p))

caso1 = arranjo(4, 2)
print(caso1)
```

Probabilidade e Problemas de Contagem

Exemplo 2) Considere que existem quatro objetos distintos $\{a, b, c, d\}$ e que o experimento consiste em escolher aleatoriamente 2 objetos desses 4 de acordo com cada um dos processos de amostragem.

Caso 2. (sem reposição e sem ordem)

$$S = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$$

Caso 2: Combinação

$$n(S) = C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\ x\ 3}{2} = 6$$

```
def combinacao(n, p):
    return (fatorial(n)/(fatorial(p)*fatorial(n-p)))

caso2 = combinacao(4, 2)
print(caso2)
```

Probabilidade e Problemas de Contagem

Exemplo 2) Considere que existem quatro objetos distintos $\{a, b, c, d\}$ e que o experimento consiste em escolher aleatoriamente 2 objetos desses 4 de acordo com cada um dos processos de amostragem.

Caso 3. (com reposição e com ordem)

$$S = \{aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd\}$$

Caso 3: Arranjo com Repetição
$n(S) = (AP)_{n,p} = n^p$
$(AP)_{4,2} = 4^2 = 16$

```
def arranjo_com_repeticao(n, p):
    return (n**p)

caso3 = arranjo_com_repeticao(4, 2)
print(caso3)
```

Probabilidade e Problemas de Contagem

Exemplo 2) Considere que existem quatro objetos distintos $\{a, b, c, d\}$ e que o experimento consiste em escolher aleatoriamente 2 objetos desses 4 de acordo com cada um dos processos de amostragem.

Caso 4. (com reposição e sem ordem)

$$S = \{aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd\}$$

Caso 4: Combinação Completa (com Repetição)

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

$$C_5^2 = \frac{(4+2-1)!}{2!\,(4-1)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

```
def combinacao_completa(n, p):
    nc = n + p - 1
    pc = p
    return (fatorial(nc)/(fatorial(pc)*fatorial(nc-pc)))

caso4 = combinacao_completa(4, 2)
print(caso4)
```

Probabilidade e Problemas de Contagem

Exercício 1) Temos 3 objetos, digamos $\{1, 2, 3\}$. Crie funções em R para calcular o que se pede em cada um dos itens a seguir.

a) De quantas formas podemos escolher sem reposição e com ordem 2 objetos?

b) Ao escolher, aleatoriamente, um dos arranjos do item a), qual é a probabilidade de se começar com o objeto 1?

c) De quantas formas podemos escolher sem reposição e sem ordem 2 objetos?

d) Ao escolher um resultado aleatoriamente dos possíveis eventos do item c). Qual a probabilidade dele conter o objeto 2?

e) De quantas formas podemos escolher com reposição e com ordem 2 objetos?

f) De quantas formas podemos escolher 2 objetos com reposição e sem considerar a ordem?

Probabilidade e Problemas de Contagem

Exercício 1) a) De quantas formas podemos escolher sem reposição e com ordem 2 objetos?

Existem 6 possíveis formas de escolher $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(3,1)$ e $(3,2)$.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Cada escolha desses n objetos é chamado de **arranjo**.

```
arranjo <- function (n, p) {
  return (fatorial(n) / fatorial(n - p))
}

escolha <- arranjo (3, 2)
print(escolha)
```

```
fatorial <- function (n) {
  fat = 1
  i = 2
  while (i <= n){
    fat = fat * i
    i = i + 1
  }
  return (fat)
}
```

Probabilidade e Problemas de Contagem

Exercício 1) b) Ao escolher, aleatoriamente, um dos arranjos do item a), qual é a probabilidade de se começar com o objeto 1?

Existem 2 possíveis formas de escolher (1, 2) e (1, 3).

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

```
probabilidade <- function (e, s) {
  retorno = length(e) / length(s)
  return (retorno)
}

S = list(c(1, 2), c(1, 3), c(2, 1), c(2, 3), c(3, 1), c(3, 2))
E = list(c(1, 2), c(1, 3))
p = probabilidade(E, S)
print(p)
```

Exercício 1) c) De quantas formas podemos escolher sem reposição e sem ordem 2 objetos?

Existem 3 possíveis formas de escolher (1, 2), (1, 3), (2, 3).

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Cada escolha desses n objetos é chamado de **combinação**.

