

Theoretische Physik 1

Daniel Kallendorf

Mitschrift der Vorlesung Theoretische Physik I
WS 2015/16 bei Prof. Alber

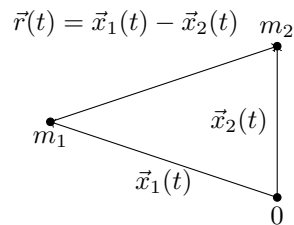
Inhaltsverzeichnis

1	Das Zweikörperproblem im Rahmen der Newtonschen Mechanik	3
1.1	Erhaltungssätze	4
1.2	Bestimmung der Bahnkurven	5
2	Das Hamiltonsche Prinzip der klassischen Mechanik	7
2.1	Funktionale und Funktionalableitungen	7
2.2	Das Hamiltonsche Prinzip	8
2.3	Symmetrie und Erhaltungsgrößen	12
2.3.1	Nöther Theorem	12
2.3.2	Wechselwirkende Systeme	15
2.4	Mechanische Systeme mit Nebenbedingunge	15
2.4.1	Holone NB und Lagrange-Gl zweiter Art	16
2.4.2	Nicht holonome NB und Lagrange-Gl 1. Art	17
3	Lineare Schwingungen	20
3.1	Lineare Schwingungen um Gleichgewichtskonfigurationen	20
3.2	Dynamik kleiner Schwingungen – Normalkoordinaten	21
3.2.1	Modell eines lineare dreiatomigen Moleküls	22
3.3	Dynamische Vielteilchensysteme: Der schwingende Ring	24
3.3.2	Der Kontinuierliche Grenzfall	26
3.4	Erzwungene Schwingungen	32
3.4.1	Lösung von DGL mit Hilfe von Integraltransformationen (Fourier, Laplace)	33
3.5	Erzwungene Schwingungen und Greensche Fkt.	34
3.5.1	Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: I) Anfangswertprobleme	35
3.5.2	Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: II) Randwertprobleme	36

4	Hamiltonsche Mechanik	37
4.1	Legendre Transformation	37
4.2	Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen	39
4.3	Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip	40
4.4	Phasenraum, Zustände, physikalische Variable	41
4.4.1	Erhaltungsgrößen	43
4.5	Die Poincare-Cartan Invariante	44
4.6	Kanonische Transformationen	46
4.6.1	Erzeugende Funktionen und kanonische Transformationen	48
4.6.2	Kontinuierliche kanonische Transformationen	48
4.6.3	Symmetrietransformationen	49
4.6.4	Hamilton-Jakobische Differentialgleichung	50
4.6.5	Auf den Spuren von Erwin Schrödinger	51
5	Der starre Körper	53
5.1	Der starre Körper als Mechanisches Vielteilchensystem	53
5.2	Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art:	53
5.3	Lagrange Methode 2. Art	53
5.3.1	Lagrange Funktion	55
5.4	Der freie starre Körper	55
5.4.1	Erhaltungsgrößen	56
5.4.2	Dynamik des asymmetrischen starren Körpers	56
5.4.3	Dynamik des freien Symmetrischen Kreisels	57
5.5	Der starre Körper im homogenen Schwerfeld	57
5.5.1	Rotation um eine raumfeste Drehachse mit konstanter Winkel- geschwindigkeit	57
5.5.2	Der schwere Kreisel	58

1 Das Zweikörperproblem im Rahmen der Newtonschen Mechanik

Problemstellung



Newtonsche Axiome

1. kräftefreie Massenpunkte bewegen sich geradlinig gleichförmig:
Inertialsystem
2. $m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t)$
3. Wechselwirkung: actio=reactio

Bemerkungen

- $\vec{F}(t)$ beschreibt Kraftkurve
- $\vec{x}_1(t)$ beschreibt Bahnkurve (ohne Zeitinformation: Bahnkurve)
- Spezielle Kraftfelder:
 $\vec{K}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \rightarrow \vec{F}(t) = \vec{K}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$

Newton: $\vec{K}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = -\gamma \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3} m_1^{(T)} m_2^{(s)}$

$m^{(s)}$: schwere Masse

$m^{(t)}$: träge Masse

$$\boxed{m^{(T)} \equiv m^{(s)}}$$

$$\begin{aligned} \vec{K}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|} f(\|\vec{r}(t)\|) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} U(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) \\ \Rightarrow \int_{\xi_1|\vec{x}_1^A}^{\vec{x}_1^B} \vec{K}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \left(\frac{d\vec{x}_1}{d\lambda} \right) d\lambda &= -U(\|\vec{x}_1^B - \vec{x}_2\|) - U(\|\vec{x}_1^A - \vec{x}_2\|) \end{aligned}$$

mit Weg $\xi : \lambda \rightarrow \vec{x}_1(\lambda)$ und wegunabhängiger konservativer Kraft

1.1 Erhaltungssätze

- abgeschlossenes System: (action=reactio)

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{x}}_1(t) &= \vec{F}_{12}(t) \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2(t) &= \vec{F}_{21}(t) \end{aligned} \right\} \frac{d}{dt} \underbrace{(m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2)(t)}_{\substack{:= \vec{P}(t) \text{ Impuls} \\ = M \dot{\vec{R}}(t)}} = 0$$

$$\underbrace{(m_1 + m_2)}_{:= M} \vec{R}(t) := m_1 \vec{x}_1(t) + m_2 \vec{x}_2(t)$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \vec{R}(t) + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{x}_2(t) &= \vec{R}(t) + \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \vec{R}(t) &= \frac{m_1 \vec{x}_1(t) + m_2 \vec{x}_2(t)}{M} \\ \vec{r}(t) &= \vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t) \end{aligned}$$

- Zentralkraftfeld

$$\mu \ddot{\vec{r}}(t) = - \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} f(r(t)) : \text{allgemeine Zentralkraft (z.B. Gravitation)}$$

→ Drehimpulserhaltung

$$\begin{aligned} \vec{L} &:= m_1 \vec{x}_1(t) \times \dot{\vec{x}}_1(t) + m_2 \vec{x}_2(t) \times \dot{\vec{x}}_2(t) & \text{zu Zeigen: } \dot{\vec{L}}(t) &= 0 \\ &= \vec{R} \times \vec{P} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{L}}(t) &= \underbrace{\dot{\vec{R}} \times \vec{P}}_{=0} + \underbrace{\vec{R} \times \dot{\vec{P}}}_{=0} + \underbrace{\mu \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Relativbahndrehimpuls L_{rel} :

- $\vec{L}_{rel} \cdot \vec{r}(t) = 0 \rightarrow$ ebene Dynamik
- $\frac{d}{dt} \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = 0$ Flächensatz

- konservative Kraftfelder

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{x}}_1 m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= \vec{F}_{12}(t) &= -\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} U(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) \\ \dot{\vec{x}}_2 m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= -\vec{F}_{12}(t) &= -\vec{\nabla}_{\vec{x}_2} U(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) \end{aligned} \right\} t$$

Die Funktion U darf nur durch x_1 und x_2 von der Zeit abhängen

$$\begin{aligned} m_1 \dot{\vec{x}}_1 \ddot{\vec{x}}_2 + m_2 \dot{\vec{x}}_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= -\dot{\vec{x}}_1 \vec{\nabla}_{\vec{x}_1} U - \dot{\vec{x}}_2 \vec{\nabla}_{\vec{x}_2} U \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 \right) &= -\frac{d}{dt} U(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 + U(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)) \right)}_{:= E} &= 0 \end{aligned}$$

1.2 Bestimmung der Bahnkurven

Erhaltungsgrößen

- abgeschlossenes System: Impulserhaltung

$$\dot{\vec{P}} = 0, \vec{R}(t) = \vec{R}(t_0) + \frac{\vec{P}}{M}(t - t_0)$$

- Zentralkraftfeld: Drehimpulserhaltung

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2 = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rel} \\ \vec{L}_{rel} &= \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}\end{aligned}$$

- konservative Kraft: Energieerhaltung

Ansatz

Aus $\vec{L}_{rel} \cdot \vec{r} = 0$ folgt, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet.

- Wir definieren $\vec{L}_{rel} \vec{e}_z$.

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi & \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} \\ y &= r \sin \varphi & \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}\end{aligned}$$

$$L_{rel} = \mu(x\dot{y} - \dot{x}y) = \mu[r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}) - (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}) r \sin \varphi] = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad (1)$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{L_{rel}}{\mu r^2} \\ \varphi(t) - \varphi_0 &= \int_{t_0}^t dt' \frac{L_{rel}}{\mu r^2(t')}\end{aligned}$$

- $E_{rel} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(r)$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \\ E_{rel} &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 \frac{L_{rel}^2}{\mu^2 r^4} + U(r) \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2}}_{=U_{eff}(r)} + U(r) \\ \dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{\mu} \underbrace{(E_{rel} - U_{eff}(r))}_{\geq 0}} = \frac{dr}{dt} \\ t - t_0 &= \pm \int_{r(t_0)}^{r(t)} dr \sqrt{\frac{\mu}{2} (E_{rel} - U(r))}\end{aligned}$$

mit + für $r(t) > r(t_0)$, - für $r(t) < r(t_0)$, sonst 0.

Bestimmung des Orbits

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{L_{rel}}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E_{rel} - U(r))}}$$

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm \int_{r_0}^r dr' \frac{L_{rel}}{r'^2 \sqrt{2\mu(E_{rel} - U(r'))}}$$

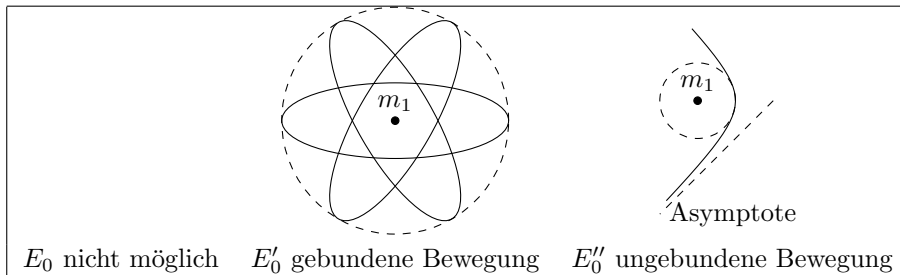


Abbildung 1: Bahnkurven
Definition. Ein *Funktional* ordnet jeder möglichen Bahnkurve eine Zahl zu.

Man kann also Funktionale finden, sodass die Extrema auf die Newtonschen Bewegungsgleichungen führen.
 Es ergibt sich ein Variationsproblem im ∞ -dimensionalen Raum der Bahnkurve unendlich vieler Punkte.

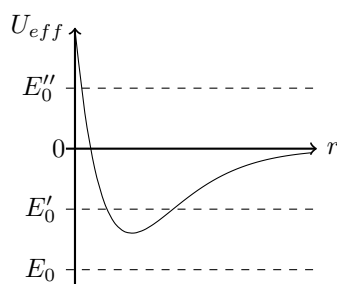


Abbildung 2: Energieschema

2 Das Hamiltonsche Prinzip der klassischen Mechanik

Aus dem Variationsprinzip lassen sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen herleiten. Dies ermöglicht

- die Vereinheitlichung mechanischer Prozesse in ihrer Beschreibung
- die Beschreibung von Zwangskräften (Wände, Schiene, etc)

Dabei “bewerten” die Funktionale die möglichen Bahnkurven. Ein Extremum des Bewegungsfunktionals liefert also eine Bewegungsgleichung (= Lösung der Newton Gleichungen)

2.1 Funktionale und Funktionalableitungen

Es gilt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{3N}$, da jeder der N Massenpunkte je 3 Koordinaten hat.

Wir betrachten nun B_{x_1, x_2} , die Menge aller stückweise stetigen und differenzierbaren Bahnkurven von x_1 (zum Zeitpunkt t_1) nach x_2 (zu t_2).

Und das Funktional $F : B_{x_1, x_2} \rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto F[\gamma]$ (Punktweise Auswertung).

Stetigkeit F ist stetig, an γ_0 , wenn das $\delta - \epsilon$ -Kriterium gilt:

Für alle $\epsilon > 0$ und für alle h mit $\|h\| < \delta$, existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0]| < \epsilon$$

Wobei man h auch schreiben kann, als

$$\|h\| = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{\vec{h}_i(t) \cdot \vec{h}_i(t)} \right) + \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{\vec{h}_i(t) \cdot \dot{\vec{h}}_i(t)} \right)$$

Funktionalableitungen

Ein Funktional heißt *ableitbar*, wenn eine Beste Lineare Approximation existiert:

$$\exists F'_{\gamma_0} : F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0] = F'_{\gamma_0}[h] + O(\|h\|^2)$$

lokales Funktional

$$F_1[\gamma] = \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\vec{x}_i(t) \cdot \vec{c}_i(t)} dt$$

mit festem t_0 und $t_1 \leq t_0 \leq t_2$ gilt für

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \quad L(\{\vec{x}_i\}(t), \{\dot{\vec{x}}_i\}(t), t)$$

dass

$$S[\gamma + h] - S[\gamma] = S'_\gamma[h] + O(\|h^2\|^2)$$

$$\text{mit } S'_\gamma[h] = \sum_{i=1}^{3N} h_i(t) \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt \, h_i(t) \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right\}_{\gamma(t)}$$

Beweisidee.

$$\begin{aligned} S[\gamma + h] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(x_i(t) + h_i(t), \dot{x}_i(t) + \dot{h}_i(t), t) \\ &= S[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left. \frac{\partial L}{\partial x_i} \right|_\gamma h_i(t) + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_\gamma \dot{h}_i(t) \right\} + O(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Wir verwenden die Produktregel: $\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_\gamma \dot{h}_i(t) = \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_\gamma h_i(t) - h_i(t) \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right|_\gamma$

$$= S[\gamma] + \sum_{i=1}^{3N} h_i(t) \left(\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_\gamma \right) \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt h_i(t) \left\{ \left. \frac{\partial L}{\partial x_i} \right|_\gamma - \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_\gamma \right) \right\}$$

□

Da das bei $S'_\gamma = 0$ Extrema liege, kann man Bewegungsgleichungen formulieren: Die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_\gamma \right) - \left. \frac{\partial L}{\partial x_i} \right|_\gamma = 0$$

2.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Für

$$L(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}, t) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i + \vec{F}_i(t) \cdot \vec{x}_i \right\}$$

wobei $\vec{F}_i(t)$ vorgegebene Kraftkurven sind, gilt, dass die EL-Gl äquivalent zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen ($m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) = \vec{F}_i(t)$) sind.

