Theoretische Physik 1

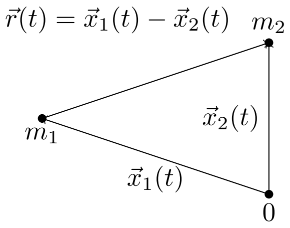
Daniel Kallendorf

Mitschrift der Vorlesung Theoretische Physik I
WS 2015/16 bei Prof. Alber

Inhaltsverzeichnis

1 Das Zweikörperproblem im Rahmen der Newtonschen Mechanik

Problemstellung



Newtonsche Axiome

1. kräftefreie Massenpunkte bewegen sich geradlinig gleichförmig: Inertialsystem
2. $m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t)$
3. Wechselwirkung: actio=reactio

Bemerkungen

- $\vec{F}(t)$ beschriebt Kraftkurve
- $\vec{x}_1(t)$ beschreibt Bahnkurve (ohne Zeitinformation: Bahnkurve)
- Spezielle Kraftfelder:
  $\vec{K}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \rightarrow \vec{F}(t) = \vec{K}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$
  <u>Newton</u>: $\vec{K}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = -\gamma \dfrac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - x_2\|^3} m_1^{(T)} m_2^{(s)}$
  $m^{(s)}$: schwere Masse
  $m^{(t)}$: träge Masse
  $\boxed{m^{(T)} \equiv m^{(s)}}$

$$
\begin{aligned}
\vec{K}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|} f(\|\vec{r}(t)\|) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} U(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) \\
\Rightarrow \int_{\xi_1 | \vec{x}_1^A}^{\vec{x}_1^B} \vec{K}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \left(\frac{d\vec{x}_1}{d\lambda}\right) d\lambda &= -U(\|\vec{x}_1^B - \vec{x}_2\|) - U(\|\vec{x}_1^A - \vec{x}_2\|)
\end{aligned}
$$

mit Weg $\xi : \lambda \rightarrow \vec{x}_1(\lambda)$ und wegunabhängiger konservativer Kraft

1.1 Erhaltungssätze

- abgeschlossenes System: (action=reactio)

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{x}}_1(t) = \vec{F}_{12}(t) \\ m_1\ddot{\vec{x}}_1(t) = \vec{F}_{12}(t) \end{aligned}\right\} \frac{d}{dt}\underbrace{(m_1\dot{\vec{x}}_1 + m_2\dot{\vec{x}}_2)(t)}_{:=\vec{P}(t) \text{ Impuls } = M\dot{\vec{R}}(t)} = 0$$

$$\underbrace{(m_1+m_2)}_{:=M}\vec{R}(t) := m_1\vec{x}_1(t) + m_2\vec{x}_2(t)$$

$$\begin{array}{ll} \vec{x}_1(t) & = \vec{R}(t) + \frac{m_2}{M}\vec{r} \\ \vec{x}_2(t) & = \vec{R}(t) + \frac{m_1}{M}\vec{r} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \vec{R}(t) & = \dfrac{m_1\vec{x}_1(t + m_1\vec{x}_2(t))}{M} \\ \vec{r}(t) & = x_1(t) - x_2(t) \end{array}$$

- Zentralkraftfeld
$\mu\ddot{\vec{r}}(t) = -\dfrac{\vec{r}(t)}{\vec{r}(t)} f(r(t))$: allgemeine Zentralkraft (z.B. Gravitation)
$\rightarrow$ Drehimpulserhaltung

$$\begin{aligned} \vec{L} &:= m_1\vec{x}_1(t) \times \dot{\vec{x}}_1(t) + m_1\vec{x}_2(t) \times \dot{\vec{x}}_2(t) \qquad \text{zu Zeigen: } \dot{\vec{L}}(t) = 0 \\ &= \vec{R} \times \vec{P} + \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{L}}(t) &= \underbrace{\dot{\vec{R}} \times \vec{P}}_{=0} + \underbrace{\vec{R} \times \dot{\vec{P}}}_{=0} \mu\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \underbrace{\mu\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Relativbahndrehimpuls L_{rel}:
  - $\vec{L}_{rel} \cdot \vec{r}(t) = 0 \rightarrow$ ebene Dynamik
  - $\dfrac{d}{dt}\mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = 0$ Flächensatz

- konservative Kraftfelder

$$\left.\begin{array}{lllll} \dot{\vec{x}}_1 m_1\ddot{\vec{x}}_1 & = & \vec{F}_{12}(t) & = & -\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} U(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) \\ \dot{\vec{x}}_2 m_2\ddot{\vec{x}}_2 & = & -\vec{F}_{12}(t) & = & -\vec{\nabla}_{\vec{x}_2} U(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) \end{array}\right\} t$$

Die Funktion U darf nur durch x_1 und x_2 von der Zeit abhängen

$$\begin{aligned} m_1\dot{\vec{x}}_1\ddot{\vec{x}}_2 + m_2\dot{\vec{x}}_2\ddot{\vec{x}}_2 &= -\dot{\vec{x}}_1\vec{\nabla}_{\vec{x}_1}U - \dot{\vec{x}}_2\vec{\nabla}_{\vec{x}_2}U \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}_2^2\right) &= -\frac{d}{dt}U(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}_2^2 + U(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t))\right)}_{:=E} &= 0 \end{aligned}$$

1.2 Bestimmung der Bahnkurven

Erhaltungsgrößen

- abgeschlossenes System: Impulserhaltung
  $\dot{\vec{P}} = 0, \vec{R}(t) = \vec{R}(t_0) + \frac{\vec{P}}{M}(t - t_0)$
- Zentralkraftfeld: Drehimpulserhaltung
  $\vec{L} = m_1\vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2 = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rel}$
  $\vec{L}_{rel} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$
- konservative Kraft: Energieerhaltung

Ansatz

Aus $\vec{L}_{rel} \cdot \vec{r} = 0$ folgt, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet.