```
combinacao <- function(n, p) {
  return (fatorial(n) / (fatorial(p) * fatorial(n - p)))
}

escolha = combinacao(3, 2)
print(escolha)
```

Exercício 1) d) Ao escolher um resultado aleatoriamente dos possíveis eventos do item c). Qual a probabilidade dele conter o objeto 2?

Existem 2 possíveis formas de escolher (1, 2) e (2, 3).

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

```
probabilidade <- function (e, s) {
  retorno = length(e) / length(s)
  return (retorno)
}

S = list(c(1, 2), c(1, 3), c(2, 3))
E = list(c(1, 2), c(2, 3))
p = probabilidade(E, S)
print(p)
```

Exercício 1) e) De quantas formas podemos escolher com reposição e com ordem 2 objetos?

Existem 3^2 = 9 possíveis soluções com dois dígitos:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3).

$$(AR)_{n,p} = n^p$$

O número total de possíveis escolhas com reposição e com ordem de p objetos em n é **um arranjo com repetição**.

```
arranjo_com_repeticao <- function (n, p) {
    return (n^p)
}

escolha = arranjo_com_repeticao(3, 2)
print(escolha)
```

Probabilidade e Problemas de Contagem

Exercício 1) f) De quantas formas podemos escolher 2 objetos com reposição e sem considerar a ordem?

Existem 6 possíveis escolhas de 2 objetos com reposição e sem considerar a ordem:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3) e (3, 3).

$$C^{p}_{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

O número total de possíveis escolhas com reposição e com ordem de p objetos em n é **uma combinação completa**.

```
combinacao_completa <- function (n, p) {
  nc = n + p - 1
  pc = p
  return (fatorial(nc)/(fatorial(pc)*fatorial(nc-pc)))
}

