Einführung in die Stochastik

13. Juni 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Erinnerung 1.1. *Naive Grundidee der Modellierung des Zufalls:*

Konzept	*mathematisches Objekt*	*Symbol*
„Alle denkbaren Ergebnisse eines zufälligen Geschehens“	*Menge*	Ω
Wahrscheinlichkeit,dass $\omega \in \Omega$ beobachtet wird	*Abbildung $\Omega \to [0,1]$*	
Alle denkbaren Ja-Nein-Fragen, die zum zufälligen Geschehen gestellt werden können	*Potenzmenge von Ω*	$\mathscr{P}(\Omega)$
Wahrscheinlichkeit, dass die zu $a \in \mathscr{P}(\Omega)$ gehörige Frage mit “ja” beantwortet wird.	*Abbildung $\mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$*	$\mathbb{P}$

Beispiel 1.2.1 (6-Seitiger Würfel). $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$.
Ein Beispiel für eine Ja-Nein-Frage: „Ist die gewürfelte Zahl durch 3 teilbar?“ dann ist $A \in \mathscr{P}(\Omega) : A = \{3,6\}$ und $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$.

Beispiel 1.2.2. Speziell zufälllige natürliche Zahl: $\Omega = \mathbb{N}$, $p(1) = \frac{1}{2}, p(2) = \frac{1}{4}, ..., p(n) = 2^{-n}$.
Dann gilt $\sum_{\omega=1}^{\infty} p(\omega) = 1$.

a) Ja-Nein-Frage: „Ist die Zahl gerade?“
Zugelassenen Menge: $A = \{2,3,6,...\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} p(2j) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$$

b) Ja-Nein-Frage: „Ist die Zahl Primzahl?“
Zugelassene Menge: $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim}\}$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j \in B} p(j) = ???$$

Abschätzung $\mathbb{P}(B) \leq 1 - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\{2\}) \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

Definition 1.3. Sei Ω eine abzählbare Menge.
Eine Abbildung $p : \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ heißt **Zähldichte** oder **Wahrscheinlichkeitsdichte** auf Ω.

Definition 1.4. Man nennt dann Ω den „Ergebnisraum“, die „Grundmenge“ oder „Grundgesamtheit“.
Ein spezielles $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ nennt man „Ergebnis“ und falls $A = \{\omega\}$ **Elementarereignis**.

Definition 1.5. Sei Ω eine abzählbare Menge und $\mathscr{P}(\Omega)$ die Potenzmenge, p sei eine Zähldichte.
Dann heißt die Abbildung

$$\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1], A \mapsto \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

das von p erzeugte **Wahrscheinlichkeitsmaß** (kurz W-Maß).

Bemerkung 1.6. Beachte: p wird in der Notation unterdrückt. Alternativ schreibe $\mathbb{P}_p$.
Außerdem: Statt $\mathbb{P}(\{\omega\})$ wird oft $\mathbb{P}(\omega)$ geschrieben.

Lemma 1.7. *Sei p eine Zähldichte auf Ω. Das von p erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß hat folgende Eigenschaften:*

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) Falls $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Ereignissen ist, dann ist $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Beweis. Sei p Zähldichte auf Ω.

a) Nach Definition **??**: $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$

b) Es gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } \omega \in A_n\}\big) = \sum_{\{\omega\in\Omega:\exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } \omega \in A_n\}} p(\omega) \tag{1}$$

Sei nun $N(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(\omega) =$„Anzahl der A_n die ω enthalten". Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega\in A_n} p(\omega) = \sum_{\{\omega\in\Omega:\exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } \omega \in A_n\}} p(\omega)N(\omega) \tag{2}$$

Da aber die A_n paarweise disjunkt sind ist $N(\omega) = 1$ für alle $\omega \in \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } \omega \in A_n\}$, ist ist (1)=(2). □

Definition 1.8. Für $A \subseteq \Omega$ heißt

$$\chi_A : \Omega \to \{0,1\}, \quad \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Charakteristische Funktion** oder **Indikator** von A. Man schreibt auch $\mathbb{1}_A$.

Beispiel 1.9. Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\in N}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$, $a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \infty$ und $a > 0$.
Dann ist $p : \Omega \to [0,1]$, $n \mapsto p(n) := \frac{a_n}{a}$ eine Zähldichte.
Es gilt sogar die Isomorphie:

$$\{\text{Zähldichte auf } \mathbb{N}\} \cong \{\text{Nicht negative Folgen mit } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1\} \cong \{\text{Nichtnegative summierbare Folgen} \neq 0\}$$

Bemerkung 1.10 (Notation). Sei Ω eine Menge .$|\Omega| \leq \infty$ bezeichne tdie Anzahl der Elemente von Ω „Mächtigkeit der Menge".

Beispiel 1.11.1 (Einfache Irrfahrt). Dimension d, N Schritte. $\Omega = \{(x_0, x_1, ..., x_N) : X_j \in \mathbb{Z}^d \forall j, x_0 = 0, |x_{j+1} - x_j| = 1 \forall j\}$.
Also ist $|\Omega_N| = (2d)^N$, Setze $p(\omega = \frac{1}{(2d)^N}) \forall \omega \in \Omega$.

Man kann nu folgende Fragestellungen formulieren:

a) $A_N := \{(x_1, ..., x_N)\} \in \Omega_N : \exists j > 0$ mit $x_j = 0\}$. ("Rückkehr zum Startpunkt").
Es ist klar, dass $\mathbb{P}(A_N) \geq \frac{1}{2d} > 0$, falls $N \geq 2$.
Es ist leicht zu zeigen, dass $N \mapsto \mathbb{P}(A_N)$ wächst monoton.

Knifflig: Was ist $\lim\limits_{N\to\infty}$? < 1? $= 1$?

Antwort: $= 1$ für $d \leq 2$, < 1 für $d \geq 3$.

b) $B_n, \alpha := \{\omega = (x_0, x_1, ..., x_N) \in \Omega_N : |x_N| \geq N^\alpha\}$ für $0 < \alpha \leq 1$

Frage: $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_{n,\alpha})$?

Antwort: 0, falls $\alpha > \frac{1}{2}$
1, falls $\alpha < \frac{1}{2}$
Für $\alpha = \frac{1}{2}$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_{n,\alpha}) = \frac{V_k(d)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_1^\infty r^{d-1} \exp(\frac{1}{2}r^2)dr$$

(dabei ist $V_k(d)$ das Volumen der d-Dimensionalen Einheitskugel).

Beispiel 1.11.2 (Selbstvermeidende Irrfahrt). Dimension d, N Schritte.

a) $\Omega_N^0 = \{(x_0, x_1, ..., x_N) \in \Omega_N : x_i \neq x_j$ falls $i \neq j\}$ Dann gilt für die Anzahl der Pfade:

$$|\Omega_N^0| = \begin{cases} 2, & \text{falls } d = 1 \\ ??, & \text{falls } d > 1 \end{cases}$$

und es ist $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega_N^0| \forall \omega \in \Omega_N^0}$.

b) Wie in a)2.

Frage Was ist $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_{N,\alpha}^0)$.

Bekannt $\exists \alpha_c > 0$ mit

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{B}^{\not\vdash}_{\ltimes,\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha > \alpha_c \\ 1, & \text{falls } \alpha < \alpha_c \end{cases}$$

Bekannte Werte: $d = 1$ $\alpha_c = 1$
$d = 2$ $\alpha_c = \frac{3}{4}$, falls SLE-Conjecture stimmt
$d = 3$ $\alpha_c \approx 0,5876$ (Numerik)
$d \geq 4$ $\alpha_c = \frac{1}{2}$

Beispiel 1.12. Auswählen einer Zufälligen reellen Zahl in $[0, 1]$, alle Zahlen sollen di gleich Wahrscheinlichkeit haben:
$[0, 1]$ ist nicht endlich, also ist Gleiche Wahrscheinlichkeit für alle Zahlen unmöglich.
$[0, 1)$ ist nicht abzählbar, also scheitert der bisherige Ansatz mit der Zähldichte.

Ein möglicher Ausweg Definiere $\mathbb{P}([a,b]) = \mathbb{P}((a,b)) = \mathbb{P}([a,b)) = \mathbb{P}((a,b])$.
Die Erweiterung, sodass $\forall A \in \mathscr{P}([0,1])$ $\mathbb{P}(A)$ definiert ist, ist nicht möglich.

Lösung Definiere $\mathbb{P}$ nicht auf allen Mengen $\mathscr{P}([0,1])$.

Definition 1.13. Sei Ω eine nichtleere Menge.
Ein Mengensystem $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$heißt **$\sigma$-Algebra**, falls

a) $\Omega \in \mathscr{F}$

b) Falls $A \in \mathscr{F}$, dann auch $A^C \in \mathscr{F}$.

c) Falls $A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$, dann auch $\bigcap A_i \in \mathscr{F}$.

$(\Omega, \mathscr{F})$ heißt dann **messbarer Raum** oder **Ereignisraum**.

Bemerkung 1.14. $\mathscr{F}$ ist "die Menge aller Teilmengen von Ω, für die die zugehörige Ja-Nein-Frage beantwortbar ist".
Daher meint

a) "Ist $\omega \in \Omega$" muss beantwortbar sein.

b) Falls "Ist $\omega \in A$?" beantwortbar, so ist auch "Ist $\omega \notin A$?" beantwortbar.

c) Falls "Ist $\omega \in A_i$?" beantwortbar für alle i, dann ist auch "Ist ω in irgendeinem A_i?" beantwortbar.

Beispiel 1.15. Sei $\Omega = [0,1)$, dann ist

a) $\mathscr{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$

b) $\mathscr{F}_1 := \{\emptyset, [0, \frac{1}{3}), [\frac{1}{3}, 1), \Omega\}$.
Die Frage "Ist $\omega \geq \frac{1}{2}$" ist hier <u>nicht</u> beantwortbar!

c) $A_{j,n} := \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$, n ist fest, $j \geq n$.
$\mathscr{F}_2 = \{\bigcup_{k=1}^{n} B_{k,n} : B_{k,n} \in \{\emptyset, A_{k,n}\}\}$

d) $\mathscr{F}_3 = \mathscr{P}(\Omega)$ ist ebenfalls eine σ-Algebra.

Satz 1.16. *Sei $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Sei $\Sigma := \{\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega) : \mathscr{A}$ ist σ-Algebra und $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$.*
Dann ist auch $\bigcap_{\mathscr{A} \in \Sigma} \mathscr{A}$ eine σ-Algebra.

Definition 1.16. $\sigma(\mathscr{G}) := \bigcap_{\mathscr{A} \in \Sigma} \mathscr{A}$ heißt **die von $\mathscr{G}$ erzeugt σ-Algebra**.

Definition 1.17. Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{G} := \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
$\mathscr{B} := \sigma(\mathscr{G})$ heiß **Borel-σ-Algebra**.

