Algebra SS16

Prof Wedhorn, Mitschrift von Daniel Kallendorf

9. November 2016

Inhaltsverzeichnis

Bemerkung 2.1. $A[X_1, ..., X_n]$ ist ein freier A-Modul, wobei die Monome eine Basis bilden.

Satz 2.2 (Universaleigenschaft des Polynomrings)**.** Sei $\phi : A \to B$ eine A-Algebra und seine $b_1, ..., b_n \in B$ Elemente. Dann existiert genau ein A-Algebra-Homomorphismus $\psi : A[X_1, ..., X_n] \to B$, so dass $\psi(x_i) = b_i$ für alle $i = 1, .., n$, nämlich

$$\underbrace{\psi\left(\sum_{i_1,...,i_n \geq 0} a_{i_1,...,i_n} X_1^{i_1} \cdot ... \cdot X_n^{i_1}\right)}_{=:f} = \underbrace{\sum_{i_1,...,i_n \geq 0} \phi(a_{i_1,...,i_n}) b_1^{i_1} \cdot ... \cdot b_n^{i_n}}_{=f(b_1,...,b_n)}$$

Bemerkung 2.3.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\psi) &= \text{kleinste } A\text{-Unteralgebra die } b_1, ..., b_n \text{ enthält} \\ &= A[b_1, ..., b_n] \subset B \end{aligned}$$

Beispiel 2.4. Sei $\phi : A \to B$ eien A-Algebra, $b \in B$. Es existiere ein $g \in A[X]$ mit $g(b) = 0$. Sei g nomriert. Dann gilt

$$A[b] = \{f(b) | f \in A[x], \deg(f) < \deg(g)\}$$

Beispiel 2.5. Sei $A = \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$,$i \in \mathbb{C}$.
Dann gilt $g(i) = 0$ wobei $g = X^3 + X = X(X^2 + 1)$. Es folgt:

$$\mathbb{Q}[i] = \{a_0 + q_1 i + a_2 i^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathbb{Q}[i] = \operatorname{Im}(\mathbb{Q}[X] \xrightarrow[X \mapsto i, f \mapsto f(i)]{\psi} \mathbb{C})$$

Dann $\tilde{g} \in \mathbb{Q}[X] : \psi(\tilde{g}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{g}(i) = 0$.
Also $g \in \operatorname{Ker}(\psi) \Rightarrow (g) \subseteq \operatorname{Ker}(\psi)$.

In diesem Fall $\operatorname{Ker}\psi = (X^2+1)$.

Begründung von 2.8:

$$(g) \subseteq \operatorname{Ker}\left(A[X] \xrightarrow[f\mapsto f(b)]{\psi} B\right)$$

Also ψ faktorisiert:

$$A[X]/(g) \xrightarrow{\overline{\psi}} A[b] \subseteq B$$

mit $\overline{\psi}$ surjektiv.

Proposition 2.6. Sei $g \in A[X]$ normiert. Dann ist

$$\{f \in A[X], \deg(f) < \deg(g)\} \hookrightarrow A[X] \to A[X]/(g)$$

bijektiv.

Beweis. Gilt, da für alle $f \in A[X]$ genau ein $r \in A[X]$ exitiert mit $\deg(r) < \deg(g)$ mit $f \in r + (g)$ $\square$

3 Tensorprodukte

(A) Tensorprodukte von Moduln
(B) Tensorprodukte von Algebren und Basiswechsel
(C) Exaktheitseigenschaften des Tensorprodukts

3.1 Erinnerung

Definition 3.2. A-Modul:$=(M,+,\cdot)$ wobei $(M,+)$ abelsche Gruppe und $\cdot : A \times X \to M$ ein Skalarprodukt.

Bemerkung 3.3. $\mathbb{Z}$-Modul=ablesche Gruppe

Beispiel 3.4. Sei I eine Menge

$$A^{(I)} = \{(a_i)_{i\in I} | a_i \in A, a_i = 0 \text{für fast alle } i \in I\}$$

A-Modul mit Addition und Skalarprodukt.
Für $i \in I : e_i \in A^{(I)}$ mit

$$e_i = \begin{cases} 1 \text{ an der i-ten Stelle} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Definition 3.5. Ein A-Modul heißt frei, falls $M \approxeq A^{(I)}$ für eine Menge I

Definition 3.6. Sei M, N A-Modul. Dann heißt $u : M \to N$ A-linear oder Homomorphismus von A-Moduln, falls

$$u(am+m') = au(m) + u(m') \forall a \in A, m, m' \in M$$

Bemerkung 3.7. Sei I eine Menge, M ein A-Modul $\underline{m} = (m_i)_{i \in I}$ ein Tupel von Elementen $m_i \in M$. Dann Existiert genau eine Abbildung:

$$A^{(I)} \xrightarrow{u_{\underline{m}}} M$$

mit $u_{\underline{m}}(e_i) = m_i$.
$(m_i)_i = \underline{m}$ heißt linear Unabhängig/ Erzeugende-System/ Basis,
falls $u_{\underline{m}}$ injektiv/ surjektiv / bijektiv ist.

