Probabilidade Computacional – 2º. Trabalho – 2022.1

Professora: Ana Carolina Letichevsky

Você recebeu um trabalho com 6 questões que devem ser resolvidas utilizando R ou Python, dependendo do que for solicitado no enunciado da questão. Caso não seja indicada a linguagem a ser utilizada, você poderá selecionar uma das duas linguagens para implementar a sua solução. A resolução deverá ser feita em arquivos separados, um para cada questão. Os arquivos deverão ser entregues seguindo o padrão "INF1036_MATRICULA_QX.R" ou "INF1036_MATRICULA_QX.py", onde "MATRICULA" deve ser a sua matrícula e "X" deve ser o número da questão.

O trabalho é individual, e todas as atividades relacionadas à solução do trabalho proposto devem ser realizadas, respeitando-se o código de ética do CTC disponível na plataforma EAD, e devem incluir o que se descreve a seguir.

- A implementação das questões 1 a 6. O código implementado nos moldes estabelecidos no enunciado deverá ser enviado, por meio da plataforma EAD, até 22/06/2022, às 17h.
- A documentação de cada um dos códigos criados no próprio arquivo.

Como parte da avaliação, também será realizada uma apresentação oral, com duração de até 10 minutos, conforme sorteio, nos dias 28/06 e 30/06.

A pontuação acima mencionada se refere exclusivamente à parte escrita do presente trabalho.

1) Calcule, utilizando simulação, a probabilidade de que ao gerar, de forma aleatória, três números com cinco dígitos: (1,0 ponto)

a) os três possuam pelo menos dois dígitos iguais.

b) apenas um possua todos os dígitos diferentes.

2) Considerando $g(x) = xln(x)$ uma função, calcule o valor aproximado de φ, onde: (1,0 ponto)

$$\varphi = \int_1^3 g(x)dx$$

Observação:

Se $U_1, U_2, \dots, U_n$ são variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas em $[0, 1]$, tem-se pela Lei Forte dos Grandes Números (Lei Forte de Kolmogorov) que, com probabilidade 1,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{g(U_i)}{n} \to E[g(U)] = \varphi$$

onde $n \to \infty$.

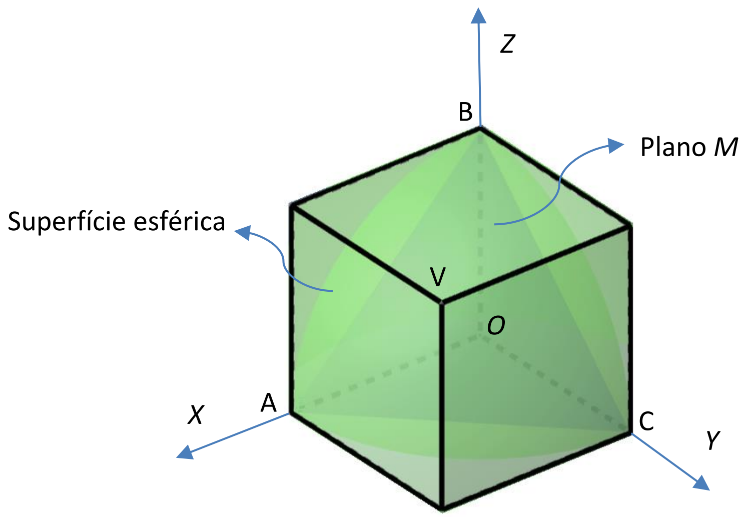
Nestas condições, para calcular $\int_a^b g(x)dx$ basta realizar uma substituição $y = (x - a)/(b - a)$ e $dy = \mathrm{dx}/(b - a)$. Assim, obtém-se:

$$\varphi = \int_0^1 g(a + [b - a]y)(b - a)dy = \int_0^1 h(y)dy$$

Onde $h(y) = g(a + [b - a]y)(b - a)$.

Para realizar o cálculo, deve ser criada uma função chamada **aproximador** que deverá retornar o valor aproximado de φ. Implemente a função **aproximador** usando como gerador de números pseudo-aleatórios o algoritmo Mersenne Twister.

3) Considere como espaço amostral S o conjunto dos pontos do R^3 que estão no interior de um cubo de lado 1, sendo o ponto $O = (0, 0, 0)$ um dos vértices do cubo. (2,0 pontos)



Dentro do cubo podem ser identificadas diversas regiões, dentre elas:

- R, é um sólido que contém os pontos que pertencem ao cubo e estão entre o plano M, definido pelos vértices A, B e C do cubo, e o vértice V do cubo, mas não contém os pontos do plano.
- T, é um sólido que corresponde a 1/8 de uma esfera e contém os pontos que pertencem ao cubo e estão abaixo da superfície esférica de raio 1, mas não contém os pontos da superfície.

Considerando que qualquer sólido que esteja dentro do cubo é um evento E e sua probabilidade coincide com o seu volume, determine, por simulação utilizando R, os valores de $P(R)$, $P(T)$, $P(R \cup T)$, $P(R \cap T)$, $P(\bar{R})$ e $P(\bar{T})$.

4) Usando o Método da Inversa, implemente uma função para gerar uma variável aleatória contínua X cuja função densidade é dada por: (2,0 pontos)

a) $f(x) = 3x^2, \quad 0 \le x \le 1$

b) $f(x) = \begin{cases} 5x, & 0 \le x \le 0{,}4 \\ \frac{10}{3}(1-x), & 0{,}4 < x \le 1 \end{cases}$

5) Usando o Método da Rejeição, implemente uma função que gere uma amostra de uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por: (2,0 pontos)

$$p(x) = 30x^4(1-x), \qquad 0 < x < 1$$

Use uma distribuição Uniforme $(0, 1)$ como $h(x)$. A função implementada deverá receber como parâmetro o tamanho da amostra.

6) Usando simulação, gere um par de variáveis aleatórias Normais independentes entre si Y e X com média $\mu = 6$ e $\sigma = 9$.(2,0 pontos)