Einführung in die Stochastik

24. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1.11 Beispiel

a) Einfache Irrfahrt Dimension d, N Schritte. $\Omega = \{(x_0, x_1, ..., x_N) : X_j \in \mathbb{Z}^d \forall j, x_0 = 0, |x_{j+1} - x_j| = 1 \forall j\}$.
Also ist $|\Omega_N| = (2d)^N$, Setze $p(\omega = \frac{1}{(2d)^N}) \forall \omega \in \Omega$.

Fragestellungen:

1. $A_N := \{(x_1, ..., x_N)\} \in \Omega_N : \exists j > 0$ mit $x_j = 0\}$. ("Rückkehr zum Startpunkt").
   Es ist klar, dass $\mathbb{P}(A_N) \geq \frac{1}{2d} > 0$, falls $N \geq 2$.
   Es ist leicht zu zeigen, dass $N \mapsto \mathbb{P}(A_N)$ wächst monoton.

   Knifflig: Was ist $\lim\limits_{N \to \infty}$? < 1? $= 1$?

   Antwort: $= 1$ für $d \leq 2$, < 1 für $d \geq 3$.

2. $B_n, \alpha := \{\omega = (x_0, x_1, ..., x_N) \in \Omega_N : |x_N| \geq N^\alpha\}$ für $0 < \alpha \leq 1$

   Frage: $\lim\limits_{N \to \inf} \mathbb{P}(B_{n,\alpha})$?

   Antwort: 0, falls $\alpha > \frac{1}{2}$
   1, falls $\alpha < \frac{1}{2}$
   Für $\alpha = \frac{1}{2}$ gilt

   $$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(B_{n,\alpha}) = \frac{V_k(d)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_1^\infty r^{d-1} \exp(\frac{1}{2} r^2) dr$$

   (dabei ist $V_k(d)$ das Volumen der d-Dimensionalen Einheitskugel).

b) Selbstvermeidende Irrfahrt Dimension d, N Schritte.

1. $\Omega_N^0 = \{(x_0, x_1, ..., x_N) \in \Omega_N : x_i \neq x_j$ falls $i \neq j\}$ Dann gilt für die Anzahl der Pfade:

   $$|\Omega_N^0| = \begin{cases} 2, & \text{falls } d = 1 \\ ??, & \text{falls } d > 1 \end{cases}$$

und es ist $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega_N^0| \forall \omega \in \Omega_N^0}$.

2. Wie in a)2.

   Frage Was ist $\lim\limits_{N \to \infty} \mathbb{P}(B_{N,\alpha}^0)$.

   Bekannt $\exists \alpha_c > 0$ mit

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(\mathbb{B}_{\ltimes,\alpha}^{\nvdash}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha > \alpha_c \\ 1, & \text{falls } \alpha < \alpha_c \end{cases}$$

   Bekannte Werte: $d = 1 \;\; \alpha_c = 1$
   $d = 2 \;\; \alpha_c = \frac{3}{4}$, falls SLE-Conjecture stimmt
   $d = 3 \;\; \alpha_c \approx 0,5876$ (Numerik)
   $d \geq 4 \;\; \alpha_c = \frac{1}{2}$

1.12 Beispiel

Auswählen einer Zufälligen rellen Zahl in $[0,1]$, alle Zahlen sollen di gleich Wahrscheinlichkeit haben:
$[0,1]$ ist nicht endlich, also ist Gleiche Wahrscheinlichkeit für alle Zahlen unmöglich.
$[0,1)$ ist nicht abzählbar, also scheitert der bisherige Ansatz mit der Zähldichte.

Ein möglicher Ausweg Definiere $\mathbb{P}([a,b]) = \mathbb{P}((a,b)) = \mathbb{P}([a,b)) = \mathbb{P}((a,b])$.
Die Erweiterung, sodass $\forall A \in \mathscr{P}([0,1])$ $\mathbb{P}(A)$ definiert ist, ist nicht möglich.

Lösung: Definiere $\mathbb{P}$ nicht auf allen Mengen $\mathscr{P}([0,1])$.