escolha = combinacao_completa(3, 2)
print(escolha)
```

Probabilidade e Problemas de Contagem

Para quaisquer dois números reais x e y, a **expansão binomial** de $(x+y)^n$ é dada por:

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \, x^p \, y^{n-p}$$

$$= \binom{n}{0} x^0 \, y^p + \binom{n}{1} x^1 \, y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 \, y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{p} x^p \, y^0$$

Observe que escrevendo os termos (T) do desenvolvimento na ordem acima o termo de ordem $p+1$ é

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^p \, y^{n-p}$$

Onde:

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo 3) Determine o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^9$.

Solução:

$$T_{p+1} = \binom{9}{p}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^p (x^3)^{9-p} = \binom{9}{p}\frac{(-1)^p}{x^{2p}}\, x^{27-3p} = (-1)^p\binom{9}{p}\, x^{27-5p}$$

No termo em x^2 temos

$$27 - 5p = 2$$

$$p = 5$$

O termo em x^2 é

$$T_6 = (-1)^5\binom{9}{5}\, x^2 = -126\, x^2$$

Se um conjunto tem n objetos, então o número de diferentes subconjuntos de tamanho p é dado por $\binom{n}{p}$. Isso porque não importa a ordem dos elementos que estão nos subconjuntos.

A cardinalidade do conjuntos potência de um conjunto com n elementos (ou, escrito de outra forma, o número total de possíveis subconjuntos de um conjunto n elementos) é dada por:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{p}$$

Se utilizarmos a expansão binomial com $x = 1$ e $y = 1$, temos que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{p} = 2^n$$

Probabilidade e Problemas de Contagem

Suponha que de n objetos escolhemos, com reposição, p ao acaso. Qual a probabilidade de nenhum objeto ser escolhido mais de uma vez?

Número de casos favoráveis:

$$n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-p+1)$$

Número de casos possíveis:

$$n^p$$

Probabilidade:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n^p}$$

Uma aplicação interessante deste resultado é o **problema do aniversário**.

Suponha que o ano tem sempre 365 dias e que o aniversário de uma pessoa possa cair com igual probabilidade em qualquer dia.

Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia?

O evento que estamos interessado é:

$E \ =$ “Pelo menos dois alunos fazem aniversário no mesmo dia”.

$\bar{E} =$ “Todos os alunos fazem aniversário em datas diferentes”.

Probabilidade e Problemas de Contagem

Se essa turma tem n alunos qual a probabilidade de $\bar{E}$ = “Todos os alunos fazem aniversário em datas diferentes”?

$$n(\bar{E}) = (365)_n$$

Por outro lado, o número de possíveis datas em que esses n alunos fazem aniversário equivale ao tamanho de S:

$$n(S) = 365^n$$

Por consequência,

$$P(\bar{E}) = \frac{n(\bar{E})}{n(S)} = \frac{(365)_n}{365^n}$$

Portanto, se essa turma tem n alunos qual a probabilidade de

E = "Pelo menos dois alunos fazem aniversário no mesmo dia"?

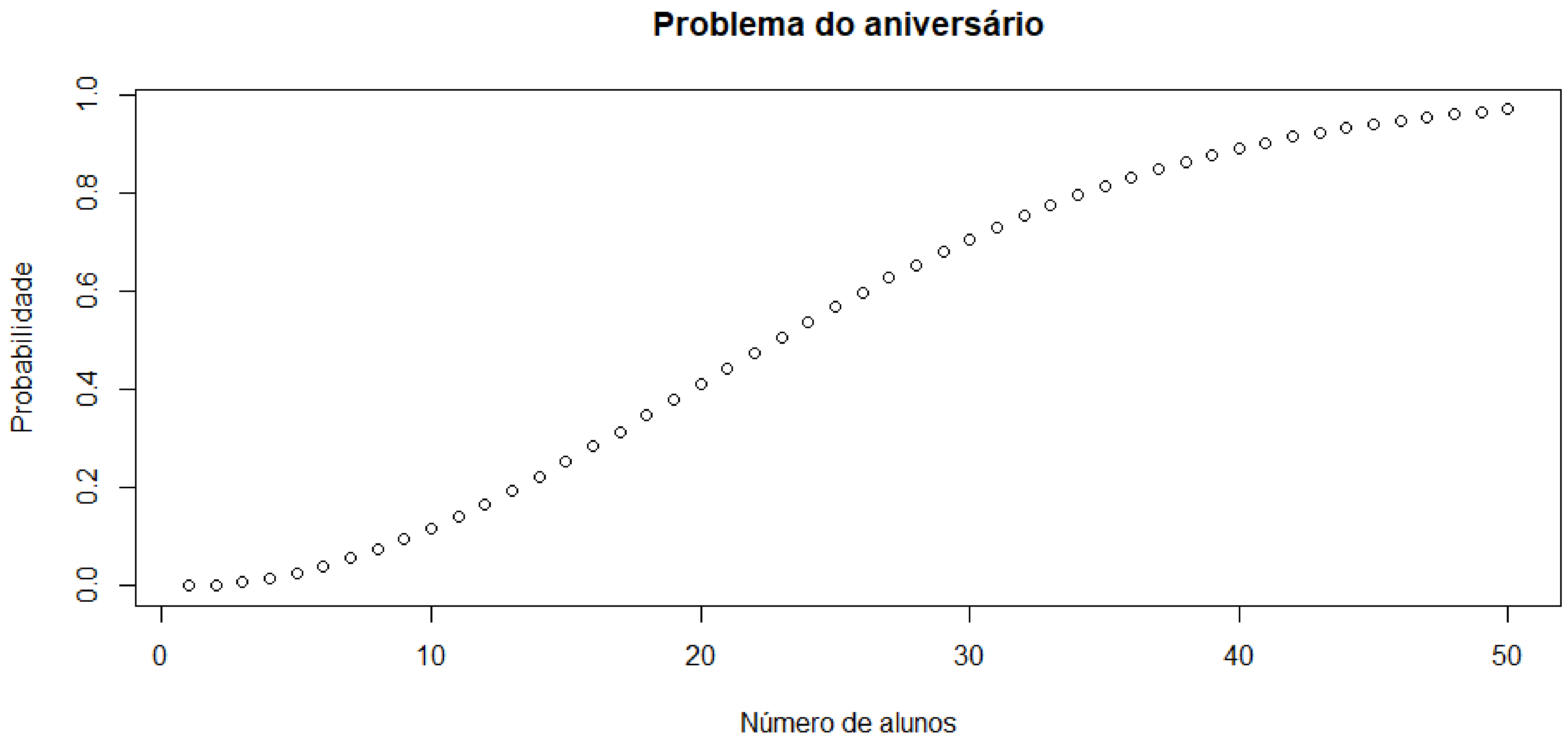
$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{n(\bar{E})}{n(S)} = 1 - \frac{(365)_n}{365^n}$$

Exemplo 4) Crie um programa para calcular a probabilidade de pelo menos 2 pessoas fazerem aniversário no mesmo dia com n variando de 1 a 50.

Retorna o produto de todos os valores presentes em seus argumentos.