- Wir definieren $\vec{L}_{rel}\vec{e}_z$.

$$x = r\cos\varphi \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$L_{rel} = \mu(x\dot{y} - \dot{x}y) = \mu\left[r\cos\varphi\left(\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}\right) - \left(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}\right)r\sin\varphi\right] = \mu r^2\dot{\varphi} \tag{1}$$

Somit erhalten wir

$$\dot{\varphi} = \frac{L_{rel}}{\mu r^2}$$
$$\varphi(t) - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t} dt' \, \frac{L_{rel}}{\mu r^2(t')}$$

- $E_{rel} = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U(r)$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$
$$E_{rel} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2\frac{L_{rel}}{\mu^2 r^4} + U(r)$$
$$= \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2} + U(r)}_{=U_{eff}(r)}$$
$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\underbrace{(E_{rel} - U_{eff}(r))}_{\geq 0}} = \frac{dr}{dt}$$
$$t - t_0 = \pm\int_{r(t_0)}^{r(t)} dr\sqrt{\frac{\mu}{2}(E_{rel} - U(r))}$$

mit $+$ für $r(t) > r(t_0)$, $-$ für $r(t) < r(t_0)$, sonst 0.

Bestimmung des Orbits

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{L_{rel}}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E_{rel} - U(r))}}$$

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm \int_{r_0}^{r} dr' \frac{L_{rel}}{r'^2 \sqrt{2\mu(E_{rel} - U(r'))}}$$

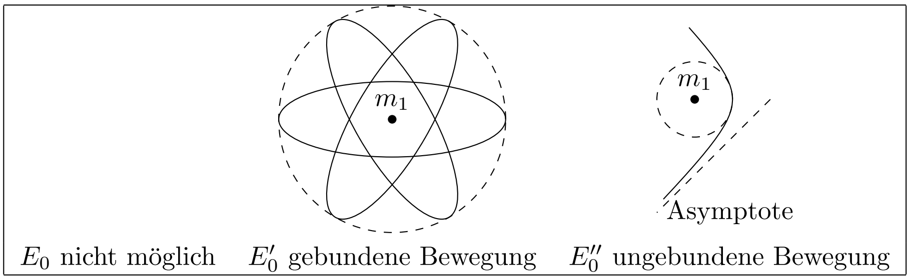


Abbildung 1: Bahnkurven

Definition. Ein *Funktional* ordnet jeder möglichen Bahnkurve eine Zahl zu.

Man kann also Funktionale finden, sodass die Extrema auf die Newtonschen Bewegungsgleichungen führen.
Es ergibt sich ein Variationsproblem im ∞-dimensionalen Raum der Bahnkurve unendlich vieler Punkte.

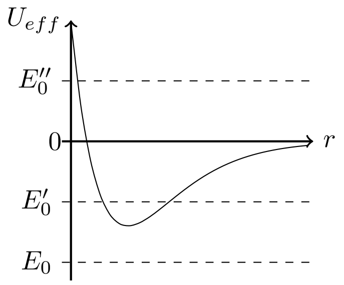


Abbildung 2: Energieschema

2 Das Hamiltonsche Prinzip der klassischen Mechanik

Aus dem Variationsprinzip lassen sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen herleiten. Dies ermöglicht

- die Vereinheitlichung mechanischer Prozesse in ihrer Beschreibung
- die Beschreibung von Zwangskräften (Wände, Schiene, etc)

Dabei "bewerten" die Funktionale die möglichen Bahnkurven. Ein Extremum des Bewegungsfunktionals liefert also eine Bewegungsgleichung(= Lösung der Newton Gleichungen)

2.1 Funktionale und Funktionalableitungen

Es gilt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{3N}$, da jeder der N Massenpunkte je 3 Koordinaten hat.
Wir betrachten nun B_{x_1,x_2}, die Menge aller stückweise stetigen und differenzierbaren Bahnkurven von x_1 (zum Zeitpunkt t_1) nach x_2 (zu t_2).
Und das Funktional $F : B_{x_1,x_2} \to \mathbb{R}, \gamma \mapsto F[\gamma]$ (Punktweise Auswertung).

Stetigkeit F ist stetig, an γ_0, wenn das $\delta - \epsilon$-Kriterium gilt:
Für alle $\epsilon > 0$ und für alle h mit $\|h\| < \delta$, existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0]| < \epsilon$$

Wobei man h auch schreiben kann, als

$$\|h\| = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} \sqrt{\vec{h}_i(t) \cdot \vec{h}_i(t)} \right) + \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} \sqrt{\dot{\vec{h}}_i(t) \cdot \dot{\vec{h}}_i(t)} \right)$$

Funktionalableitungen

Ein Funktional heißt *ableitbar*, wenn eine Beste Lineare Approximation existiert:

$$\exists F'_{\gamma_0} : F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0] = F'_{\gamma_0}[h] + O(\|h\|^2)$$

lokales Funktional

$$F_1[\gamma] \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\vec{x}_i(t_0) \cdot \vec{c}_i(t_0)}$$

mit festem t_0 und $t_1 \leq t_0 \leq t_2$ gilt für

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \quad L(\{\vec{x}_i\}(t), \{\dot{\vec{x}}_i\}(t), t)$$

dass

$$S[\gamma + h] - S[\gamma] = S'_{\gamma}[h] + O(\|h^2\|^2)$$

$$\text{mit} \quad S'_\gamma[h] = \sum_{i=1}^{3N} h_i(t) \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt \quad h_i(t) \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right\}_{\gamma(t)}$$

Beweisidee.

$$\begin{aligned} S[\gamma + h] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L\big(x_i(t) + h_i(t), \dot{x}_i(t) + \dot{h}_i(t), t\big) \\ &= S[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_\gamma h_i(t) + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_\gamma \dot{h}_i(t) \right\} + O(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Wir verwenden die Produktregel: $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_\gamma \dot{h}_i(t) = \frac{d}{dt} \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_\gamma h_i(t) - h_i(t) \frac{d}{dt} \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right|_\gamma$

$$= S[\gamma] + \sum_{i=1}^{3N} h_i(t) \left.\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right|_\gamma\right|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt h_i(t) \left\{ \left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_\gamma - \frac{d}{dt} \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right|_\gamma \right\}$$

□

Da das bei $S'_\gamma = 0$ Extrema liege, kann man Bewegungsgleichungen formulieren: Die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt} \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right|_\gamma - \left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_\gamma = 0$$

2.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Für

$$L\big(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}, t\big) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}} + \vec{F}_i(t) \cdot \vec{x}_i \right\}$$

wobei $\vec{F}_i(t)$ vorgegebene Kraftkurven sind, gilt, dass die EL-Gl äquivalent zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen ($m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) = \vec{F}_i(t)$) sind.

