Einführung in die Stochastik

2. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **2**

1 Grundlagen

Erinnerung 1.1. *Naive Grundidee der Modellierung des Zufalls:*

Konzept	*mathematisches Objekt*	*Symbol*
„Alle denkbaren Ergebnisse eines zufälligen Geschehens“	*Menge*	Ω
Wahrscheinlichkeit,dass $\omega \in \Omega$ beobachtet wird	*Abbildung $\Omega \to [0,1]$*	
Alle denkbaren Ja-Nein-Fragen, die zum zufälligen Geschehen gestellt werden können	*Potenzmenge von Ω*	$\mathscr{P}(\Omega)$
Wahrscheinlichkeit, dass die zu $a \in \mathscr{P}(\Omega)$ gehörige Frage mit “ja” beantwortet wird.	*Abbildung $\mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$*	$\mathbb{P}$

Beispiel 1.2.1 (6-Seitiger Würfel). $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$.
Ein Beispiel für eine Ja-Nein-Frage: „Ist die gewürfelte Zahl durch 3 teilbar?“ dann ist $A \in \mathscr{P}(\Omega) : A = \{3,6\}$ und $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$.

Beispiel 1.2.2. Speziell zufälllige natürliche Zahl: $\Omega = \mathbb{N}$, $p(1) = \frac{1}{2}, p(2) = \frac{1}{4}, ..., p(n) = 2^{-n}$.
Dann gilt $\sum_{\omega=1}^{\infty} p(\omega) = 1$.

1. Ja-Nein-Frage: „Ist die Zahl gerade?“
   Zugelassenen Menge: $A = \{2,3,6,...\}$
   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} p(2j) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$$
2. Ja-Nein-Frage: „Ist die Zahl Primzahl?“
   Zugelassene Menge: $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim}\}$
   $$\mathbb{P}(B) = \sum_{j \in B} p(j) = ???$$
   Abschätzung $\mathbb{P}(B) \leq 1 - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\{2\}) \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

Definition 1.3. Sei Ω eine abzählbare Menge.
Eine Abbildung $p : \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ heißt **Zähldichte** oder **Wahrscheinlichkeitsdichte** auf Ω.

Definition 1.4. Man nennt dann Ω den „Ergebnisraum“, die „Grundmenge“ oder „Grundgesamtheit“.
Ein spezielles $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ nennt man „Ergebnis“ und falls $A = \{\omega\}$ **Elementarereignis**.

Definition 1.5. Sei Ω eine abzählbare Menge und $\mathscr{P}(\Omega)$ die Potenzmenge, p sei eine Zähldichte.
Dann heißt die Abbildung
$$\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1], A \mapsto \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$
das von p erzeugte **Wahrscheinlichkeitsmaß** (kurz W-Maß).

Bemerkung 1.6. Beachte: p wird in der Notation unterdrückt. Alternativ schreibe $\mathbb{P}_p$.
Außerdem: Statt $\mathbb{P}(\{\omega\})$ wird oft $\mathbb{P}(\omega)$ geschrieben.

Lemma 1.7. *Sei p eine Zähldichte auf Ω. Das von p erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß hat folgende Eigenschaften:*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. *Falls $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Ereignissen ist, dann ist $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.*

Beweis. Sei p Zähldichte auf Ω.

1. Nach Definition: $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$
2.

$\square$

Beispiel 1.11.1 (Einfache Irrfahrt). Dimension d, N Schritte. $\Omega = \{(x_0, x_1, ..., x_N) : X_j \in \mathbb{Z}^d \forall j, x_0 = 0, |x_{j+1} - x_j| = 1 \forall j\}$.
Also ist $|\Omega_N| = (2d)^N$, Setze $p(\omega = \frac{1}{(2d)^N}) \forall \omega \in \Omega$.

Fragestellungen:

1. $A_N := \{(x_1, ..., x_N)\} \in \Omega_N : \exists j > 0$ mit $x_j = 0\}$. (“Rückkehr zum Startpunkt”).
   Es ist klar, dass $\mathbb{P}(A_N) \geq \frac{1}{2d} > 0$, falls $N \geq 2$.
   Es ist leicht zu zeigen, dass $N \mapsto \mathbb{P}(A_N)$ wächst monoton.