Bemerkung 3.8. Der A-Modul M ist endlich erzeugt, genau dann wenn ein $n \in \mathbb{N}$und eine A-lineare Surjektion $A^m \to M$ existieren.

3.9 Multilineare Abbildungen

Definition 3.10. Sei $r \in \mathbb{N}_0$, $M_1, ..., M_r, P$ A-Moduln.
Eine Abbildung $\alpha : M_1 \times ... \times M_r \to P$ heißt r-multilinear, falls sie in jeder Komponente linear ist, d.h. Für alle $i = 1, ..., r$ gilt:

$$\alpha(m_1, ..., am_i + m_i', m_{i+1}, ..., m_r) = a\alpha(m_1, ..., m_i, ..., m_r) + \alpha(m_1, ..., m_i', ..., m_r)$$

Für alle $m_j \in M_j, m_i \in M_i, a \in A$. ($r = 1$: linear, $r = 2$: bilinear)

3.11 ..

Definition 3.12. Sei $r \geq 2$, $M_1, .., M_r$ A-Moduln.
Dann existiert ein A-Modul $M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A ... \otimes_A M_r$ und eine r-multilineare Abbildung $\tau : M_1 \times ... \times M_r \to M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A ... \otimes_A M_r$, sodass für jede r-multilineaer Abbildung:

$$\alpha M_1 \times ... \times M_r \to P$$

wobei P ein A-Modul, genau ein A-lineare Abbildung

$$\overline{\alpha} : M_1 \otimes_A ... \otimes_A M_r \to P$$

existiert.

$$\begin{tikzcd} M_1 \times ... \times M_r \arrow[r, "\forall\alpha\text{:r-multilinear}"] & P \\ M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A ... \otimes_A M_r & \end{tikzcd}$$

Satz 3.13 (Eindeutigkeit des Tensorprodukts)**.** Seien $(T, \tau : M_1 \times ... \times M_r \to T)$ und (T', τ') Tensorprodukte:

$$\begin{tikzcd} M_1 \times ... \times M_r \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"] & \\ T \arrow[r, "\exists! v"'] & T' \end{tikzcd}$$

u existiert aufgrund der universellen Eigenschaft von (T, τ).
v existiert aufgrund der universellen Eigenschaft von (T', τ').
Ferner kommutiert

Die Universelle Eigschaft von (T, τ) zeigt, dass $v \circ u = id_T$, genauso $u \circ v = id_T$.

Satz 3.14 (Existenz des Tensorprodukts). 1. Suche einen A-Modul N und eine Abbildung $c : M_1 \times ... \times M_r \to R$, sodass

$$\mathrm{Hom}_A(N, P) \xrightarrow[u \mapsto u \circ \tau]{} \mathrm{Abb}(M_1 \times ... \times M_r, P)$$

Für alle A-Moduln P.

2. Wir wollen, dass $(am_1 + m_1', m_2, ..., m_r)$ und $a(m_1, ..., m_r) + (m_1', ..., m_r)$ auf das gleiche Element abgebildet werden.
Sei $Q \subseteq N$ der von

$$e_{(m_1,...,m_{i-1},am_i+m_i',m_{i+1},...,m_r)} - \left(ae_{(m_1,...,m_i,..,m_r)} + e_{(m_1,...,m_i',...,m_r)}\right)$$

für alle $i = 1, ..., r$ und $m_i, m_i' \in M_i$ und $a \in A$ erzeugt Untermodul.
Dann setze $T := N/Q$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(T, P) &= \{u \in \mathrm{Hom}(N, P) | u(Q) = 0\}\\ &= L_A(M_1, ..., M_r, P)\end{aligned}$$

mit $\tau : M_1 \times ... \times M_r \to N \to N/Q$.

Bemerkung 3.15. 3.4
$e_{(m_1,...,m_r)} \in A^{(M_1 \times ... \times M_r)}$ bilden ein Erzeugndensystem.
Also bilden auch die $\tau(m_1, ..., m_r) =: m_1 \otimes ... \otimes m_r$ eine Erzeugenden-System des $A-$Moduls $M_1 \otimes ... \otimes M_r$.
Aber: Nicht jedes Element von $M_1 \otimes ... \otimes M_r$ ist in dieser Form.