Bemerkung 1.18. a) $\mathscr{B}$ enthält alle offenen Mengen, alle abbgeschlossen Mengen und alle halboffenen Intervalle.

b) $\mathscr{B} \subsetneqq \mathscr{P}(\Omega)$.

c) $\mathscr{B}$kann nicht abzählbar konstruiert werden.

d) $\mathscr{B} = \sigma(\{(-\infty, c]\} : c \in \mathbb{R})$.

e) Falls $\Omega_o 0 \subset \mathbb{R}$, $\Omega_0 \neq \emptyset$, dann ist

$$\mathscr{B}_{\Omega_0} := \{A \cap \Omega_0 : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$$

eine σ-Algebra, die **Einschränkung** von $\mathscr{B}$ auf Ω_0.

Definition 1.19. Seien $E_1, E_2, ..., E_N$ Mengen, $N \leq \infty$.
$\mathscr{E}_i$ seien σ-Algebren auf E_i und es sei

$$\Omega = \mathop{\mathrm{X}}_{i=1}^{N} E_i = \{(e_1, ..., e_N) : e_i \in E_i \forall i \leq N\}$$

Eine Menge der Form

$$A_{j,B_j} = \{(e_1, ..., e_N) : e_j \in B_j, \text{ andere } e_k \text{ beliebig}\}$$

mit $B_j \in \mathscr{E}_j, j \leq N$ heißt **Zylindermenge**.

Definition 1.19. Die σ-Algebra in Ω die von allen Zylindermengen Erzeugt wird heißt **Produkt-σ-Algebra**. Man nennt $\mathscr{Z}$ das System der Zylindermenge und $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \otimes ... \otimes \mathscr{E}_N := \sigma(\mathscr{Z})$.

Definition 1.20. Sei $\Omega, \mathscr{F}$ ein messabere Raum. Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0,1]$ heiß **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß) auf $\mathscr{F}$ (teilweise auch „auf Ω“), falls

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) Für paarweise disjunkte $A_n \in \mathscr{F}$ gilt $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ („σ-Additivität“).

Dann heißt $\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}$ **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Beispiel 1.21. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \P) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \delta_x)$. Dabei ist $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1; & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
Es Modelliert ein „Zufalls“-Experiment, welches sicher x ergibt.

Satz 1.22 (Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen)**.** *Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$. Dann ist*

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
insbesondere $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C) = 1$

c) Falls $A \subseteq B$, dann ist $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ („Monotonie“)

d) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ *(σ-Subadditivität)*

e) Falls $A_n \nearrow A_n$ (d.h. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$), dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$ („σ-Stetigkeit“)
Falls $A_n \searrow A_n$ (d.h. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$), dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$

Beweis. a) $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\infty)$. Also $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

b) Falls $A \cap B = \emptyset$, dann ist $\Phi(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
Sei nun $A \cap B \neq \emptyset$.

$\square$

Definition 1.27. Die Abbildung $\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty], A \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\ dx = \lambda(A)$ heißt **Lebesgue-Maß**

Beispiel 1.28. Sei $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ Borel-messbar und $\int \varrho(x)\ dx = 1$.
Dann ist die Abbildung $\mathbb{P}_p\varrho : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, 1], A \mapsto \int_A \varrho(x)\ dx = \int \chi_A(y)\varrho(x)\ dx$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Definition 1.29. Sei $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ Borel-messbar und $\int \varrho(x)\ dx = 1$, (=1.28) dann heißt ϱ **Dichte** von $\mathbb{P}_p\varrho$.

Beispiel 1.30. Sei ϱ eine Dichte, $x \in \mathbb{R}$. Dann hat $\mathbb{P} := \frac{1}{3}\mathbb{P}_p\varrho + \frac{2}{3}\delta_x$ keine Dichte (siehe **??**)

Bemerkung. Wenn ϱ Dichte ist schreibt man auch $\mathbb{P}_p\varrho \equiv \varrho(x)\ dx$

Definition 1.31. Sei $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(\Omega) < \infty$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit Dichte $\varrho(y) = \frac{1}{\lambda(\Omega)}$ heißt **Gleichverteilung** auf Ω.
Man fasst dann $\tilde{\varrho}(x) = \frac{1}{\lambda(\Omega)}\chi_A\Omega(x)$ als Einbettung in den $\mathbb{R}^n$ auf.

Erinnerung (Zufallsvariable)**.** *Der Begriff „Zufallsvariable“ ist historisch gewachsen. (Keine Variable einer Funktion).*

Problemstellung *Von einem komplizierten Zufälligen Geschehen will man nur gewisse Aspekte betrachten.*

Beispiel 1.32.1 (2 mal Würfeln, Würfelsumme). Sei $\Omega : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 4, 5, 6\}$. $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Der zu betrachtende Aspekt: $S(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 \in \{2, 3, ..., 12\} \neq \Omega$.

Beispiel 1.32.2. Sei $\Omega = \Omega_N$(siehe **??**, einfache Irrfahrt).
$\omega = (\omega_1, \omega_2, ...\omega_N) \in (\mathbb{Z}^d)^N$.

Aspekt 1 Position nach N Schritten.
Modell: $X_N\big((\omega_1, ..., \omega_N)\big) = \omega_N \in \mathbb{Z}^d \neq \Omega$

Aspekt 2 Maximaler Abstand vom Ursprung bis zum Schritt N.
Modell $M_N\big((\omega_1, ..., \omega_N)\big) = \max\{|\omega_j|, j \leq N\}$.

Beispiel 1.32.3. Sei $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{F} \in \mathscr{B}([0, 1])$, $\omega = x \in [0, 1]$.

Aspekt 1 Erste Ziffer nach dem Komma?
Modell: $y_1(x) = \lfloor 10x \rfloor$

Aspekt 2 Fläche des Quadrates mit Kantenlänge x
Modell: $Q(x) = x^2 \in [0, 1]$.

Fazit: Modellierung durch Abbildungen.

Definition 1.33. Seine $(\Omega, \mathscr{F})$ und $(\Omega', \mathscr{F}')$ Ereignisräume.
eine Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ heißt **Zufallsvariable** (ZV) [oder messbare Abbildung, zufälliges Element von Ω'], falls gilt:
$\forall A' \in \mathscr{F}'$ ist $X^{-1}(A') \in \mathscr{F}$.
Hierbei ist X^{-1} das Urbild von A' unter X.

Bemerkung 1.34. Die Urbild-Abbildung bilte Mengen in $\mathscr{F}'$ (d.h.erlaube Ja-Nein-Fragen) auf Mengen in $\mathscr{P}(\Omega)$ (d.h. Ja-Nein-Fragen) ab.

Beispiel. In 1.32.1 **??** ist $S^{-1}(\{4\}) = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.
In 1.32.1 **??** ist $Y_1^{-1}(\{3,7\}) = [0,3,0,4) \cup [0,7,0,8)$

Bemerkung. Die Bedingung (*) bedeutet, dass für alle durch $A \in \mathscr{F}'$ erzeugte erlaubten Ja-Nein-Fragen auch die Frage „Liegt $X(\omega)$ in A'?“ erlaubt ist.

Bemerkung. Oft nimmar man nur Ω und $(\Omega', \mathscr{F}')$ als gegeben.
Dann ist $X^{-1}(\mathscr{F}') := \{X^{-1}(A') \mid A' \in \mathscr{F}'\}$ die von X erzeugt σ-Algebra.

Bemerkung. Falls $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, dann ist jede Abbildung eine Zufallsvariable.

Lemma 1.35. *Seine $(\Omega, \mathscr{F})$ und $(\Omega', \mathscr{F}')$ Ereignisräume, $X : \Omega \to \Omega'$ und sei $\mathscr{G}'$ ein Mengensystem mit $\mathscr{F}' = \sigma(G')$. Dann ist X genau dann Zufallsvariable, wenn $X^{-1}(A') \in \mathscr{F} \forall A' \in \mathscr{G}'$.*

Beweis. **„⇒“** ist klar, da $\mathscr{G}' \subset \mathscr{F}'$

„⇐“ Sei $\mathscr{A}' := \{A' \in \Omega' \mid X^{-1}(A') \in \mathscr{F}\}$ ist eine σ-Algebra und $\mathscr{A}' \supset \mathscr{G}'$ nach Annahme.
Daher ist $\mathscr{F}' = \sigma(\mathscr{G}') \subset \mathscr{A}'$, sodass $X^{-1}(A') \in \mathscr{F} \forall A \in \mathscr{F}$.

□

Beispiel 1.36.1. Sei $(\Omega', \mathscr{F}') = (\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nach 1.35 gilt:
$X : \Omega \to \Omega'$ ist genau dann Zufallsvariable, wenn $X^{-1}\big((-\infty, c)\big) \in \mathscr{F} \forall c \in \mathbb{R}$
Für $\Omega' = \mathbb{R}$ heißt X **reelle Zufallsvariable**

Beispiel 1.36.2. Es ist $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ mit σ-Algebra $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma\big(\{[-\infty - c] : c \in \overline{\mathbb{R}}\}\big)$.
Die Abbildung $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann Zufallsvariable, wenn $X^{-1}\big([-\infty, c]\big) \in \mathscr{F} \forall c$.
Dann heißt X **numerische Zufallsvariable**

Theorem 1.37. *Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathscr{F}')$ ein Ereignisraum, $X : \Omega \to \Omega'$ eine Zufallsvariable.*
Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{P}' : \mathscr{F}' \to [0,1], \quad A' \mapsto \mathbb{P}'(A') := \mathbb{P}(X^{-1}('A))$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathscr{F}')$.

Definition 1.38. $\mathbb{P}'$ heißt **Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter X** oder **Verteilung von X unter $\mathbb{P}$**.
Man schreibt $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ oder $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_X$

Beweis. Da X eine Zufallsvariable ist, ist $X^{-1}(A') \in \mathscr{F} \forall A' \in \mathscr{F}'$, daher im Definitionsbereich von $\mathbb{P}$.
Also ist $\mathbb{P}'$ wohldefiniert. Prüfe Definition 1.20 **??**.

a) $\mathbb{P}'(\Omega') = \mathbb{P}(X^{-1}(\Omega')) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) $A'_1, A'_2, ... \in \mathscr{F}'$ seien paarweise disjunkt. Dann sind $X^{-1}(A'_1), X^{-1}(A'_2), ...$ auch paarweise disjunkt.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}'\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right)\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A'_i)\right)\\ &= \sum_{i=1} \infty \mathbb{P}(X^{-1}(A'_i))\\ &= \sum_{i=1} \infty \mathbb{P}'(A'_i)\end{aligned}$$

□

Definition 1.39. Seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mathbb{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mathbb{P}_2)$ Wahrscheinlichkeitsräume, $X_1 : \Omega_1 \to \Omega'_1$, $X_2 : \Omega_2 \to \Omega'_2$ Zufallsvariablen.
Falls $\mathbb{P}_1(X_1^{-1}(A')) = \mathbb{P}_2(X_2^{-1}(A')) \forall A' \in \mathscr{F}'$, dann heißen X_1 und X_2 identisch verteilt.

Bemerkung 1.40 (Notation). Man schreibt oft:

- $\{X \in A'\}$ statt $X^{-1}(A')$
- $\mathbb{P}(\{X \in A'\})$ oder $\mathbb{P}(X \in A')$ statt $\mathbb{P}(X^{-1}(A'))$
- $\mathbb{P}_X$ statt $\mathbb{P} \circ X^{-1}$.

