

Algebra SS16

Prof Wedhorn, Mitschrift von Daniel Kallendorf

2. November 2016

Inhaltsverzeichnis

3	Tensorprodukte	2
3.1	Erinnerung	2
3.2	Multilineare Abbildungen	3
3.3	..	3
3.4	Basiswechsel von Tensorprodukten	5
3.5	Tensorprodukte von Algebren	7

Bemerkung 1. $A[X_1, \dots, X_n]$ ist ein freier A -Modul, wobei die Monome eine Basis bilden.

Satz 1 (Universaleigenschaft des Polynomrings). Sei $\phi : A \rightarrow B$ eine A -Algebra und seine $b_1, \dots, b_n \in B$ Elemente. Dann existiert genau ein A -Algebra-Homomorphismus $\psi : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$, so dass $\psi(x_i) = b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, nämlich

$$\psi \left(\underbrace{\sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdot \dots \cdot X_n^{i_n}}_{=: f} \right) = \underbrace{\sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} \phi(a_{i_1, \dots, i_n}) b_1^{i_1} \cdot \dots \cdot b_n^{i_n}}_{=: f(b_1, \dots, b_n)}$$

Bemerkung 2.

$$\begin{aligned} \text{Im}(\psi) &= \text{kleinste } A\text{-Unteralgebra die } b_1, \dots, b_n \text{ enthält} \\ &= A[b_1, \dots, b_n] \subset B \end{aligned}$$

Beispiel 1. Sei $\phi : A \rightarrow B$ eine A -Algebra, $b \in B$. Es existiere ein $g \in A[X]$ mit $g(b) = 0$. Sei g normiert. Dann gilt

$$A[b] = \{f(b) \mid f \in A[X], \deg(f) < \deg(g)\}$$

Beispiel 2. Sei $A = \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}, i \in \mathbb{C}$.

Dann gilt $g(i) = 0$ wobei $g = X^3 + X = X(X^2 + 1)$. Es folgt:

$$\mathbb{Q}[i] = \{a_0 + q_1 i + a_2 i^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\}$$

$$\mathbb{Q}[i] = \text{Im}(\mathbb{Q}[X] \xrightarrow[\substack{\psi \\ X \mapsto i, f \mapsto f(i)}}{\mathbb{C}})$$

Dann $\tilde{g} \in \mathbb{Q}[X] : \psi(\tilde{g}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{g}(i) = 0$.

Also $g \in \text{Ker}(\psi) \Rightarrow (g) \subseteq \text{Ker}(\psi)$.

In diesem Fall $\text{Ker } \psi = (X^2 + 1)$.

Begründung von 2.8:

$$(g) \subseteq \text{Ker} \left(A[X] \xrightarrow[f \mapsto f(b)]{\psi} B \right)$$

Also ψ faktorisiert:

$$A[X]/(g) \xrightarrow{\bar{\psi}} A[b] \subseteq B$$

mit $\bar{\psi}$ surjektiv.

Proposition 1. Sei $g \in A[X]$ normiert. Dann ist

$$\{f \in A[X], \deg(f) < \deg(g)\} \hookrightarrow A[X] \rightarrow A[X]/(g)$$

bijektiv.

Beweis. Gilt, da für alle $f \in A[X]$ genau ein $r \in A[X]$ existiert mit $\deg(r) < \deg(g)$ mit $f \in r + (g)$ \square

3 Tensorprodukte

- (A) Tensorprodukte von Moduln
- (B) Tensorprodukte von Algebren und Basiswechsel
- (C) Exaktheitseigenschaften des Tensorprodukts

3.1 Erinnerung

Definition 1. A -Modul := $(M, +, \cdot)$ wobei $(M, +)$ abelsche Gruppe und $\cdot : A \times M \rightarrow M$ ein Skalarprodukt.

Bemerkung 3. \mathbb{Z} -Modul = abelsche Gruppe

Beispiel 3. Sei I eine Menge

$$A^{(I)} = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in A, a_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$$

A -Modul mit Addition und Skalarprodukt.