Beweis. Es gilt:

$$\vec{\nabla}_{x_i} L = \vec{F}_i(t) \qquad \vec{\nabla}_{\dot{x}_i} L m_i \dot{\vec{x}}_i$$

Somit also

$$\underbrace{\left. \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\vec{x}}_i} L \right|_\gamma}_{\text{(Newton Gleichungen)}} = \underbrace{\left. \nabla_{\dot{\vec{x}}_i} L \right|_\gamma}_{\text{(Euler-Lagrange-Gleichungen)}}$$

□

Bemerkung. • Kraftkurven sind vorgegeben.

- $S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t)$
- $h^2(t) \equiv \delta x_i(t)$, eine Virtuelle Verschiebung.
Es handelt sich nicht um eine physikalische Bewegung sondern um einen rein mathematische infinitesimale Verschiebung eines Teilchens, die ohne verzögerung (instantan) stattfindet.
(Unter beachtung der Zwangsbedingungen)
- Die äquivalenz stimmt nicht vollständig, da die Newton-Gleichungen eine Anfangsrandwertproblem darstellen, das Variationsprinzip/ Hamiltonsches Prinzip ein Randwertproblem darstellt:
 - Newton: $\vec{x}_i(t, x_1, \dot{x}_1)$
 - Hamilton: $\vec{x}_i(t, x_1, x_2)$

Die Äquivalenz gilt also, wenn dem Ziel bijektiv eine Anfangswert zugeordnet werden kann.

Sei nun $S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t)$ mit

$$\underbrace{\delta \vec{x}(t_1)}_{\vec{h}(t_1)} = \delta \vec{x}(t_2)$$

Da Hamilton Prinzip selektiert nun γ_0

$$\delta S[\gamma_0] = S'_{\gamma_0}[h] = 0$$

ist äquivalent zu den E-L-Gl:

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) \right|_{\gamma_0} - \left. \frac{\partial L}{\partial x_k} \right|_{\gamma_0} = 0$$

und den Newton-Gleichungen:

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}^2 + \sum_{i=1}^N \vec{F}(t) \vec{x}$$

Bemerkung. Geschwindigkeitsabhängige Potenziale

Es gilt für:

$$\vec{F}_i(t) = - \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}_i} V - \frac{d}{dt} \left(\vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_i} V \right) \right) (\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$$

und es ergibt sich

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$$

Beweis. z.Z.: $\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(t) \vec{x}_i(t) \stackrel{!}{=} -\delta \int_{t_1}^{t_2} dt V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$
Wir beginnen mit der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} dt V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ V(\delta \int_{t_1}^{t_2} dt V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \delta \vec{x}_i(t) \vec{\nabla}_{x_i} V + \sum_{i=1}^N \delta \dot{x}_i(t) \vec{\nabla}_{\dot{x}_i} V + O(\|h\|^2) \\
&\Rightarrow \delta \vec{x}_i(t) \vec{\nabla}_{\dot{x}_i} V_i = \frac{d}{dt} \left(\Delta x_i \vec{\nabla}_{\dot{x}_i} V \right) - \delta x_i(t) \frac{d}{dt} \left(\vec{\nabla}_{x_i} V \right) \\
\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} dt V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^N \left(\delta \vec{x}_i(t) \cdot \left[\vec{\nabla}_{\dot{x}_i} V - \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\dot{x}_i} V \right] + \underbrace{\frac{d}{dt} [\delta \vec{x}_i(t) \cdot \nabla_{\dot{x}_i} V]}_{\delta \vec{x}_i(t_1) = \delta \vec{x}_i(t_2) = 0} \right) \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} dt \quad \vec{F}_i(t) \cdot \Delta x_i(t) \\
&\equiv -\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \quad \vec{F}_i(t) \cdot \vec{x}_i(t) \quad \square
\end{aligned}$$

Mechanische Eichfreiheit

Aus einer Lagrange-Funktion lassen sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen ableiten (nicht bijektiv).

Beweis. Sei $L_1(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$. Und sei

$$L_2(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) = L(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\{x\}, t) + \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \cdot \vec{\nabla}_{x_i} f(\{x\}, t)$$

mit einer beliebigen (differenzierbaren) Funktion f .

Dann führe beide Lagrange-Funktionen auf die selben E-L-Gln, denn

$$\begin{aligned}
S[\gamma] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L_2(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt L_1(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(\{x\}, t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(\{x(t)\}, t) + \sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t) \cdot \left(\vec{\nabla}_{x_i} f \right) (\{x(t)\}, t) \\
\partial S[\gamma] &\equiv S'_\gamma[h] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \quad L(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) \\
\frac{d}{dt} f(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\{x(t)\}, t) + \sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t) \cdot (\vec{\nabla}_{x_i} f)(\{x(t)\}, t)
\end{aligned}$$

□

Somit hat also L keine "direkte" physikalische Relevanz.
Daraus folgt jedoch: die Äquivalenzklasse der Lagrange-Funktionen

$$[L] = \{L_2 | \exists f : L_2 = L + f\}$$

Welche Äquivalent zu den E-L-Gln ist.

Analyse der Extrema von $[\gamma]$

Die Frage, ob ein Extremum von $S[\gamma]$ ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt ist gibt uns $\delta^2 S[\gamma]$

$$S[\gamma + \delta x] = S[\gamma] + S'_\gamma[\delta x] + O(\|\delta x\|^2)$$

Beispiel. Eine eindimensionale Dynamik mit geschwindigkeitsunabhängiges Potenzial und $\gamma : t \mapsto \vec{x}(t)$

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t)$$

$$\begin{aligned} S[\gamma + \delta x] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} [\vec{x}(t) + \delta \dot{x}(t)]^2 - V(x(t) + \delta x(t), t) \right) \\ &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - V(x(t), t) \right)}_{S[\gamma]} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \cdot 2\dot{x}(t)\delta\dot{x}(t) - \delta x(t) \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right)}_{\substack{= \frac{d}{dt}(\delta x \dot{x}) - \Delta x \frac{d}{dt} \dot{x} \\ := S'_\gamma[\delta x] \equiv \delta S[\gamma]}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \delta \dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x(t), t) \right)}_{:= \delta^2 S[\delta x]} + O(\|\delta x\|^3) \end{aligned}$$

wobei $\delta S[\gamma] = 0$ da wir ein Extremum betrachten.

Sei $|t_2 - t_1|$ klein, dann ist für alle δx $\delta^2 S[\delta x] \geq 0$ weil $??? > 0$.

Für $|t_2 - t_1|$ wachsen, existiert ein anderes Extremum mit $\delta^2 S[\delta x] < 0$.

Hier fehlt etwas

- $x^i(q, t) \leftrightarrow q^i(x, t)$ sei angenommen

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{L \left(x(q, t), \left\{ \frac{\partial x^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \cdot \vec{\nabla}_{\vec{q}_j} x^i \right\}, t \right)}_{:= \tilde{L}(q, \dot{q}, t)}$$

→ Euler-Lagrange Gleichung für $i = 1, \dots, 3N$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i}$$

2.3 Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Ausgangspunkt: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ Euler-Lagrange für $L(q, \dot{q}, t)$.

Sei $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$, d.h.:

- Transformation τ_ϵ
- L unabhängig von q_1 ; $\tau_{\epsilon^i} Q^i = q^i + \epsilon \delta_{i1}$
- L invariant unter τ_ϵ
- τ_ϵ transformiert Lösungen der ELG wieder in Lösungen (kontinuierliche Symmetrie)

Es folgt daraus, dass auch $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \Leftrightarrow p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(q(t), \dot{q}(t), t)$ berechnet entlang einer Lösung der E-L-Gleichung ist zeitlich konstant
→ Erhaltungsgröße

p_1 := kanonischer Impuls von q_1

Also "kontinuierliche Symmetrie impliziert Erhaltungsgrößen"

2.3.1 Nöther Theorem

Betrachte folgende kontinuierliche Transformation:

$$Q^m = q^m + \epsilon \psi^m(q, \dot{q}, t) + O(\epsilon^2)$$

$$T = t + \epsilon \phi(q, \dot{q}, t) + O(\epsilon^2)$$

mit $\epsilon \in [0, \infty)$.

Es gelte

$$\int_{T_1}^{T_2} dT_\epsilon L(Q_\epsilon(T_\epsilon), \frac{dQ_\epsilon}{dT_\epsilon}(T_\epsilon), T_\epsilon) \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L(q(t), \dot{q}(t), t) + \epsilon \frac{df_\epsilon}{dt}(q(t), t) \right\}$$

Von dynamischer τ_ϵ -Symmetrie gefordert, mit mechanischem Eichterm f_ϵ .

Es ergibt sich eine Erhaltungsgröße E der Form

$$E = \sum_m \psi^m \frac{dL}{d\dot{q}^m} + \phi \left(L - \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) - f_{\epsilon=0}(q, t) \Big|_\gamma$$

Bemerkung

- mechanische Eichtransformationen sollen in sinnvoller Weise bei dynamischer Symmetrie berücksichtigt werden ($f_\epsilon(q, t) \neq 0$)
- Symmetrische τ_ϵ Symmetrie bedeutet:
 $Q_{\epsilon=0}^m(T_{\epsilon=0})$ ist Lösung der ELG $\rightarrow Q_\epsilon^m(T_\epsilon)$ ist Lösung. Sowie $Q_{\epsilon=0}^m = q^m$ und $T_{\epsilon=0} = t$

Bemerkung

- Sei Transformation $Q_\epsilon^m = q^m + \epsilon \psi^m(q, \dot{q}, t) + O(\epsilon^2)$

- Sei $T_\epsilon = 0$ gegeben.

Es folgt:

$$\frac{dQ_\epsilon}{dT_\epsilon}(T_\epsilon) = \underbrace{\frac{dq^m}{dt}}_{:=\dot{q}^m} + \epsilon \frac{d\psi^m}{dt}(q(t), \dot{q}(t), t) + O(\epsilon)$$

Aus τ_ϵ Symmetrie:

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} dT_\epsilon L(Q_\epsilon(T_\epsilon), \frac{dQ_\epsilon}{dT_\epsilon}(T_\epsilon), T_\epsilon) &= \int_{t_1}^{t_2} dt L \left(\underbrace{\{q^m + \epsilon \psi^m\} \dot{q}^m + \epsilon \frac{d\psi^m}{dt}}_{=L(q(t), \dot{q}(t), t)}, t \right) \\ &\quad + \epsilon \left\{ \sum_m \psi^m \frac{\partial L}{\partial q^m} + \sum_m \frac{d\psi^m}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right\} \\ &\quad + O(\epsilon^2) \\ &\stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \end{aligned}$$

mit $f_\epsilon(q, t) = 0$

$$0 = \sum_m \left(\psi^m \frac{\partial L}{\partial q^m} + \frac{d\psi^m}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) = \sum_m \psi^m \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^m} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right)}_{=0 \text{ für } \gamma \text{ Lsg}} \right) + \frac{d}{dt} \sum_m \left(\psi^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right)$$

Es folgt

$$E = \sum_m \psi^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \Big|_\gamma$$

- Sei $Q_\epsilon^m = q^m$, $T_\epsilon = t + \epsilon$
 $\rightarrow \frac{dQ_\epsilon^m}{dT_\epsilon} = \frac{dq^m}{dt} \equiv \dot{q}^m$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dT_\epsilon L(Q_\epsilon(T_\epsilon), \frac{dQ_\epsilon}{dT_\epsilon}(T_\epsilon), T_\epsilon) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{L(q(t), \dot{q}(t), t + \epsilon)}_{\stackrel{!}{=} L(q(t), \dot{q}(t), t)} \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \\ &= L(q(t), \dot{q}(t), t) + \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Aus τ_ϵ -Symmetrie: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_m \left(\dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial q^m} + \underbrace{\ddot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}}_{\text{}} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_m \dot{q}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q^m} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) \right) + \frac{d}{dt} \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) - \dot{q}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \text{für } \gamma \text{ Lösung der E-L-Gl: } \left. \frac{d}{dt} \left(L - \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) \right|_\gamma = \left. \frac{\partial L}{\partial t} \right|_\gamma$$

$$\tau_\epsilon\text{-Symmetrie: } \frac{d}{dt} (L - \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}) = 0 \text{ (Erhaltungsgröße)}$$

Beispiel: der freie Massenpunkt

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i)^2$$

zu Zeigen: 10-parametrische Symmetriegruppe (eigentliche orthochrone Galilei Gruppe).