Beweis. Es gilt:

$$\vec{\nabla}_{x_i} L = \vec{F}_i(t) \qquad\qquad \vec{\nabla}_{\dot{x}_i} L m_i \dot{\vec{x}}_i$$

Somit also

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\vec{x}}_i} L\Big|_\gamma}_{\text{(Newton Gleichungen)}} = \underbrace{\nabla_{\vec{x}_i} L|_\gamma}_{\text{(Euler-Langrange-Gleichungen)}}$$

□

Bemerkung. • Kraftkurven sind vorgegeben.

- $S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L\big(x(t), \dot{x}(t), t\big)$
- $h^2(t) \equiv \delta x_i(t)$, eine Virtuelle Verschiebung.
  Es handelt sich nicht um eine physikalische Bewegung sondern um einen rein mathematische infinitesimale Verschiebung eines Teilchens, die ohne verzögerung (instantan) stattfindet.
  (Unter beachtung der Zwangsbedingungen)
- Die äquivalenz stimmt nicht vollständig, da die Newton-Gleichungen eine Anfangsrandwertproblem darstellen, das Variationsprinzip/ Hamiltonsches Prinzip ein Randwertproblem darstellt:
  - Newton: $\vec{x}_i(t, x_1, \dot{x}_1)$
  - Hamilton: $\vec{x}_i(t, x_1, x_2)$

  Die Äquivalenz gilt also, wenn dem Ziel bijektiv eine Anfangswert zugeordnet werden kann.

Sei nun $S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L\big(x(t), \dot{x}(t), t\big)$ mit

$$\underbrace{\delta\vec{x}(t_1)}_{\vec{h}(t_1)} = \delta\vec{x}(t_2)$$

Da Hamilton Prinzip selektiert nun γ_0

$$\delta S[\gamma_0] = S'_{\gamma_0}[h] = 0$$

ist äquivalent zu den E-L-Gl:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right)\bigg|_{\gamma_0} - \frac{\partial L}{\partial x_k}\bigg|_{\gamma_0} = 0$$

und den Newton-Gleichungen:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\dot{\vec{x}}^2 + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(t)\vec{x}$$

Bemerkung. Geschwindigkeitsabhängige Potenziale
Es gilt für:

$$\vec{F}_i(t) = -\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}_i} V - \frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_i} V\right)\right)(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$$

und es ergibt sich

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\dot{\vec{x}}_i^2 - V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$$

Beweis. z.Z.: $\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(t)\vec{x}_i(t) \stackrel{!}{=} -\delta \int_{t_1}^{t_2} dtV(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t)$
Wir beginnen mit der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} dtV(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ V(\delta \int_{t_1}^{t_2} dtV(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t)) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \delta\vec{x}_i(t)\vec{\nabla}_{x_i}V + \sum_{i=1}^{N} \delta\dot{\vec{x}}_i(t)\vec{\nabla}_{\vec{x}_i}V + O(\|h\|^2) \\
\Rightarrow \delta\vec{x}_i(t)\vec{\nabla}_{\vec{x}_i}V_i &= \frac{d}{dt}\left(\Delta x_i \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_i}V\right) - \delta x_i(t)\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_{x_i}V\right) \\
\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} dtV(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{N} \left(\delta\vec{x}_i() \cdot \left[\vec{\nabla}_{\vec{x}_i}V - \frac{d}{dt}\vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_i}V\right] + \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\delta\vec{x}_i(t)\cdot\nabla_{\vec{x}_i}V\right]}_{\delta\vec{x}_i(t_1)=\delta\vec{x}_i(t_2)=0} \right) \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} dt \quad \vec{F}_i(t)\cdot\Delta x_i(t) \\
&\equiv -\delta \int_{t_1}^{t2} dt \quad \vec{F}_i(t)\cdot\vec{x}_i(t)
\end{aligned}$$

□

Mechanische Eichfreiheit

Aus einer Lagrange-Funktion lassen dich die Newtonschen Bewegungsgleichungen ableiten (nicht bijektiv).

Beweis. Sei $L_1(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t)$. Und sei

$$L_2(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t) = L(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\{x\},t) + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}_i} f(\{x\},t)$$

mit einer beliebigen (differenzierbaren) Funktion f.
Dann führe beide Lagrange-Funktionen auf die selben E-L-Gln, denn

$$\begin{aligned}
S[\gamma] &= \int_{t_1}^{t_2} dtL_2(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t) = \int_{t_1}^{t_2} L_1(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t) + \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}f(\{x\},t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(\{x(t)\},t) + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{x}}_i(t)\cdot\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}_i}f\right)(\{x(t)\},t) \\
\partial S[\gamma] &\equiv S'_\gamma[h] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \quad L(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}f(\{x(t)\},\{\dot{x}(t)\},t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\{x(t)\},t) + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{x}}_i(t)\cdot(\nabla_{\vec{x}_i} f)(\{x(t)\},t)$$

□

Somit hat also L keine "direkte" physikalische Relevanz.
Daraus folgt jedoch: die Äquivalenzklasse der Lagrange-Funktionen

$$[L] = \{L_2 | \exists f : L_2 = L + f\}$$

Welche Äquivalent zu den E-L-Gln ist.

Analyse der Extrema von $[\gamma]$

Die Frage, ob ein Extremum von $S[\gamma]$ ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt ist gibt uns $\delta^2 S[\gamma]$

$$S[\gamma + \delta x] = S[\gamma] + S'_\gamma[\delta x] + O(\|\delta x\|^2)$$

Beispiel. Eine eindimensionale Dynamik mit geschwindigkeitsunabhängiges Potenzial und $\gamma : t \mapsto \vec{x}(t)$

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x, t)$$

$$S[\gamma + \delta x] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}[\vec{x}(t) + \delta\dot{x}(t)]^2 - V(x(t) + \delta\dot{x}(t), t)\right)$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 - V\big(x(t), t\big)\right)}_{S[\gamma]} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\underbrace{\frac{m}{2} \cdot 2\dot{x}(t)\delta\dot{x}(t)}_{= \frac{d}{dt}(\delta x \dot{x}) - \Delta x \frac{d}{dt}\dot{x}} - \delta x(t)\frac{\partial V}{\partial x}(x8(t), t)\right)}_{:= S'_\gamma[\delta x] \equiv \delta S[\gamma]}$$

$$+ \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\delta\dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x(t), t)\right)}_{:= \delta^2 S[\delta x]} + O(\|\delta x\|^3)$$

wobei $\delta S[\gamma] = 0$ da wir ein Extremum betrachten.