Für $i \in I : e_i \in A^{(I)}$ mit

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{an der } i\text{-ten Stelle} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 2. Ein A -Modul heißt frei, falls $M \cong A^{(I)}$ für eine Menge I

Definition 3. Sei M, N A -Modul. Dann heißt $u : M \rightarrow N$ A -linear oder Homomorphismus von A -Moduln, falls

$$u(am + m') = au(m) + u(m') \forall a \in A, m, m' \in M$$

Bemerkung 4. Sei I eine Menge, M ein A -Modul $\underline{m} = (m_i)_{i \in I}$ ein Tupel von Elementen $m_i \in M$. Dann Existiert genau eine Abbildung:

$$A^{(I)} \xrightarrow{u_{\underline{m}}} M$$

mit $u_{\underline{m}}(e_i) = m_i$.

$(m_i)_i = \underline{m}$ heißt linear Unabhängig/ Erzeugende-System/ Basis, falls $u_{\underline{m}}$ injektiv/ surjektiv / bijektiv ist.

Bemerkung 5. Der A -Modul M ist endlich erzeugt, genau dann wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und eine A -lineare Surjektion $A^n \rightarrow M$ existieren.

3.2 Multilineare Abbildungen

Definition 4. Sei $r \in \mathbb{N}_0$, M_1, \dots, M_r, P A -Moduln.

Eine Abbildung $\alpha : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow P$ heißt r -multilinear, falls sie in jeder Komponente linear ist, d.h. Für alle $i = 1, \dots, r$ gilt:

$$\alpha(m_1, \dots, am_i + m'_i, m_{i+1}, \dots, m_r) = a\alpha(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r) + \alpha(m_1, \dots, m'_i, \dots, m_r)$$

Für alle $m_j \in M_j, m_i \in M_i, a \in A$. ($r = 1$: linear, $r = 2$: bilinear)

3.3 ..

Definition 5. Sei $r \geq 2$, M_1, \dots, M_r A -Moduln.

Dann existiert ein A -Modul $M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A \dots \otimes_A M_r$ und eine r -multilineare Abbildung $\tau : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A \dots \otimes_A M_r$, sodass für jede r -multilineare Abbildung:

$$\alpha : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow P$$

wobei P ein A -Modul, genau eine A -lineare Abbildung

$$\bar{\alpha} : M_1 \otimes_A \dots \otimes_A M_r \rightarrow P$$

existiert. $M_1 \times \dots \times M_r \xrightarrow{\forall r\text{-multilinear}} P$

$$M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A \dots \otimes_A M_r$$

Satz 2 (Eindeutigkeit des Tensorprodukts). Seien $(T, \tau : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow T)$ und (T', τ') Tensorprodukte:

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \dots \times M_r & & \\ \downarrow \tau & \searrow \tau' & \\ T & \xrightarrow{\exists! v} & T' \end{array}$$

u existiert aufgrund der universellen Eigenschaft von (T, τ) .

v existiert aufgrund der universellen Eigenschaft von (T', τ') .

Ferner kommutiert

Die Universelle Eigenschaft von (T, τ) zeigt, dass $v \circ u = id_T$, genauso $u \circ v = id_{T'}$.

Satz 3 (Existenz des Tensorprodukts). 1. Suche einen A -Modul N und eine Abbildung $c : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow N$, sodass

$$\text{Hom}_A(N, P) \xrightarrow{u \mapsto u \circ c} \text{Abb}(M_1 \times \dots \times M_r, P)$$

Für alle A -Moduln P .

2. Wir wollen, dass $(am_1 + m'_1, m_2, \dots, m_r)$ und $a(m_1, \dots, m_r) + (m'_1, \dots, m_r)$ auf das gleiche Element abgebildet werden.

Sei $Q \subseteq N$ der von

$$e_{(m_1, \dots, m_{i-1}, am_i + m'_i, m_{i+1}, \dots, m_r)} - (ae_{(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r)} + e_{(m_1, \dots, m'_i, \dots, m_r)})$$

für alle $i = 1, \dots, r$ und $m_i, m'_i \in M_i$ und $a \in A$ erzeugt Untermodul.

Dann setze $T := N/Q$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(T, P) &= \{u \in \text{Hom}(N, P) \mid u(Q) = 0\} \\ &= L_A(M_1, \dots, M_r, P) \end{aligned}$$

mit $\tau : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow N \rightarrow N/Q$.

Bemerkung 6. 3.4

$e_{(m_1, \dots, m_r)} \in A^{(M_1 \times \dots \times M_r)}$ bilden ein Erzeugendensystem.