Also genüt es eine lineare Abbildung $u : M_1 \otimes ... \otimes M_r \to P$ auf den erzeugdnesn $m_1 \otimes ... \otimes m_r$ mit $(m_i \in M_i)$ anzugeben.
Umgekehrt sei P ein A-mOdul und es seien elemente $u(m_1 \otimes ... \otimes m_r) \in P$ gegeben für alle $m_i \in M_i$.
Genau dann existiert eine A-lineare Abbildung $u : M_1 \otimes ... \otimes M_r \to P$ mit $m_1 \otimes ... \otimes m_r \mapsto u(m_1 \otimes ... \otimes m_r)$, wenn für alle $i = 1, ..., r$, $a \in A$, $m_j \in M_j$ und $m_i' \in M_i$ gilt:

$$u(m_1 \otimes .. \otimes am_i + m_i' \otimes .. \otimes m_r) = au(m_1 \otimes .. \otimes m_i \otimes .. \otimes m_r) + u(m_1 \otimes .. \otimes am_i' \otimes .. \otimes m_r)$$

Satz 3.16 (Tensorprodukt linearer Abbildungen). Seien M, M', N, n' A-Moduln, $u : M \to M', v : N \to N'$ A-lineare Abbildungen.
Dann definiert

$$\begin{aligned}M \otimes_A N &\to M' \otimes AN'\\ m \otimes n &\mapsto u(m) \otimes u(n)\end{aligned}$$

eine A-lineare Abbildung bezüglich $u \otimes v : M \otimes N \to M' \otimes N$.

Beweis. Zu zeigen: $u(am + m') \otimes v(n) = a(u(m) \otimes v(n)) + u(m') \otimes v(n)$
Es gilt da das Tensorprodukt r-linear ist.

$$\begin{aligned}u(am + m') \otimes v(n) &= (au(m) + u(n)) \otimes v(n)\\ &= (au(m) \otimes v(n)) + u(m') \otimes v(n)\end{aligned}$$

Außerdem zu zeigen: $u(m) \otimes v(an + n') = a(u(m) \otimes v(n)) + u(m) \otimes v(n)$
(→ Genauso.) □

Bemerkung 3.17. 3.6

1. $A \otimes_A M \cong M$
   $u : a \otimes m \mapsto am$
   $v : 1 \otimes m.....m$ Dabei ist u wohldefiniert, d.h. $(a, m) \to am$ ist bilinear.

2. $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} N \otimes_A M, m \otimes n \mapsto n \otimes m$ ist ... von A-Moduln.
   Zu zeigen: Wohldefineirtheit

3. $M \otimes_A N \otimes_A P \simeq (M \otimes_A N) \otimes_A P$
   $m \otimes n \otimes p \mapsto (m \otimes n) \otimes p$
   $m \otimes n \otimes p \mapsto m \otimes (n \otimes p)$

Proposition 3.18. 3.7 Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln, N ein A-Modul:

$$\left(\bigotimes_{i \in I} M_i\right) \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i \in I} (M_1 \otimes_A N)$$
$$(m_i)_{i \in I} \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_{i \in I}$$

Beweis. Umkehrabbildung gegeben durch:

$$Inhalt..m_i \otimes n \mapsto (m_j)_{j \in I} \otimes n$$

mit $m_j := \begin{cases} m_i, & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$ □

3.19 Basiswechsel von Tensorprodukten

Satz 3.20. 1. Sei M ein A-Modul. Dann wird

$$\varphi^*(M) := B \otimes_A M$$

zu einerm B-Modul mit dem Skalarprodukt

$$B \times (B \otimes_A M) \to B \otimes_A M$$
$$(b, b' \otimes m) \mapsto bb' \otimes m$$

2. Sei $U : M \to M'$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Dann ist

$$id_B \otimes u : B \otimes M \to B \otimes_A M'$$
$$b \otimes m \mapsto b \otimes u(m)$$

eine B-lineare Abbildung.S

Proposition 3.21. Sei $\varphi : A \to B$ eine A-Algebra.
Sei M ein freier A-Modul. Dann ist $B \otimes_A M$ ein freier B-Modul und

$$\vartheta_A(M) = \vartheta_B(B \otimes_A M)$$

Beweis. Sei M ein freier A-Modul. Dazu ist äquivalent, dass $M \simeq A^{(I)}$.
Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} B \otimes_A M &\simeq B \otimes_A A^{(I)} \\ &\simeq B \otimes_A \left(\bigoplus_{i \in I} A \right) \\ &\simeq \left(\bigoplus_{i \in I} B \otimes_A A \right) \\ &\simeq \bigoplus_{i \in I} B \\ &= B^{(I)} \end{aligned}$$

Also ist $B \otimes_A M$ frei. □

Proposition 3.22. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, M ein A-Modul.Setze

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \cdot M &= \langle \{am | a \in \mathfrak{a}, m \in M\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i m_i \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M \right\} \\ &\subseteq M \quad \text{Untermodul} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A/\mathfrak{a} \otimes_A M &\xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{a}M \\ \overline{a} \otimes m &\mapsto \overline{am} \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von $A/\mathfrak{a}$-Moduln.