2. Urnenmodelle mit Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel 2.5.1 (Einmal zeihen:). Bsp: Tulpenzwiebeln, N Stück: k_r rote, k_g gelbe, k_o orange.
Dann ist $\mathbb{P}(\text{rot}) = \frac{k_r}{N}, ...$
Allgemein: Menge der Merkmale $A = (a_1, ..., a_m)$ mit p_i =Bruchteil der „Kugeln“ mit Merkmal a_i, sodass$\mathbb{P}(\{a_i\}) = p_i$.
Dann ist ¶ eine Zähldichte mit $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Beispiel 2.5.2 (N-Mal ziehen). Anzahl der Ziehungen $N \in \mathbb{N}, \Omega = A^N$, $\P\big((a_{j_1}, ..., a_{j_N})\big) := p_{j_1} \cdot ... \cdot p_{j_N}$, für $j_1, ..., j_N \in \{1, ..., m\}$ mit $p_1, ..., p_m$ wie in 1.
Modelliert N-mal „unabhängig“ (siehe Kapitel 3) ziehen mit Zurücklegen.

Definition 2.6. Spezialfall von 2.: $A = \{0, 1\}$, $p_1 = p, p_0 = 1 - p$.
1$\hat{=}$„Erfolg“, $p_1 \hat{=}$„Erfolgswahrscheinlichkeit“.
Dann kann für $\omega \in A^N$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N)$ schreiben:

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\sum_{i=1}^{N} \omega_i}(1 - p)^{\sum_{i=1}^{N}(1-\omega_i)}$$

Man nennt dies die **Bernoulli-Verteilung** für N Versuche mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Definition 2.7. Die Zähldichte $\overline{p} : A \times ... \times A \to [0, 1]$, $\overline{p}(a_1, ..., a_n) \mapsto \mathbb{P}(\{a_1\}) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(\{a_n\}) = p_1 \cdot ... \cdot p_n$ aus 2.5.2 heißt N-fache **Produktdichte** der Zähldichte $p : A \to [0, 1], a_j \mapsto p(a_j) = p_j$.
Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß heißt N-faches **Produktmaß** von ¶.

2.A Urnenmodelle, ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

Beispiel. In Situation Das ist ein „Aspekt“ des Experiments, daher eine Zufallsvariable:

$$C : A^N \mapsto \mathbb{N}_0^m, \quad (a_{j_1}, ..., a_{j_N}) \mapsto \left(\sum_{k=1}^N \chi_{\{a_1\}}(a_{j_k}), \sum_{k=1}^N \chi_{\{a_2\}}(a_{j_k}), ..., \sum_{k=1}^N \chi_{\{a_m\}}(a_{j_k}) \right)$$

und

Definition 2.8. Sei $\lambda > 0$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}_0$ mit Zähldichte $p_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ heißt **Poisson-Verteilung** zum Parameter λ. Schreibe $\mathrm{Poi}(\{k\}) := \mathbb{P}_{p_k}(\{k\})$.

Bemerkung (Bedeutung der Poisson-Verteilung). Modelliert die Anzahl der Erfolge, wenn N =Anzahl der Versuche $\to \infty$, $\mathbb{P}(\text{Erfolg pro Versuch}) \xrightarrow{N\to\infty} 0$, sodass $N\mathbb{P}(\text{Erfolg}) \xrightarrow{N\to\infty} \lambda$.

Definition 2.16. Seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ Folgen, dann heißen $(a_n), (b_n)$ zueinander **asymptotisch äquivalent**, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Lemma 2.17. *Sei $\sim$ die Asymptotische Äquivalenz. Dann gilt*

a) $\sim$ ist Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv)

b) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \leq \infty$ und $(a_n) \sim (b_n)$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Satz 2.15 (Poisson-Approximation)**.** *Sei $\lambda > 0$ und $(p_n) \subset [0,1]$ eine Folge, mit $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lambda$. Sei B_{n,p_n} Binomialverteilung, dann gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:*

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,p_n}(\{k\}) = \mathrm{Poi}_\lambda(\{k\})$$

Beweis. Es gilt für den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} n(n-1)...(n-k+1) \sim \frac{1}{k!} n^k$$

denn für festes $k \in \mathbb{N}$ ist $(n-k) \sim n$ und $\sim$ ist transitiv. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} B_{n,p_n}(\{k\}) = \binom{n}{k} p_n^k (a - p_n)^{n-k} &\sim \frac{1}{k!} n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - n\frac{1}{n} p_n n\right)^n \underbrace{(1-p_n)^{-k}}_{\sim 1} \\ &\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}(p_n n)\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

denn falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} a_n\right)^n e^{-a}$. □

Bemerkung 2.18. Sei α die „Rate des Eintreffens“ eiens Ereignisses E, d.h.

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbb{P}(E \text{ tritt in } [0,\delta] \text{ ein}) \frac{1}{\delta} = \alpha$$

Sei $[0,t]$ der Beobachtungszeitraum. Teile $[0,t]$ in n Intervalle der Länge t/n. Zusätzlich nehmen wir an

(i) Ob E in einem gewissen Teilintervall auftritt beeinflusst die anderen Teilintervalle nicht.

(ii) Zwei Ereignisse in einem Teilintervall sind verschwindend unwahrscheinlich.

Dann ist

$$\mathbb{P}(E \text{ passiert } k\text{-mal in } [0,t]) \overset{(ii)}{\approx} \mathbb{P}(E \text{ passiert in } k \text{ Intervallen}) \overset{(i)}{\approx} B_{n,p_n}(k) \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{Poi}_{\alpha t}(k)$$

Also beschreibt der Parameter λ der Verteilung Poi_λ beschreibt „Rate mal Zeit“.

Definition 2.19. Für $0 < p \leq 1$ heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathscr{G}_p$ auf $\mathbb{N}_0$ mit Zähldichte $g(k) = p(1-p)^k$ die **geometrische Verteilung** zur Erfolgswahrscheinlichkeit p.
$\mathscr{G}(\{k\})$ =„Wahrscheinlichkeit bei Erfolgswahrscheinlichkeit p pro Versuch genau k Fehlversuche vor dem Ersten Erfolg zu sehen“.
Allgemein: Da Wahrscheinlichkeitsmaß $\overline{\mathscr{B}}_{r,p}$ auf $\mathbb{N}_0$ mir $r \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq 1$ mit

$$\overline{\mathscr{B}}(\{k\}) = \frac{r(r+1)...(r+k-1)}{k!} p^r (1-p)^k$$

heißt **negative Binomialverteilung** und modelliert die Wahrscheinlichkeit vor dem $r-$ten Erfolg genau k Misserfolge zu haben.

Definition 2.20. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Exp_α auf $(\mathbb{R}_0^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_0^+))$ mit Dichte $\rho_\alpha(x) := \alpha e^{-\alpha x}$ heißst **Exponentialverteilung** zum Parameter $\alpha > 0$

Definition 2.20. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Exp_α auf $(\mathbb{R}_0^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_0^+))$ mit $\alpha > 0, r \geq 1$ und Dichte

$$\gamma_{\alpha,r} := \frac{\alpha^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\alpha x} = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}$$

heißt **Gammaverteilung** zu den Parametern α, r.

Bemerkung 2.21. a) $\int \gamma_{\alpha,r}(x) = 1$

b)

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}_\alpha([0,t]) &= \alpha \int_0^t e^{-\alpha x}\, dx = \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_0^t = 1 - e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} t^k \\ &= \mathrm{Poi}_{\alpha,t}(\{\mathbb{N}\}) = \mathrm{Poi}_{\alpha t}(\text{„Midestens ein Erfolg vor Zeit } t \text{ bei Rate } \alpha\text{“}) \\ &= \mathbb{P}(\text{„Wartezeit auf ersten Erfolg} \leq t\text{“})\end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\mathbb{P}_{\gamma_{\alpha,r}}([0,t]) = \frac{\alpha^r}{(r-1)!} \int_0^t x^{r-1} e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha t} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \qquad (\star)$$

denn

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\star) &= -\alpha e^{-\alpha t}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!} + e^{-\alpha t}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}kt^{k-1} \\
&= e^{-\alpha t}\left(-\alpha\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!} + \alpha\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{(k-1)!}\right) \\
&= e^{-\alpha t}\alpha\frac{(\alpha t)^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{\alpha^r}{(r-1)!}\frac{d}{dt}\int_0^t x^{r-1}e^{-\alpha x}\ dx
\end{aligned}$$

Somit ist also

$$(\star) = \mathrm{Poi}_{\alpha,t}(\{r, r+1, ...,\}) = \mathbb{P}(\text{Wartezeit bis zum } r\text{-ten Erfolg ist } \leq t)$$

Daher heißt Exp_α α und $\mathbb{P}_{\gamma_{\alpha,r}}$ **Wartezeitverteilungen**.

Definition 2.22. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathscr{N}$ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit Dichte $\phi_{0,1(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$ heißt **Standard-Normalverteilung**. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathscr{N}_{m,v}$ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit Dichte $\phi_{m,v}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right)$ heißt **Normalverteilung** (oder Gaußverteilung/Gaußmaß) mit Mittelwert m und Varianz v.

Proposition 2.23. $\phi_{m,v}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right)$ ist eine Dichte auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} &\overset{y=x-m}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2v}}\ dy \\
&\overset{z=\frac{y}{\sqrt{v}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{z}}\ dz
\end{aligned}$$

Berechne dann stattdessen

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx\right) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy\right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\ dx\ dy \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\ d\theta\ dr \\
&= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\ dr
\end{aligned}$$

mit $s = -\frac{r^2}{2}$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\int_{-\infty}^{0} e^s\ ds \\
&= 2\pi(e^0 - e^{-\infty}) = 2\pi
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} = \sqrt{2\pi}$. □

Bemerkung 2.24. a) Bedeutung der Normalverteilung:
„universeller“ Grenzwert unabhängiger Summen in der „einzig sinnvollen“ Skalierung: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} X_i \to m$.
Es folgt, dass $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m) \sim \mathscr{N}(0, v)$.

b) Geometrische Bedeutung: $\mathscr{N}_{0,v}$ ist die erste Koordinate der sogenannte „Gleichverteilung auf $\mathbb{R}^{\infty}$“.