Definition 1.13. Sei Ω eine nichtleere Menge.
Ein Mengensystem $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$heißt **$\sigma$-Algebra**, falls

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. Falls $A \in \mathscr{F}$, dann auch $A^C \in \mathscr{F}$.
3. Falls $A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$, dann auch $\bigcap A_i \in \mathscr{F}$.

$(\Omega, \mathscr{F})$ heißt dann **messbarer Raum** oder **Ereignisraum**.

Bemerkung 1.14. $\mathscr{F}$ ist "die Menge aller Teilmengen von Ω, für die die zugehörige Ja-Nein-Frage beantwortbar ist".
Daher meint

1. "Ist $\omega \in \Omega$" muss beantwortbar sein.
2. Falls "Ist $\omega \in A$?" beantwortbar, so ist auch "Ist $\omega \notin A$?" beantwortbar.
3. Falls "Ist $\omega \in A_i$?" beantwortbar für alle i, dann ist auch "Ist ω in irgendeinem A_i?" beantwortbar.

Beispiel 1.15. Sei $\Omega = [0,1)$, dann ist

1. $\mathscr{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$

2. $\mathscr{F}_1 := \{\emptyset, [0, \frac{1}{3}), [\frac{1}{3}, 1), \Omega\}$.
   Die Frage "Ist $\omega \geq \frac{1}{2}$" ist hier nicht beantwortbar!

3. $A_{j,n} := \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$, n ist fest, $j \geq n$.
   $\mathscr{F}_2 = \{\bigcup_{k=1}^{n} B_{k,n} : B_{k,n} \in \{\emptyset, A_{k,n}\}\}$

4. $\mathscr{F}_3 = \mathscr{P}(\Omega)$ ist ebenfalls eine σ-Algebra.

Satz 1.16. *Sei $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Sei $\Sigma := \{\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega) : \mathscr{A}$ ist σ-Algebra und $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$.*
Dann ist auch $\bigcap_{\mathscr{A} \in \Sigma} \mathscr{A}$ eine σ-Algebra.

Definition 1.16. $\sigma(\mathscr{G}) := \bigcap_{\mathscr{A} \in \Sigma} \mathscr{A}$ heißt **die von $\mathscr{G}$ erzeugt σ-Algebra**.

Definition 1.17. Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{G} := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
$\mathscr{B} := \sigma(\mathscr{G})$ heiß **Borel-σ-Algebra**.

Bemerkung 1.18.

1. $\mathscr{B}$ enthält alle offenen Mengen, alle abbgeschlossen Mengen und alle halboffenen Intervalle.

2. $\mathscr{B} \subsetneq \mathscr{P}(\Omega)$.

3. $\mathscr{B}$kann nicht abzählbar konstruiert werden.

4. $\mathscr{B} = \sigma(\{(-\infty, c]\} : c \in \mathbb{R})$.

5. Falls $\Omega_o 0 \subset \mathbb{R}$, $\Omega_0 \neq \emptyset$, dann ist

$$\mathscr{B}_{\Omega_0} := \{A \cap \Omega_0 : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$$

   eine σ-Algebra, die **Einschränkung** von $\mathscr{B}$ auf Ω_0.

Definition 1.19. Seien $E_1, E_2, ..., E_N$ Mengen, $N \leq \infty$.
$\mathscr{E}_i$ seien σ-Algebren auf E_i und es sei

$$\Omega = \mathop{\mathrm{X}}_{i=1}^{N} E_i = \{(e_1, ..., e_N) : e_i \in E_i \forall i \leq N\}$$

Eine Menge der Form

$$A_{j,B_j} = \{(e_1, ..., e_N) : e_j \in B_j, \text{ andere } e_k \text{ beliebig}\}$$

mit $B_j \in \mathscr{E}_j, j \leq N$ heißt **Zylindermenge**.

Definition 1.19. Die σ-Algebra in Ω die von allen Zylindermengen Erzeugt wird heißt **Produkt-σ-Algebra**. Man nennt $\mathscr{Z}$ das System der Zylindermenge und $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \otimes ... \otimes \mathscr{E}_N := \sigma(\mathscr{Z})$.