Beweis. $\overline{a} \oplus m \mapsto \overline{am}$ ist wohldefiniert: Zu zeigen:

1. Sei $a' \in A$ mit $\overline{a'} = \overline{a} \in A/\mathfrak{a}$.
   Dann ist $\overline{am} = \overline{a'm} \in M/\mathfrak{a}M$. Es gilt $\overline{a}' = \overline{a}$ gena dann wenn es ein $x\imath\mathfrak{a}$ gibt sodass $a' = a + x$.
   Daruas folgt, dass $a'm = am + xm$, und da $xm \in \mathfrak{a}M$ folgt $\overline{a'm} = \overline{am}$.

2. $\overline{am}$ is linear in a, d.h.

   $$\overline{(ba + a')m} = b\overline{am} + a'\overline{m} \quad \text{für } a, a' \in A,\ b \in A$$

3. $\overline{am}$ ist linear in m, d.h.

   $$\overline{a(bm + m')} = b\overline{am} + \overline{am'} \quad \text{für } m, m' \in M,\ b \in A$$

□

Proposition 3.23. Eine Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} v : M &\to A/\mathfrak{a} \otimes_A M \\ m &\mapsto 1 \otimes m \end{aligned}$$

Beweis. Zu zeigen: $\mathfrak{a}M \subseteq Ker(v)$, also für alle $x \in \mathfrak{a}, m \in M$ gilt $v(xm) = 0$.

$$v(xm) = 1 \otimes xm = \overline{x} \otimes m = 0$$

da $\overline{x} = \overline{0} \in A/\mathfrak{a}$.
Noch zu zeigen:: v ist Umkehrabbildung zu $\overline{a} \otimes m \mapsto \overline{am}$. □

Definition 3.24 (Tensorprodukte von Algebren)**.** Sei $A \to B_1$, $A \to B_2$ A-Algebren.
Dann definieren wir auf dem A-Modul $B_1 \otimes_A B_2$ eine Multiplikation:

$$\begin{aligned}(B_1 \otimes B_2) \times (B_1 \otimes B_2) &\to B_1 \otimes B_1 \otimes B_2\\ (a_1 \otimes b_2, b_1' \otimes b_2') &\mapsto b_1 b_1' \otimes b_2 b_2'\end{aligned}$$

und erhalten die A-Algebra $B_1 \otimes_A B_2$.

Beispiel 3.25. Sei $A \xrightarrow{\varphi} B$ eine A-Algebra und sei $C = A[X_1, ..., X_n]/(f_1, ..., f_r)$ und $f_i \in A[X-1, ..., X_n]$.Dann ist

$$B \otimes_A A[X-1, ..., X_n]/(f_1, ..., f_r) = B[X_1, ..., X_n]/(\tilde{f}_1, ..., \tilde{d}_r)$$

wobei

$$f_i = \sum_{\underline{j} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\underline{j}} X^{\underline{j}} \to \tilde{f}_i = \sum_j \varphi(a_j)$$

1. Sei $A = \mathbb{Q}$, $C = \mathbb{Q}[i] = \{a + b_i | a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$
2. $\mathbb{R} \otimes_Q Q[i] = \mathbb{R}[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}$
3. $C \otimes_Q Q[i] = C[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}[X]/(X+i) \times \mathbb{C}[X]/(X-i) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

Beispiel 3.26. $A[X] \otimes_A A[Y] = (A[X])[Y] = A[X, Y]$ mit $f \otimes g \mapsto fg$.
Dann ist die Umkehrabbildung

C) Exaktheitseigenschaften

Definition 3.27 (Homomorphismen-Funktor)**.** Seien M, P A-Moduln.
Wir Definiere auf $\mathrm{Hom}_A(M, P) := \{u : M \to P \text{A-linear}\}$ die Struktur eines A-Moduls.

$$\begin{aligned}(u+v)(m) &:= u(m) + v(m) & u, v &\in \mathrm{Hom}_A(M, P)\\ (au)(m) &:= au(m) & a &\in A, m \in M\end{aligned}$$

Sei $u : M \to M'$ eine A-lineare Abbildung. Wir erhalten die A-lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(u, P) : \mathrm{Hom}_A(M', P) &\to \mathrm{Hom}_A(M, P)\\ w' &\mapsto w' \cdot u\end{aligned}$$