   Knifflig: Was ist $\lim\limits_{N\to\infty} ? < 1? = 1?$

   Antwort: $= 1$ für $d \leq 2$, < 1 für $d \geq 3$.

2. $B_n, \alpha := \{\omega = (x_0, x_1, ..., x_N) \in \Omega_N : |x_N| \geq N^\alpha\}$ für $0 < \alpha \leq 1$

   Frage: $\lim\limits_{N\to\inf} \mathbb{P}(B_{n,\alpha})$?

   Antwort: 0, falls $\alpha > \frac{1}{2}$
   1, falls $\alpha < \frac{1}{2}$
   Für $\alpha = \frac{1}{2}$ gilt

   $$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_{n,\alpha}) = \frac{V_k(d)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_1^\infty r^{d-1} \exp(\frac{1}{2} r^2) dr$$

   (dabei ist $V_k(d)$ das Volumen der d-Dimensionalen Einheitskugel).

Beispiel 1.11.2 (Selbstvermeidende Irrfahrt). Dimension d, N Schritte.

1. $\Omega_N^0 = \{(x_0, x_1, ..., x_N) \in \Omega_N : x_i \neq x_j$ falls $i \neq j\}$ Dann gilt für die Anzahl der Pfade:

   $$|\Omega_N^0| = \begin{cases} 2, & \text{falls } d = 1 \\ ??, & \text{falls } d > 1 \end{cases}$$

   und es ist $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega_N^0| \forall \omega \in \Omega_N^0}$.

2. Wie in a)2.

   Frage Was ist $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{P}(B^0_{N,\alpha})$.

   Bekannt $\exists \alpha_c > 0$ mit

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{B}^{\nvdash}_{\ltimes,\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha > \alpha_c \\ 1, & \text{falls } \alpha < \alpha_c \end{cases}$$

   Bekannte Werte: $d = 1 \;\; \alpha_c = 1$
   $d = 2 \;\; \alpha_c = \frac{3}{4}$, falls SLE-Conjecture stimmt
   $d = 3 \;\; \alpha_c \approx 0,5876$ (Numerik)
   $d \geq 4 \;\; \alpha_c = \frac{1}{2}$

Beispiel 1.12. Auswählen einer Zufälligen rellen Zahl in $[0, 1]$, alle Zahlen sollen di gleich Wahrscheinlichkeit haben:
$[0, 1]$ ist nicht endlich, also ist Gleiche Wahrscheinlichkeit für alle Zahlen unmöglich.
$[0, 1)$ ist nicht abzählbar, also scheitert der bisherige Ansatz mit der Zähldichte.

Ein möglicher Ausweg Definiere $\mathbb{P}([a, b]) = \mathbb{P}((a, b)) = \mathbb{P}([a, b)) = \mathbb{P}((a, b])$.
Die Erweiterung, sodass $\forall A \in \mathscr{P}([0, 1])$ $\mathbb{P}(A)$ definiert ist, ist nicht möglich.

Lösung Definiere $\mathbb{P}$ nicht auf allen Mengen $\mathscr{P}([0, 1])$.

Definition 1.13. Sei Ω eine nichtleere Menge.
Ein Mengensystem $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$heißt **$\sigma$-Algebra**, falls

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. Falls $A \in \mathscr{F}$, dann auch $A^C \in \mathscr{F}$.
3. Falls $A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$, dann auch $\bigcap A_i \in \mathscr{F}$.

$(\Omega, \mathscr{F})$ heißt dann **messbarer Raum** oder **Ereignisraum**.

Bemerkung 1.14. $\mathscr{F}$ ist "die Menge aller Teilmengen von Ω, für die die zugehörige Ja-Nein-Frage beantwortbar ist".
Daher meint

1. "Ist $\omega \in \Omega$" muss beantwortbar sein.
2. Falls "Ist $\omega \in A$?" beantwortbar, so ist auch "Ist $\omega \notin A$?" beantwortbar.
3. Falls "Ist $\omega \in A_i$?" beantwortbar für alle i, dann ist auch "Ist ω in irgendeinem A_i?" beantwortbar.