Transformationsgesetze :

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= R(\underbrace{\vec{\omega}}_3) \vec{x} + \underbrace{\vec{a}}_3 + \underbrace{\vec{v}}_3 t \\ T &= t + \underbrace{s}_3\end{aligned}$$

1. Translation: $\vec{a} \neq 0$

$$\tau_{trans} : x_k = x_k + a_{k0} \delta_{kk_0}, T = t$$

$$\rightarrow \text{L-invariant unter } \tau_\epsilon; f, \phi = 0; \psi_k = \delta_{kk_0}$$

$$P_{k_0} = \sum_k \psi_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{k_0}} \text{ ist Erhaltungsgröße}$$

$$\vec{P}(t) = m \dot{\vec{x}}(t) \text{ Impuls ist konstant entlang Lösung.}$$

2. Translation in der Zeit: $s \neq 0$

$$\tau_{tZeit} : X_k = x_k, T = t + s$$

$$-E_{kin} = L - \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = -\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 \text{ Erhaltungsgröße.}$$

3. Drehungen $\vec{\omega} = c\vec{e}_3, c \in \mathbb{R} \setminus 0$

$$\tau_{rot} : \vec{X} = R(\vec{\omega})\vec{x}, T = t$$

$$\vec{X} = x + \overbrace{c\vec{e}_3}^{\equiv \vec{\omega}} \times \vec{x} + O(\epsilon^2)$$

$$\dot{\vec{X}} = R(\omega)\dot{\vec{x}}$$

Somit $\dot{\vec{X}}^2 = \dot{\vec{x}}^2 \rightarrow$ L-Invarianz mit $f, \phi = 0$

$$X_l = x_l + c \underbrace{\sum_{k=1}^3 \epsilon_{l3k} x_k}_{:= \psi_l} + O(\epsilon^2)$$

$$E = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{l3k} x_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} = \vec{e}_3 \underbrace{(\vec{x} \times m\dot{\vec{x}})}_{:= L}$$

$$\text{Sodass } \frac{dL}{dt} = 0$$

4. eigentliche Galilei Transformation: $\vec{v} = v\vec{e}$

$$\tau : X_k = x_k + ct\vec{e}, T = t$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k + c\vec{e} \rightarrow f_c(x, t) \neq 0$$

2.3.2 Wechselwirkende Systeme (konservativ, durch Langeragefunktion beschrieben)

$$L(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_{(i)}}{2} \dot{\vec{x}}_{(i)}^2 + U(x)$$

$$\text{für } \vec{F}_i(t) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}_i} U(x(t))$$

Damit eine eigentliche orthochrone Galilei Gruppe eine Symmetriegruppe ist muss für $U(x)$ gelten (hinreichend),

- $U(x)$ invariant unter G_{10}
- $U(x)$ muss translationsinvariant sein: z.B. $U(x) = \sum_{1=i < j}^N U_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$
- $U(x)$ muss rotationsinvariant sein: z.B. $U(x) = \sum_{i,j} U_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$

2.4 Mechanische Systeme mit Nebenbedingunge

- holonome Nebenbedingungen $f(q(t), t) = 0, y^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow f(x(t), y(t)) = x^2 - y^2 - R^2 = 0$
 \Rightarrow globale Einschränkung der Dynamik
- nicht holonome Nebenbedingungen: Involvierern Ungleichungen, Differentiale (Schränken die Teilchenbewegung auf einen kleinen Bereich der Dynamikmanigfaltigkeit ein)

2.4.1 Holone NB und Lagrange-GI zweiter Art

Gegeben: $L(q, \dot{q}, t), \{q_i, i = 1, \dots, 3N\}$ mit verallgemeinerten Koordinaten q_i

$$F_l(q, t) = 0; l = 1, \dots, r$$

Die Zwangsbedingungen schränken die Teilchendynamik auf einen $f := (3N - r)$ -dimensionale Unterraum (Untermannigfaltigkeit) ein.

Stellen eine Matrix auf:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F_l}{\partial q_k} \right)_{r \times 3N} \text{ zwangsbedingungs-Matrix } F_{lk} \text{ mit Rang } F_{lk} = r^k \forall q \in \mathbb{R}^{3N} \\ \Rightarrow & q_l(Q_1, \dots, Q_{3N-r}, t), l = 1, \dots, 3N \\ \Rightarrow & L(q, \dot{q}, t) = L \left(q(\hat{Q}, t), \sum_{k=1}^{3N-r} \frac{\partial q}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q}{\partial t}, t \right) := \tilde{L}(\hat{Q}, \dot{\hat{Q}}, t), \text{ wobei } \hat{Q} \equiv (Q_1, \dots, Q_{3N-r}) \\ \Rightarrow & \text{Euler Lagrange Gl.} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k}; k = 1, \dots, 3N - r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{X}_i} \right) = F_i(t) + Z_i(t), X(q(Q, t), t)$$

- Für die kinetische Energie gilt: $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$

$$\sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j \dot{x}_j = \sum_{l,j,k} \frac{m_{(j)}}{2} \frac{\partial x_j}{\partial Q_u} \frac{\partial x_i}{\partial Q_l} \dot{Q}_k \dot{Q}_l := \sum_{k,l} g_{kl}(Q) \dot{Q}_k \dot{Q}_l$$

$$g_{kl}(Q) \equiv \sum_j \frac{m_{(j)}}{2} \frac{\partial x_j}{\partial Q_k} \frac{\partial x_j}{\partial Q_l} \text{ symmetrisch } (g_{kl} = g_{lk}), \text{ positiv semidefinit}$$

Beispiel. Sphärisches Pendel

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T - V = \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}^2 - (-m\vec{g}\vec{x}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + m\vec{g}\vec{x}$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} l \sin \theta \cos \varphi \\ l \sin \theta \sin \varphi \\ l \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} l(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}) \\ l(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}) \\ -l \sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta$$

Erhaltungsgrößen:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0, L_z :=, (\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - L \right)}_{:= \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta} = 0$$

$:= E$

(Legendre Transformation von Lagrange zu Hamilton Funktion)

$$E = \frac{m}{2} l^2 \left\{ \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \sin^4 \theta} \right\} + mgl \cos \theta = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$$

$$U_{eff}(\theta) := \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^4 \theta} + mgl \cos \theta$$

Fallunterscheidung

- $L_z = 0 \rightarrow \dot{\varphi} = 0$ (ebenes Pendel)
- $L_z \neq 0 \rightarrow U_{eff}$ singularär bei $\theta = 0, \pi$

E_{min} bei $L_z \neq 0$, Teilchen vollführt eine Kreisbewegung $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta_s}$

2.4.2 Nicht holonome NB und Lagrange-Gl 1. Art

Gegeben sei ein System mit f Freiheitsgraden

$$\sum_{j=1}^f a_{kj}(q_j, t) dq_j + b_{(k)}(q, t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, s$$

$\text{Rang} a_{kj} = A$ (Anzahl der Zwangsbedingungen)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f a_{kj}(q_j, t) \frac{dq_j}{dt} + b_k(q, t) = 0$$

Mit Hilfe virtueller Verrückungen hat man:

$$\sum_{j=1}^f a_{kj}(q_j(t), t) dq_j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, s$$

i.A. hat man $(f - s)$ unabhängige virtuelle Verrückungen $\delta q'(t), \dots, \delta q_{f-s}(t)$

Holonome NB: $F_{(k)}(q, t) = 0$ für $k = 1, \dots, s$

$$dF_{(k)} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial F_{(k)}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F_{(k)}}{\partial t} dt = 0$$

$dF_{(k)}$ existieren nur dann wenn Integrabilitätsbedingungen gelten (Satz von Schwarz)

$$\begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial^2 F_k}{\partial q_i \partial q_j} \equiv \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 F_k}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_j} \\ 2) \quad \frac{\partial^2 F_k}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial b_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 F_k}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial a_{kj}}{\partial t} \end{array}$$

Eine Zwangsbedingung F_k ist holonom, wenn dF_k existiert und 1) und 2) gelten, sonst ist F_k nicht holonom.

Das Hamilton Prinzip (Optimierung des Wirkungsfunktional)

$$NB: \sum_{j=1}^f a_{kj}(q(t), t) \dot{q}(t) = 0, \quad k = 1, \dots, s$$

Stationäre Lösungen des Variationsproblems $f + s$ Euler-Lagrange-Gleichungen 1. Art.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) + \sum_{k=1}^s \lambda_k(t) a_{kj}(q(t), t) \quad j = 1, \dots, f$$

$$\sum_{k=1}^s \lambda_k(t) a_{kj}(q(t), t) + \sum_{k=1}^s b_k(q(t), t), \quad k = 1, \dots, s$$

f Bahnkurven $q_j(t)$ und s Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_k(t)$

Für holone Zwangsbedingungen:

$$a_{kj}(q, t) = \frac{\partial F_k}{\partial q_j}(q, t)$$

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, \lambda, t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{k=1}^s \lambda_k F_k(q, t) \text{ Effektive Lagrange Funktion}$$

Satz. Für zeitliche Veränderung der Energie

$$E := \left(\sum_{j=1}^k \dot{q}_j(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) \Big|_{\gamma}$$

ist für $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ und holonome, Zeitunabhängige $F_k(q, t) = 0$ eine Erhaltungsgröße auch für \tilde{L} .

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}_k} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j} &= \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_k} &= F_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \Big|_{\gamma} &= \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^s \lambda_k(t) \frac{\partial F_k}{\partial q_j} \Big|_{\gamma} \\ \Rightarrow F_k &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E := \sum_j \dot{q}_j - L \Big|_{\gamma} \quad \text{Ist Erhaltungsgröße}$$

□

Beispiel. ebenes Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt $f(t)$:

$$\text{ZB: } (x - f(t))^2 + y^2 - l^2 = F(x, y, t) = 0$$

ZB ist holonom, rheonom (da Zeitabhängig)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2(x - f(t))\dot{f}(t) \neq 0$$

Lagrange-Gl 2. Art:

$$\begin{aligned}x - f(t) &:= l \sin \varphi & \Rightarrow \quad \dot{x} &= \dot{f} + l \cos \varphi \\ y &:= -l \cos \varphi & \quad \dot{y} &= \dot{l} \sin \varphi\end{aligned}$$

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{m}{2} \left\{ l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{f} \right\} + mgl \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} + ml \cos \varphi \dot{f}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ml \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{f} - mgl \cos \varphi$$

Daraus folgt, dass

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\cos \varphi \frac{\ddot{f}}{l}$$

3 Lineare Schwingungen

Lineare Systeme: einfachste, exakt lösbare Vielteilchensysteme.

Betrachte: mechanisches Vielteilchensystem (N Massenpunkte) mit holonom-skleronomen Randbedingungen.

Koordinaten $x_\mu(q_i)$ mit $\mu=1, \dots, 3N$ und $i = 1, \dots, f < 3N$

Koordinatentransformation, sodass q_i durch Zwangsbedingungen wegfallen.

Potenzial :

$$T = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i = \sum_{\alpha, \beta=1}^f \dot{q}_\alpha g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta$$

mit $g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\beta} > 0$

Lagrange Gleichung :

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{\alpha, \beta=1}^f \dot{q}_\alpha g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta - U(q)$$

Wir setzen auch voraus:

- Existenz einer Gleichgewichtskonfiguration
- kleine Auslenkung um diese Gleichgewichtskonfiguration

Anwendung

- Beschreibung von Festkörpern
- Elektromagnetisches Strahlungsfeld
- Systeme ungekoppelter Harmonischer Oszillatoren

Beschreibt z.B. nicht: Gase, Schmelzende Körper,...

3.1 Lineare Schwingungen um Gleichgewichtskonfigurationen

Definition. In *Gleichgewichtskonfiguration* gilt:

$\{q_{\alpha(0)}(t) \text{ ist Zeitungsabhängig, } \alpha = 1, \dots, f\}$

Äquivalent dazu ist $\dot{q}_{\alpha(0)}(t) = \ddot{q}_{\alpha(0)} = \ddot{q}_{\alpha(0)=\dots=0}$

Es gilt für generalisierte Kräfte, dass $\left. \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right|_{q(0)} = 0$

Beweisidee. Euler-Lagrange und Bedingungen für Gleichgewicht.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^f g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^f \dot{q}_\beta g_{\beta\alpha}(q) && \text{da } g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \\
&= \sum_{\beta=1}^f g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta \\
\rightarrow \text{E-L: } \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}}_{=0} &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \\
\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} &= - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma=1}^f \dot{q}_\beta \frac{\partial q_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} \\
&= - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}
\end{aligned}$$

Für kleine Auslenkungen nähern wir über Taylor-Polynome:

$q_\alpha(t) = q_{\alpha(0)} + \eta_\alpha(t)$, $\eta_\alpha(t)$ klein

$$L = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \underbrace{g(q_{(0)})}_{:=K} \dot{\eta} - U(q_{(0)}) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^f \nu_\alpha \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \Big|_{q_{(0)}}}_{:=K} \eta^\beta + O^3(\eta, \dot{\eta})$$

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T K \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^T K \eta$$

M Massenmatrix, symmetrisch positiv definit

K Kopplungsmatrix, symmetrisch positiv definit

□

3.2 Dynamik kleiner Schwingungen – Normalkoordinaten

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^T K \eta$$

mit $M > 0$, $M = M^t$ und $K > 0$, $K = K^T$, sodass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^f M_{\alpha,\beta} \dot{\eta}_\beta \\
\frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha} &= - \sum_{\beta=1}^f K_{\alpha,\beta} \eta_\beta \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^f M_{\alpha,\beta} \ddot{\eta}_\beta = - \sum_{\beta=1}^f K_{\alpha,\beta} \eta_\beta = \frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha}
\end{aligned}$$

mit Orthogonalmatrix O , $Q = O^T M^{\frac{1}{2}} \mu$, $M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} = O K O^T$
 $M_{ij}^{1/2}$ Verändert die Matrix indem wir M diagonalisieren, die Wurzeln der Diagonalelemente Zeilen und danach die Transformationsmatrizen wieder einrechnen. Sei $M = S A S^T$ und $B_{ii} = \sqrt{A_{ii}}$, dann def. $M^{1/2} = S B S^T$.

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T K Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \dot{Q}_i \dot{Q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f Q_i K_i Q_i$$

Beweisidee

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} (M^{\frac{1}{2}} \dot{\eta})^T (M^{\frac{1}{2}} \dot{\eta}) - \frac{1}{2} \eta^T K \eta = \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^T \dot{\bar{Q}} - \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^T \bar{Q} - \frac{1}{2} \bar{Q}^T M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} \bar{Q} = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T K Q$$

da $Q = O^T M^{\frac{1}{2}} \eta$, $O^T O = O O^T = 1$

Lösungen

- $K_i > 0$: $Q_i(t) = Q_i(0) \cos(\sqrt{K_i} t) + \frac{\dot{Q}_i(0)}{\sqrt{K_i}} \sin(\sqrt{K_i} t)$
- $K_i = 0$: $Q_i(t) = Q_i(0) + \dot{Q}_i(0) t$
- $K_i < 0$: $Q_i(t) = Q_i(0) \cosh(\sqrt{K_i} t) + \frac{\dot{Q}_i(0)}{\sqrt{K_i}} \sinh(\sqrt{K_i} t)$

3.2.1 Modell eines lineare dreiatomigen Moleküls

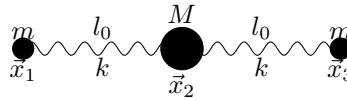


Abbildung 3: Lineares dreiatomiges Molekül

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 - \underbrace{\frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - l_0)^2 - \frac{1}{2} k (x_3 - x_2 - l_0)^2}_{:= -U(x)}$$

Es ergibt sich zusammengefasst:

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^T K \eta$$

Wir bestimmen nun die Massen-Kopplungs-Matrix

$$M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{M}{2k} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen eine Matrix O um $M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}}$ zu diagonalisieren, indem wir die Eigenwerte bestimmen:

$$M^{-\frac{1}{2}} O = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m} & \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & -\frac{2m/M}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \end{pmatrix}$$

Jede Spalte stellt dabei eine mögliche Schwingungsmoden (Energieverteilung) dar.