Satz 2.25. *Sei* $B_N(r) := \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq r\right\}$ *Kugel mit Radius* rim $\mathbb{R}^N$*, sei* $\mathbb{P}_N$ *die Gelichverteilung auf* $B_N(r)$ *und sei* $X_1 : B_N(r) \to \mathbb{R}, x = (x_1, ..., x_N) \mapsto x_1$ *die Zufallsvariable „Projektion auf die erste Koordinate“.*
Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{N,r_N}(a \leq X_1 \leq b) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_N}{\sqrt{N-1}} = \infty \\ \delta_0([a,b]), & \textit{falls } \lim\limits_{N\to\infty} \frac{r_N}{\sqrt{N-1}} = 0 \textit{ und } a,b \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2v}}\ dx, & \textit{falls } \lim\limits_{N\to\infty} \frac{r_N}{\sqrt{N_1}} = \sqrt{v} > 0 \end{cases}$$

Beweis. (nur Fall $a, b \neq 0$ im Fall 2) Integration einer Kugel durch Zerlegen in „Kreisscheiben“.

$$\begin{aligned} h_r(a,b) :&= \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{x_1^2+...+x_N^2 \leq r^2}(x)\chi_{\{a\leq x_1 \leq b\}}\ dx \\ &= \int_a^b dz \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \chi_{x_1^2+...+x_N^2 \leq r^2 - z^2}(x)\ dx \\ &= \int_a^b \int_{B_{N-1}(\sqrt{r^2-z^2})} dx = \int_a^b (r^2-z^2)^{N-1/2}\ dz \underbrace{\int_{B_{N-1}} (1)\ dx}_{=V_1(N-1)} \\ &= r^{N-1} V_1(N_1) \int_a^b \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{N-1}{2}}\ dz \end{aligned}$$

Durch Subtitution $y = \frac{z}{r}\sqrt{N-1}$

$$= r^{N-1} V_1(N-1) \frac{r}{\sqrt{N-1}} \int_{\frac{\sqrt{N-1}}{r}a}^{\frac{\sqrt{N-1}}{r}b} \overbrace{\left(1 - \frac{1}{N-1}y^2\right)}^{=:f_N(y)}\ dy$$

Da $\mathbb{P}_{N,r_N}(a \leq x_1 \leq b) = \frac{h_{r_N}(a,b)}{h_{r_N}(-r_n, r_N)}$ ist kürzen sich die Faktoren vor den Integralen.
Außerdem ist $\lim\limits_{N\to\infty} f_N(y) = \exp(-y^2)^{1/2} = e^{-\frac{1}{2}y^2}$ gleichmäßig auf Kompakta.
(d.h. $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\left\{\left|f_N(y) - e^{-\frac{y^2}{2}}\right| : |y| \leq C\right\} = 0$)
Mit dieser Information kann man relativ leicht zeigen, dass für $a_\infty = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{\sqrt{N-1}}{r_N}a$, $b_\infty = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{\sqrt{N-1}}{r_N}b$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\frac{\sqrt{N-1}}{r_N}a}^{\frac{\sqrt{N-1}}{r_N}b} f_N(x)dy = \begin{cases} \int_{a_\infty}^{b_\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy, & \text{falls } -\infty \leq a_\infty b_\infty \leq \infty \\ 0, & \text{falls } a_\infty = b_\infty \in \{-\infty, 0, \infty\} \end{cases}$$

Aus **??** für $h_{r_N}(-r_n, r_N)$ folgt die Behauptung in allen Fällen. $\square$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

Definition 3.1. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in \mathscr{F}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$. Dann heißt die Abbildung

$$\mathbb{P}_A : \mathscr{F} \to [0,1], \quad B \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß unter der Bedingung A.
Für festes $B \in \mathscr{F}$ heißt die Zahl $\mathbb{P}(B|A) := \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B unter der Bedingung A.

Proposition 3.2. $\mathbb{P}_A$ ist das eindeutige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit den Eigenschaften

(i) $\mathbb{P}_A(A) = 1$

(ii) $\exists c > 0$ mit $\mathbb{P}_A(B) = c\mathbb{P}(B) \forall B \in \mathscr{F}$ mit $B \subseteq A$.

Beweis. a) $\mathbb{P}_A$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß und erfüllt (i),(ii).

b) $\mathbb{P}$ ist eindeutig:
Sei $\tilde{\mathbb{P}}_A$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit den Eigenschaften (i),(ii).
Dann gilt $\tilde{\mathbb{P}}_A(B) = \tilde{\mathbb{P}}_A(A \cap B) + \tilde{\mathbb{P}}_A(B \setminus A = c\mathbb{P}(A \cap B))$.
Mit $B = A$ folgt $1 = \tilde{\mathbb{P}}_A(A) = c\mathbb{P}(A)$, also $\frac{1}{\mathbb{P}(A)}$. Also ist

$$\tilde{\mathbb{P}}_A(B) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)$$

□

Bemerkung 3.3. $\mathbb{P}_A$ modelliert die Situation, dass wir wissen, dass A sicher eintritt. $\mathbb{P}_A$ beschreibt das Modell welches diese Information berücksichtigt (**??**(i)), aber sonst möglichst wenig ändert (**??**(ii)).

Beispiel. 2-Mal Würfeln, Information ‚Summe wird 10 sein'.
(In der Praxis: alle Würfe mit $X_1 + X_2 \neq 10$ werden ungültig gemacht.)

$$\mathbb{P}_A(\underbrace{X_1 = 5}_{B}) = \mathbb{P}\big(\underbrace{\{(5,x) : 1 \leq x \leq 6\}}_{B} \cap \underbrace{\{(x,y) : x+y = 10\}}_{A}\big) / \mathbb{P}\big(\underbrace{\{(x,y) : x+y = 10\}}_{A}\big)$$
$$= \frac{\mathbb{P}(\{(5,5)\})}{\mathbb{P}(\{(4,6),(5,5),(6,4)\})} = \frac{1}{3}$$

Satz 3.4. *Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $N \leq \infty$, $(B_i)_{i=1,\ldots,N}$ mit paarweise disjunkten $B_i \in \mathscr{F}$ und $\bigcap_{i=1}^{N} B_i = \Omega$ (eine abzählbare Partition von Ω)*

a) Fallunterscheidungsformel:

$$\forall A \in \mathscr{F} \textit{ ist } \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(B_a)\mathbb{P}(A|B_i)$$

(Konvention: $\mathbb{P}(A|B_i) = 0$, falls $\mathbb{P}(B_i) = 0$)

b) *Formal von Bayes:* $\forall k \leq N$ *ist*

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_{i=1}^N \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)} \qquad (\star)$$

Beweis. a) $\sum_{i=1}^N \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(B_i \cap A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N B_i \cap A\right) = \mathbb{P}(A)$

b) $\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(B_k|A)}{\mathbb{P}(A)} = (\star)$

□

Beispiel 3.5 (Bayes Formel in der Medizin, False-Positive beim HIV-Test). Sei $B_1 = \{\text{Menschn mit HIV}\}$, $B_2 = \Omega \setminus B_1 = \{gesundeMenschen\}$. Empirisch Bekannt $\mathbb{P}(B_1) = 0.02$ (2% infizierte), $\mathbb{P}(A|B_1) = 0.95$ (Sensitivität 95%), $\mathbb{P}(A|B_2) = 0.1$ (Spezifität 10%).
Angenommen „Test ist Positiv“:

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1)}{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2)} = \frac{0.02 \cdot 0.95}{0.02 \cdot 0.95 + 0.98 \cdot 0.1} \approx \frac{1}{6}$$

Viel kleiner als die naiv vermuteten 0.9.

3.A Galton-Watson-Prozesse und Wahrscheinlichkeitsbäume

Beispiel 3.6 (Mehrstufiges Modell).

a) 1 Lebewesen bekommt $X_{1,1} \in \mathbb{N}_0$ Nachkommen und stirbt danach.
$X_{1,1}$ ist Zufallsvariable.

b) Die $X_{1,1}$ Nachkommen bekommen jeweils $X_{2,1}, X_{2,2}, ..., X_{2,X_{1,1}}$ Nachkommen und stirbt. Nun leben

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{X_{1,1}} X_{2,i}$$

Lebewesen.

c) Die Y_2 Lebewesen bekommen jeweils $X_{3,1}, X_{3,2}, ..., X_{3,Y_2}$ Nachkommen.

Proposition 3.7. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_1|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Beweis. Falls $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = 0$, dann (Konvention) ist auch $\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap ... \Cap A_{n-1}) = 0$. Sonst

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_1|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\frac{\mathbb{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)}\frac{\mathbb{P}(A-1 \cap A_2 \cap A-3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}\cdots\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap .... \cap A_n)}{\mathbb{P}(A-1 \cap ... \cap A_{n-1})} \\
&= \mathbb{P}(A-1 \cap ... \cap A_n).
\end{aligned}$$

□

Satz 3.8. *Sei $N \leq \infty$ und seien $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$ Messräume und die Ω_i abzählbar. Sei ρ_1 Zähldichte auf Ω_1 und
$\forall k < N, \omega_i \in \Omega_i, i \leq k$ sei $\rho_{k+1|\omega_1,...,\omega_k}$ Zähldichte auf Ω_{k+1}.
Sei $\Omega = \bigtimes_{i=1}^{N} \Omega_i$ und $X_o : \Omega \to \Omega_i$, $\omega = (\omega_1, ...,) \mapsto \omega_i$ die i-te Projektion.*

Dann esxistiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \bigotimes_{i=1}^{N} \mathscr{F}_i)$ mit den Eigenschaften

a) $\mathbb{P}(X_1 = \omega_1) = \rho_1(\omega_1)$ *für alle* $\omega_1 \in \Omega_1$.

b) $\forall k < N, \omega \in \Omega$ *und falls* $\mathbb{P}(X_1 = \omega_1, ..., X_k = \omega_k) \neq 0$, *dann ist*

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = \omega_{k+1} \mid X_j = \omega_j \forall j \leq k) = \rho_{\omega_{k+1}|\omega_1,...,\omega_k}(\omega_{k+1})$$

Bemerkung 3.9. a) Insbesondere osz $\mathbb{P}(A_1 = \omega_1, ..., X_{k+1} = \omega_{k+1}) = \rho_1(\omega_1) \cdot ... \cdot \rho_{k+1|\omega_1,...,\omega_k}(\omega_{k+1})$. („Produkt entlang der Äste")

b) Falls $N < \infty$ dann hat $\mathbb{P}$ die Zähldichte $\rho : \omega = (\omega_1, ..., \omega_k) \mapsto \rho_1(\omega_1) \cdot ... \cdot \rho_{N|\omega_1,...,\omega_{N+1}}(\omega_N)$.

c) Falls $N = \infty$, dann hat $\mathbb{P}$ im Allgemeinen keine Zähldichte

Beweis. a) Falls $N < \infty$: Nachrechnen

b) Falls $N = \infty$ Bilde $[0, 1] \to \Omega$ mittels $x \mapsto (\omega_1(x), ...)$ mit $\omega_i(x)$= dasjenige $\omega_i \in \Omega_i$, sodass x im zu ω_i gehörigen Intervall liegt, in Stufe i.
Zeige dann $X : x \mapsto \omega(x)$ ist Zufallsvariable von $([0, 1], \mathscr{B}([0, 1]))$ nach $(\Omega, \mathscr{F})$. $\mathbb{P}$ ist dann das Bildmaß .

□

Beispiel 3.10.1 (unendlich oft wiederholter Münzwurf). Sei $\Omega = \{-1, 1\}^N$ und $\mathscr{F} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathscr{P}(-1, 1)$.
($\mathscr{F}$ wird also von den Mengen

$$\big\{\{\omega \in \Omega : \omega_1 = k_1, ..., \omega_n = k_n\} : K_i \in \{-1, 1\} \forall i \leq nnn \in \mathbb{N}\big\}$$

erzeugt. und $\mathbb{P}(\omega_1 = k_1, ..., \omega_n = k_n) = 2^{-n}$.
Im Fall von Satz 3.8 bedeutet das $\rho_1(\omega_1) = \frac{1}{2}, \rho_{2,\omega_1}(\omega_2) = \frac{1}{2}$.