Sei $v : P \to P'$ eine A-lineare Abbildung. Wir erhalten die A-lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(M, v) : \mathrm{Hom}_A(M, P) &\to \mathrm{Hom}_A(M, P')\\ w' &\mapsto v \cdot w\end{aligned}$$

Erinnerung 3.28. Eine Sequnez von A-lineare Abbildungen

$$... \to M_{i-1} \xrightarrow{u_{i-1}} M_i \xrightarrow{u_{u_i}} M_{i+1} \to ...$$

heißt exakt, falls $\mathrm{Ker}(u_i) = \mathrm{Im}(u_{i-1})$

Beispiel 3.29. $0 \to M* \xrightarrow{u} M$ ist exakt genau dann wenn u injektiv ist.
$M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ ist exakt genau dann wenn v surjektiv ist

Satz 3.30.

1. Sei $0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''(*)$ eine Sequenz von $A-$Moduln. Dann ist $(*)$ genau dann exakt, wenn für jeden A-Modul P die Sequenz

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(P,(*)) : 0 \to \mathrm{Hom}_A(P,M') \to \mathrm{Hom}_A(P,M) \qquad & \to \mathrm{Hom}_A(P,M'') \\ w' \mapsto u \circ w' \qquad\qquad & w \mapsto v \circ w \end{aligned}$$

exakt ist.

2.

Beweis. Wir beweisen Schrittweise:

1. "$(*)$ ist exakt $\Rightarrow \mathrm{Hom}_A(P,(*))$ ist exakt"
   (a) $w' \mapsto u \circ w'$ injektiv:
   Sei $w \in \mathrm{Hom}_A(P,M')$ mit $u \circ w' = 0$.
   Dann ist (da u injektiv) $w' = 0$. Also ist $\mathrm{Ker}(w' \mapsto u \circ w') = 0$.
   (b) $\mathrm{Im}(w' \mapsto u \circ w') \subseteq \mathrm{Ker}(w \mapsto v \circ w)$:
   Kompoosition: $w' \mapsto u \circ w' \mapsto \underbrace{(v \circ u)}_{=0} \circ w'$ ist Null.
   (c) $\mathrm{Im}(w \mapsto v \circ w) \subseteq \mathrm{Ker}(w' \mapsto u \circ w')$:
   Sei $w \in \mathrm{Hom}_A(P,M)$ mit $v \circ w = 0$, sodass $\mathrm{Im}(w) \subseteq \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "v"] & M'' \\
 & & P \arrow[ul, dotted, "w'?"] \arrow[u, "w"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

"$\Leftarrow$"

(a) u injektiv: Sie $m' \in M$ mit $u(m') = 0$, $P := < m' > = Am' \subseteq M', w' : P \to M'$ Inklusion.
Dann ist...

□

Bemerkung 3.31. Seiene M, N, P A-Moduln. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) &= L_A(M,N;P) \qquad (*) \\ &= \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,P)) \\ (\alpha : M \times N \to P) &\mapsto (n \mapsto \alpha(m,n)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Sei } T_N : (\text{A-Modul}) &\to (\text{A-Modul}) \\
M &\mapsto M \otimes_A N \\
(u : M \to M') &\mapsto u \otimes id_N \\
N_N : (\text{A-Modul}) &\to (\text{A-Modul}) \\
P &\mapsto \mathrm{Hom}_A(N, P)
\end{aligned}
$$

Dann besagt $(*)$:

$$\mathrm{Hom}(T_M(M), P) = \mathrm{Hom}(M, H_N(P))$$

d.h. T_N ist linksadjungiert zu H_N.
Dann ist T_N rechtsexakt und H_N ist linksexakt.

Proposition 3.32. Sei $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist für jeden A-Modul N die Sequenz

$$M' \otimes N \xrightarrow{u \otimes id_N} M \otimes_A N \xrightarrow{u \otimes id_N} M'' \otimes_A N \to 0$$

exakt.

Beweis. Formal mit 3.31.
Sei $M' \to M \to M'' \to 0$ exakt.
Dann gilt mit **??**, dass für alle A-Mdouln P:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', H_N(P)) \to \mathrm{Hom}_A(M, H_N(P)) \to \mathrm{Hom}_A(M', H_N(P))$$

Ist jeweils gleich (3.31)

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T_N(M''), P) \to \mathrm{Hom}_A(T_N(M), P) \to \mathrm{Hom}_A(T_N(M'), P)$$

exakt, sodass mit **??**

$$T_N(M') \to \underbrace{T_N(M)}_{=M \otimes_A N} \to T_N(M'') \to 0$$

exakt ist. ☐

Beispiel 3.33. Sei $A = \mathbb{Z}$, $u : \mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto 2x} \mathbb{Z}$.
Dann ist $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{Z}$ exakte und $A \otimes_A M = M$.
Aber

$$
\begin{gathered}
0 \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{u \otimes id_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
\end{gathered}
$$

ist nicht injektiv.