Bemerkung

- Transaktionsmoden im \mathbb{R}^3 : 3 Freiheitsgrade
- Grenzfall: $k \rightarrow \infty$ Relativbewegungen unmöglich \rightarrow Starrer Körper; 6 Freiheitsgrade

Zusammenfassung

Lagrange Gleichung: $L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^T K \eta$

Mit Massenmatrix M , Kopplungsmatrix K (symmetrisch, positiv definit).

$$M \ddot{\eta} = -K \eta$$

Die allgemeinen Koordinaten unseres System berechnen sich als $Q = O^T M^{1/2} \eta$

Wobei O definiert ist über $M^{-1/2} K M^{-1/2} = O \kappa O^T$

Es folgt, dass $\dot{Q} = O^T M^{1/2} \dot{\eta} = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T \kappa Q$

3.3 Dynamische Vielteilchensysteme: Der schwingende Ring

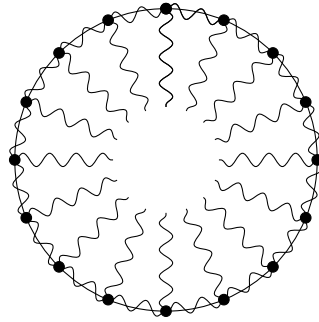


Abbildung 4: Schwingender Ring

$a = x^{(i)}a_0 - x_0^{(i-1)}$: Abstand der Gleichgewichtspositionen
(mit $i = 1, \dots, N$ und $N + 1 \equiv 1$)

$$x^{(i)} - x_0^{(i)} = \eta_i$$

K : ???

3.3.1

$$\begin{aligned} L(\eta, \dot{\eta}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{\eta}_i)^2 m - \frac{1}{2} \eta^T \kappa \eta \\ &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \sum_{i=1}^{N+1} (\eta^{(i)} \eta^{(i-1)})^2 k \end{aligned}$$

$$M = m \cdot \mathbb{K} \quad \kappa = \begin{pmatrix} 2k + K & -k & & -k \\ -k & 2k + K & -k & \\ & -k & 2k + K & -k \\ -k & & & \end{pmatrix}$$

Modenbestimmung $r = 1, \dots, N$

- $\eta_r = \Re(C_r e^{-i\omega_r t})$
- ω_r : Eigenwerte
- $(-M\omega_r^2 + K)l_r = 0$ Eigenwertproblem

Ansatz $l_r^l = e^{il\Phi_r}$, da $C^{(N+1)} = C_r^{(1)}$

$$\Rightarrow e^{i(N+1)\Phi_r} = e^{i\Phi_r}$$

$$N\Phi_r = 2\pi r$$

$$\Phi_r = \frac{2\pi}{N}r$$

$$0 = \left[-\omega_r^2 + \frac{k}{m}(2 - e^{i\Phi_r} - e^{-i\Phi_r}) + \frac{K}{m} \right] C_r^{(l)}$$

Wobei gilt:

$$2 - e^{i\Phi_r} - e^{-i\Phi_r} = 2(1 - \cos \Phi_r)$$

$$= 4 \sin^2 \left(\frac{\Phi_r}{2} \right)$$

Sodass

$$0 \leq \omega_r = \sqrt{\frac{K}{m} + 4 \frac{k}{m} \sin^2 \left(\frac{\Phi_r}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{K}{m} + 4 \frac{k}{m} \sin^2 \left(\frac{\pi r}{N} \right)}$$

mit $r = 1, \dots, N$ und $C_r^{(l)} = e^{i \frac{2\pi r}{N} l}$.

Wir betrachten nun $\sin^2 \left(\frac{\pi r}{N} \right)$. Für $\frac{\pi r}{N} = 0$ oder $= \frac{\pi}{2}$ gibt es keine Entartung und somit nur eine Lösung, sonst $(\frac{\pi r}{N} \in (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\})$ gibt es 2 Lösungen.

$$\eta^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^N |A_r| \operatorname{Re} \{ e^{-i\omega_r t} e^{i\phi_r} e^{i \frac{2\pi r}{N} l} \}$$

$$= \cos \{ \omega_r t - \frac{2\pi r}{N} l - \phi_r \}$$

Bemerkung. • Mode r : $\omega_r = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\rightarrow \eta_{r=N}^{(l)}(t)$ ist eine Translation entlang des Rings

- Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit

$\psi_r = \omega_r t - \frac{2\pi r}{N} l - \phi_r$. Für $x_o^{(1)} = la$ gilt:

$$\psi_r = \omega_r t - \frac{2\pi r}{Na} (la) - \phi_r$$

$$0 = d\psi_r = \omega_r dt - \frac{2\pi r}{N} + dx_0^{(l)}$$

$$v_{ph} = \frac{dx_0^{(l)}}{dt} = \underbrace{\frac{\omega_r}{2\pi r}}_{\nu_r} \underbrace{Na}_{\lambda}$$

Im Langwellenlimes $\frac{\lambda_r}{a} = \frac{N}{r} \gg 1$ (also $\sin \frac{\Pi r}{N} \approx \frac{\Pi r}{N}$) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} v_{Ph} &\longrightarrow \sqrt{\frac{K}{m} \left(\frac{Na}{2\Pi r} \right)^2 + \frac{4k}{m} \left(\frac{\Pi r}{N} \frac{Na}{2\Pi r} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{K}{m} \left(\frac{Na}{2\Pi r} \right)^2 + \frac{ka^2}{m}} \end{aligned}$$

Für $K = 0$ erhalten wir $\sqrt{\frac{ka^2}{m}}$, unabhängig von der Mode. Für $K \neq 0$, $r = 0$ (Translationsmode) gilt hingegen $v_{Ph} = \infty$, was nicht unphysikalisch ist, da v_{Ph} keinen Transport einer physikalischen Größe charakterisiert.

- Dispersionsrelation: Lösung = Dispersionsrelation + Moden

3.3.2 Der Kontinuierliche Grenzfall

Für Gleichgewichtspositionen x_n und ausgelenkte Position x'_n gilt $x'_n(t) = x_n + \eta_n(t)$:

Ausgangspunkt

$$m\ddot{\eta}_l(t) + k(2\eta_l(t) - \eta_{l-1}(t)) + K\eta_l = 0$$

$$\Leftrightarrow M\ddot{\eta} + K\eta = 0.$$

Kontinuumlimes beschreibt den Grenzfall $a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$, sodass $Na := L = \text{konst}$ im Fall ($\lambda \gg a$): Langwellengrenzfall.

$$\eta_l(t) := u(x_l, t) \quad \text{sodass} \quad \ddot{\eta}_l(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

$$2\eta_l - \eta_{l-1}(t) - \eta_{l+1} = 2u(x_l, t) - u(x_{l-1}, t) - u(x_{l+1}, t)$$

$$\begin{aligned} \text{Taylor Entwicklung: } &= 2u(x_l, t) - \left(-u(x_l, t) - a \frac{\partial u}{\partial x}(x_l, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t) + O(a^3) \right) \\ &\quad - \left(u(x_l, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x_l, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t) + O(a^3) \right) \\ &= -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl

$$\frac{1}{\frac{ka^2}{m}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{K}{ka^2} u(x, t) = 0$$

Grenzwertbetrachtungen:

$$v := \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{ka^2}{m}} \quad \kappa^2 := \lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ K, k \rightarrow 0}} \left(\frac{K}{ka^2} \right)$$

Wir erhalten die Klein-Gordon Gleichung

$$\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \right) u(x, t)$$

Energie:

$$E = \sum_{l=1}^N \left(\frac{m}{2} (\dot{\eta}_l(t))^2 + \frac{k}{2} (\eta_l(t) - \eta_{l-1}(t))^2 + \frac{K}{2} (\eta_l(t))^2 \right)$$

Da $N \rightarrow \infty$

$$E = \int_1^N d \overbrace{la}^{:=x} \left\{ \frac{m}{2a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{ka}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{K}{2a} u^2 \right\}$$

wir definieren $\varrho = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0}} \frac{m}{a}$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L dx \left\{ \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \varrho v^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \kappa^2 \varrho v^2 u^2 \right\}$$

Für den diskreten Ring gilt also

$$\eta_l(t) = \sum_{r=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_r e^{-i(\omega_R t - \frac{2\pi}{N} l r)}$$

mit $A_r \in \mathbb{C}$ und $\omega_r = \sqrt{\frac{K}{m} + \frac{4k}{m} \sin^2 \left(\frac{\pi r}{N} \right)}$ für $r = 1, \dots, N$ und $L \rightarrow \infty$.

Kontinuuumslimes

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} d \left(r \frac{2\pi}{Na} \right) \underbrace{\left(\frac{A_r Na}{2\pi} \right)}_{:=A(k)} e^{-i\omega_r t - r \frac{2\pi}{Na} a l} + \text{kompl. Konj} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad A(k) e^{-i\omega(k)t} e^{ikx} + \text{kompl. Konj} \end{aligned}$$

Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation (FT)

- Definition der FT:

$$\tilde{\varphi} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \varphi(x)$$

- Umkehrtransformation

$$\varphi(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} e^{-\epsilon|k|} \tilde{\varphi}(k)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ikx} e^{-\epsilon|k|} e^{-ikx'} \varphi(x') \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} e^{-\epsilon|k|} \right\}}_{\substack{:= \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(x-x')^2 + \epsilon^2} \\ \text{(Lorentz-Kurve)}}} \varphi(x') \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{\epsilon \varphi(x')}{(x-x')^2 + \epsilon^2}}_{\substack{\text{Distributionen} \\ \text{(uneigentliche} \\ \text{Funktionen)}}} \end{aligned}$$

□

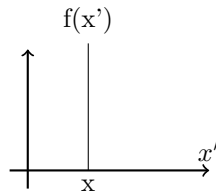


Abbildung 5: δ -Funktion

- Faltungstheorem

$$(\varphi * \psi)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \varphi(x-x') \psi(x')$$

(Faltung, engl. convolution), $kx = \text{const} \Leftrightarrow k = \frac{\text{const}}{x}$ (komplementäre Variablen)

$$\boxed{\Leftrightarrow \varphi * \psi = \tilde{\varphi} \tilde{\psi}}$$

- Parseval'sche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\varphi(k)|^2$$

Elementare Eigenschaften von stetigen Funktionalen und Distributionen

Gegeben sei ein stetiges, lineares Funktional über den Funktionenraum \mathfrak{F} .

$l : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$, $l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1l(\varphi_1) + c_2l(\varphi_2)$ (Linearität) für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{F}$. Funktionen φ werden auch Testfunktionen genannt

- \mathfrak{D} : Raum komplexer, unendlich oft differenzierbarer Funktionen mit kompaktem Träger
- \mathfrak{L} : Raum unendlich oft differenzierbarer komplexer Funktionen die im Unendlichen stärker abnehmen als jede noch so hohe Potenz (streben gegen Null)
- Um Stetigkeit zu garantieren muss \mathfrak{F} zum topologischen Raum mit Hilfe der Funktionennorm $\|\varphi\|$ gemacht werden.
- Beispiele: stetiges Funktional

- $l(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ für $f(x)$ stetig.
 l heißt auch regulär.
- $l(\varphi) := \varphi(X=0)$ Dirac-Funktional
 $f(x)$ ist dann die Dirac-(Delta)-Funktion $f(x) := \delta(x)$
- Zu jedem stetigen linearen Funktional über \mathfrak{D} oder \mathfrak{L} existiert eine Folge f_n stetiger Funktional-Kerne mit

$$l(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x)\varphi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \text{für bel } \varphi \in \mathfrak{D} \text{ oder } \mathfrak{L}$$

$\Rightarrow f$ nennt man Distribution.

Eigenschaften von $\delta(x)$

- $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0)\varphi(x) = \varphi(x_0)$
- Es gilt: Im Limes $n \rightarrow \infty$
 - $f_n(x) := ne^{-n^2\pi x^2} \rightarrow \delta(x)$, denn

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} \varphi\left(u \frac{n}{n\sqrt{\pi}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(0) \sqrt{\pi} = \varphi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- f(x) &:= \frac{n}{\pi} \left(\frac{\sin(nx)}{xn} \right)^2 \rightarrow \delta(x) \\
- f_n(x) &:= \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{n}}{x^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow \delta(x) \\
- f_n(x) &:= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x} \rightarrow \delta(x)
\end{aligned}$$

- Definition $l'(\varphi) := -l(\varphi')$ für alle Testfunktionen aus \mathfrak{F}

$$l' = \int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x) \varphi(x) = [f(x) \varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \varphi'(x)$$

\Rightarrow Jede Distribution auf \mathfrak{L} lässt sich als Distributionsableitung endlicher Ordnung einer stetigen Fkt. darstellen.