```
n <- 50
p <- c(1:n)
for (k in 1:n)
  p[k] <- 1 - prod(365:(365-k+1))/(365^k)

plot(p, main = "Problema do aniversário", xlab = "Número de alunos", ylab =
"Probabilidade")
```


Problema do aniversário
Probabilidade
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
10
20
30
40
50
Número de alunos

Probabilidade e Problemas de Contagem

Uma aplicação interessante para permutação caótica é o **problema dos chapéus**. Suponha que na entrada de uma festa uma recepcionista recebeu n chapéus dos n convidados. Suponha ainda que todos os convidados levaram exatamente 1 chapéu.

Na saída os chapéus foram devolvidos ao acaso, de forma aleatória, qual a probabilidade de que nenhum convidado receba o chapéu correto?

Número de casos possíveis:

$$n!$$

Número de permutações extraídas de n.

Número de casos favoráveis:

$$n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

Número de permutações caóticas extraídas de n.

A probabilidade buscada é:

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Crie um programa para calcular a probabilidade de nenhum convidado receber o chapéu correto com n variando de 2 a 40.

```
v = []
for i in range(2, 41):
    nenhum_convidado = permutacao_caotica(i) / permutacao(i)
    v.append((i, nenhum_convidado))
print(v)
```

[(2, 0.5), (3, 0.3333333333333333), (4, 0.37500000000000006), (5, 0.36666666666666664), (6, 0.3680555555555556), (7, 0.3678571428571429), (8, 0.3678819444444445), (9, 0.3678791887125221), (10, 0.36787946428571444), (11, 0.367879439233606), (12, 0.3678794413212817), (13, 0.3678794411606912), ...(21, 0.3678794411714425), (22, 0.36787944117144245), (23, 0.3678794411714424), (24, 0.36787944117144245), (25, 0.36787944117144245), (26, 0.36787944117144245), (27, 0.36787944117144245), (28, 0.36787944117144245), (29, 0.36787944117144245), (30, 0.36787944117144245), (31, 0.3678794411714425), (32, 0.3678794411714425), (33, 0.3678794411714424), (34, 0.36787944117144245), (35, 0.36787944117144245), (36, 0.36787944117144245), (37, 0.36787944117144245), (38, 0.36787944117144245), (39, 0.36787944117144245), (40, 0.36787944117144245)]

Probabilidade e Problemas de Contagem

Calcule a probabilidade de nenhum convidado receber o chapéu correto com $n = 1.000$ e $n = 10.000$.

```
n = 1000 # n = 10000
nenhum_convidado = permutacao_caotica(n)/permutacao(n)
print(nenhum_convidado)
```

```
from decimal import Decimal

def fatorial(n):
    fat = 1
    i = 2
    while (i <= n):
        fat = fat * i
        i = i + 1
    return Decimal (fat)
```

$$n = 1000 \Rightarrow \ 0.3678794411714423215955237701$$

$$n = 10000 \Rightarrow \ 0,3678794411714423215955237701$$

Perceba que para n -> ∞ o resultado da probabilidade é $e^{-1} \approx$ 0,37.

Simulando Escolhas

Vamos retomar o exemplo de lançamento de uma moeda não viciada.

Agora vamos lançar a moeda 20 vezes e observar os resultados.

```
nsamples <- 20
x <- sample(c("H","T"), nsamples, replace = TRUE)
print(x)
table(x)
```

```
 H  T
 9 11
```

```
"H" "T" "T" "T" "T" "H" "H" "H" "H" "T" "H" "H" "T" "T" "T" "T" "T" "H" "T" "H"
```

Em seguida, vamos dividir o total de caras (H) pelo total de lançamentos e o total de coroas (T) pelo total de lançamentos.