Sei $|t_2 - t_1|$ klein, dann ist für alle δx $\delta^2 S[\delta x] \geq 0$ weil ??? > 0.
Für $|t_2 - t_1|$ wachsen, existiert ein anderes Extremum mit $\delta^2 S[\delta x] < 0$.

Hier fehlt etwas

- $x^i(q, t) \leftrightarrow q^i(x, t)$ sei angenommen

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{c}(t), t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{L\left(x(q, t), \left\{\frac{\partial x^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \dot{\vec{q}}_j \cdot \vec{\nabla}_{\vec{q}_j} x^i\right\}, t\right)}_{:= \tilde{L}(q, \dot{q}, t)}$$

$\rightarrow$ Euler-Lagrange Gleichung für $i = 1, ..., 3N$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i}$$

2.3 Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Ausgangspunkt: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ Euler-Lagrange für $L(q, \dot{q}, t)$.
Sei $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$, d.h.:

- Transformation $\tau\epsilon$
- L unabhängig von q_1; $\tau_{\epsilon^i} Q^i = q^i + \epsilon\delta_{i1}$
- L invariant unter τ_ϵ
- $\tau\epsilon$ transformiert Lösungen der ELG wieder in Lösungen (kontinuierliche Symmetrie)

Es folgt daraus, dass auch $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \Leftrightarrow p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(q(t), \dot{q}(t), t)$ berechent entlang einer Lösung der E-L-Gleichung ist Zeitlich konstant
$\rightarrow$Erhaltungsgröße
p_1 :=kanonischer Impuls von q_i
Also “kontinuierliche Symmetrie impliziert Erhaltungsgrößen”

2.3.1 Nöther Theorem

Betrachte folgende kontinuierliche Transformation:

$$Q^m = q^m + \epsilon\psi^m(q, \dot{q}, t) + O(\epsilon^2)$$
$$T = t + \epsilon\phi(q\dot{q}, t) + O(\epsilon^2)$$
$$\text{mit } \epsilon \in [0, \infty).$$

Es gelte

$$\int_{T_1}^{T_2} dT_\epsilon L(Q\epsilon(T_\epsilon), \frac{dQ\epsilon}{dt\epsilon}(T\epsilon), T\epsilon) \overset{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L(q(t), \dot{q}(t), t) + \epsilon\frac{df_\epsilon}{dt}(q(t), t) \right\}$$

Von dynamischer τ_ϵ-Symmetrie gefordert, mit mechanischem Eichterm $f\epsilon$.
Es ergibt sich eine Erhaltungsgröße E der Form

$$E = \sum_m \psi^m \frac{dL}{\partial \dot{q}^m} + \phi(L - \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}) - f_{\epsilon=0}(q, t)\bigg|_\gamma$$

Bemerkung

- mechanische Eichtransformationen sollen in sinnvoller Weise bei dynamischer Symmetrie berücksichtigt werden ($f\epsilon(q, t) \neq 0$)
- Symmetrische $\tau\epsilon$ Symmetrie bedeutet:
  $Q^m_{\epsilon=0}(T_{\epsilon=0})$ ist Lösung der ELGl$\rightarrow$ $Q^m_\epsilon(T_\epsilon)$ ist Lösung. Sowie $Q^m_{\epsilon=0} = q^m$ und $T_{\epsilon=0} = t$

Bemerkung

- Sei Transformation $Q^m_\epsilon = q^m + \epsilon\psi^m(q,\dot q,t) + O(\epsilon^2)$
- Sei $T_\epsilon = 0$ gegeben.
  Es folgt:
  $$\frac{dQ_\epsilon}{dT\epsilon}(T_\epsilon) = \underbrace{\frac{dq^m}{dt}}_{:=\dot q^m} + \epsilon\frac{d\psi^m}{dt}(q(t),\dot q(t),t) + O(\epsilon)$$
  Aus τ_ϵ Symmetrie:
  $$\begin{aligned}\int_{T_1}^{T_2} dT\epsilon L(Q_\epsilon(T_\epsilon), \frac{dQ_\epsilon}{dT\epsilon}(T_\epsilon), T_\epsilon) &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{L\left(\{q^m + \epsilon\psi^m\}\,\dot q^m + \epsilon\frac{d\psi^m}{dt}, t\right)}_{=L(q(t),\dot q(t),t)} \\ &\quad + \epsilon\left\{\sum_m \psi^m\frac{\partial L}{\partial q^m} + \sum_m \frac{d\psi^m}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^m}\right\} \\ &\quad + O(\epsilon^2) \\ &\stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t),\dot q(t),t)\end{aligned}$$
  mit $f_\epsilon(q,t) = 0$
  $$0 = \sum_m \left(\psi^m\frac{\partial L}{\partial q^m} + \frac{d\psi^m}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^m}\right) = \sum_m \psi^m \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^m} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^m}\right)}_{=0\text{für}\gamma\text{Lsg}}\right) + \frac{d}{dt}\sum_m\left(\psi^m\frac{\partial L}{\partial \dot q^m}\right)$$
  Es folgt
  $$E = \sum_m \psi^m \frac{\partial L}{\partial \dot q^m}\bigg|_\gamma$$
- Sei $Q^m_\epsilon = q^m$, $T_\epsilon = t+\epsilon$
  $\rightarrow \dfrac{dQ^m_\epsilon}{dT_\epsilon} = \dfrac{dq^m}{dt} \equiv \dot q^m$
  $$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} dT_\epsilon L(Q_\epsilon(T_\epsilon), \frac{dQ_\epsilon}{dT_\epsilon}(T_\epsilon), T_\epsilon) &= \int_{t_1}^{t_2} dt\,\underbrace{L(q(t),\dot q(t),t+\epsilon)} \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t),\dot q(t),t) \\ &= L(q(t),\dot q(t),t) + \epsilon\frac{\partial L}{\partial t} + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Aus τ_ϵ-Symmetrie: $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_m (\dot q^m \frac{\partial L}{\partial q^m} + \underbrace{\ddot q^m \frac{\partial L}{\dot q^m}}) + \frac{\partial L}{\dot q^m} = \sum_m \dot q^m \left(\frac{\partial L}{\partial q^m} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^m}\right)\right) + \frac{d}{dt}\sum_m \dot q^m \frac{\partial L}{\partial \dot q^m} + \frac{\partial L}{\partial t}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\dot q^m \frac{\partial L}{\partial \dot q^m}\right) - \dot q^m \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^m}\right)$$