- Beispiel: sei $\alpha(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$
Im Distributionssinn gilt:

$$\alpha'(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

- Es gilt
 - $x\delta(x) = 0$
 - $\delta(-x) = \delta(x)$
 - $\delta(g(x)) = \sum_l \frac{1}{|g'(x_l)| \delta(x-x_l)}$, mit stetigem $g, g(x_l) = 0$ und $g'(x_l) \neq 0$.
 - $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$
 - $\tilde{\delta}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
 - $\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x_0)} \cdot 1$ (Fourier-Transformation über 1)

Bestimmung der Amplituden $A(k)$ aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
U(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk (A(k)e^{ikx} + A^*(k)e^{-ikx}) := F(x) \\
\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \{ A(k)(-i\omega(k))e^{ikx} \} + A^*(k)i\omega(k)e^{-ikx} := G(x) \\
A(k) &= \frac{i\omega(k)\tilde{F}(k) - \tilde{G}(k)}{2i\omega(k)\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Bestimmung der Lösungen für Randbedingungen z.B. (W) für $x \in [0, L]$ mit $0 = u(x=0, t)$ und $u(x=L, t) = 0$ vorgegeben für alle t .

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \right) u(x, t) = 0 \quad (\text{W})$$

zusätzliche Anfangsbedingungen:

$$u(x, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \text{ für } x \in [0, L]$$

Fouriertransformation:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} + k.k.$$

Randbedingung:

$$\begin{aligned} 0 = u(x=0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{-i\omega(k)t} + k.k. \\ 0 = u(x=L, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{-i\omega(k)t} e^{ikL} + k.k. \\ 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{-i\omega(k)t} \underbrace{(1 + e^{ikL})}_{=0} + k.k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + e^{ikL} = 0 &\Rightarrow kL = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_n = \frac{\pi}{L}n \\ \Rightarrow A(k) &= A_n \delta(k - \frac{\pi}{L}n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega(k_n)t + ik_n x} + k.k. \quad \text{mit } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

zusätzlich:

$$\begin{aligned} u(x=0, L) &= 0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + A_{-n}) e^{i\omega(k_n)t} + A_0 e^{-i\omega(k=0)t} + k.k. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_n + A_{-n} = 0 \text{ und } A_0 = 0.$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega(k_n)t} e^{i \frac{k_n \pi}{L} x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^* e^{i\omega(k_n)t} e^{-i \frac{n \pi}{L} x} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(A_n e^{i \frac{n \pi}{L} x} + A_{-n} e^{i \frac{n \pi}{L} x} \right)}_{= A_n \cdot 2i \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) - A_n} e^{-i\omega(k_n)t} + k \cdot k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2|A_n| \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \cdot 2\Re\{e^{-i\omega(k_n)t + i\phi_n i}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 4|A_n| \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \sin(\omega(k_n)t - \phi_n)
\end{aligned}$$

$\sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$ bilden dabei ein vollständiges UFnktionensystem für stetige Funktionen f im Intervall $[0, L]$ mit $f(x=0) = f(x=L) = 0$ (sogar orthogonals Funktionensystem)

Es gilt

$$\int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right) \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right) \right) = \delta_{nm}$$

d.h. $v = \sum_i a_i e_i$, $w = \sum_i b_i e_i$, $(v, w) = \sum_i a_i b_i$. Somit

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right) \right) u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} 4|A_n| \delta_{nm} = -4|A_m| \sin \varphi_m \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} 4|A_n| \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \omega(k_n) \cos(\omega(k_n)t - \varphi_n)
\end{aligned}$$

???, das heißt Linear-Kombination von allgemeiner homogene und partikulärer Lösung.
 $\rightarrow ??? \rightarrow ???$

3.4 Erzwungene Schwingungen und Greensche Funktionen

1. Transformation auf Normalkoordinaten \rightarrow ungekoppelte erzwungenen Schwingungen
2. $\ddot{Q}(t) + \omega^2 Q(t) = \mathfrak{F}(t)$ linear inhomogen
3. Allgemeine Lösung

$$Q(t) = \underbrace{Aq_1(t) + Bq_2(t)}_{\text{Lösung der homogenen Gleichung}} + \underbrace{Q_p(t)}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

4. Konstruktion von $Q_p(t)$:

Idee: $\mathfrak{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t - t') \mathfrak{F}(t')$

$$\mathfrak{L}G(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \omega^2 G(t, t') = \delta(t - t')$$

$$Q_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') \mathfrak{F}(t') \text{ denn } \mathfrak{L}Q_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{L}G(t, t') \mathfrak{F}(t') = \mathfrak{F}(t')$$

3.4.1 Lösung von DGL mit Hilfe von Integraltransformationen (Fourier, Laplace)

$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^3 e^x$; $y(0) = y'(0) = 0$; $y(x) = f = f(x)$ Laplace-Transformation
 $L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} dx f(x) e^{-px}$, $p > 0$

Mehtode. zur Lösung

1. Transformiere die DGL mit Hilfe von L und erhalten eine rein algebraische Gl. für $F(p)$ bzgl. p .

2. Löse die algebraischen Gl. nach $F(p)$ auf

3. Suche die inverse Transformation von $F(p)$, $y(x) = L^{-1}(L(y))$

\Rightarrow Laplace Transformation ist linear $L(y'') - 2L(y') + L(y) = L(x^3 e^x)$

$$\begin{aligned} L(y') &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dy}{dx} e^{-px} = [ye^{-px}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} dx ye^{-px}(-p) \\ &= -y(0) + p \int_0^{\infty} dx ye^{-px} \\ &= -y(0) + pL(y) = pL(y) - y(0) \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned} L(y'') &= p^2 L(y) - py(0) - y'(0) \\ L(x^3 e^x) &= \int_0^{\infty} x^2 x^2 e^{-x(p-1)} dx = \frac{6}{(p-1)^4}, \quad p-1 > 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Eingesetzt in Gl 1

$$\begin{aligned} (p^2 - 2p + 1)L(y) &= \frac{6}{(p-1)^4} \\ L(y) &= \frac{6}{(p-1)^4(p^2 - 2p + 1)} \end{aligned}$$

3.5 Erzwungene Schwingungen und Greensche Fkt.

Schwingungsgleichung

$$M\ddot{\nu}(t) + K\nu(t) = F(t)$$

Normalkoordinaten $Q(t)$ Einführen

$$\ddot{Q}(t) + kQ = F(t)$$

$$F(t) = O^T M^{-1/2} F(t)$$

$$F(t) = AQ_1(t) + BQ_2(t) + Q_p(t)$$

Konstruktion von $Q_P(t)$ auf $F(t)$ Def. Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(t, t')$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + kG(t, t') = \delta(t - t')$$

Für $Q(t)$ gilt

$$Q_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') F(t')$$

Beweis.

$$\ddot{Q}_p(t) + kQ_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\left\{ \ddot{G}(t, t') + kG(t, t') \right\}}_{:=\delta(t-t')} F(t') = F(t)$$

□

Es gilt:

- $G_{ret}(t, t') = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}(t - t')) \theta(t - t')$ (retardiert)
- $G_{av}(t, t') = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}(t' - t)) \theta(t' - t)$ (avanciert)

Beweis. Für $G_{ret}(t, t')$ und $k > 0$ $t > t'$: $G_{ret}(t, t') = A \sin(\sqrt{k}(t - t')) + B \cos(\sqrt{k}(t - t'))$ (Ansatz)

$t < t'$: $G_{ret}(t, t') = 0$

Übergangsbedingung für $t = t'$: Sei $\epsilon > 0$

Integration von (2) nach t

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{ret}(t, t') + kG_{ret}(t, t') \right\} = \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t - t')$$

Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{ret}(t' + \epsilon, t') - \frac{\partial}{\partial t} G_{ret}(t' - \epsilon, t') = 1$$

Weper Stetigkeit:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} G_{ret}(t' + \epsilon, t') = 0$$

$$\Rightarrow B = 0, A \frac{1}{\sqrt{k}}$$

\Rightarrow Eine Partikuläre Lösung der DGL ist gegeben durch

$$Q_p(t) = \int_{-\infty}^t dt' F(t') \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}(t - t'))$$

$$\text{Spezialfall } F(t) = F_0 \theta(t') \theta(T - t') \sin \Omega t'$$

\Rightarrow Eingesetzt in Gl 5

$$Q_p(t \geq T > 0) = \frac{-F_0}{2\sqrt{k}} \left\{ \frac{\sin[(\Omega - \sqrt{k})T + \sqrt{k}t] - \sin(\sqrt{k}t)}{\Omega - \sqrt{k}} - \frac{\sin[(\Omega + \sqrt{k})T - \sqrt{k}t] \sin \sqrt{k}t}{\Omega + \sqrt{k}} \right\}$$

$$\text{mit } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\xrightarrow{\Omega \rightarrow \sqrt{k}} -\frac{F_0 T}{2\sqrt{k}} \cos \sqrt{k}t \quad \text{resonante Anregung}$$

□

3.5.1 Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: I) Anfangswertprobleme

Beispiel $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = f(t)$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, $t > 0$

Sowie $\ddot{G}(t, t') + \omega^2 G(t, t') = \delta(t - t')$, $G(0, t') = \dot{G}(0, t') = 0$ Durch Multiplikation mit $f(t')$ und integrieren über t' :

$$\int_0^\infty dt' \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \omega^2 \right) G(t, t') f(t') = \int_0^\infty dt' \delta(t - t') f(t')$$

Ergibt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \omega^2 \right) \int_0^\infty G(t, t') f(t') = f(t)$$

Transformieren mit Hilfe der Laplace Transformation bzg. p

$$G(p, t') = \frac{e^{-pt'}}{p^2 + \omega^2}, \quad p \geq 0$$

$$G(t, t') = \frac{\sin(\omega(t - t'))}{\omega} \theta(t - t')$$

Fazit

1. Formuliere 6 mit Hilfe von $G(t, t')$ in 7
2. Löse 7 mittels Laplace Transformation
3. Transformiere $G(p, t')$ zurück zu $G(t, t')$
4. Interpretiere $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') f(t')$ und erhalte $y(t)$ für ein bestimmtes $f'(t)$.

3.5.2 Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: II) Randwertprobleme

1. Jede DGL hat die Form $\mathfrak{D}y(x) = f(x)$.
Bringe jede DGL 2. Ordnung in die sog. Sturm-Liouville Form

$$\frac{d}{dx}(p(x)y'(x)) + a(x)y(x) = f(x)$$

Wobei $p(x) > 0$ und $a(x)$ stetig, reell

2. Löse die homogene DGL

$$y_n(x)c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

3. $y_{ges} = y_n(z) + \int_a^b dx G(x, z) f(x)$

$$G(x, z) := c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(z)}{p(z)\omega(z)} & \text{für } a < x < z \\ \frac{y_1(z)y_2(x)}{p(z)\omega(z)} & \text{für } a < z < x \end{cases}$$

mir $\omega(z) = y_1(z)y_2'(z) - y_1'(z)y_2(z)$ (Wronski Determinante)

1. $p(x) = 1$
2. Homogene DGL: $y'' = 0$
3. $G(x, z) = c_1 + c_2x + \begin{cases} z, & \text{für } 0 < x < z \\ x, & \text{für } z < x < 1 \end{cases}$ Bestimme a_1, c_2 aus Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} G(0, z) = 0 \\ G(1, z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -z \\ c_2 = z - 1 \end{array} \Rightarrow G(x, y) = \begin{cases} x(z - 1) & , \text{für } 0 < x < z \\ z(x - 1) & , \text{für } z < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_P(z) =$$

Hier fehlt was!

4 Hamiltonsche Mechanik

Motivation: Lagrange-Formulierung

1. Grundlegende Variablen q, \dot{q}, t
 2. Lagrange Funktion $L(q, \dot{q}, t)$
 3. $\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \quad L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$ (Hamilton Prinzip)
- $\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$ mit $j = 1, \dots, f$
- $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_{j_0}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_{j_0}} := p_{j_0}$ ist Erhaltungsgröße
- \Rightarrow Suche nach einer alternativen Formulierung der Lagrange-Mechanik im Bezug auf q, p statt q und \dot{q} .

4.1 Legendre Transformation

Ersetze $f(x)$ durch $g(p)$ mit $P := \frac{\partial f}{\partial x}$

Ziel: Finde eine eindeutige Zuordnung $f(x) \leftrightarrow g(p)$ (Bijektivität)

\Rightarrow Übergang von $L(q, \dot{q}, t)$ zur Hamilton Funktion $H(P := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, q, t)$

Gegeben sei $f(x)$ konvex, $f''(x) > 0$

$$F(x, p) := px - f(x)$$

Es gilt:

- $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_P = p - \frac{df}{dx}$
- $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_P = -\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$, da $f''(x) > 0$

$\Rightarrow \max F(x, p) = g(p) := F(x(P), P)$ mit $P = \frac{\partial f}{\partial x}$

\Rightarrow d.h. durch die Abbildungsvorschrift $f(x) \rightarrow g(p) := px(p) - f(x(p))$ mit $p := \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow x(p)$ lässt sich jeder konvexen Funktion $f(x)$ eine Legendre-Transformierte $g(p)$ zuordnen.