4 Lokalisierung

A) Lokalisierung von Ringen und Moduln

Definition 4.1. Eine Teilmenge $S \subseteq A$ heißt multiplikativ, falls $1 \in S$ uns $s, t \in S \Rightarrow st \in A$.

Beispiel 4.2. 1. $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq A = \mathbb{Z}$

2. Sei $f \in A$, dann ist $S_f = \{1, f, f^2, ..., \}$ eine multiplikative Teilmenge.

3. Sei $y \subset A$ Primideal. Dann ist $A \setminus y \subset A$ eine multiplikative Teilmenge.

Definition 4.3. Sei A ein Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge.
Definiere auf $A \times S$ eine Äquivalenzrelation durch

$$(a, s) \sim (b, t) :\Leftrightarrow at = bs$$

Beweis. Dies ist eine Äquivalenzrelation:

- Refelxivität
- Symmetrie
- Transitiv: $(a, s) \sim (b, t)$, $(b, t) \sim (c, u)$

$$\exists v, w \in S : \quad vat = bvs \quad , \quad wba = wtc$$

Dann ist $vbsw =^!$

□

Satz 4.4 (Universelle Eigenschaft)**.** Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und sei $1 : A \to S^{-1}$ kanonisch. Sei B ein Ring, $\varphi : A \to B$ ein Ring-Homomorphimsmus mit $\varphi(s) \in B^\times = \{b \in B \mid \exists c \in B : bc = 1\}$ für alle $s \in S$. Dann existiert ein eindeutiger RIngHomomorphismus $\tilde{\varphi} S^{-1A \to B}$ mit $\tilde{\varphi} \circ 1 = \varphi$:.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\forall \varphi : \varphi(s) \subseteq B^\times"] \arrow[d, "1"'] & B \\
S^{-1}A \arrow[ur, "\exists! \tilde{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. <u>Eindeutigkeit</u> Für $\frac{a}{s} - inS^{-1}A$ muss für $\tilde{\varphi}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}\left(\frac{a}{a}\right) &= \tilde{\varphi}\left(\frac{a}{1}\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right) = \tilde{\varphi}\left(\frac{a}{1}\right)\tilde{\varphi}\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} \qquad (*) \\
&= \varphi(a)\varphi(s)^{-1}
\end{aligned}$$

<u>Eindeutigkeit</u> Definiere $\tilde{\varphi}$ durch $(*)$
Z.z: $\tilde{\varphi}$ ist wohldefiniert. □

Bemerkung 4.5. Sei $S \subseteq A$ eine multilineare Teilmenge.
Dann gilt: $1 : A \to S^{-1}A$ ist injektive $\Leftrightarrow$ S enthält keien Nullteiler.

Beweis.

$$\begin{aligned}
&1 \text{ ist injektiv} \\
\Leftrightarrow &\operatorname{Ker}(1) = 0 \\
\Leftrightarrow &\left(\forall a \in A : \frac{a}{1} = 1 \Rightarrow a = 0\right) \Leftrightarrow \quad (\forall a \in A : \exists s \in S : as = 0 \Rightarrow a = 0) \Leftrightarrow S \text{ enthält eine Nullteiler}
\end{aligned}$$

□

Satz 4.6 (Lokalisierung von Moduln)**.** Sei $S \subseteq A$ ein multiplikative Teilmenge, M ein A-Modul. Definiere auf $M \times S$ eine Äquivalenz Relation:

$$(m, s) \sim (n, t) \Leftrightarrow \exists v \in S : vtm = vsm$$

Man erhält den $S^{-1}A$-Modul $S^{-1}M = (M \times S)/\sim$:

- Mit Addition: $\frac{m}{s} + \frac{n}{t} := \frac{tm+sn}{st}$
- Mit Skalarmultiplikation: $\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} := \frac{am}{st}$

Satz 4.7 (Lokalisierung als Funktor)**.** Sei $u : M \to N$ eine A-lineare Abbildung, $S \subseteq A$ ein multiplikative Teilgruppe. Dann ist

$$\begin{aligned} S^{-1}u : S^{-1}M &\to S^{-1}N \\ \frac{m}{s} &\mapsto \frac{u(m)}{s} \end{aligned}$$

eine $S^{-1}A$ lineare Abbildung.