Beispiel 1.15. Sei $\Omega = [0, 1)$, dann ist

1. $\mathscr{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$
2. $\mathscr{F}_1 := \{\emptyset, [0, \frac{1}{3}), [\frac{1}{3}, 1), \Omega\}$.
   Die Frage "Ist $\omega \geq \frac{1}{2}$" ist hier <u>nicht</u> beantwortbar!
3. $A_{j,n} := \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$, n ist fest, $j \geq n$.
   $\mathscr{F}_2 = \{\bigcup_{k=1}^{n} B_{k,n} : B_{k,n} \in \{\emptyset, A_{k,n}\}\}$

4. $\mathscr{F}_3 = \mathscr{P}(\Omega)$ ist ebenfalls eine σ-Algebra.

Satz 1.16. *Sei $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Sei $\Sigma := \{\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega) : \mathscr{A}$ ist σ-Algebra und $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$.*
Dann ist auch $\bigcap_{\mathscr{A} \in \Sigma} \mathscr{A}$ eine σ-Algebra.

Definition 1.16. $\sigma(\mathscr{G}) := \bigcap_{\mathscr{A} \in \Sigma} \mathscr{A}$ heißt **die von $\mathscr{G}$ erzeugt σ-Algebra**.

Definition 1.17. Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{G} := \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
$\mathscr{B} := \sigma(\mathscr{G})$ heiß **Borel-σ-Algebra**.

Bemerkung 1.18.
1. $\mathscr{B}$ enthält alle offenen Mengen, alle abbgeschlossen Mengen und alle halboffenen Intervalle.
2. $\mathscr{B} \subsetneqq \mathscr{P}(\Omega)$.
3. $\mathscr{B}$kann nicht abzählbar konstruiert werden.
4. $\mathscr{B} = \sigma(\{(-\infty, c]\} : c \in \mathbb{R})$.
5. Falls $\Omega_o 0 \subset \mathbb{R}$, $\Omega_0 \neq \emptyset$, dann ist
$$\mathscr{B}_{\Omega_0} := \{A \cap \Omega_0 : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$$
eine σ-Algebra, die **Einschränkung** von $\mathscr{B}$ auf Ω_0.

Definition 1.19. Seien $E_1, E_2, ..., E_N$ Mengen, $N \leq \infty$.
$\mathscr{E}_i$ seien σ-Algebren auf E_i und es sei
$$\Omega = \bigtimes_{i=1}^{N} E_i = \{(e_1, ..., e_N) : e_i \in E_i \forall i \leq N\}$$
Eine Menge der Form
$$A_{j,B_j} = \{(e_1, ..., e_N) : e_j \in B_j, \text{ andere } e_k \text{ beliebig}\}$$
mit $B_j \in \mathscr{E}_j, j \leq N$ heißt **Zylindermenge**.

Definition 1.19. Die σ-Algebra in Ω die von allen Zylindermengen Erzeugt wird heißt **Produkt-σ-Algebra**. Man nennt $\mathscr{Z}$ das System der Zylindermenge und $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \otimes ... \otimes \mathscr{E}_N := \sigma(\mathscr{Z})$.

Definition 1.27. Die Abbildung $\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty], A \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\ dx = \lambda(A)$ heißt **Lebesgue-Maß**

Beispiel 1.28. Sei $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ Borel-messbar und $\int \varrho(x)\ dx = 1$.
Dann ist die Abbildung $\mathbb{P}_p\varrho : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1], A \mapsto \int_A \varrho(x)\ dx = \int \chi_A(y)\varrho(x)\ dx$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Definition 1.29. Sei $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ Borel-messbar und $\int \varrho(x)\ dx = 1$, (=1.28) dann heißt ϱ **Dichte** von $\mathbb{P}_p\varrho$.