Es gilt:

- $\frac{dg}{dp} = x(p) + p \frac{dx}{dp} - \frac{df}{dx} \frac{dx}{dp} = x(p)$
- $\frac{d^2 g}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = \left[\frac{d^2 f}{dx^2} \right]^{-1} > 0 \rightarrow g(p)$ ist auch konvex

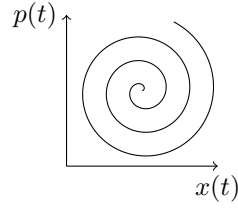


Abbildung 6: Phasenraum-Darstellung

- Die Legendre Transformation ist involutiv, d.h. die Legendre Transformation von $g(p)$ ist wieder $f(x)$
Beweis: $\max G(x, p) = p(x)x - g(p(x)) := p(x)x - \{p(x)x - f(x)\} = f(x)$
- $-g(P(x))$ ist die Ordinate Ψ des Punktes $x = 0 = x_0$ der Tangente an die Kurve $f(x)$ an der Stelle x_0

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \frac{f(x_0) - \Psi}{x_0 - 0} \Leftrightarrow -\Psi = x_0 \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} - f(x_0) \equiv g(p(x_0))$$

- Für $f(x)$ von mehreren Unbekannten x_j , $j = 1, \dots, d$ gilt:

$$g(p) = \sum_{j=1}^d p_j x_j(p) - f(x(p)) \text{ mit } p_j := \frac{\partial f}{\partial x_j} \rightarrow x_j(p_j)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} > 0 \text{ (positiv definit)}$$

Analog gilt für die Umkehrung:

$$f(x) = \sum_{j=1}^d p_j(x) x_j - g(p(x))$$

$$x_j = \frac{\partial g}{\partial p_j} p \rightarrow p_j(x_j)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_j} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} \right]^{-1} > 0$$

- Youngsche Ungleichung

$$F(x, p) := \sum_{j=1}^d p_j x_j - f(x) \leq g(p) \equiv F(x(p), p) \equiv \max_x F(x, p), \text{ für } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- $dg = \sum_{i=1}^d \left\{ dx_i p_i + x_i dp_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right\} = \sum_{i=1}^d p_i dp_i \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial p_i} = x_i$
 $df = \sum_{i=1}^d \left\{ dx_i p_i + x_i dp_i - \frac{\partial g}{\partial p_i} dp_i \right\} = \sum_{i=1}^d p_i dp_i \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = p_i$
 - Die Legendre-Funktion (engl. Hamiltonian) mit $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \rightarrow \dot{q}(q, p, t)$ für $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} > 0$
- $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_{j_0}} = 0 \rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_{j_0}} = 0$ (zyklische Koordinaten)

4.2 Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

Es gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{mit Anfangsbedingungen}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{q}_j(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_j}(p, q, t) \\ \dot{p}_j(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}(p, q, t) \end{aligned} \rightarrow (p(t), q(t)) \text{ für gegebenen Anfangsbedingungen } (p(t_0), q(t_0))$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

- $\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}$
- $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$
- $\frac{dH}{dt}(p(t), q(t), t) = \frac{\partial H}{\partial t}(p(t), q(t), t)$
Lösung der Hamilton-Bewegungsgleichung
 \Rightarrow für $\frac{\partial H}{\partial t}(p, q, t) = 0 \Rightarrow H(p(t), q(t), t)$ ist Erhaltungsgröße (Energie)

Beweis. Freiheitsgrade $f =: H(p, q, t) = \sum_{j=1}^f [p_j \dot{q}_j(q, p, t)] - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$

$$\begin{aligned} dH(p, q, t)|_p &= \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \Big|_p \\ \frac{df}{dx}(x) \equiv f'(x) &\equiv \sum_{j=1}^f \left(dp_j \dot{q}_j + p_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \right) \Big|_T \end{aligned}$$

mit $\left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) d\dot{q}_j = 0$

$$\Leftrightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

Es folgt daraus dass

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} \quad \text{Hamilton I}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{Hamilton II}$$

Weiterhin

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \underset{\dot{p}_j}{=} -\frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \underset{\dot{q}_j}{=} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

□

Es gilt: Sei q_1 Zyklische Koordinate
 $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \Rightarrow p_1$ Erhaltungsgröße: $H(p_1 = c, p_2, \dots, p_f)$

4.3 Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip

Wenn $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t)$ (lokal) bijektiv ist

$$\begin{aligned} S &:= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^f p_j dq_j - H(q, p, t) dt \right\} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^f p_j(t) \dot{q}_j(t) - H(p(t), q(t), t) \right\} \leq \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad \text{Youngsche Ungleichung} \end{aligned}$$

$$\delta S[\gamma] = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^f p_j(t) \dot{q}_j(t) - H(p(t), q(t), t) \right\} = 0$$

Wobei der Weg $\gamma : t \mapsto (p(t), q(t))$.

Es gilt: Die Variation ist gleich 0:

$$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$$

bzw. $p(t_0), p(t_1)$ beliebig

Beweis. betrachte virtuelle Verrückung $(\delta p(t_1), \delta q(t_1))$

$$\begin{aligned}\delta S[\gamma] &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^f \left(\delta p_j(t) \dot{q}_j(t) + \underbrace{p_j(t) \delta \dot{q}_j(t)}_{= \frac{d}{dt} (p_j(t) \delta q_j(t) - \delta q_j(t) p_j(t) \dot{q}_j(t))} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j(t) - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j(t) \right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^f p_j \delta q_j(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^f \delta q_j(t) \left(\dot{q}_j(t) - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \delta q_j(t) \left(-\dot{p}_j(t) - \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{da } \delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \square\end{aligned}$$

4.4 Phasenraum, Zustände, physikalische Variable

Ausgangspunkt $H(p, q, t)$ kodiert mechanisches System

Raum = $\{(p, q, t)\}$ Phasenraum

$\widetilde{\text{Raum}} := \{(p, q, t)\}$ erweiterter Phasenraum

$$\begin{aligned}\dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \Leftrightarrow \dot{z}^k = \sum_{l=1}^{2f} S_{kl} \frac{\partial H}{\partial z_l} = V_k(z) \\ V_k &= \sum_{j=1}^{2f} S_{kl} \quad \begin{array}{c} \text{konvar.} \\ \text{Tensor} \\ \text{2. Stufe} \end{array} \quad \frac{\partial H}{\partial z_l} \quad \begin{array}{c} \text{kontravariantes} \\ \text{Vektorfeld} \end{array}\end{aligned}$$

Trajektorien $\dot{z}_k(t) = \sum_{l=1}^{2f} S_{kl} \frac{\partial H}{\partial z_l}(z)$ Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Zustand (rein) $z = (p, q)$ charakterisiert das mechanische System vollständig

Physikalische Variable Funktion über dem Phasenraum (z.B. $H(z(t), t)$)

Physikalische Variable (Zustandsgröße, physikalische Variable) $H(z_0, t_0)$

gemischte Zustände Charakterisierung durch Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

$$\begin{aligned}P(z, t) &\geq 0 \quad \int dz P(z, t_0) = 1 \\ \langle F \rangle_{P(t_0)} &= \int dz P(z, t_0) F(z, t_0)\end{aligned}$$

Zeitliche Entwicklung und Poisson Klammern:

Sie $F(p, q, t)$ eine Physikalische Variable

$$\dot{q}_l = \{q_l, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad \dot{p}_l = \{p_l, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(p(t), q(t), t) &\stackrel{\text{H-B-Gl}}{=} \sum_{l=1}^f \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_l} \dot{p}_l + \frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l \right\} + \frac{\partial F}{\partial t}(p(t), q(t), t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(p(t), q(t), t) + \{F, H\} \end{aligned}$$

wobei $\{F, G\} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right)$

$$= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

Neue Struktur: Über die Menge der physikalischen Variablen $\{F(z)\}$ ist eine algebraische Struktur definiert

- gewöhnliche Multiplikation $(FG)(z) := F(z)G(z)$ ist kommutativ
- Poisson-Klammern $\{F, G\} := R(z)(F \circ G)$ ist nicht kommutativ

Eigenschaften der Poisson-Klammern

- $\{F, c\} = 0$ für $\frac{\partial c}{\partial p_i} = \frac{\partial c}{\partial q_i} = 0$ für alle $i = 1, \dots, f$
- $\{F, \alpha G_1 + \beta G_2\} = \alpha \{F, G_1\} + \beta \{F, G_2\}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\{F, G\} = -\{G, F\} \Rightarrow \{F, F\} = 0$ antikommutativ
- $\{F, G_1 G_2\} = \{F, G_1\} G_2 + G_1 \{F, G_2\}$ (Produktregel)
- $\{F, \{G_1, G_2\}\} + \{G_1, \{G_2, F\}\} + \{G_2, \{F, G_1\}\} = 0$

→ Quantenmechanik: Heisenberg: p, q sind Matrizen \rightarrow lineare Vektorraum Transformationen.

$$\{F, G\} \rightarrow [\hat{F}, \hat{G}] := \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}$$

Beispiel: Poisson-Klammer-Strukturen $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} := \{\vec{a}, \vec{b}\} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Entwicklung

$$\begin{aligned}
 F(p(t), q(t)) &= F(p(t_0), q(t_0)) + (t - t_0) \underbrace{\left. \frac{dF}{dt} \right|_{t_0}}_{=-\{H, F\}_{t_0}} + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \underbrace{\left. \frac{d^2 F}{dt^2} \right|_{t_0}}_{(-1)^2 \{H, \{H, F\}_{t_0}} + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t - t_0)^n}{n!} \underbrace{\{H \{H \{ \dots \{H, F\} \dots \}\}_{t_0}}_{n\text{-mal}}
 \end{aligned}$$

4.4.1 Erhaltungsgrößen

$$\stackrel{!}{=} \frac{dF}{dt}(p(t), q(t), t) = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Es gilt der Poissonsche Satz: Seien F_1 und F_2 Erhaltungsgrößen: $\Rightarrow \{F, G\}$ ist Erhaltungsgröße

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \{F_1, F_2\} &= \{\{F_1, F_2\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t} \{F_1, F_2\} \\
 &= -\{H, \{F_1, F_2\}\} + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} \\
 \text{Mit Jacobi-Id} &= \{F_1, \{F_2, H\}\} + \{F_2, \{H, F_1\}\} + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} \\
 &= \underbrace{\{F_1, \{F_2, H\} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\}}_{=0} + \underbrace{\left\{ F_2, \underbrace{\{H, F_1\}}_{=-\{F_1, H\}} - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right\}}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Erhaltungsgröße eines dreien nicht relativistischen Massepunkts

Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 \{q_i, p_k\} &= \delta_{ik} \\
 \{q_i, q_k\} &= \{p_i, p_k\} = 0
 \end{aligned}$$

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m}$$

1. Impulserhaltung

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^3 \{p_i, p_k, p_k\} = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^3 \underbrace{\{p_i, p_k\}}_{=0} p_k + p_k \underbrace{\{p_i, p_k\}}_{=0} = 0$$

2. Energieerhaltung

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 \quad \text{da} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

3. Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \qquad L_i = \sum_{l,k=1}^3 \epsilon_{ilk} x_l p_k$$

$$\frac{dL_i}{dt} = \{L_i, H\} = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^3 \{L_i p_k p_k\} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^3 \{L_i, p_k\} p_k = \frac{1}{m} \sum_{k,b=1}^3 \epsilon_{ikb} p_k p_b = 0$$

7 Erhaltungsgrößen in 6 dim \Rightarrow min 2 sind Abhängig *Hier fehlt was!*

4.5 Die Poincare-Cartan Invariante

erweiterter Phasenraum $\{(p, q, t)\}$, geschlossener Weg $C : \lambda \in [0, 1] \mapsto (p(\lambda), q(\lambda), t(\lambda))$.

$$\begin{aligned} I(C) &= \oint_C \left\{ \sum_{i=1}^f p_i(\lambda) \frac{dq_i}{d\lambda} - H(p(\lambda), q(\lambda), t(\lambda)) \frac{dt}{d\lambda} \right\} d\lambda \\ &= \oint_C \sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt \\ &= I(C') \end{aligned}$$

Ist äquivalent zu

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Konsequenz Die Koordinaten $(P, Q, T), K(P, Q, T), S(P, Q, T)$ hängen von (p, q, t) und $H(p, q, t)$ ab, sodass wenn

$$\sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^f P_i dQ_i - K dT + dS$$

Dann folgt durch die Poincare-Cartan Invariante (P-C-I) und durch $\oint_C dS = 0$ die Äquivalenz zwischen

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} &\Leftrightarrow \frac{dQ_i}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} &\Leftrightarrow \frac{dP_i}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

Beweisidee betrachte eine beliebige (glatte) Abbildung $s \in [0, \dots)$ und $(P(p, q, t), Q(p, q, t), T(p, q, t))$ und $\tilde{H}(P, Q, T) := H(p(P, Q, T), q(P, Q, T), t(P, Q, T))$. Wir betrachten die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} P_i &= p_i + s\dot{P} + O(s^2) \\ Q_i &= q_i + s\dot{Q} + O(s^2) \\ T &= t + s\dot{T} + O(s^2) \end{aligned}$$

Durch einsetzen diese in die PCI

$$\begin{aligned} I(C') &= \oint_{C'} \sum_{i=1}^f P_i dq_i - \tilde{H} dT \\ &= \oint \sum_{i=1}^f (p_i + s\dot{P}_i)(dq_i + s\dot{Q}_i) - \left(H + \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} s\dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} s\dot{Q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} s\dot{T} \right) (dt + s\dot{T}) + O(s^2) \\ &= \left(\oint_{C'} \sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt \right) \\ &\quad + s \oint_{C'} \left\{ \sum_{i=1}^f \left(\dot{P}_i dq_i + p_i d\dot{Q}_i - \dot{Q}_i dp_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{P}_i dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{Q}_i dt - \frac{\partial H}{\partial t} \dot{T} dt \right) - H d\dot{T} \right\} + O(s^2) \end{aligned}$$

wobei $p_i d\dot{Q}_i = d(p_i \dot{Q}_i) - \dot{Q}_i dp_i$ und $H d\dot{T} = d(H \dot{T}) - \dot{T} dH$

Durch Ordnen der Summe

$$\begin{aligned} &= \oint_{C'} \left(\sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt \right) + \underbrace{\oint_{C'} d(p_i \dot{Q}_i) - d(\tilde{H} \dot{T})}_{=0} \\ &\quad + s \underbrace{\oint \sum_{i=1}^f \left\{ \dot{P}_i \left(dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) + \dot{Q}_i \left(-dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right) + \dot{T} \left(-\frac{\partial H}{\partial t} + d\tilde{H} \right) \right\}}_{=\tilde{I}} + O(s^2) \end{aligned}$$

Fall 1: Gelte für die Kurve, dass $dt \equiv \frac{dt}{d\lambda} d\lambda = 0$

$$\tilde{I} = \oint_C \sum_{i=1}^f \left(\dot{P}_i + \dot{T} \frac{\partial dH}{\partial dq_i} \right) dq_i + (-\dot{Q}_i + \dot{T} \frac{\partial H}{\partial p_i}) dp_i \stackrel{!}{=} 0$$

Ist äquivalent zu

$$\frac{dp_i}{dt} \equiv \frac{\frac{dP}{ds} \big|_{s=0}}{\frac{dT}{ds} \big|_{s=0}} = \frac{\dot{P}_i}{\dot{T}} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \frac{\dot{Q}_i}{\dot{T}} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}$$

4.6 Kanonische Transformationen

Sei z die ...

