Péndulo Doble

Martínez Navallez Daniel Isac

Septiembre 2018

1 Introducción

En este artículo hablaremos un poco sobre un sistema dinámico llamada Péndulo Doble, hablaremos, por medio de ecuaciones, un poco sobre el comportamiento que tiene este sistema y como es que puede ser descrito mediante éstas, mientras vamos desarrollando el tema nos daremos cuenta de lo complicado que se vuelve el análisis e interpretación de su movimiento, ya que depende mucho de las condiciones iniciales del sistema.

2 Péndulo Doble

2.1 Definición

Un péndulo doble es un péndulo que tiene conectado en el extremo a otro péndulo, ambos con una partícula en su extremo.

2.2 Desarrollo

El movimiento del péndulo doble está goberdado por una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas y éste es caótico.

Para el análisis del péndulo doble puden ser consideradas diferentes variables, como la longitud de las varillas pueden ser iguales y de masa despreciable o pueden variar, lo mismo con las partículas en los extremos, pueden o no variar en sus masa. Que el movimiento se en dos o tres dimensiones. Para el siguiente análisis se tomará a las longitudes de las varillas como iguales, a lo mismo que las masas de las partículas, restringiendo el movimiento del sistema en el plano (dos dimensiones).

En un péndulo compuesto, la masa se distribuye a lo largo de la longitud, si la masa se distrubuye de manera uniforme el momento de inercia queda:

$$I = \frac{1}{12}ml^2 \tag{1}$$

Es conveniente usar los ángulos entre cada miembro y la vertical como las coordenadas generalizadas que definen la configuración del sistema. Estos ángulos se denotan θ_1 y θ_2. La posición del centro de masa de cada barra se puede escribir en términos de estas dos coordenadas. Si se considera que el origen del sistema de coordenadas cartesianas está en el punto de suspensión del primer péndulo, entonces el centro de masa de este péndulo está en:

$$x_1 = \frac{l}{2}\sin\theta_1 \tag{2}$$

$$y_1 = \frac{l}{2}\cos\theta_1 \tag{3}$$

y el centro de masa del segundo péndulo está en:

$$x_2 = l(\sin\theta_1 + \frac{1}{2}\sin\theta_2) \tag{4}$$

$$y_2 = l(\cos\theta_1 + \frac{1}{2}\cos\theta_2) \tag{5}$$

Esta es información suficiente para escribir el lagrangiano.

$$\text{L =Energía cinética - Energía potencial}$$

$$= \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2}I(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) - mg(y_1 + y_2) \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot x_2^2 + \dot y_2^2) + \frac{1}{2}I(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) - mg(y_1 + y_2) \tag{7}$$

El primer término es la energía cinética lineal del centro de masa de los cuerpos y el segundo término es la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa de cada barra. El último término es la energía potencial de los cuerpos en un campo gravitacional uniforme. La notación de punto indica la derivada de tiempo de la variable en cuestión.

Sustituir las coordenadas anteriores y reorganizar la ecuación da:

$$L = \frac{1}{6}ml^2\Big(\dot\theta_2^2 + 4\dot\theta_1^2 + 3\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\Big) + \frac{1}{2}mgl(3\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \tag{8}$$

Sólo hay una cantidad conservada (la energía), y no conservada momentos . Los dos momentos se pueden escribir como:

$$p_{\theta 1} = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta_1} = \frac{1}{6}ml^2\Big(8\dot\theta_1 + 3\dot\theta_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\Big) \tag{9}$$

$$p_{\theta 2} = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta_2} = \frac{1}{6}ml^2\Big(2\dot\theta_2 + 3\dot\theta_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\Big) \tag{10}$$

Las ecuaciones restantes de movimiento se escriben como:

$$\dot p_{\theta 1} = \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = \frac{1}{2}ml^2\Big(\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + 3\frac{g}{l}\sin\theta_1\Big) \tag{11}$$

$$\dot p_{\theta 2} = \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = \frac{1}{2}ml^2\Big(-\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{l}\sin\theta_2\Big) \tag{12}$$

3 Conclusión

Dado el análisis que se hizo del sistema dinámico conociedo como Péndulo Doble, se dieron resultados en escencia caóticos del comportamiento de éste, naturalmente, aunque parece un sistema físico muy sencillo, se vuelve un problema muy grande y complicado el tratar de modelar, por medio de ecuaciones, el movimiento que tendrá de acuertdo a las condiciones iniciales en las que se presenta.

Claro está que este artículo fue solo una parte muy pequeña de la gran investigación y modelos que se han hecho para éste. Aquí nos limitamos a solo el movimiento en dos dimensiones, para un movimiento en tres se torna aún más caótico, con ecuaciones cada vez más extensas y de mayor dificultad.

4 Preguntas

¿Cuál es tu primera impresión de LaTeX?
Mi primera impresión fue que sería muy complicado, pero es relativamente sencillo ya que aprendes el lenguaje, introducir fórmulas es más sencillo.

Comenta la sobre la funcionalidad de LaTeX para escribir ecuaciones. Es todo un lenguaje, es muy práctico ya que todo tiene un serguimiento lógico y ordenado, por jerarquias, lo cual hace muy sencillo introducir ecuaciones, además de todos los formatos que trae para lo mismo.

¿Qué se te dificultó más en el uso de LaTeX? El introducir una imagen el texto y acomodarla, tanto que no pude.

¿Qué cosas podrías hacer en Word y no en LaTeX? Acomodar el texto e imágenes un poco más fácil.

¿Qué cosas podrías hacer en LaTeX y no en Word? Introducir fórmulas de una manera muy sencilla y con un número de símbolos y caracteres mucho más variados.

¿Podrías diferenciar la forma de trabajar en Fortran y en LaTeX? ¿Qué diferencias hay?¿Qué similitudes encuentras? En fortran se trabaja de una manera más específica, para resolver ecuaciones, hacer archivos, leer infromacion, en LATEX se habla el lenguaje de manera similar, un poco más sencillo y solo sirve para crear texto.

¿Qué cambiarías en esta actividad para mejorarla? Nada