Also bilden auch die $\tau(m_1, \dots, m_r) =: m_1 \otimes \dots \otimes m_r$ eine Erzeugenden-System des A -Moduls $M_1 \otimes \dots \otimes M_r$.

Aber: Nicht jedes Element von $M_1 \otimes \dots \otimes M_r$ ist in dieser Form.

Also genügt es eine lineare Abbildung $u : M_1 \otimes \dots \otimes M_r \rightarrow P$ auf den erzeugendnesn $m_1 \otimes \dots \otimes m_r$ mit $(m_i \in M_i)$ anzugeben.

Umgekehrt sei P ein A -mOdul und es seien elemente $u(m_1 \otimes \dots \otimes m_r) \in P$ gegeben für alle $m_i \in M_i$.

Genau dann existiert eine A -lineare Abbildung $u : M_1 \otimes \dots \otimes M_r \rightarrow P$ mit $m_1 \otimes \dots \otimes m_r \mapsto u(m_1 \otimes \dots \otimes m_r)$, wenn für alle $i = 1, \dots, r$, $a \in A$, $m_j \in M_j$ und $m'_i \in M_i$ gilt:

$$u(m_1 \otimes \dots \otimes am_i + m'_i \otimes \dots \otimes m_r) = au(m_1 \otimes \dots \otimes m_i \otimes \dots \otimes m_r) + u(m_1 \otimes \dots \otimes am'_i \otimes \dots \otimes m_r)$$

Satz 4 (Tensorprodukt linearer Abbildungen). Seien M, M', N, n' A -Moduln, $u : M \rightarrow M', v : N \rightarrow N'$ A -lineare Abbildungen.

Dann definiert

$$\begin{aligned} M \otimes_A N &\rightarrow M' \otimes AN' \\ m \otimes n &\mapsto u(m) \otimes u(n) \end{aligned}$$

eine A -lineare Abbildung bezüglich $u \otimes v : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N$.

Beweis. Zu zeigen: $u(am + m') \otimes v(n) = a(u(m) \otimes v(n)) + u(m') \otimes v(n)$

Es gilt da das Tensorprodukt r -linear ist.

$$\begin{aligned} u(am + m') \otimes v(n) &= (au(m) + u(m')) \otimes v(n) \\ &= (au(m) \otimes v(n)) + u(m') \otimes v(n) \end{aligned}$$

Außerdem zu zeigen: $u(m) \otimes v(an + n') = a(u(m) \otimes v(n)) + u(m) \otimes v(n)$
(\rightarrow Genauso.) □

Bemerkung 7. 3.6

1. $A \otimes_A M \cong M$
 $u : a \otimes m \mapsto am$
 $v : 1 \otimes m \mapsto m$ Dabei ist u wohldefiniert, d.h. $(a, m) \mapsto am$ ist bilinear.
2. $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} N \otimes_A M, m \otimes n \mapsto n \otimes m$ ist ... von A-Moduln.
 Zu zeigen: Wohldefiniertheit
3. $M \otimes_A N \otimes_A P \simeq (M \otimes_A N) \otimes_A P$
 $m \otimes n \otimes p \mapsto (m \otimes n) \otimes p$
 $m \otimes n \otimes p \mapsto m \otimes (n \otimes p)$

Proposition 2.3.7 Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln, N ein A-Modul:

$$\left(\bigotimes_{i \in I} M_i \right) \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i \in I} (M_i \otimes_A N)$$

$$(m_i)_{i \in I} \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_{i \in I}$$

Beweis. Umkehrabbildung gegeben durch:

$$\text{Inhalt..} m_i \otimes n \mapsto (m_j)_{j \in I} \otimes n$$

$$\text{mit } m_j := \begin{cases} m_i, & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

□

3.4 Basiswechsel von Tensorprodukten

Satz 5. 1. Sei M ein A-Modul. Dann wird

$$\varphi^*(M) := B \otimes_A M$$

zu einem B -Modul mit dem Skalarprodukt

$$B \times (B \otimes_A M) \rightarrow B \otimes_A M$$

$$(b, b' \otimes m) \mapsto bb' \otimes m$$

2. Sei $U : M \rightarrow M'$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Dann ist

$$id_B \otimes u : B \otimes M \rightarrow B \otimes_A M'$$

$$b \otimes m \mapsto b \otimes u(m)$$

eine B-lineare Abbildung.

Proposition 3. Sei $\varphi : A \rightarrow B$ eine A-Algebra.