Beispiel 3.10.2 (Unendlich oft wiederholtes würfeln, 10-Seitiger Würfel). Sei $\Omega = \{0, 1, ..., 9\}$. Die Abbildung X aus 3.8 ist hier:

$$X : [0, 1) \mapsto \Omega = \bigtimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i, x \mapsto \omega(x)$$

Definition 3.11. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathscr{F}$.
A, B heißen **unabhängig** (oder **unabhängige Ereignisse**), falls $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Man schreibt $A \perp\!\!\!\perp B$.

Bemerkung. a) Falls $A \perp\!\!\!\perp B$, dann ist

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

b) Beachte:
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ („additiv"), falls A, B
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ („multiplikativ"), falls A, B unabhängig (per Definition).

c) Aussage b) gilt zwar für $A_1, A_1, A_3\mathscr{F}$ falls $\mathbb{P}(A_i \cup A_j) = \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_j)$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$und $i \neq j$. Dann gilt auch

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

Aber: gilt nicht für Unabhängigkeit.
Unabhängigkeit ist eine algebraische Eigenschafte von Mengen und Wahrscheinlichkeitsmaßen.
Die Interpretation „A beeinflusst B nicht" ist nicht immer richtig.

d) Unabhängigkeit trotz Kausalität: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, $\mathbb{P}(A\cap B)\mathbb{P}(\{6, 1\}) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Geht nicht wenn man 7 durch 8 ersetzt!

e) $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$, es folgt $A \perp\!\!\!\perp A$

f) Im wichtigen Fall der Produktmaße sind jedoch c) bis e) nicht relevant

Definition 3.12. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $I \neq 0$ eine Indexmenge. $(A_i)_{i\in I}$ heißt **unabhängige** Familie von Mengen, wenn $\forall J \subseteq$, mit $|J| < \infty$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

(d.h. Multiplikativ für alle Kombinationen von endlich vielen Mengen) gilt.

Definition 3.13. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $I \neq 0$ sei Indexmenge und $\forall i \in I$ seien $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$ Ereignisräume. Seien $Y_i : \Omega \to \Omega_i$ Zufallsvariablen.
Die Familie $(Y_i)_{i\in I}$ heißt **unabhängig** (oder **unabhängige Familie von Zufallsvariablen**), wenn $\forall J \subseteq$, mit $|J| < \infty$ und für alle $(B_j)_{j\in J}$ mit $B_j \in \mathscr{F}_j$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} Y_j^{-1}(B_j)\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(Y_j^{-1}(B_j)\right)$$

gilt.

Definition 3.13. Eien Familie $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ von **Megensystemen** heißst **unabhängig** (oder auch unabhänguge Famile von Mengensystemen), wenn $\forall J \subseteq$, mit $|J| < \infty$, für alle $(A_j)_{j\in J}$ mit $A_j \in \mathscr{A}_j$ sind die Mengen $(A_j)_{j\in J}$ unabhängig.
(Dabei darf aus jedem $\mathscr{A}_j$ höchstens ein A_j gewählt werden.)
Daher $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \sigma(A) \perp\!\!\!\perp \sigma(Y)$.

Satz 3.14. *In 3.13 sei $\mathscr{G}_i$ ein Schnitt-stabiler Erzeuger von $\mathscr{F}_i$. Dann*

$$\textbf{??}\ \textit{gilt}\ \forall B_i \in \mathscr{G}_i \Leftrightarrow \textbf{??}\ \textit{gilt}\ \forall B_i \in \mathscr{F}_i$$

Beweis. **„⇐"** klar, da $\mathscr{G}_i \subseteq \mathscr{F}_i$

„$\Rightarrow$“ Durch Induktion nach $n := |\{i \in J : B_i \in \mathscr{F} - i \setminus \mathscr{G}_i\}|$:

$n = 0$ bedeutet $B_i \in \mathscr{G}_i \forall i \in J$.

$n \to n+1$ Seien $(B_i)_{i \in J}$ mit $B_i \in \mathscr{F}_i \forall i \in J$ und $B_i \in \mathscr{F}_i \setminus \mathscr{G}_i$ (n+1)-mal. Wähle $j \in J$ und setze $J' = J \setminus \{j\}$, dann folgt aus der Induktionsannahme, dass für

$$A : \bigcap_{i \in J'} Y_i^{-1}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i \in J'} \mathbb{P}(Y_i^{-1}(B_i)) \tag{$\star$}$$

gilt.
Falls $\mathbb{P}(A) = 0$, dann ist auch $\mathbb{P}(A \cap Y^{-1}(B_j)) = 0$.
Falls $\mathbb{P}(A) > 0$, dann definiere die Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i : \mathscr{F}_j &\to [0,1], \\ \tilde{B}_i &\mapsto \mathbb{P}(Y_j^{-1}(\tilde{B}_j)|A) = \frac{\mathbb{P}(Y_j^{-1}(\tilde{B}_j) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \qquad (\star\star) \\ \mathbb{P}_2 : \mathscr{F} : i &\to [0,1], \\ \tilde{B}_j &\mapsto \mathbb{P}(Y_j^{-1}(\tilde{B}_j)) \end{aligned}$$

Da **??** für n gilt ist $\forall \tilde{B}_j \in \tilde{\mathscr{G}}_j$, also

$$\mathbb{P}_1(\tilde{B}_j) = \frac{\mathbb{P}\big(Y_j^{-1}(\tilde{B}_j)\big) \cdot \prod_{i \in J'} \mathbb{P}\big(Y_i^{-1}(B_i)\big)}{\mathbb{P}(A)} \overset{(\star)}{=} \mathbb{P}\big(Y_j^{-1}(\tilde{B}_j)\big) = \mathbb{P}_2(\tilde{B}_j)$$

Es folgt, dass $\mathbb{P}_1(\tilde{B}) = \mathbb{P}_2(\tilde{B}) \forall \tilde{B} \in \mathscr{G}_j$, sodass aus **??** folgt, dass $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$. Dann

$$\begin{aligned} \prod_{i \in J} \mathbb{P}\big(Y_i^{-1}(B_i)\big) &\overset{(\star)}{=} \mathbb{P}\big(Y_j^{-1}(b_i)\big)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_2(B_j)\mathbb{P}(A) \\ &= \mathbb{P}_1(B_j)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(Y_j^{-1}(B_j) \cap A\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} Y_i^{-1}(B_i)\right) \end{aligned}$$

für alle $B_i \in \mathscr{F}_i$. Es folgt die Behauptung.

□

Korollar 3.15. *Seien $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, dann gilt*

a) Falls $Y_i : \Omega \to E_i$ mit E_i abzählbar, dann

$$(Y_i) \text{ ist unabhängig} \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y_1 = e_1, \dots, Y_n = e_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i = e_i)$$

für alle $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$.

b) Falls $Y_i : \Omega \to \mathbb{R}$, dann ist

$$(Y_i) \textit{ ist unabhängig} \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y_1 \leq c_1, ..., Y_n \leq c_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i \leq c_i)$$

für alle $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

Korollar 3.16. *Sei $(\Omega, \mathscr{F}\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine Menge und für alle $i \in I$ sei $A_i \in \mathscr{F}$. Dann gilt*

a) $(A_i)_{i \in I}$ sind unabhängige Mengen $\Leftrightarrow$ $(\chi_{A_i})_{i \in I}$ unabhängige Zufallsvariablen sind.

b) Insbesondere: Falls $(A_i)_{i \in I}$ unabhängig und $C_i \in \{\emptyset, \Omega, A_i, A_i^C\}$ für alle $i \in I$, dann sind auch $(C_i)_{i \in I}$ unabhängig.

Beweis. Für $a \in \mathscr{F}$ ist $\chi_A : \Omega \to \{0,1\}, \omega \mapsto \chi_A(\omega)$ eine Zufallsvariable und das einelementige Mengensystem $\{\}$ ist ein Schnitt-stabiler Erzeuger von $\mathscr{P}(\{0,1\})$ und $\chi_a^{-1}(\{1\}) = A$.
Daher gilt, dass (A_i) unabhängig $\Leftrightarrow$ **??** gilt falls $B_i = \{1\} \overset{3.14}{\Leftrightarrow} \chi_{A_i}$ ist unabhängig. Also gilt 1.
Für 2. Setze

$$B_i = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } c_i = A \\ \{0\} & \text{falls } c_i = A^c \\ \emptyset & \text{falls } c_i = \emptyset \\ \{0,1\} & \text{falls } c_i = \Omega \end{cases}$$

Dann folgt 2 aus der Unabhängigkeit der χ_{A_i} und aus **??** mit den so gewählten B_i. □

Beispiel 3.17. Punkt auf Kreisscheibe: Winkel und Radius unabhängig

Satz 3.18. *Seien $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ unabhängige Zufallsvariable, mit $Y_i : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\Omega_i \mathscr{F}_i)$. Dann gilt*

a) Falls $\phi_i : (\Omega_i \mathscr{F}_i) \to (E_i \mathscr{E}_i)$ messbar und $Z_i : \Omega \to E_i, \omega \mapsto \phi_i(Y_i(\omega))$, dann sind auch $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig. („Stabilität unter einsetzen in Funktionen“)

b) Seien $J_1, J_2, ...,$ paarweise disjunkte Teilmengen von $\mathbb{N}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$W_k(\omega) = (X_i(\omega))_{i \in J_k} \in \bigtimes_{i \in J_k} \Omega_i$$

Dann sind die Zufallsvariablen $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängig:
(„Stabilität gegenüber Zusammenfassen in disjunkte Blöcke“)

Beweis. a) Sei $I \subset \mathbb{N}$ endlich. Dann ist (für $A_i \in \mathscr{E}_i$)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} Z_i^{-1}(A_i)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} Y_i^{-1}(A_i)\right) \overset{Y_i \text{ unahängig}}{=} \prod \mathbb{P}(Y_i^{-1}(\phi^{-1}(A_i)))$$

b) Es gilt $\times_{i=1}^n A_i) = \{(\omega_1, ..., \omega_n) : \omega_1 \in A_1, ..., \omega_n \in A_n\} \subset \times_{i=1}^n \Omega_i$.
Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\mathscr{G}_k := \left\{ \underset{i \in J_k}{\times} A_i^{(k)} : A^{(k)} \in \mathscr{F}_i \forall i \in J_k \, A_i^{(k)} \neq \Omega_i \text{ nur endlich oft} \right\}$$