$= \dfrac{d}{dt} \sum_m \dot q^m \dfrac{\partial L}{\partial \dot q^m} + \dfrac{\partial L}{\partial t}$

$\Leftrightarrow$ für γ Lösung der E-L-Gl: $\dfrac{d}{dt}\left(L - \sum_m \dot q^m \dfrac{\partial L}{\partial \dot q^m}\right)\Big|_\gamma = \dfrac{\partial L}{\partial t}\Big|_\gamma$

τ_ϵ-Symmetrie: $\dfrac{d}{dt}(L - \sum_m \dot q^m \dfrac{\partial L}{\partial \dot q^m}) = 0$ (Erhaltungsgröße)

Beispiel: der freie Massenpunkt

$$L(x, \dot x, t) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3} (\dot x_i)^2$$

zu Zeigen: 10-parametrige Symmetriegruppe (eigentliche orthochrone Galilei Gruppe).

Transformationsgesetze :

$$\vec x' = R(\underbrace{\vec\omega}_{3})\vec x + \underbrace{\vec a}_{3} + \underbrace{\vec v}_{3} t$$
$$T = t + \underbrace{s}_{3}$$

1. Translation: $\vec a \neq 0$
   $\tau_{trans} : x_k = x_k + a_{k_0}\delta_{kk_0}$, $T = t$
   $\to$L-invariant unter τ_ϵ; $f, \phi = 0$; $\psi_k = \delta_{kk_0}$
   $P_{k_0} = \sum_k \psi_k \dfrac{\partial L}{\partial \dot x_k} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot x_{k_0}}$ ist Erhaltungsgröße
   $\vec P(t) = m\dot{\vec x}(t)$ Impuls ist konstant entlang Lösung.

2. Translation in der Zeit: $s \neq 0$
   $\tau_{tZeit} : X_k = x_k$, $T = t + s$
   $-E_{kin} = L - \sum_k \dot x_k \dfrac{\partial L}{\partial \dot x_k} = -\frac{m}{2}\dot{\vec x}^2$ Erhaltungsgröße.

3. Drehungen $\vec{\omega} = c\vec{e}_3$, $c \in \mathbb{R}\backslash 0$
   $\tau_{rot} : \vec{X} = R(\vec{\omega})\vec{x}, T = t$
   $\vec{X} = x + \overbrace{c\vec{e}_3}^{\equiv\vec{\omega}} \times \vec{x} + O(\epsilon^2)$
   $\dot{\vec{X}} = R(\omega)\dot{\vec{x}}$
   Somit $\dot{\vec{X}}^2 = \dot{\vec{x}}^2 \rightarrow$ L-Invarianz mit $f, \phi = 0$
   $$X_l = x_l + c \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{l3k} x_k}_{:=\psi_l} + O(\epsilon^2)$$
   $$E = \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{l3k} x_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} = \vec{e}_3 \underbrace{(\vec{x} \times m\dot{\vec{x}})}_{:=L}$$
   Sodass $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0$
4. eigentliche Galilei Transformation: $\vec{v} = v\vec{e}$
   $\tau : X_k = x_k + ct\vec{e}$, $T = t$
   $\dot{x}_k = \dot{x}_k + c\vec{e} \rightarrow f_c(x,t) \neq 0$

2.3.2 Wechselwirkende Systeme (konservativ, durch Langeragefunktion beschrieben)

$$L(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_{(i)}}{2} \dot{\vec{x}}^2_{(i)} + U(x)$$

für $\vec{F}_i(t) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}_i} U(x(t))$
Damit eine eigentliche orthochrone Galilei Gruppe eine Symmetriegruppe ist muss für $U(x)$ gelten (hinreichend),

- $U(x)$ invariant unter G_{10}
- $U(x)$ muss translationsinvariant sein: z.B. $U(x) = \sum_{1=i<j}^{N} U_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$
- $U(x)$ muss rotationsinvariant sein: z.B. $U(x) = \sum_{i,j} U_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$

2.4 Mechanische Systeme mit Nebenbedingunge

- holonome Nebenbedingungen $f(q(t), t) = 0$, $y^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow f(x(t), y(t)) = x^2 - y^2 - R^2 = 0$
  $\Rightarrow$ globale Einschränkung der Dynamik

- nicht holonome Nebenbedingungen: Involvieren Ungleichungen, Differentiale (Schränken die Teilchenbewegung auf einen kleinen Bereich der Dynamikmanigfaltigkeit ein)

2.4.1 Holone NB und Lagrange-Gl zweiter Art

Gegegben: $L(q, \dot{q}, t), \{q_i, i = 1, ..., 3N\}$ mit verallgemeinerten Koordinaten q_i

$$F_l(q, t) = 0; l = 1, ..., r$$

Die Zwangsbedingungen schränken die Teilchendynamik auf einen $f := (3N - r)$-dinensionale Unterraum (Untermannigfaltigkeit) ein.
Stellen eine Matrix auf:
$\left(\frac{\partial F_l}{\partial q_k}\right)_{r_{xk}}$ zwangsbedingungs-Matrix F_{lk} mit Rang $F_{lk} = r^k \forall q \in \mathbb{R}^{3N}$
$\Rightarrow q_l(Q_1, ..., Q_{3N-r}, t), l = 1, ..., 3N$
$\Rightarrow L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(\hat{Q}, t), \sum_{k=1}^{3N-r} \frac{\partial q}{\partial Q_k}\dot{Q}_k + \frac{\partial q}{\partial t}, t\right) := \tilde{L}(\hat{Q}, \dot{\hat{Q}}, t)$, wobei $\hat{Q} \equiv (Q_1, ..., Q_{3N-r})$
$\Rightarrow$ Euler Lagrange Gl.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k}; k = 1, ..., 3N - r$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{X}_i}\right) = F_i(t) + Z_i(t), X(q(Q, t), t)$$