Satz 4.8 (Lokalisierung ist exakt)**.** InhaltSei $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$ eine exakte Sequenz von A-Moduln, $S \subseteq$ eine multilineare Teilmenge. Dann ist

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}u} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}v} S^{-1}M''$$

eine exakte Sequnez von $S^{-1}A$ Moduln.

Beweis. $v \circ u = 0$. Also ist $S^{-1}v \circ S^{-1}u = 0$.
Noch zu zeigen: $\mathrm{Ker}(S^{-1}v) \subseteq \mathrm{Im}(S^{-1}u)$.
Sei $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ mit $S^{-1}v\frac{v}{s} = \frac{v(m)}{s} = 0$.
Also gibt es $t \in S : tv(m) = v(tm) = 0$.
Damit liegt $tm \in \mathrm{Ker}(v) = \Im(u)$.
Also existiert $m \in M : u(m' = tm)$. Dann ist $S^{-1}u\left(\frac{m'}{st}\right) = \frac{u(m')}{st} = \frac{m}{s}$ und damit $\frac{m}{s} \in \mathrm{Im}(S^{-1}u)$ □

Proposition 4.9. Sei M ein A-Modul, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, dann ist

$$\begin{aligned} u : S^{-1}A \otimes_A M &\xrightarrow{\sim} S^{-1M} \\ \frac{a}{s} \otimes m &\mapsto \frac{am}{s} \end{aligned}$$

ist Homomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln.

Beweis.

1. 1 ist wohldefiniert: z.Z:
   (a) $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Rightarrow \frac{am}{s} = \frac{bm}{t}$.
   (b) $\frac{am}{s}$ ist linear in $\frac{a}{s}$ und in m.
2.

□

Satz 4.10 (Ideal in $S^{-1}A$). Sei $S \subseteq A$ eine multilineare Teilmenge.

$$\{\text{Ideale in A}\} \underset{b \mapsto \iota^{-1}(b)}{\overset{\mathfrak{a} \mapsto S^{-1}\mathfrak{a}}{\rightleftarrows}} \{\text{Ideale in } S^{-1}A\}$$

$$1 : A \to S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1}$$

Nicht zu einander invers.

1. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist $S^{-1\mathfrak{a}} = S^{-1}A$ genau dann wenn $\mathfrak{a} \cap S \neq 0$. Dann folgt auch, dass $\mapsto S^{-1\mathfrak{a}}$ ist nur invertierbar , falls $S \subseteq A^{\times}$.

2. Für $b \subseteq S^{-1}A$ Ideal gilt:

$$S^{-1}(\iota^{-1}(b)) = b$$

   Dann folgt $b \mapsto \iota^{-1}(b)$ ist injektiv und jedes Ideal von $S^{-1}A$ ist von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für einIdeal $\mathfrak{a} \subseteq A$.

3. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gilt: Es gibt ein Ideal $b \subseteq S^{-1}A$ mit $\mathfrak{a} = \iota^{-1(b)}$. Dies ist Äquivalent dazu, dass kein $s \in S$ ins $A/\mathfrak{a}$ Nullteiler ist.

4. Man hat zueinander inverse Bijektionen:

$$\left\{q \subset S^{-1A} \mid \text{Primideal}\right\} \xrightarrow{q \mapsto \iota^{-1}(q)}$$
$$\xleftarrow[\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}]{} \{\text{Primiedeale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

Beweis. 1. $\frac{1}{1} - inS^{/1A}$ ist genau dann wenn es ein $a \in \mathfrak{a}, s \in S$ gibt, sodass $\frac{a}{s} = \frac{1}{1}$.

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathfrak{a}, s, t \in S : ta = ts$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap S \neq 0$$

2. Sei $\frac{a}{s} \in S^{-1}(\iota^{-1(b)})$.
   Ist äquivalent zu $\exists t \in S$ und $b \in A$ mit $\frac{b}{1} \in b$, so dass

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} = \frac{b}{1}\frac{1}{t}$$

   $\Leftrightarrow \frac{a}{s} \in b$

3. Sei $\mathfrak{a} = \iota^{-1}(b)$ für ein Ideal $b \subseteq S^{-1}A$.

$$\Leftrightarrow \mathfrak{a} = \iota^{-1}(S^{-1}\mathfrak{a})$$
$$\Leftrightarrow A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\overline{a} \mapsto \overline{\left(\frac{a}{1}\right)}} S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{a} =^{??} S^{-1}A/\mathfrak{a} \quad \text{injektiv}$$

   (Wende **??** an auf die exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

Dann ist auch

$$0 \to S^{-1}\mathfrak{a} \to S^{-1}A \to S^{-1}(A/\mathfrak{a}) \to 0$$

exakt.) Mit **??** gilt äquivalenz dazu, dass kein $s \in S$ ist Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$.