$$z_i = (p, q)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{k=1}^{2f} S_{ik} \frac{\partial H}{\partial z_k} = \{z_i, H\}$$

und gebe es eine Transformation $Z(z)$, sodass

$$Z(z) \mapsto \dot{Z}_I \tilde{S}^{(ik)} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Z_k} = \{Z_i, \tilde{H}\}$$

$$\tilde{S}_{ik} = \sum_{a,b=1}^{2f} \frac{\partial Z_i}{\partial z_a} A_{ab} \frac{\partial Z_k}{\partial z_b} \tilde{H}(Z := H(z(Z)))$$

Wenn $S_{ik} = \tilde{S}_{ik}$, dann herrscht formale "Gleichheit" der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Kanonische Transformationen (erhalten die Poissonklammern) und es gilt $S_{ik} = \{z_i, z_k\}$

Eigenschaften kanonischer Transformationen: $z \leftrightarrow Z$ ist kanonisch \Leftrightarrow

1. $\int_{G'} \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik}^{-1} dZ_i dZ_k = \int_G \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik}^{-1} dz_i dz_k$ für alle $G(G')$ im Phasenraum

Beweisidee. Sei $z \leftrightarrow Z$ beliebig:

$$\begin{aligned} \int_G \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik} dz_i dz_k &= \int_{G'} \sum_{i,k=1}^{2f} \tilde{S}_{ik} dZ_i dZ_k \\ &= \int_{G'} \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik} dZ_i dZ_k \end{aligned}$$

□

2. $\oint_{\partial G} \sum_{i=1}^f p_i dq_i = \oint_{\partial G'} \sum_{i=1}^f P_i dQ_i$ für alle $\partial G(\partial G')$

Beweisidee.

$$\int_G \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik} \frac{\partial z_i}{\partial u} \frac{\partial z_k}{\partial v} du dv = \sum_{i=1}^f \int du dv \left(\frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial v} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right)$$

Wir wählen $u_{<} \leq u \leq u_{>}$ und $v_{<} \leq v \leq v_{>}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^f \left\{ \int dv \, p_i \frac{\partial q_i}{\partial v} \Big|_{u_{<}}^{u_{>}} - \int du \, dv \, p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial u \partial v} \right. \\
&\quad \left. - \int du \, dv \, p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial u \partial v} \Big|_{v_{<}}^{v_{>}} + \int du \, dv \, p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial u \partial v} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^f \oint p_i \, dq_i
\end{aligned}$$

□

3. Aus (2) folgt:

Wenn $\sum_{i=1}^f p_i \, dq_i = \sum_{i=1}^f P_i \, dQ_i + d\tilde{S}$ für die erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation $\tilde{S}(P, Q) = S(p(P, Q), q(P, Q))$, dann gilt $z \leftrightarrow Z$ ist kanonisch.

Beweis. Es existiert eine erzeugende Funktion kanonischer Transformationen $S(P, Q, t) = S(P(p, q, t), Q(p, q, t), t)$ sodass:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^f p_i \, dq_i &= \sum_{i=1}^f \left(P_i \, dQ_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right) \\
\oint_{\partial G} \sum_{i=1}^f p_i \, dq_i &\equiv \oint_{\partial G} \sum_{i=1}^f P_i \, dQ_i + \underbrace{\oint_{\partial G'} \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right)}_{=0}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
I(c) &:= \oint_C \sum_{i=1}^f p_i \, dq_i - H(p, q, t) dt \\
&= \oint_{C'} \sum_{i=1}^f P_i \, dQ_i - \underbrace{\left(H(\overbrace{p(P, Q, t), q(P, Q, t), t}^{:=\tilde{H}(P, Q, t)}) + \frac{\partial S}{\partial t} \right)}_{=K(P, Q, t)} dt \\
&\quad + \underbrace{\oint_C \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right)}_{=0} + \frac{\partial S}{\partial t} dt
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Es gilt:

Hamilton-Dynamik mit $(p, q; H(p, q, t)) \Leftrightarrow$ Hamilton-Dynamik mit $(P, Q; k(P, Q, t))$
 $(p, q) \leftrightarrow (P, Q)$ mit $K(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}(P, Q, t))$ ist kanonisch
(Newtonsche Zeit t wird nicht transformiert)

Verbindung zur Poincare-Cartan Invariante

Sei eine kanonische Transformation $z \leftrightarrow Z$ bzw. $(p, q, t) \leftrightarrow (P, Q, T)$ gegeben, dann gilt

$$\oint_C \sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt = \oint_{C'} \sum_{i=1}^f P_i dQ_i - \tilde{H} dt + d\tilde{S}$$

und

$$\sum_{i=1}^f p_i dq_i = \sum_{i=1}^f \left(P_i dQ_i + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial Q_i} dQ_i \right)$$

sodass $\boxed{H = \tilde{H} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}}$

4.6.1 Erzeugende Funktionen und kanonische Transformationen

Ausgangspunkt: kanonische Transformation $(p, Q) \leftrightarrow (P, q)$ mit erzeugender Funktion $\tilde{S}(P, Q, t) \equiv S(p, q, t)$.

Lokal ist $\det \frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)} \neq 0$. Existiert eine Transformationsformel?

Sei $(p, q) \leftrightarrow (P, Q) \leftrightarrow (q, Q)$. Daraus definieren wir $S_2(q, Q, t) := \tilde{S}(P(q, Q, t), Q, t)$.

$$\sum_{i=1}^f \left\{ p_i dq_i - P_i dQ_i - \frac{\partial S_2}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial S_2}{\partial Q_i} dQ_i \right\} = 0$$

(q, Q) sind Koordinaten. Daraus folgt dq_i, dQ_i sind linear unabhängig:

$$p_i = \frac{\partial S_2}{\partial q_i}(q, Q, t) \quad P_i = -\frac{\partial S_2}{\partial Q_i}(q, Q, t)$$

Wahl $(p, q) \leftrightarrow (P, Q)$ ist nicht immer möglich (z.B. id: $q_i = Q_i, p_i = P_i$)

4.6.2 Kontinuierliche kanonische Transformationen

Sei $g_\epsilon(q, p) \rightarrow (P, Q)$ stetig aus den Einheitstransformationen erzeugbar, also erzeugt aus

$$S_3(P, q, t, \epsilon) = \sum_{i=1}^f P_i q_i + \epsilon F(P, q, t, \epsilon)$$

Für die erzeugende Funktion $F(p, q, t)$ gilt

$$\frac{dp_i}{d\epsilon} = -\frac{\partial F}{\partial q_i} \quad \frac{dq_i}{d\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$\begin{aligned}
g_\epsilon : \quad p_i &= \frac{\partial S_3}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q_i}(P, q, t, \epsilon) \\
\Rightarrow \frac{dp_i}{d\epsilon} &= \left. \frac{P_i - p_i}{\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}(P, q, t, \epsilon=0) = -\frac{\partial F}{\partial q_i}(p, q, t, \epsilon=0) \\
Q_i &= \frac{\partial S_3}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial P_i}(P, q, t, \epsilon) \\
\Rightarrow \frac{dq_i}{d\epsilon} &= \left. \frac{Q_i - q_i}{\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -\frac{\partial F}{\partial P_i}(P, q, t, \epsilon=0) = -\frac{\partial F}{\partial P_i}(p, q, t, \epsilon=0)
\end{aligned}$$

Bemerkung. Einene Spezialfall der Erzeugenden Funktion stellt die Zeitliche Entwicklung dar:

Wenn $\epsilon \rightarrow t$ dann ist $F \rightarrow H$ einen kontinuierliche Kanonische Transformation.

4.6.3 Symmetrietransformationen

Definition einer Symmetrietransformation

$$\begin{array}{ccc}
z = (p, q) & \xrightarrow[H]{h_t} & (p_t, q_t) \quad \Leftrightarrow \{F, H\} = 0 \\
g_\epsilon \downarrow F & & g_\epsilon \downarrow F \\
z_\epsilon = (P(\epsilon), Q(\epsilon)) & \xrightarrow[h_t]{H} & (P_t(\epsilon), Q_t(\epsilon))
\end{array}$$

Sei $F(p, q)$ explizit Zeitunabhängig $\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \{F, H\} = 0$

Beweis.

$$h_t(g_\epsilon(z)) = M_1$$

$$h_t(h_t(z)) = M_2$$

Durch verwenden der Jacobi Identität:

$$M_1 - M_2 = \epsilon t \{z, \{F, H\}\} + O(\epsilon^2, t^2, \epsilon t)$$

□

Beispiele: freie Teilchen mit $H(p, q, t) \frac{\vec{p}^2}{2m}$

Erhaltungsgröße $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ Symmetrietransformation

$$\{H, p_i\} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{i_0}(p, q, t) \equiv p_{i_0}$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\epsilon} = \vec{e}_{i_0} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\epsilon} = \vec{e}_{i_0} \times \vec{x}$$

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{d\epsilon} &= \frac{\partial F_{i_0}}{\partial p_i} = \delta_{ii_0} \\ \frac{dp_i}{d\epsilon} &= -\frac{\partial F_{i_0}}{\partial q_i} = 0\end{aligned}$$

4.6.4 Hamilton-Jakobische Differentialgleichung

Es gilt: nicht partielle DGL 1. Ordnung \leftrightarrow Hamiltonisches System von gewöhnlichen DGLs

kanonische Transformation in ein Hamilton System: $(p, q) \leftrightarrow (P, Q)$.

Es existiert eine erzeugende Funktion $S(P, Q, p, q, t)$, sodass

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial P} \qquad P = -\frac{\partial S}{\partial Q}$$

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} & \Leftrightarrow & \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{q} &= -\frac{\partial H}{\partial q} & & \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial P}\end{aligned}$$

Es folgt die H-J-DGL:

$$K = 0 = H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Beispiel. Der Freie Massenpunkt:

$$H(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2M}$$

H-J-DGL:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, x_j, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = K = \frac{1}{2}M(\vec{\nabla}_{\vec{x}}S)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$$

Damit das problem eindeutig gelöst werden kann nehmen wir an, dass $S(\vec{P}, \vec{x}, t = 0)$ vorgegeben ist.

Nun suchen wir eine Lösung mit dem Separationsansatz: $S(\vec{P}, \vec{x}, t) = W(\vec{P}, \vec{x}) + \eta t$.

Es ergibt sich ein reduziertes Problem:

$$\frac{1}{2M}(\vec{\nabla}_{\vec{x}}S)^2 + \eta = 0$$

Es folgt, als mögliche Lösung $W(\vec{P}, \vec{x}) = \vec{P}\vec{x}$, sodass $\eta = -\frac{\vec{P}^2}{2M}$

$$S(\vec{P}, \vec{x}, t) = \vec{P}\vec{x} - \frac{\vec{P}^2}{2M}t$$

erfüllt die H-J-DG1 mit $S = \vec{P}\vec{x}$, sodass

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial x_i} = P_i \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i} = x_i - \frac{P_i}{M}t \\ x_i &= Q_i + \frac{P_i}{M} \\ p_i &= P_i \end{aligned}$$

Hamilton gl zu H-J-DG1 Löse die Hamiltonsche Bewegungsgleichung mit vorgegebenem $S_0(\vec{x})$

4.6.5 Auf den Spuren von Erwin Schrödinger

Schrödinger Gleichungen: Punktquant im äußeren Potenzial

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\vec{x}} + V(\vec{x}, t) \right\} \Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{x}, t)$$

Kurzwellenasymptotik $\hbar \rightarrow 0$ für kleine Wellenlängen

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, t) &= A e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, t)} \\ (\vec{\nabla} \Psi)(\vec{x}, t) &= \frac{i}{\hbar} (\vec{\nabla} S) \Psi(\vec{x}, t) \\ (\Delta \Psi)(\vec{x}, t) &= \frac{i}{\hbar} (\Delta S) \Psi(\vec{x}, t) + \left(\frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S \right)^2 \Psi(\vec{x}, t) \\ |(\vec{\nabla} S)^2| &\gg |\hbar \Delta S| \end{aligned}$$

Also folgt für kleine Wellenlängen

$$\frac{1}{2M} (\vec{\nabla}_{\vec{x}} S)^2 + V(\vec{x}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Die allgemeine Lösung ist $\Psi(x, t=0) = A e^{\frac{i}{\hbar} S_0(x)} := \phi(x)$.

Mit der H-J-DG1 bauen wir A zu $A(\vec{x}, t)$ aus, sodass

$$\Psi(Q, t) = \sum_j \phi(q_0^{(j)}) \frac{1}{\text{sqrtdet}(\frac{\partial Q}{\partial q_0})_j} e^{\frac{i}{\hbar} S_j(Q, t) - \frac{i}{2} \pi \mu j}$$

Wobei μ den sog. Morse Index bezeichnet.

Grenzwert \hbar gegen 0 Schroedingergleichung auf dimensionlosen Einteilen (???) bringen:

$$\left\{ -\frac{\hbar}{V_0^2 M q^2} \Delta \underbrace{\frac{\vec{x}}{q}}_{:=\vec{S}} + \frac{V}{V_0} \left(\frac{\vec{x}}{q} \right) \right\} \Psi(\vec{x}, t) = i \underbrace{\left[\frac{\hbar \omega_0}{V_0} \right]}_{:=1/\lambda} \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial t \omega_0}}_{:=\tau}$$

wobei $\lambda \gg 1$ dimensionslos ist. Weiter folgt:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{(\hbar \omega_0)^2}{V_0} \stackrel{!}{=} \frac{\hbar^2}{2mqV_0} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2mq} \ll V_0$$

als Bedingung und damit ebenso $\omega^2 = \sqrt{V_0/(2mq^2)}$. Damit ist die sogenannte Lohemlisierungsenergie (??? furchtbare Handschrift) $\frac{\hbar^2}{2mq}$ vernachlässigbar.