- Für die kinetische Energie gilt: $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$

$$\sum_j \frac{m_j}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j = \sum_{ljk} \frac{m_{(j)}}{2}\frac{\partial x_j}{\partial Q_u}\frac{\partial x_i}{\partial Q_l}\dot{Q}_k\dot{Q}_l := \sum_{k,l} g_{kl}(Q)\dot{Q}_k\dot{Q}_k$$

$$g_{kl}(Q) \equiv \textstyle\sum_j \frac{m_{(j)}}{2}\frac{\partial x_j}{\partial Q_k}\frac{\partial x_j}{\partial Q_l} \text{ symmetrisch } (g_{kl} = g_{lk}), \text{ positiv semidefinit}$$

Beispiel. Sphärisches Pendel

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T - V = \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}^2 - (-m\vec{g}\vec{x}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + m\vec{g}\vec{x}$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} l\sin\theta\cos\varphi \\ l\sin\theta\sin\varphi \\ l\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} l(\theta\cos\theta\cos\varphi \dot{-} \sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi}) \\ l(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}) \\ -l\sin\theta\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{m}{2}l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - mgl\cos\theta$$

Erhaltungsgrößen:
$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0$, $L_z :=, (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})\vec{e}_z$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - L \right)}_{\substack{:= \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + mgl\cos\theta \\ := E}} = 0$$

(Legendre Transformation von Lagrange zu Hamilton Funktion)

$$E = \frac{m}{2} l^2 \left\{ \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \sin^4\theta} \right\} + mgl\cos\theta ? \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$$

$$U_{eff}(\theta) := \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^4\theta} + mgl\cos\theta$$

Fallunterscheidung

- $L_z = 0 \to \dot{\varphi} = 0$ (ebenes Pendel)
- $L_z \neq 0 \to U_{eff}$ singulär bei $\theta = 0, \pi$

E_{min} bei $L_z \neq 0$, Teilchen vollführt eine Kreisbewegung $\dot{\varphi} = \dfrac{L_z}{ml^2 \sin^2\theta_s}$

2.4.2 Nicht holonome NB und Lagrange-Gl 1. Art

Gegeben sei ein System mit f Freiheitsgraden

$$\sum_{j=1}^{f} a_{kj}(q_j, t) dq_j + b_{(u)}(q, t) dt = 0, \quad k = 1, ..., s$$

Rang$a_{kj} = A$ (Anzahl der Zwangsbedingungen)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{f} a_{kj}(q_j, t) \frac{dq_i}{dt} + b_k(q, t)$$

Mit hilfe virtueller Verrückungen hat man:

$$\sum_{j=1}^{f} a_{kj}(q_j(t), t) dq_j(t) = 0, \quad k = 1, ..., s$$

i.A. hat man $(f - s)$ unabhängige virtuelle Verrückungen $\delta q'(t), ..., \delta q_{f-s}(t)$
Holone NB: $F_{(k)}(q, t) = 0$ für $k = 1, ..., s$

$$dF_{(k)} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial F_k}{\partial q_i} + \frac{\partial F_k}{\partial t} dt = 0$$

dF_k existieren nur dann wenn Integrabilitätsbedingungen gelten (Satz von Schwarz)

$$\boxed{\begin{array}{lllll} 1) & \dfrac{\partial^2 F_k}{\partial q_i \partial q_j} & \equiv \dfrac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} & = \dfrac{\partial^2 F_k}{\partial q_j \partial q_i} & = \dfrac{\partial a_{kj}}{\partial q_j} \\ 2) & \dfrac{\partial^2 F_k}{\partial q_j \partial t} & = \dfrac{\partial b_k}{\partial q_j} & = \dfrac{\partial^2 F_k}{\partial t \partial q_j} & = \dfrac{\partial a_{kj}}{\partial t} \end{array}}$$

Eine Zwangsbedingung F_k ist holonom, wenn dF_k existiert und 1) und 2) gelten, sonst ist F_k nicht holonom.

Das Hamilton Prinzip (Optimierung des Wirkungsfunktionals)

$$NB: \quad \sum_{j=1}^{f} a_{kj}(q(t),t)\dot{q}(t) = 0, \quad k = 1, ..., s$$

Stationäre Lösungen des Variationsproblems $f + s$ Euler-Lagrange-Gleichungen 1. Art.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial L}{\partial q_j}\right) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k(t) a_{kj}(q(t),t) \quad j = 1, ..., f$$

$$\sum_{k=1}^{s} \lambda_k(t) a_{kj}(q(t),t) + \sum_{k=1}^{s} b_k(q(t),t), \quad k = 1, ..., s$$

f Bahnkurven $q_j(t)$ und s Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_k(t)$

Für holone Zwangsbedingungen:

$$a_{kj}(q,t) = \frac{\partial F_k}{\partial q_j}(q,t)$$

$$\tilde{L}(q, \dot{q}\lambda, t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k F_k(q,t) \text{Effektive Lagrange Funktion}$$

Satz. *Für zeitliche Veränderung der Energie*

$$E := \left(\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right)\Bigg|_{\gamma}$$

ist für $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ *und holonome, Zeitunabhängige* $F_k(q,t) = 0$ *eine Erhaltungsgröße auch für* $\tilde{L}$.

Beweis.

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}_k} = 0$$
$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial q_j}$$
$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_k} = F_k$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\Bigg|_\gamma = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k(t) \frac{\partial F}{\partial q_j}\Bigg|_\gamma$$
$$\Rightarrow F_k = 0$$

$$\Rightarrow E := \sum_j \dot{q}_j - L\Bigg|_\gamma \qquad \text{Ist Erhaltungsgröße}$$

□

Beispiel. ebenes Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt $f(t)$:

$$\text{ZB:}(x - f(t))^2 + y^2 - l^2 = F(x, y, t) = 0$$

ZB ist holonom, rheonom (da Zeitabhängig)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2(x - f(t))\dot{f}(t) \neq 0$$

Lagrange-Gl 2. Art:

$$\begin{aligned} x - f(t) &:= l \sin\varphi \\ y &:= -l\cos\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{f} + l\cos\varphi \\ \dot{y} &= \dot{l}\dot{\varphi}\sin\varphi \end{aligned}$$

$$L(\varphi, \dot{\varphi} t) = \frac{m}{2}\left\{l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{f}\right\} + kgl\cos\varphi$$
$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\cos\varphi f$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ml\sin\phi\dot{\varphi}\dot{f} - mgl\cos\varphi$$

Daraus folgt, dass

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = -\cos\varphi\frac{\ddot{f}}{l}$$

3 Lineare Schwingungen

Lineare Systeme: einfachste, exakt lösbare Vielteilchensysteme.
Betrachte: mechanisches Vielteilchefsystem (N Massenpunkte) mit holonom-skleronomen Randbedingungen.