Beispiel 1.30. Sei ϱ eine Dichte, $x \in \mathbb{R}$. Dann hat $\mathbb{P} := \frac{1}{3}\mathbb{P}_p\varrho + \frac{2}{3}\delta_x$ keine Dichte (siehe **??**)

Bemerkung. Wenn ϱ Dichte ist schreibt man auch $\mathbb{P}_p\varrho \equiv \varrho(x)\ dx$

Definition 1.31. Sei $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(\Omega) < \infty$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit Dichte $\varrho(y) = \frac{1}{\lambda(\Omega)}$ heißt **Gleichverteilung** auf Ω.
Man fasst dann $\tilde{\varrho}(x) = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \chi_A \Omega(x)$ als Einbettung in den $\mathbb{R}^n$ auf.

Erinnerung (Zufallsvariable)**.** *Der Begriff „Zufallsvariable" ist historisch gewachsen. (Keine Variable einer Funktion).*

Problemstellung *Von einem komplizierten Zufälligen Geschehen will man nur gewisse Aspekte betrachten.*

Beispiel 1.32.1 (2 mal Würfeln, Würfelsumme). Sei $\Omega : \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,4,5,6\}$. $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Der zu betrachtende Aspekt: $S(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 \in \{2,3,...,12\} \neq \Omega$.

Beispiel 1.32.2. Sei $\Omega = \Omega_N$(siehe **??**, einfache Irrfahrt).
$\omega = (\omega_1, \omega_2, ...\omega_N) \in (\mathbb{Z}^d)^N$.

Aspekt 1 Position nach N Schritten.
Modell: $X_N\big((\omega_1, ..., \omega_N)\big) = \omega_N \in \mathbb{Z}^d \neq \Omega$

Aspekt 2 Maximaler Abstand vom Ursprung bis zum Schritt N.
Modell $M_N\big((\omega_1, ..., \omega_N)\big) = \max\{|\omega_j|, j \leq N\}$.

Beispiel 1.32.3. Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{F} \in \mathscr{B}([0,1])$, $\omega = x \in [0,1]$.

Aspekt 1 Erste Ziffer nach dem Komma?
Modell: $y_1(x) = \lfloor 10x \rfloor$

Aspekt 2 Fläche des Quadrates mit Kantenlänge x
Modell: $Q(x) = x^2 \in [0,1]$.

Fazit: Modellierung durch Abbildungen.

Definition 1.33. Seine $(\Omega, \mathbb{F})$ und $(\Omega', \mathbb{F}')$ Ereignisräume.
eine Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ heißt **Zufallsvariable** (ZV) [oder messbare Abbildung, zufälliges Element von Ω'], falls gilt:
$\forall A' \in \mathbb{F}'$ ist $X^{-1}(A') \in \mathbb{F}$.
Hierbei ist X^{-1} das Urbild von A' unter X.

Bemerkung 1.34. Die Urbild-Abbildung bilte Mengen in $\mathbb{F}'$ (d.h.erlaube Ja-Nein-Fragen) auf Mengen in $\mathscr{P}(\Omega)$ (d.h. Ja-Nein-Fragen) ab.

Beispiel. In 1.32.1 **??** ist $S^{-1}(\{4\}) = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.
In 1.32.1 **??** ist $Y_1^{-1}(\{3,7\}) = [0,3,0,4) \cup [0,7,0,8)$

Bemerkung. Die Bedingung (*) bedeutet, dass für alle durch $A \in \mathbb{F}'$ erzeugte erlaubten Ja-Nein-Fragen auch die Frage „Liegt $X(\omega)$ in A'?" erlaubt ist.

Bemerkung. Oft nimmar man nur Ω und $(\Omega', \mathbb{F}')$ als gegeben.
Dann ist $X^{-1}(\mathbb{F}') := \{X^{-1}(A') \mid A' \in \mathbb{F}'\}$ die von X erzeugt σ-Algebra.

Bemerkung. Falls $\mathbb{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, dann ist jede Abbildung eine Zufallsvariable.