4.

□

Satz 4.11 (Universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers)**.** Sei $\iota : A \to \mathrm{Qud}(A)$ kanonisch und sei $\varphi : A \to K$ ein injektiver Ring-Homomorphismus wobei K ein Körper.
Dann existiert genau ein Homomorphismus von Körpern $\tilde{\varphi} : \mathrm{Qud}(A) \to K$.

(B) Lokale Ringe und Restklassenkörper

Definition 4.12. Ein Ring A heißt lokal wenn er genau ein Maximales Ideal besitzt.
Dann bezeichnet $\mathfrak{m}_A$ dieses Maximales Ideal.
Der Körper $\kappa(A) := A/\mathfrak{m}_A$ heißt Restklassenkörper von A.

Beispiel 4.13.

- Jeder Körper ist ein lokaler Ring.
- Ein Hauptidealring A ist genau dann lokal, wenn bis auf Multiplikation mit Einheiten genau ein irreduzibles Element existiert.
  Oder wenn A Körper ist

Definition 4.14. Ein lokaler Hauptideal Ring der kein Körper ist, heißt diskreter Bewertungsring.

Beispiel 4.15. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ Primideal, $S := A \backslash \mathfrak{p}$ multiplikative Teilmenge, $A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$.

$$\{\text{Primideals in } A - \mathfrak{p}\} \leftrightarrow \{\text{Primideals } q \subset A \text{ mit } q \subseteq \mathfrak{p}\}$$

(mit 4).
Also ist $A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $S^{-1}\mathfrak{p}$.
Der Körper $\kappa(\mathfrak{p}) := A/S^{-1}\mathfrak{p}$ heißt Restklassenkörper in $\mathfrak{p}$.

Bemerkung 4.16. Seien $q \subseteq \mathfrak{p} \subset A$ Primideale.

1.
$$\{\text{Primideale in } A_\mathfrak{p}\} = \{\text{Primideale in } A, \text{ die in } \mathfrak{p} \text{ enthalten sind}\}$$
$$\{\text{Primideal in } A/q\} = \{\text{Primideal in } A, \text{ die } q \text{ enthalten.}\}$$

2. Sei $S := S \backsim \mathfrak{p}$. Dann ist $S^{-1}(A/q) = S^{-1}A/S^{-1}q$ und

$$\{\text{Primideal in } S^{-1}(A/q)\} = \{\text{Primideals in } A \text{ die zwischen } q \text{ und } \mathfrak{p} \text{ liegen}\}$$

3. Speziell für $q = \mathfrak{p}$:

$$\begin{aligned} S^{-1}(A/\mathfrak{p}) &= \kappa(\mathfrak{p}) \\ &= \mathrm{Qud}(A/\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

(C)Spektren

Erinnerung 4.17. Ein Topologischer Raum ist ein Paar $(X;\mathfrak{T})$ wobei X eine Menge, $\mathfrak{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$, sodass gilt:

1. $\emptyset \in \mathfrak{T}, X \in \mathfrak{T}$
2. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen $U_i \in \mathfrak{T}$ dann gilt $\forall i \in I : \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathfrak{T}$
3. $U, V \in \mathfrak{T}$, dann $U \cap V \in \mathfrak{T}$

Die Mengen in $\mathfrak{T}$ heißen offen.

Erinnerung 4.18. Seine X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls $f^{-1}(V) \subseteq X$ ist offen für alle offenen $V \subseteq Y$.

Erinnerung 4.19. Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum $B \subseteq \mathfrak{T}$ heißt Basis der Topologie, falls jeder offenen Teilmenge Vereinigung von Menge aus B ist.

Beispiel 4.20. Sei (X, d) eien metrischer Raum, dann heißt $U \subseteq X$ offen, falls

$$\forall x \in U \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x)\{y \in X \mid M(x, y) < \epsilon\} \subseteq U$$

Basis der Topologie: $\{B_\epsilon(x) \mid \epsilon \in \mathbb{R}^{>0}, x \in X\}$

Definition 4.21. Sein topologischer Raum X heißt Hausdorffsch, falls $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren $x \in U \subseteq X$, $y \in V \subseteq X$ offen, sodass $U \cap V = \emptyset$. Metrische Räume sind Hausdorffsch.

Definition 4.22. Ein topologischer Raum X heißt quasikompakt, falls jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X (d.h. $U_i \subseteq X$ offen für alle $i \in I$ mit $\bigcup_{i\in I} U_i = X$) eine endliche Teilüberdeckung besitzt. (d.h. $\exists J \subseteq I$ endliche Teilmenge, sodass $\bigcup_{i\in I} U_i = X$.)