5 Der starre Körper

5.1 Der starre Körper als Mechanisches Vielteilchensystem

Definition Zwangsbedingungen: $|\vec{x}^{(i)} - \vec{y}^{(j)}| = C_{ij}$ $i, j \in \{1, \dots, N\}$

- zeitunabhängig für alle Massepunkte
- Holonom

Bemerkung. • Es gibt keine innere Dynamik

- kontinuierliche starre Körper durch kontinuums Limes
Abstände bleiben im Körperfesten Bezugssystem Konstant.
 $3 + 3(N - 3) = 3N - 6$ unabhängige Zwangsbedingungen.
- N Massenpunkte $\rightarrow 3N$ Koordinaten für die Positionierung.
Die Anzahl der Freien Parameter ist jedoch $3N - (3N - 6) = 6$ unabhängig von N

5.2 Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art:

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2(t) + \vec{F}_i(t) \cdot \vec{x}_i(t) + \sum_{l,m \in I} \lambda_{lm}(t) (|\vec{x}_l(t) - \vec{x}_m(t)| - c_{lm}) \right\}$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{x}}_i(t) = \vec{F}_i(t) + \underbrace{\sum_{i,m \in I} \lambda_{im}(t) \frac{\vec{x}_i(t) - \vec{x}_m(t)}{|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_m(t)|} - \sum_{l,i \in I} \frac{\vec{x}_l(t) - \vec{x}_i(t)}{|\vec{x}_l(t) - \vec{x}_i(t)|}}_{=\vec{Z}_i(t)}$$

•

Kontaktbedingungen

- Gleiten: Zwangskraft steht orthogonal auf der Kontaktfläche
- Rollen: verschwindende Relativgeschwindigkeit

5.3 Lagrange Methode 2. Art

- 6 Freiheitsgrade
- Bezugssystem B im starren Körper $B \leftrightarrow \vec{R}(t)$
entspricht der Position des Körpers

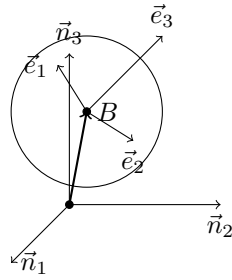


Abbildung 7: Freiheitsgrade im starren Körper

- $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ charakterisiert ein Körperfestes Orthonormalsystem
 $\Rightarrow \vec{x}^{(i)}(t) = \vec{R}(t) + \sum_{r=1}^3 b_r^{(i)} \vec{e}_r$
- Die Transformation $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \leftrightarrow \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ ist von 3 Parametern abhängig und eine Drehung.
- $\vec{e}_i = \sum_{r=1}^3 \vec{n}_r D_{ri}(\vec{\varphi}(t))$.

Drehungen Eine Drehung wird beschrieben, indem mit $|\vec{\varphi}| = \varphi$

$$D(\vec{\varphi} \vec{x}) = (\cos \varphi) \vec{x} + \sin \varphi \frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \times \vec{x} + (1 - \cos \varphi) \frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \left(\frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \cdot \vec{x} \right)$$

Sodass allgemein für $D(\varphi)$ gilt:

$$D(\vec{\varphi}) = \cos \varphi \cdot \mathbb{K} + \sin \varphi \frac{\vec{\varphi}}{\varphi} + (1 - \cos \varphi) \frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \times \frac{\vec{\varphi}}{\varphi}$$

Charakteristische Eigenschaften:

- $D^{-1}(\vec{\varphi}) = D^T(\vec{\varphi}) = D(-\varphi)$
- $\dot{\vec{e}}_i(t) = \sum_{r=1}^3 \vec{n}_r \dot{D}_{ri}(\vec{\varphi}) = \dot{\vec{\varphi}} \times \vec{e}_i := \vec{\omega}$

Parametrisierung durch Euler Winkel $\vec{\alpha} \leftrightarrow (\varphi, \theta, \psi)$

Wir zerlegen also in 3 Drehungen

- $\{\vec{n}_i\} \xrightarrow{D^{(1)}} \{\vec{n}_j'\}$
- $\{\vec{n}_j'\} \xrightarrow{D^{(2)}} \{\vec{n}_j''\}$
- $\{\vec{n}_j''\} \xrightarrow{D^{(3)}} \{\vec{e}_i\}$

$$D_{rl}(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

5.3.1 Lagrange Funktion

$$L(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, \vec{\Omega}) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2$$

Weiterhin gilt:

$$\vec{x}^{(i)}(t) = \vec{R}(t) + \sum_{r=1}^3 b_r^{(i)} \vec{e}_r(t) \dot{\vec{x}}^{(i)}(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \sum_{r=1}^3 b_r^{(i)} \underbrace{\dot{\vec{e}}_r(t)}_{=\vec{\Omega}(t) \times \vec{e}_r(t)}$$

Sodass:

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + (\dot{\vec{R}} \times \vec{\Omega}) \cdot (\vec{X}_s - \vec{R})M + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 \underbrace{(\vec{\Omega} \vec{e}_k) I_{kl} (\vec{\Omega} \vec{e}_l)}_{:=\Omega \cdot (I \vec{\Omega})}$$

Der sog Trägheitstensor I wird definiert als

$$I := \sum_{l,k=1}^3 I_{kl} \vec{e}_k \times \vec{e}_l$$

Wobei I_{kl} definiert ist als

$$I_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{r=1}^3 (b_r^{(i)})^2 \delta_{kl} - b_k^{(i)} b_l^{(i)} \right)$$

in körperfester Orthonormalbasis, zeitunabhängig. I ist also nur abhängig von der Wahl von \vec{R} und $\{\vec{e}_i\}$.

Die Trägheitsmatrix/ der Trägheitstensor kodiert die Struktur des Starren Körpers.

Steinersche Satz Für I mit Bezugspunkt \vec{R} und I' mit Bp. $\vec{R} + \vec{a}$ gilt:

$$I'_{kl} = I_{kl} + M (\delta_{kl} (\vec{a})^2 - (\vec{a} \vec{e}_k) (\vec{a} \vec{e}_l))$$

5.4 Der freie starre Körper

Definition. Ein starrer Körper heißt **frei**, wenn nur die Zwangskräfte wirken.

Definition. Ein freier starrer Körper heißt **Kreisel**, wenn nur ein Punkt fest ist.

5.4.1 Erhaltungsgrößen

$$L = \sum_{i=1}^N m^{(i)} \frac{\dot{\vec{x}}^{(i)2}}{2} + \underbrace{\sum_{i,j} \lambda_{ij} \left(|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(j)}| - C_{ij} \right)}_{L_z}$$

Translationen im Ort

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(i)'} &= \vec{x}^{(i)} + \epsilon \vec{a} \\ t' &= t \\ L' &= L \end{aligned}$$

Es folgt dass

$$\begin{aligned} \vec{P}_i &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}^{(i)} = M \dot{\vec{X}}_S \\ E &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^N a_j m_i \dot{x}_j^{(i)} = \vec{a} \vec{P} \end{aligned}$$

Sodass

$$\dot{\vec{P}} = 0$$

Translation in der Zeit Sei $\phi = 1, \psi_i = 0, L = L'$. Dann

$$E = - \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\dot{\vec{x}}^{(i)2}}{2} - \dot{\vec{x}}^{(i)2} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}^{(i)2}$$

Veränderung der Geschwindigkeit Sei $\vec{x}^{(i)'} = \vec{x}^{(i)} + \epsilon \vec{v} t$. Wir bezeichnen $\vec{v} t$ als $\vec{\psi}$. Sei zusätzlich $t' = t$.

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{x}}^{(i)} + \epsilon \vec{v})^2 + L_z = L + \epsilon \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}^{(i)} \right) \cdot \vec{v}$$

5.4.2 Dynamik des asymmetrischen starren Körpers

wähle $\vec{R} = \vec{X}_s = \vec{O}$. und $I_{11} < I_{22} < I_{33}$

Methode. *Erhaltungsgrößen:*

$$E_{rot} = \frac{1}{2} (\vec{\Omega} I \vec{\Omega}) = \sum_{i=1}^3 \vec{I}_{ii} \vec{\Omega}_{ii}$$

5.4.3 Dynamik des freien Symmetrischen Kreisels

5.5 Der starre Körper im homogenen Schwerfeld/unter dem Einfluss äußerer Kräfte

5.5.1 Rotation um eine raumfeste Drehachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

Problemstellung Betrachte eine einfache Bewegung eines starren Körpers mit $\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}_0 \Rightarrow \dot{\Omega}(t) = \ddot{\Omega}(t) = \dots = 0$.

Welche Kräfte sind zur Aufrechterhaltung der Bewegung erforderlich? (ohne Kräfte möglich?)

Sei $\{\vec{e}_j\}$ ein körperfestes Orthonormalsystem. Dann

$$\begin{aligned}\vec{x}^{(i)} &= \vec{R}(t) + \sum_{j=1}^3 b_j^{(i)} \vec{e}_j \\ \dot{\vec{x}}^{(i)}(t) &= \dot{\vec{R}}(t) + \sum_{j=1}^3 b_j^{(i)} \vec{\Omega}_0 \times \vec{e}_j(t) \\ \ddot{\vec{x}}^{(i)}(t) &= m_i \ddot{\vec{R}}(t) + \sum_{j=1}^3 m_i j_j^{(i)} \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{e}_j(t))\end{aligned}$$

Es folgt für die Gesamtkraft

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{x}}_i &= M \ddot{\vec{R}}(t) + \vec{\Omega}_0 \times \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 m_i b_j^{(i)} \vec{e}_j(t) \right) \\ &= M \ddot{\vec{R}}(t) + \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times (\vec{x}_s - \vec{R}))\end{aligned}$$

o.B.d.A: Sei \vec{R} auf der Drehachse $\Rightarrow \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$

$$= \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times (\vec{x}_s - \vec{R})) M \quad \text{Unwucht erster Art}$$

Drehimpulsbilanz $\vec{R}(t) = \vec{x}_s$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= M \vec{x}_s \times \vec{x}_s + I \vec{\Omega} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= M \vec{x}_s \times \ddot{\vec{x}}_s + \sum_{k=1}^3 \vec{\Omega}_0 \times \vec{e}_k(t) I_{kl} (\vec{\Omega}_0)_l = \vec{N}\end{aligned}$$

Sei die Unwucht 1. Art beseitigt (\vec{x}_s auf Drehachse $\Leftrightarrow \ddot{\vec{x}}_s = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$)
Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{\Omega}_0 \times \vec{L}_{rel} & \vec{L}_{rel} &= I\vec{\Omega}_0 \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= 0 \Rightarrow \vec{\Omega}_0 \parallel \vec{L}_{rel} & \vec{L}_{rel} &= I\vec{\Omega}_0 = \alpha\vec{\Omega}_0\end{aligned}$$

Ist also eine Drehung um eine Hauptträgheitsachse

5.5.2 Der schwere Kreisel

Ein Kreisel im homogene Schwerfeld ($V(\vec{x}^{(i)}) = -m_i \vec{g} \vec{x}^{(i)}$).

Lagrange Methode 2. Art:

$$L = \frac{M}{2} \dot{\vec{x}}_s^2 + \frac{1}{2} (\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}) - \sum_{i=1}^N V(\vec{x}^{(i)}) + \text{Zwbedg}$$

Entlang der Hauptträgheitsachsen

$$(\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}) = \sum_{j=1}^3 \Omega_j I_{jj} \Omega_j$$

verwende Eulerwinkel (φ, θ, ψ)

$$L = \frac{1}{2} (I_{11} + Mb_3^{(P)^2}) (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_{33} (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta) + Mgb_3^{(P)} \cos \theta - Mg \cos \theta - Mg \vec{n}_3 \vec{C}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 & \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= (I_{11} + Mb_3^{(P)^2}) \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_{33} \cos^2 \theta \dot{\varphi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta & := A = \vec{L} \vec{n}_3 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0 & \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) & := B = \vec{L} \vec{e}_3 \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= 0 & \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L & & := E = L_2 - L_1\end{aligned}$$

Einsetzen der Erhaltungsgrößen in L :

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{B}{I_{33}} - \dot{\varphi} \cos \theta & \dot{\varphi} &= \frac{A - B \cos \theta}{\sin^2 \theta [I_{11} + b_3^{(P)^2}]} \\ E &= \frac{1}{2} (I_{11} + Mb_3^{(P)^2}) \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \\ U_{eff}(\theta) &= \frac{(A - B \cos \theta)^2}{2(I_{11} + Mb_3^{(P)^2}) \sin^2 \theta} + \frac{B^2}{2I_{33}} - Mgb_3^{(P)} \cos \theta\end{aligned}$$

...

- $\theta(t) = \theta_0, \dot{\varphi} = \frac{A - B \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0 I'_{11}}:$

reine Präzessionsbewegung, keine Nutation

- $U_{eff}(\theta) = U_{eff}(\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2 U''_{eff}(\theta_0) + O((\theta - \theta_0)^3),$

$$E = \frac{1}{2} I'_{11} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2 U''_{eff}(\theta_0) \rightarrow \text{harmonische Schwingung um } \theta_0$$

Spezialfall $\theta \approx 0$ Gibt es eine Bewegung mit $\theta(t) = 0$?

Existiert nur für spezielle Werte von A, B .

Sei $A = B, |\theta| \ll 1$

$$U_{eff}(\theta) \rightarrow \frac{(A - B(1 - \frac{\theta}{2}))}{2I'_{11}\theta^2} + \frac{B^2}{2I_{33}} - Mgb_3^{(P)}(1 - \frac{\theta^2}{2}) + O(\theta^3) = \left(\frac{B^2}{2I'_{11}} \frac{1}{4} + Mgb_3^{(P)} \frac{1}{2} \right) \theta^2 + \frac{B^2}{2I_{33}} - Mgb_3^{(P)}$$

Es ergibt sich eine harmonische Schwingung mit $\omega > 0$:

$$\omega^2 := \frac{\frac{B^2}{8I'_{11}} + \frac{Mg}{2} b_3^{(P)}}{\frac{1}{2} I'_{11}}, \quad B = \vec{L} \vec{n}_3 = \vec{L} \cdot \vec{e}_3$$

Eine instabile Dynamik für $\omega^2 < 0$ mit $b_3^{(P)} = -|b_3^{(P)}|$:

$$\frac{B^2}{8I'_{11}} < \frac{Mg}{2} |b_3^{(P)}|$$