$\mathscr{G}_k$ ist Schnitt-stabiler Erzeuger von $\bigotimes_{i \in J_k} \mathscr{F}_i$, also miss **??** nur auf $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ geprüft werden.
Seien also $B_{k_1} \in \mathscr{G}_{k_1}, ..., B_{k_n} \in \mathscr{G}_{k_n}$. Da $W_{k_j} \in B_{k_j}$ genau dann wenn $X_i \in A_i^{kj}$ ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{k_1} \in B_{k_1}, ..., W_{k_n \in P_{k_n}}) &= \mathbb{P}(X_i \in A_i^{(k)} \forall i \in J_{k_1,...,} X_i \in A_i^{(k)} \forall i \in J_k) \\ &= \prod_{l=1}^n \prod_{i \in J_{k_l}} \mathbb{P}(X_i \in A_i^{(k_l)}) = \prod_{l=1}^n \mathbb{P}(W_{k_l} \in B_{k_l})\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Unabhängigkeit ist eng verwandt mit dem Produktmaß:

Definition 3.19. Sei $(\Omega, \mathscr{F}_i, \mathbb{P}_i)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum für $i \in \mathbb{N}$.
Jedes Maß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathscr{F}) := (\times_{i=1}^\infty \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^\infty \mathscr{F}_i)$
($\bigotimes_{i=1}^\infty \mathscr{F}_i$ erzeugt durch Zylindermengen)
mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}\left(\{\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega : \omega_{j_i} \in A_{j_i}, ..., \omega_{j_m} \in A_{j_m}\}\right) = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}_{jk}(A_{jk}) \tag{3.2}$$

für alle $j_1 < j_2 < ... < j_m$, mit $j_i \in \mathbb{N}$ und $A_{ji} \in \mathscr{F}_{ji}$ heißt **Produktmaß** der Maße $\mathbb{P}_i$. Schreibweise $\mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^\infty \mathbb{P}_i$

Bemerkung 3.20. a) In 3.19existiert immer genau ein Produktmaß.
(Eindeutigkeit nach Satz **??**, Existenz aus dem Maßfortsetzungssatz)

b) Wichtiger Spezialfall:

(i) Sei $\Omega_i = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}_i(0) = \mathbb{P}_i(1) = \frac{1}{2}$ für alle i (unendlich oft wiederholter Münzwurf)

(ii) Sei $\Omega_i = \mathbb{R}$, $\mathscr{F}_i \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_i = \rho(x)\, dx$ für alle i.
(Zufällige Folge mit Gliedern die gemäß $\rho(x)\, dx$ verteilt sind.)

Proposition 3.21. a) Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$Zufallsvariablen, $X_i : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\Omega_i \mathscr{F}_i)$, dann gilt

(X_i) ist unabhängig $\Leftrightarrow$ Das Bildmaß der Zufallsvariablen $X : \Omega \to \underset{i=1}{\overset{\infty}{\times}} \Omega_i, \omega \mapsto (X_i(\omega))_{i \in \mathbb{N}}$ ist ein Pro

b) Seien $(\Omega_i \mathscr{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ seien Maßräume, $\Omega = \times_{i=1}^\infty, \mathscr{F} = \bigotimes_{i=1}^\infty \mathscr{F}_i$.
$\mathbb{P}$ sei ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{F})$. Dann gilt:

$\mathbb{P}$ ist Produktmaß $\Leftrightarrow$ Die Projektionenn $X_i : \Omega \to \Omega_i$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...) \mapsto \omega_i$ sin unabhängige Zufallsvar

Bemerkung 3.22. In 3.21a) heißt der Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbb{P}}) := (\times_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty}, \mathbb{P}_X)$ mit $X = (X_i)_{i\in N}$ der kanonische Wahrscheinlichkeitsraum der Zufallsvariablen X_i. Die i-te Koordinatenabbildung $Y_i : \tilde{\Omega} \to \Omega_i$ entspricht dann jeweis X_i, d.h. $(Y_{i_1}, ..., Y_{i_n})$ hat die gleiche Verteilung wie $(X_{i_1}, ..., X_{i_n})$.

Definition 3.23. Seien $\Pr_1, ..., \mathbb{P}_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte $\rho_1, ..., \rho_n$. Dann heißt

$$\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+, (x_1, ..., x_n) \mapsto \rho(x_1, ..., x_n) = \rho_1(x_1)...\rho_n(x_n)$$

die **Produktdichte**.

Satz 3.23. *Die Produktdichte ist die Dichte des Produktmaßes.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((-\infty, c_1] \times (-\infty, x_2] \times ... \times (-\infty, c_1]\big) &= \mathbb{P}(X_1 \leq c_1, ..., X_n \leq c_n) \\
&\overset{\textbf{??}b)}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq c)...\mathbb{P}(X_n \leq n) \\
&= \int_{-\infty}^{c_1} \rho_1(x_1)\ dx_1 \cdot ... \cdot \int_{-\infty}^{c_n} \rho_n(x_n)\ dx_n \\
&\overset{\substack{\text{Satz von} \\ \text{Fubini}}}{=} \int_{(-\infty,c_1]\times...\times(-\infty,c_n]} \rho_1(x_1)...\rho_n(x_n)\ dx_1...\ dx_n \\
&= \int_{(-\infty,c_1]\times(-\infty,x_2]\times...\times(-\infty,c_1]} \rho(x)\ dx
\end{aligned}$$

Dann folgt mit **??**, dass $\mathbb{P}$ die Dichte ρ hat. □

Bemerkung. Für unabhängige Zufallsvariablen X, Y kann man die Dichte $X+Y$ mittels Faltungsprodukt berechnen.

Satz 3.24. *Seien $X, Y : \Omega \to \Omega'$ unabhängige Zufallsvariablen*

a) Falls $\Omega' = \mathbb{Z}$ und falls $\mathbb{P}_X$ (bzw $\mathbb{P}_Y$) Zähldichte ρ_1 (bzw. ρ_2), dann hat $\mathbb{P}_{X+Y}$ die Zähldichte

$$\rho_1 * \rho_2 : \mathbb{Z} \to [0, 1], z \mapsto \rho_1 * \rho_2(z) = \sum_{k\in Z} \rho_1(k)\rho_2(z-k)$$

b) Falls $\Omega' = \mathbb{R}$ und falls $\mathbb{P}_X$ (bzw $\mathbb{P}_Y$) die Dichte ρ_1 (bzw. ρ_2), dann hat $\mathbb{P}_{X+Y}$ die Dichte

$$\rho_1 * \rho_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \rho_1 * \rho_2(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_1(y)\rho_2(x-y)\ dy$$

Beweis. a) Da nur $\mathbb{P}_X, \mathbb{P}_Y, \mathbb{P}_{X+Y}$ untersucht werden kann man$\Omega = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $X\big((z_1, z_2)\big) = z_1$ und $Y\big((z_1, z_2)\big) = z_2$ wählen und $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ hat die Produkt-Zähldichte $(z_1, z_2) \mapsto \rho_1(z_1)\rho_2(z_2)$.
Dann gilt $X + Y = w \in \mathbb{Z}$,genau dann wenn $z_1 + z_2 = w$, bzw. $z = 1 = w - z_2$.
Also $(X + y)^{-1}(\{w\}) = \{(z_1, z_2) : z_1 = w - z_2\}$, es folgt

$$\mathbb{P}_{X+Y}(\{w\}) = \mathbb{P}_{(X,Y)}\big((X+Y)^{-1}(\{w\})\big) = \sum_{\substack{z_1\in\mathbb{Z} \\ z_2\in\mathbb{Z} \\ z_1+z_2=w}} \rho(z_1)\rho(z_2) = \sum_{z\in Z} \rho_1(z)\rho_2(w-z)$$

b) Setze $\Omega = \mathbb{R}^2$, $X\big((x_1,x_2)\big) = x_1$, $Y\big((x_1,x_2)\big) = x_2$, $\mathbb{P}\big([a,b]\times[c,d]\big) = \int_{[a,b]\times[b,c]} \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\ dx_1\ dx_2$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y\le c) &= \mathbb{P}\big(\{(x,y)\in\Omega\} : x+y\le c\big)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\rho_1\int_{-\infty}^{c-x}\rho_2(y)\ dy\ dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\rho_1\int_{-\infty}^{c}\rho_2(\tilde{y}-x)\ d\tilde{y}\ dx\\ &= \int_{-\infty}^{c}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\rho_1(x)\rho_2(\tilde{y}-x)\ dx}_{=\rho_1*\rho_2(\tilde{y})}\ d\tilde{y}\end{aligned}$$

Dann folgt mit **??**, dass $\mathbb{P}_{X+Y}$ die Dichte $\rho_1 * \rho_2$ hat.

□

Beispiel 3.25.1.

Beispiel 3.28. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{F} = \otimes_{x=1}^{\infty}\mathscr{B}(\mathbb{R})$, $X_i(\omega) = \omega_i$ Projektionen. Sei

$$\begin{aligned}A_1 &= \left\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty}\omega_n \text{ exitsiert}\right\}\\ A_2 &= \left\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n(\omega) = 0\right\}\\ A_3 &= \left\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\omega_n \text{ exitsiert}\right\}\end{aligned}$$

Für A_1, A_2, A_3 gilt: Sei $\omega\in A_j$. Wenn $\tilde{\omega}_i = \omega_i$ für alle außer endlich viele $i\in\mathbb{N}$ gilt, dann ist $\tilde{\omega}\in A_j$. Ebenso wenn $\omega\in A_j^C$, dann $\omega\in A_j^C$.

Definition 3.29. Sei $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X_i : (\Omega,\mathscr{F})\to(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$ seien Zufallsvariablen. Setze

$$\mathscr{F}_{\{i\}} = \sigma(X_i) = \{X_i^{-1}(B) : B\in\mathscr{F}_i\} \qquad \text{(„von } X_i \text{ erzeugte } \sigma\text{-Algebra“)}$$

Setze für $K\subseteq\mathbb{N}$

$$\mathscr{F}_K := \sigma(\{X_i : i\in K\}) = \sigma(\mathscr{F}_{\{i\}} : i\in K) \qquad \text{(„von } (X_i)_{i\in K} \text{ erzeugte } \sigma\text{-Algebra“)}$$

Schreibe für $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_n &:= \mathscr{F}_{\{1,\dots,n\}} && \text{(„}\sigma\text{-Algebra bis zur ‚Zeit‘ } n\text{“)}\\ \tau_n &:= \mathscr{F}_{n+1,n+2,\dots} && \text{(„}\sigma\text{-Algebra nach der Zeit } n\text{“)}\\ \tau &:= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\tau_n && \text{(„terminale/asymptotische } \sigma\text{-Algebra“)}\end{aligned}$$

Beispiel 3.30. Für $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$, X_i ist i-te Projektion. Dann ist

$$\mathscr{F}_{\{1,\dots,n\}} = \Big\{\big\{x\in\mathbb{R}^N : (x_1,\dots,x_n)\in B, x_{n+1} \text{ beliebig}, x_{n+1} \text{ beliebig}, \dots\big\} : B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\Big\}$$

sind Zylindermengen.
Für $|K| = \infty$ (insbesondere für τ_n) kann man $\mathscr{F}_K$ nicht explizit angeben. Stattdessen: τ_n =kleinste σ-Algebra, die $\mathscr{F}_{n+1,n+2,\dots,m}$ enthält für alle $m > n$.