Lemma 1.35. *Seine* $(\Omega, \mathbb{F})$ *und* $(\Omega', \mathbb{F}')$ *Ereignisräume,* $X : \Omega \to \Omega'$ *und sei* $\mathscr{G}'$ *ein Mengensystem mit* $\mathbb{F}' = \sigma(G')$*. Dann ist* X *genau dann Zufallsvariable, wenn* $X^{-1}(A') \in \mathbb{F} \forall A' \in \mathscr{G}'$.

Beweis. **„$\Rightarrow$"** ist klar, da $\mathscr{G}' \subset \mathbb{F}'$

„$\Leftarrow$“ Sei $\mathscr{A}' := \{A' \in \Omega' \mid X^{-1}(A') \in \mathbb{F}\}$ ist eine σ-Algebra und $\mathscr{A}' \supset \mathscr{G}'$ nach Annahme.
Daher ist $\mathbb{F}' = \sigma(\mathscr{G}') \subset \mathscr{A}'$, sodass $X^{-1}(A') \in \mathbb{F} \forall A \in \mathbb{F}$.

□

Beispiel 1.36.1. Sei $(\Omega', \mathbb{F}') = (\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nach 1.35 gilt:
$X : \Omega \to \Omega'$ ist genau dann Zufallsvariable, wenn $X^{-1}\big((-\infty, c)\big) \in \mathbb{F} \forall c \in \mathbb{R}$ Für $\Omega' = \mathbb{R}$ heißt X **relle Zufallsvariable**

Beispiel 1.36.2. Es ist $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ mit σ-Algebra $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma\big(\{[-\infty - c] : c \in \overline{\mathbb{R}}\}\big)$.
Die Abbildung $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann Zufallsvariable, wenn $X^{-1}\big([-\infty, c]\big) \in \mathbb{F} \forall c$.
Dann heißt X **numerische Zufallsvariable**

Theorem 1.37. *Sei $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathbb{F}')$ ein Ereignisraum, $X : \Omega \to \Omega'$ eine Zufallsvariable.*
Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{P}' : \mathbb{F}' \to [0, 1], \quad A' \mapsto \mathbb{P}'(A') := \mathbb{P}(X^{-1}('A))$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathbb{F}')$.

Definition 1.37. $\mathbb{P}'$ heißt **Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter X** oder **Verteilung von X unter $\mathbb{P}$**.
Man schreibt $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ oder $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_X$

Beweis. Da X eine Zufallsvariable ist, ist $X^{-1}(A') \in \mathbb{F} \forall A' \in \mathbb{F}'$, daher im Definitionsbereich von $\mathbb{P}$.
Also ist $\mathbb{P}'$ wohldefiniert. Prüfe Definition 1.20 **??**.

a) $\mathbb{P}'(\Omega') = \mathbb{P}(X^{-1}(\Omega')) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) $A'_1, A'_2, ... \in \mathbb{F}'$ seien paarweise disjunkt. Dann sind $X^{-1}(A'_1), X^{-1}(A'_2), ...$ auch paarweise disjunkt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}'\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A'_i)\right) \\
&= \sum_{i=1} \infty \mathbb{P}(X^{-1}(A'_i)) \\
&= \sum_{i=1} \infty \mathbb{P}'(A'_i)
\end{aligned}$$

□

Definition 1.38. Seien $(\Omega_1, \mathbb{F}_1, \mathbb{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathbb{F}_2, \mathbb{P}_2)$ Wahrscheinlichkeitsräume, $X_1 : \Omega_1 \to \Omega'_1$, $X_2 : \Omega_2 \to \Omega'_2$ Zufallsvariablen.
Falls $\mathbb{P}_1(X_1^{-1}(A')) = \mathbb{P}_2(X_2^{-1}(A')) \forall A' \in \mathbb{F}'$, dann heißen X_1 und X_2 identisch verteilt.

Bemerkung 1.39 (Notation). Man schreibt oft:

- $\{X \in A'\}$ statt $X^{-1}(A')$
- $\mathbb{P}(\{X \in A'\})$ oder $\mathbb{P}(X \in A')$ statt $\mathbb{P}(X^{-1}(A'))$
- $\mathbb{P}_X$ statt $\mathbb{P} \circ X^{-1}$.