Koordinaten $x_\mu(q_i)$ mit $mu_= 1, ..., 3N$ und $i = 1, ..., f < 3N$
Koordinatentransformation, sodass q_i durch Zwangsbedingungen wegfallen.

Potenzial :

$$T = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}_i \dot{\vec{x}}_i = \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} \dot{q}_\alpha g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta$$

mit $g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \alpha\beta} > 0$

Lagrange Gleichung :

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \dot{q}_\alpha g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta - U(q)$$

Wir setzen auch voraus:

- Existenz einer Gleichgewichtskonfiguration
- kleine Auslenkung um diese Gleichgewichtskonfiguration

Anwendung

- Beschreibung von Festkörpern
- Elektromagnetisches Strahlungsfeld
- Systeme ungekoppelter Harmonischer Oszillatoren

Beschreibt z.B. nicht: Gase, Schmelzende Körper,...

3.1 Lineare Schwingungen um Gleichgewichtskonfigurationen

Definition. In *Gleichgewichtskonfiguration* gilt:
$\{q_{\alpha(0)}(t)$ ist Zeitungabhängig, $\alpha = 1, ..., f\}$

Äquivalent dazu ist $\dot{q}_{\alpha(0)}(t) = \ddot{q}_{\alpha(0)} = \dddot{q}_{\alpha(0) = ... = 0}$

Es gilt für generalisierte Kräfte, dass $\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\Big|_{q_{(0)}} = 0$

Beweisidee. Euler-Lagrange und Bedingugngen für Gleichgewicht.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{f} \dot{q}_\beta g_{\beta\alpha}(q) && \text{da } g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \\
&= \sum_{\beta=1}^{f} g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\beta \\
\to \text{E-L: } \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}}_{=0} &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \\
\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} &= -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{f} \dot{q}_\beta \frac{\partial q_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} \\
&= -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}
\end{aligned}$$

Für kleine Auslenkungen nähern wir über Taylor-Polynome:
$q_\alpha(t) = q_{\alpha(0)} + \eta_\alpha(t)$, $\eta_\alpha(t)$ klein

$$L = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T \underbrace{g(q_{(0)})}_{:=K}\dot{\eta} - U(q_{(0)} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f})\nu_\alpha \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\bigg|_{q_{(0)}}}_{:=K} \eta\beta + O^3(\eta, \dot{\eta})$$

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T q(q_{(0)})\dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^T K \eta$$

M Massenmatrix, symmetrisch positiv definit
K Kopplungsmatrix, symmetrisch positiv definit

□

3.2 Dynamik kleiner Schwingungen – Normalkoordinaten

:

$$L(\eta\dot{\eta}) = \frac{1}{2}\dot{\eta}M\dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^T K \eta$$

mit $M > 0, M = M^t$ und $K > 0, K = K^T$, sodass

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{f} M_{\alpha,\beta}\dot\eta_\beta$$
$$\frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{f} K_{\alpha,\beta}\eta_\beta$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{f} M_{\alpha,\beta}\ddot\eta_\beta = -\sum_{\beta=1}^{f} K_{\alpha,\beta}\eta_\beta = \frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha}$$

mit Orthogonalmatrix O, $Q = O^T M^{\frac{1}{2}}\mu$, $M^{-\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}} = OKO^T$
$M_{ij}^{1/2}$ Verändert die Matrix indem wir M diagonalisieren, die Wurzeln der Diagonalelemente Zeihen und danach die Trasnformationsmatrizen wieder einrechnen. Sei $M = SAS^T$ und $B_{ii} = \sqrt{A_{ii}}$, dann def. $M^{1/2} = SBS^T$.

$$L(Q,\dot Q) = \frac{1}{2}\dot Q^T\dot Q - \frac{1}{2}Q^T KQ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f}\dot Q_i\dot Q_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f} Q_iK_iQ_i$$

Beweisidee

$L(\eta,\dot\eta) = \frac{1}{2}(M^{\frac{1}{2}}\dot\eta)^T(M^{\frac{1}{2}}\eta) - \frac{1}{2}\eta^TK\eta = \frac{1}{2}\dot{\overline{Q}}^T\dot{\overline{Q}} - \frac{1}{2}\dot{\overline{Q}}^T\overline{Q} - \frac{1}{2}\overline{Q}^TM^{-\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}}\overline{Q} = \frac{1}{2}\dot Q^T\dot Q - \frac{1}{2}Q^TKQ$

da $Q = O^TM^{\frac{1}{2}}\eta$, $O^TO = OO^T = 1$

Lösungen

- $K_i > 0$: $Q_i(t) = Q_i(0)\cos(\sqrt{K_i}t) + \frac{\dot Q_i(0)}{\sqrt{k_i}}\sin(\sqrt{K_i}t)$
- $K_i = 0$: $Q_i(t) = Q_i(0) + \dot Q_i(0)t$
- $K_i < 0$: $Q_i(t) = Q_i(0)\cosh(\sqrt{K_i}t) + \frac{\dot Q_i(0)}{\sqrt{k_i}}\sinh(\sqrt{K_i}t)$

3.2.1 Modell eines lineare dreiatomigen Moleküls

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$$L(\eta\dot\eta) = \frac{1}{2}m\dot x_1^2 + \frac{1}{2}m\dot x_3^2 + \frac{1}{2}M\dot x_2^2 \underbrace{-\frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_3 - x_2 - l_0)^2}_{:=-U(x)}$$

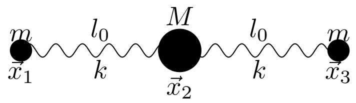


Abbildung 3: Lineares dreatomiges Modekül

Es ergibt sich zusammengefasst:

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^T K \eta$$

Wir bestimmen nu die Massen-Kopplungs-Matrix

$$M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{2k}{M} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Wir Bestimmen eine Matrix O um $M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}}$ zu Diagonalisieren, indem wir die Eigenwerte bestimmen:

$$M^{-\frac{1}{2}} O = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m} & \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & -\frac{2m/M}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \end{pmatrix}$$

Jede Spalte stellt dabei eine Mögliche Schwingungsmode (Energieverteilung) dar.