Definition 3.31. Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ Messraum, $A_i \in \mathscr{F}$ für alle $\in \mathbb{N}$. Definiere

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m} A_k = \{\omega, \in \Omega : \omega \in A_i \text{ für unendlich viele } i\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m} A_k = \{\omega, \in \Omega : \omega \in A_i \text{ für alle außer endlich viele viele } i\}$$

Proposition 3.32. a) Die Gleichheiten in 3.31 gelten

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A - n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

c) Für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_i}(\omega) = \chi_{\liminf_{n\to\infty} A_i}(\omega)$$
$$\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_i}(\omega) = \chi_{\limsup_{n\to\infty} A_i}(\omega)$$

d) Falls $X_i : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\Omega_i \mathscr{G}_i)$ Zufallsvariablen sind uns $A_i = X^{-1}(B_i)$ mit $B_i \mathscr{G}_i$, dann sind $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \tau$ und $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \tau$.
(Nicht aber $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ oder $\bigcup_{n=1}^{\infty}$!)

Beispiel 3.33. In der Situation von 3.29 mit $\Omega_i = \mathbb{R}$ ist

$$A = \left\{ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \text{ exitsiert und liegt in } [a, b] \right\} \in \tau$$

für alle $a \leq b$.

Satz 3.34.

Bemerkung. In der Sitation von **??** können also nur Wahrscheinlichkeiten $\{0, 1\}$ auftreten, wenn die X_i unabhängig sind. Welche der beiden Möglichkeiten trifft zu?
Diese frage is i.A. schwierig zu beantworten, aber im Fall $\limsup_{n\to\infty} A_n$ gibt es folgenden Satz:

Satz 3.35 (Lemma von Boreal-Cantelli)**.** *Sei* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $A_j \in \mathscr{F}$*, für alle* $j \in \mathbb{N}$*. Dann*

a) Falls $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty$*, dann ist* $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$

b) Falls $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *unabhängig dun* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$*, dann ist* $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Beweis. a) Für alle m ist $A \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Also ist $\mathbb{P}(A) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$.
Da $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty$ gilt, muss $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$ gelten. Da die Mengenfolge $(\bigcup_{k=m}^{\infty})_{m\in\mathbb{N}}$ absteigend ist gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k \right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k \right) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$$

b) Es gilt für das Komplement:

$$A^C = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^C) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=m}^{\infty} A_K^C\right) \overset{\substack{\text{Satz ?? c)}\\ \text{absteigende}\\ \text{Mengefolge}}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=m}^{\infty} A_K^C\right)\\
&\overset{\text{unabh.}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=m}^{n} (1-\mathbb{P}(A_k))\\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} e^{-\sum_{k=m}^{\mathbb{P}(A_k)}}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty} 0 = 0
\end{aligned}$$

□

4 Erwartungswert und Varianz

Bemerkung 4.1 (Motivation). Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $X_i : \Omega \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(X_i = k) = p_k$ seien unabhängige Zufallsvariablen.
(d.h. (p_k) ist zähldichte für jedes X_i)
Wenn man nun N-mal mit (X_i) „würfelt“, erhält man N zufällige ganze Zahlen $X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$.
(„Realisierung von $(X_1, ..., X_n)$“)

Frage Wie groß ist der (zufällige) Mittelwert für $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i$ typischerweise wenn n groß (unendlich groß) wird?

Beispiel $\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{1}{6}$, falls $k \in \{1, ..., 6\}$. Dann ist der Mittelwert ≈ 3.5. Es ist aber auch $(1, 1, 1, ..., 1)$ möglich.

Überlegung p_k modelliert die „relative Häufigkeit“ mit der der Wert k auftritt.
D.h. für große n sollte man cs $p_k \cdot n$-mal den Wert k erhalten.
Wähle z.B. $(-4, 2, 1, 2, -4, 0, 1, 3, 2, -3, 1, 0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) &= \frac{1}{n}\left(0|\{i \leq n : X_i(\omega = 0)\}| + 1|\{i \leq n : X_i(\omega) = 1\}| + (-1)|\{i \leq n : X_i(\omega = -1)\}| + ...\right)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k}{n}|\{i \leq n : X_i(\omega) = k\}|\\
&\overset{?}{\approx} \sum_{k\in\mathbb{Z}} kp_k \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Beobachtung Das letzte $\approx$ stimmt sicher nicht immer, sollte aber „meistens“ richtig sein.
Siehe dazu **??** (Gesetze der großen Zahlen)

Betrachte nun die rechte Seite von $(\star)$:

Definition 4.2. Eine reelle Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **diskret** wenn die Menge $X(\Omega)$ höchstens abzählbar ist

Definition 4.3. Sei X eine diskrete Zufallsvariable. X heißt **integrierbar** (bzw „**Erwartungswert existiert**"), falls

$$\sum_{y \in X(\Omega)} |y|\mathbb{P}(X = y) < \infty$$

Man schreibt $X \in \mathscr{L}^1$ bzw. $X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{P})$.

Definition 4.3. Für $X \in \mathscr{L}^1$ heißt

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) := \sum_{y \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = y) \in \mathbb{R}$$

der **Erwartungswert** von X.

Beispiel 4.4.1. Sei $X : \Omega \to \{a, b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{P}(X = a) = p = 1 - \mathbb{P}(X = b)$. Dann ist $\mathbb{E}(X = p \cdot 0 + (1-p)b = b + p(a-b)$.

$a = 1$**,** $b = 0$ Dann ist $\mathbb{E}(X = p$ (Münzwurf)

$a = 1$**,** $b = -1$ Dann ist $\mathbb{E}(X = 1 - 2p$ (Schrittweise Irrfahrt)

Beispiel 4.4.2. Sei T geometrisch verteilt, also $\mathbb{P}(T = k) = p(1-p)^{k-1}$, dann ist

$$\mathbb{E}(X = \sum_{k=1}^{\infty} p\overbrace{(1-p)}^{=:q}{}^{k-1} = p \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}}_{=:f(q)} = (\star)$$

Für die Funktion $f(q)$ gilt

$$f(q) = \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{d}{dy} \frac{1}{1-q}$$
$$= \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$$

Also ist $(\star) = \frac{p}{p^2} = p$.

Satz 4.5. *Seien $X, Y \in \mathscr{L}^1$ diskrete Zufallsvariablen.*

a) Falls $X \geq Y$, dann ist $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$

b) (i) Sei $c \in \mathbb{R}$, dann ist auch $cX \in \mathscr{L}^1$ und $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$.

(ii) Es ist auch $X + Y \in \mathscr{L}^1$ und $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + E(Y)$

Beweis. Aus der Maßtheoreie, da $\mathbb{E}(X)$ das (elementare) Integral ist. $\square$

Definition 4.6. Sei X reelle Zufallsvariable. Dann heißt $X_{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$X_{(n)}(\omega := \frac{1}{n})\lfloor nX(\omega)\rfloor$$

die $\frac{1}{n}$-Approximation.
(Dabei ist $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrunden-Funktion.)

Satz 4.7. *Sei X reelle Zufallsvariable, $X_{(n)}$ aus 4.6.*

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $X_{(n)} \leq X \leq X_{(n)} + \frac{1}{n}$

b) Falls $X_(N_0) \in \mathscr{L}^1$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, dann ist $X_{(n)} \in \mathscr{L}^1$ für alle n.

c) Falls b) gilt, so ist $\big(\mathbb{E}(X_{(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Beweis.

a) ist klar.

b) Aus a) folgt, dass $|X_{(n)}(\omega)| \leq |X_{(m)}| + \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$.
Da insbesondere $1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{P})$ folgt die Behauptung.

c) Aus b) folgt, dass $|\mathbb{E}(X_{(n)}) - \mathbb{E}(X_{(m)})| \leq \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$. Ist Cauchyfolge.

□

Satz 4.8. *Die Aussagen von Satz 4.5 (Linearität und Monotonie) gelten auch für Reelle Zufallsvariablen.*

Beweis. Durch Grenzwertsätze der Maßtheorie: □

Satz 4.10 (Monotonen Konvergenz)**.** *Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ relle Zufallsvariablen mit punktweise $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) = X(\omega)$.*
Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$$

Satz 4.11 (Majorisierte Konvergenz)**.** *Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ relle Zufallsvariablen und es existiert $Y \in \mathscr{L}^1$, mit $|X_n(\omega)| \leq |Y(\omega)|$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(n)$ für alle $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$, mit Ω_0 Nullmenge. Dann ist*

$$\lim \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = E(X)$$

Definition 4.12. Sei $A := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ hat Eigenschaft } E\} \in \mathscr{F}$.
Falls $\mathbb{P}(A^c) = 0$, dann sagen wir „die Eiegnschaft E gilt $\mathbb{P}$-**fast sicher**".

Beispiel 4.13.1. Sei $\mathbb{P} = U[0,1] = \lambda_{[0,1]}$, $X(\omega) = \omega$.. Dann ist $X \notin \mathbb{Q}$ $\mathbb{P}$ fast sicher, denn $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$

Beispiel 4.13.2. Sei $\mathbb{P} = U[-1,1]$, $X_n(y) = \sin\left(\frac{1}{|y|+\frac{1}{n}}\right)$, dann konvergiert $X_n(y)$ $\mathbb{P}$ fast sicher.

Bemerkung 4.14. Falls $X \geq 0$, dann erlauben wir auch $\mathbb{E}(X) = \infty$. Wir definieren dann $\mathbb{E}(X) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(\min\{X, n\})$.
Satz 4.8a),b) und 4.10 gilt weiterhin, falls $X, Y \geq 0$ und $c \geq 0$.

Satz 4.15. *Seien (X_n) reele Zufallsvariable und $X_n \geq 0$, dann ist*

$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$$

Beispiel 4.16. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = \big((0,1), \mathscr{B}\big((0,1)\big), \lambda_{(0,1)}\big)$ und $X_n = n\chi_{0,\frac{1}{n}}$.
Dann ist $\mathbb{E}(X_n) = 1 \forall n$, aber $\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$.
Also kann die Ungleichung in Satz 4.15 kann also Strikt sein.

Satz 4.17 (Integration bezüglich des Bildmaßes)**.** *Sei $X : \Omega \to \Omega'$ Zufallsvariable, $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ messbar.*
Es gelte entweder $f(\omega') \geq 0 \forall \omega' \in \Omega'$ oder

$$\mathbb{E}\left(|f(X)|\right) = \int_\Omega |f\big(X(\omega)\big)| \mathbb{P}(d\omega) < \infty$$

Dann gilt:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\Omega'} f(\omega') \mathbb{P}_X(d\omega') = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(f) = \int_{\Omega'} f(\omega') \mathbb{P} \circ X^{-1}(d\omega')$$

Beweis. (i) Sei $f(\omega') = \chi_B(\omega')$ mit $B \in \mathscr{F}'$.
Dann ist $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(\chi_B(X)) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1(B)}) = \mathbb{P}_X(B)$ nach Definition von $\mathbb{P}_X$. Dann gilt die Gleichung aus 4.17.