```
table(x)/nsamples
```

```
   H    T
0.45 0.55
```

Probabilidade

A probabilidade é uma medida que associa um número real a cada evento E em um espaço amostral S. Essa medida de probabilidade, que denotamos por $P(E)$, deve satisfazer os três axiomas a seguir:

- **Axioma 1**: Para qualquer evento E em S, $P(E) \geq 0$.
- **Axioma 2**: $P(S) = 1$.
- **Axioma 3**: Se $E_1, E_2, \ldots$ é uma sequência infinita de eventos mutuamente exclusivos em S, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i).$$

Propriedades elementares da Probabilidade

1. $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

2. $P(S) = 1$

3. $P(\emptyset) = 0$

4. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$

5. $P(A) \leq 1$

Propriedades elementares da Probabilidade

6. Sejam A e B eventos em S, então,

$$Se\ A \cap B = \emptyset, \text{ então } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

7. Sejam A e B eventos em S, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Propriedades elementares da Probabilidade

8. *Se* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são n eventos arbitrários em S, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i \neq j} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - \ldots$$

$$-(-1)^{n-1} P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n)$$

9. *Se* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ é uma sequência de n eventos mutuamente exclusivos em S, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Propriedades elementares da Probabilidade

Exemplo 1) Seja P uma probabilidade sobre os eventos (subconjuntos) de um espaço amostral S. Sejam A e B eventos tais que $P(A) = \frac{3}{4}$ e $P(B) = \frac{2}{9}$.

Prove que:

a) $P(A \cup B) \geq \frac{3}{4}$

$$P(A \cup B) \geq P(A) = \frac{3}{4}$$

Propriedades elementares da Probabilidade

Exemplo 1) Seja P uma probabilidade sobre os eventos (subconjuntos) de um espaço amostral S. Sejam A e B eventos tais que $P(A) = \frac{3}{4}$ e $P(B) = \frac{2}{9}$.

Prove que:

b) $\frac{5}{18} \leq P(A \cap \bar{B}) \leq \frac{7}{9}$

$$P(A \cap \bar{B}) \leq P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{7}{9}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\geq P(A) - P(B) = \frac{3}{4} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$$

Propriedades elementares da Probabilidade

Exemplo 1) Seja P uma probabilidade sobre os eventos (subconjuntos) de um espaço amostral S. Sejam A e B eventos tais que $P(A) = \frac{3}{4}$ e $P(B) = \frac{2}{9}$.

Prove que:

c) $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{2}{9}$

$$P(A \cap B) \leq P(B) = \frac{2}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(B) - P(B - A)$$

$$\geq P(B) - P(\bar{A}) = \frac{2}{9} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Eventos Igualmente Prováveis

Considere um espaço amostral finito S com n elementos:

$$S = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\},$$

onde cada ζ_i representa um evento elementar em S.

Quando todos os eventos elementares são **igualmente prováveis**, ou **equiprováveis**, temos que $p_1 = p_2 = \cdots p_n$.

Então, temos que $p_i = \frac{1}{n}$, para $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Probabilidade

Exemplo 1) Seis bolas diferentes são colocados em três urnas diferentes. Qual é a probabilidade de que todas as urnas estejam ocupadas?

Número de casos possíveis:

$$n(S) = 3^6$$

Sejam A o evento “todas as urnas estão ocupadas” e $\bar{A}$ o evento “pelo menos uma urna não está ocupada”.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Seja ainda:

$\bar{A}_1$ o conjunto de distribuições que deixa a primeira urna vazia.

$\bar{A}_2$ o conjunto de distribuições que deixa a segunda urna vazia.

$\bar{A}_3$ o conjunto de distribuições que deixa a terceira urna vazia.

Probabilidade

$n(\bar{A}_1) = n(\bar{A}_2) = n(\bar{A}_3) = 2^6$

$n(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = n(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3) = n(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 1$

$n(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 0$

Portanto,

$n(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) = 3\ x\ 2^6 - 3 = 189$

$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) = \frac{189}{729} = \frac{7}{27}$

$P(A) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$

Espaço de Probabilidade

Até então, nos concentramos em construir os conceitos básicos de probabilidade.

- Definimos o espaço amostral $\mathcal{S}$, que consiste no conjunto de todas as possíveis saídas de um experimento.
- Definimos a σ-álgebra $\mathcal{F}$, cujos membros são chamados de eventos.
- E, finalmente, associamos a esses eventos uma probabilidade $\mathcal{P}$.

Juntando tudo isso, temos o que chamamos de **espaço de probabilidade**: $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Referências Bibliográficas

1. Augusto C. Morgado, et al Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

2. Jane M. Horgan, Probability with R, Willey, 2009.

3. Hwei Hsu, Probability, Random Variables, and Random Processes, Schaum's outlines, 1996.

4. Ramakant Khazanic, Basic Probability Theory and Applications, Goodyear Pub., 1976.