Sei M ein freier A-Modul. Dann ist $B \otimes_A M$ ein freier B-Modul und

$$\vartheta_A(M) = \vartheta_B(B \otimes_A M)$$

Beweis. Sei M ein freier A -Modul. Dazu ist äquivalent, dass $M \simeq A^{(I)}$.
Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} B \otimes_A M &\simeq B \otimes_A A^{(I)} \\ &\simeq B \otimes_A \left(\bigoplus_{i \in I} A \right) \\ &\simeq \left(\bigoplus_{i \in I} B \otimes_A A \right) \\ &\simeq \bigoplus_{i \in I} B \\ &= B^{(I)} \end{aligned}$$

Also ist $B \otimes_A M$ frei. □

Proposition 4. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, M ein A -Modul. Setze

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \cdot M &= \langle \{am \mid a \in \mathfrak{a}, m \in M\} \rangle \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^m a_i m_i \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M \right\} \\ &\subseteq M \quad \text{Untermodul} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A/\mathfrak{a} \otimes_A M &\xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{a}M \\ \bar{a} \otimes m &\mapsto \overline{am} \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von A/\mathfrak{a} -Moduln.

Beweis. $\bar{a} \otimes m \mapsto \overline{am}$ ist wohldefiniert: Zu zeigen:

1. Sei $a' \in A$ mit $\bar{a}' = \bar{a} \in A/\mathfrak{a}$.
Dann ist $\overline{am} = \overline{a'm} \in M/\mathfrak{a}M$. Es gilt $\bar{a}' = \bar{a}$ genau dann wenn es ein $x \in \mathfrak{a}$ gibt sodass $a' = a + x$.
Daraus folgt, dass $a'm = am + xm$, und da $xm \in \mathfrak{a}M$ folgt $\overline{a'm} = \overline{am}$.
2. \overline{am} ist linear in a , d.h.

$$\overline{(ba + a')m} = \overline{bam} + \overline{a'm} \quad \text{für } a, a' \in A, b \in A$$

3. \overline{am} ist linear in m , d.h.

$$\overline{a(bm + m')} = \overline{bam} + \overline{am'} \quad \text{für } m, m' \in M, b \in A$$

□

Proposition 5. Eine Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} v : M &\rightarrow A/\mathfrak{a} \otimes_A M \\ m &\mapsto 1 \otimes m \end{aligned}$$

Beweis. Zu zeigen: $\mathfrak{a}M \subseteq \text{Ker}(v)$, also für alle $x \in \mathfrak{a}, m \in M$ gilt $v(xm) = 0$.

$$v(xm) = 1 \otimes xm = \bar{x} \otimes m = 0$$

da $\bar{x} = \bar{0} \in A/\mathfrak{a}$.

Noch zu zeigen: v ist Umkehrabbildung zu $\bar{a} \otimes m \mapsto \overline{am}$. □

3.5 Tensorprodukte von Algebren

Definition 6. Sei $A \rightarrow B_1, A \rightarrow B_2$ A -Algebren.

Dann definieren wir auf dem A -Modul $B_1 \otimes_A B_2$ eine Multiplikation:

$$\begin{aligned} (B_1 \otimes B_2) \times (B_1 \otimes B_2) &\rightarrow B_1 \otimes B_1 \otimes B_2 \\ (a_1 \otimes b_2, b'_1 \otimes b'_2) &\mapsto b_1 b'_1 \otimes b_2 b'_2 \end{aligned}$$

und erhalten die A -Algebra $B_1 \otimes_A B_2$.

Beispiel 4. Sei $A \xrightarrow{\varphi} B$ eine A -Algebra und sei $C = A[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_r)$ und $f_i \in A[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist

$$B \otimes_A A[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_r) = B[X_1, \dots, X_n]/(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r)$$

wobei

$$f_i = \sum_{\underline{j} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\underline{j}} X^{\underline{j}} \rightarrow \tilde{f}_i = \sum_j \varphi(a_j)$$

1. Sei $A = \mathbb{Q}, C = \mathbb{Q}[i] = \{a + b_i | a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$
2. $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[i] = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{C}$
3. $C \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[i] = C[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{C}[X]/(X + i) \times \mathbb{C}[X]/(X - i) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

Beispiel 5. $A[X] \otimes_A A[Y] = (A[X])[Y] = A[X, Y]$ mit $f \otimes g \mapsto fg$