(ii) Sei nun $f(\omega') = \sum_{n=1}^m c_n \chi_{B_n}(\omega')$, mit $C_n \in \mathbb{R}$, $B_n \in \mathscr{F}'$. Dann ist

$$\mathbb{E}(f(X)) \overset{4.8}{=} \sum_{n=1}^m c_n \mathbb{E}(\chi_{B_n}(X)) \overset{(i)}{=} \sum_{n=1}^m c_n \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(\chi_{B_n}) \overset{4.8b)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}\left(\sum_{n=1}^m c_n \chi_{B_n}\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(f)$$

(iii) Sei nun $f(\omega') \geq 0 \forall \omega \in \Omega$. Setze

$$f_n(\omega') := \sup\left\{\frac{1}{n}\lfloor f(\omega')\rfloor, n\right\}$$

(Abgeschnittene $\frac{1}{n}$ Approximation.)
Dann folgt aus (ii), dass $\mathbb{E}(f_n(X)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(f_n)$. Dann folgt aus der monotonen Konvergenz, dass im Grenzwert $n \to \infty$ gilt: $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(f)$.
Dann gilt die Gleichung aus 4.17.

(iv) Sei $\mathbb{E}(|f(X)|) < \infty$. Da $|f(X(\omega))| = f_+(X(\omega)) + f_-(\omega')$ ist auch $\mathbb{E}(f_-(X)) < \infty$ und $\mathbb{E}(f_+(X)) < \infty$.
Da $f(\omega') = f_+(\omega') - f_-(\omega')$ gilt ist

$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f_+(X)) - \mathbb{E}(f_-(X)) \overset{(iii)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(f_+) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(f_-) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(f)$$

□

Bemerkung 4.18. Sei $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und $h \in C^1$. Sei $\Omega = [a, b], \mathscr{F}\mathscr{B}([a, b]), \mu(dx) = h'(x)\ dx$.
Dann ist $\mu([a, b]) = \int_a^b h'(x)\ dx = h(b) - h(a)$ das Bildmaß von μ unter h.

$$\begin{aligned}\mu \circ h^{-1}\big((-\infty, x]\big) &= \mu\big(\{y \in [a, b] : -\infty \leq h(y) \leq x\}\big) = \mu\big([a, b] \cap (-\infty, h^{-1}(x))\big) \\ &= \int_a^{h^{-1}(x)} h'(y)\ dy = [h(y)]_a^{h^{-1}(x)} = h(h^{-1}(x)) - h(a) = x - h(a)\end{aligned}$$

falls $h(a) \leq x \leq h(b)$. Dann ist

$$\mu \circ h^{-1} = \lambda_{[h(a), h[b]]}$$

Dann folgt aus 4.17

$$\int_a^b f(h(x))h'(x)\ dx = \mathbb{E}_\mu(f(h)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}(f) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(y)\ dy$$

Korollar 4.19. *Seien $X : \Omega_1 \to \Omega'$, $Y : \Omega_2 \to \Omega'$ Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. Dann gilt $\mathbb{E}(f(x)) = \mathbb{E}(f(Y))$ für alle $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(|f(x)|) < \infty$ oder $f \geq 0$.*
Umgekehrt: sei $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$ für alle f messbar, beschränkt, dann gilt $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

Beweis. **„⇒“** Folgt aus 4.17.

„⇐“ $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{E}(\chi_A(X)) = \mathbb{E}(\chi_A(X)) = \mathbb{P}_Y(A)$.

□

Beispiel 4.20.1. Sei $X \sim \text{Exp}(\alpha)$, d.h. $\mathbb{P}_X(dx) = \alpha e^{-\alpha x}\ dx$. Dann ist

$$\mathbb{E}(X^k) = \alpha \int_0^\infty x^k e^{-\alpha x}\ dx = \frac{k!}{\alpha^k}$$

Beispiel 4.20.2. Sei $X \sim \mathscr{N}(m, v)$, dann ist $\mathbb{E}(X) = m$ und $\mathbb{E}\big((X - m)^2\big) = v$

Korollar 4.21. *a) Sei X reelle Zufallsvariable. $\mathbb{P}_X$ habe dichte ρ bezüglich des Lebesgue-Maß. Dann ist*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{-\infty}^\infty \rho(x) f(x)\ dx$$

(falls $\int \rho(x)|f(x)|\ dx < \infty$). Inesbesondere

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty x\rho(x)\ dx$$

*b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(dy) = \rho(y)\ dy$ (ρ ist Dichte von $\mathbb{P}$).
Sei X reelle Zufallsvariable . Dann gilt:*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{-\infty}^\infty f(X(y))\rho(y)\ dy$$

Insbesondere $\mathbb{E}(X = \int_{-\infty}^\infty X(y)\rho(y)\ dy$

Definition 4.22. Sei X reelle Zufallsvariable

a) Falls $|X^n| \in \mathscr{L}^1$ für $n \in \mathbb{N}$, so heißst $\mathbb{E}(X^n)$ das **n-te Moment von** X.

b) Falls $|X^p| \in \mathscr{L}^1$, für $p > 0$, so schreibt man $X \in \mathscr{L}^p$.

c) Die Zahl $\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$ heißt die **Varianz** von X (bezüglich $\mathbb{P}$).
$\sqrt{\mathbb{V}(X)}$ heißt **Standardabweichung** von X.

Bemerkung 4.23. a) Für die Varianz gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2 - E\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

b) Da $|X|^p \leq 1 + |X|^q$, falls $p \leq q$ ist

$$\mathscr{L}^q \leq \mathscr{L}^p$$

falls $p \leq q$.

Definition 4.24. Sei $X, Y \in \mathscr{L}^2$, dann heißt

$$\operatorname{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

die **Kovarianz** von X und Y.
Man nennt X und Y

positiv korreliert falls $\operatorname{Cov}(X,Y) > 0$

unkorreliert falls $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$

negtaiv korreliert falls $\operatorname{Cov}(X,Y) < 0$

Beispiel 4.25. Sei $\Omega = [0,1]$ mit Lebesgue-Maß, sei $X(\omega) = \omega$,$Y(\omega) = \omega^2$ und $Z(\omega) = \frac{1}{2}\sin(\pi\omega)$. Dann ist

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 d \; dx = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 x^2 \; dx = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^1 \frac{\sin(\pi\omega)}{2} \; dx = \frac{1}{2\pi}$$

Dann folgt für die Kovarianz:

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big(\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(Y - \frac{1}{3}\right)\big) = \frac{1}{12}$$
$$\operatorname{Cov}(X,Z) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi}\right) \; dx = 0 \text{Zum Vergleich: } \operatorname{Cov}(X,X) \quad = \mathbb{V}(X) = \frac{1}{12}$$

Daher eigenen sich die Korrelationskoeffizienten besser al Maß

Definition 4.26. Für $X, Y \in \mathscr{L}^2$ heißt

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$$

Korrelationskoeffizient von X und Y.

Beispiel 4.27. In Beispiel4.25 gilt

$$\rho(X,Y) = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0.968$$
$$\rho(X,X) = 1$$

Satz 4.28 (Ungleichungen für Integrale)**.** *a)* ***Jensen-Ungleichung*** *Sei X reelle Zufallsvariable, $\phi(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ sei konvex.*
Sei zusätzlich noch $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ und $\mathbb{E}(|\phi(X)|) < \infty$.
Dann gilt

$$\mathbb{E}(\phi(X)) \geq \phi(\mathbb{E}(X))$$

b) ***Hölder Ungleichung*** *Seine X, Y reelle Zufallsvariablen. Dann gilt für alle $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dass*

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq |X|_p \, |Y|_q$$

dabei ist

$$|A|_p := \begin{cases} \mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}} & p \leq \infty \\ \sup\{|X(\omega)| : \omega \in \Omega\} & p = \infty \end{cases}$$

c) ***Cauchy-Schwarz-Ungleichung*** *Seien $X, Y \in \mathscr{L}^2$. Dann ist $XY \in \mathscr{L}^2$ und*

$$\mathbb{E}(|XY|)^2 \leq \mathbb{E}(|X|^2)\mathbb{E}(|Y|^2)$$

(Spezialfall von b) mit $p = q = 2$)

d) ***Chebyshev-Markov-Ungleichung*** *Sei X reelle Zufallsvariable, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sei monoton wachsend. Dann gilt $\forall c > 0$ mit $f(c) > 0$, dass*

$$\mathbb{P}(|X| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X|))}{f(c)}$$

Insbesondere gilt für $f(x) = x^2$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq c) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{c^2}$$

Beweis. a) Inhalt...

□

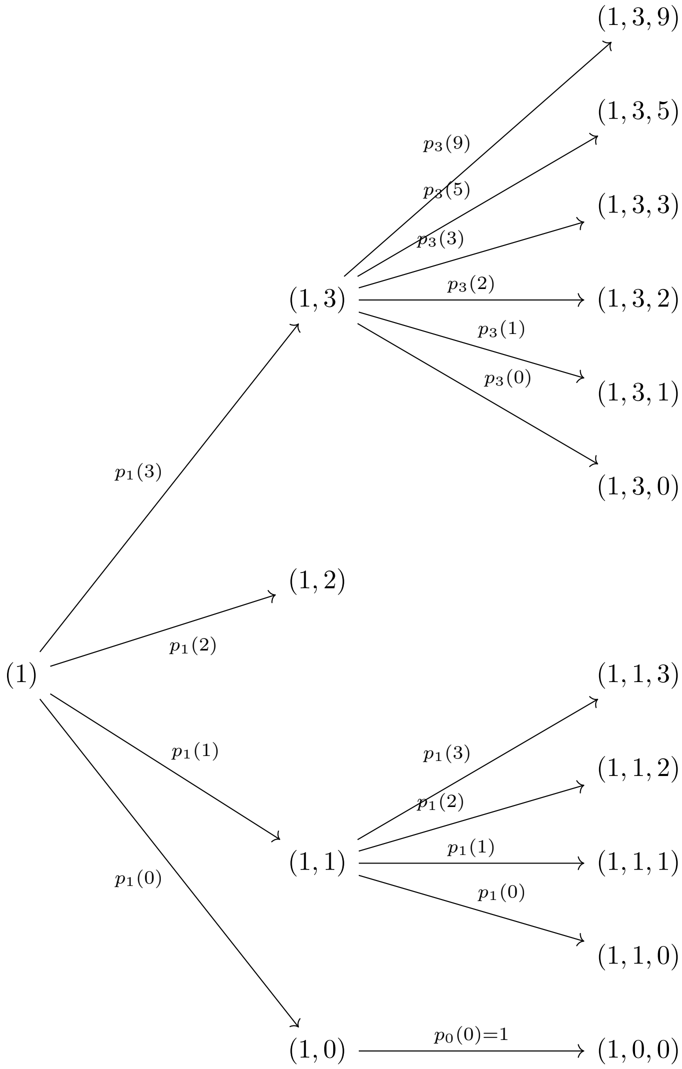

Abbildung 1: ...

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "Y_1"] \arrow[dr, "Y_2"] \arrow[rr, bend left, "Z_1"] \arrow[drr, bend right, "Z_2"'] & \Omega_1 \arrow[r, "\phi_1"] & E_1 \\
& \Omega_2 \arrow[r, "\phi_2"'] & E_2
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2: ...