Bemerkung

- Transaktionsmoden im $\mathbb{R}^3$: 3 Freiheitsgrade
- Grenzfall: $k \to \infty$ Relativbewegungen unmöglich $\to$ Starrer Körper; 6 Freiheitsgrade

Zusammenfassung

Lagrange Gleichung: $L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \dfrac{1}{2}\eta^T K \eta$
Mit Massenmatrix M, Kopplungsmatrix K (symmetrisch, positiv definit).

$$M\ddot{\eta} = -K\eta$$

Die allgemeinen Koordinaten unseres System berechnen sich als $Q = O^T M^{1/2} \eta$
Wobei O definiert ist über $M^{-1/2} K M^{-1/2} = O \kappa O^t$
Es folgt, dass $\dot{Q} = O^T M^{1/2} \dot{\eta} = \frac{1}{2}\dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T \kappa Q$

3.3 Dynamische Vielteilchensysteme: Der schwingende Ring

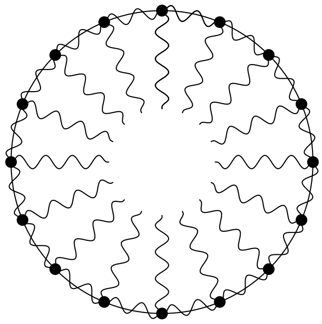


Abbildung 4: Schwingender Ring

$a = x^{(i)}a_0 - x_0^{(i-1)}$: Abstand der Gleichgewichtspositionen
(mit $i = 1, ..., N$ und $N + 1 \equiv 1$)
$x^{(i)} - x_0^{(i)} = \eta_i$
K: ???

3.3.1

$$\begin{aligned} L(\eta, \dot{\eta}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (\dot{\eta}_i)^2 m - \frac{1}{2} \eta^T \kappa \eta \\ &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \eta - \sum_{i=1}^{N+1} (\eta^{(i)} \eta^{(i-1)})^2 k \end{aligned}$$

$$M = m \cdot \mathbb{1} \qquad \kappa = \begin{pmatrix} 2k+K & -k & & & -k \\ -k & 2k+K & -k & & \\ & -k & 2k+K & -k & \\ & & & & \\ -k & & & & \end{pmatrix}$$

Modenbestimmung $\quad r = 1, ..., N$

- $\eta_r = \Re(C_r e^{-i\omega_r t})$
- ω_r: Eigenwerte
- $(-M\omega_r^2 + K)l_r = 0$ Eigenwertproblem

Ansatz $l_r^l = e^{il\Phi_r}$, da $C^{(N+1)} = C_r^{(1)}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow e^{i(N+1)\Phi_r} &= e^{i\Phi_r}\\ N\Phi_r &= 2\pi r\\ \Phi_r &= \frac{2\pi}{N}r\end{aligned}$$

$$0 = \left[-\omega_r^2 + \frac{k}{m}(2 - e^{i\Phi_r} - e^{i\Phi_r}) + \frac{K}{m}\right] C_r^{(l)}$$

Wobei gilt:

$$\begin{aligned}2 - e^{i\Phi_r} - e^{i\Phi_r} &= 2(1-\cos\Phi_r)\\ &= 4\sin^2\left(\frac{\Phi_r}{2}\right)\end{aligned}$$

Sodass

$$\begin{aligned}0 \leq \omega_r &= \sqrt{\frac{K}{m} + 4\frac{k}{M}\sin^2\left(\frac{\Phi_r}{2}\right)}\\ &= \sqrt{\frac{K}{m} + 4\frac{k}{M}\sin^2\left(\frac{\pi r}{N}\right)}\end{aligned}$$

mit $r = 1, ..., N$ und $C_r^{(l)} = e^{i\frac{2\pi r}{N}l}$.

Wir betrachten nun $\sin^2\left(\frac{\pi r}{N}\right)$. FÜr $\frac{\pi r}{N} = 0$ oder $= \frac{\pi}{2}$ gibt es keine Entartung uns somit nur eine Lösung, sonst $(\frac{\pi r}{N} \in (0,\pi)]\backslash\{\frac{\pi}{2}\})$ gibt es 2 Lösungen.

$$\begin{aligned}\eta^{(i)}(t) &= \sum_{i=1}^{N} |A_r| Re\{e^{-i\omega_r t} e^{i\phi_r} e^{i\frac{2\pi r}{N}l}\}\\ &= \cos\{\omega_r t - \frac{2\pi r}{N}l - \phi_r\}\end{aligned}$$

Bemerkung.

- Mode r: $\omega_r = \sqrt{\frac{K}{m}}$
  $\rightarrow \eta_{r=N}^{(l)}(t)$ ist eine Translation entlang des Rings
- Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit
  $\psi_r = \omega_r t - \frac{2\pi r}{N}l - \phi_r$. Für $x_o^{(1)} = la$ gilt:

$$\begin{aligned}\psi_r &= \omega_r t - \frac{2\pi r}{Na}(la) - \phi_r\\ 0 = d\psi_r &= \omega_r\ dt - \frac{2\pi r}{N} + dx_0^{(l)}\\ v_{ph} = \frac{dx_0^{(l)}}{dt} &= \underbrace{\frac{\omega_r}{2\pi r}}_{\nu_r}\underbrace{Na}_{\lambda}\end{aligned}$$

Im Langwellenlimes $\frac{\lambda_r}{a} = \frac{N}{r} \gg 1$ (also $\sin\frac{\Pi r}{N} \approx \frac{\Pi r}{N}$) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} v_{Ph} \longrightarrow & \sqrt{\frac{K}{m}\left(\frac{Na}{2\Pi r}\right)^2 + \frac{4k}{m}\left(\frac{\Pi r}{N}\frac{Na}{2\Pi r}\right)^2} \\ = & \sqrt{\frac{K}{m}\left(\frac{Na}{2\Pi r}\right)^2 + \frac{ka^2}{m}} \end{aligned}$$

Für $K = 0$ erhalten wir $\sqrt{\frac{ka^2}{m}}$, unabhängig von der Mode. Für $K \neq 0,\ r = 0$ (Translationsmode) gilt hingegen $v_{Ph} = \infty$, was nicht unphysikalisch ist, da v_{Ph} keinen Transport einer physikalischen Größe charakterisiert.

- Dispersionsrelation: Lösung = Dispersionsrelation+Moden

3.3.2 Der Kontinuierliche Grenzfall

Für Gleichgewichtspositionen x_n und ausgelenkte Position x'_n
gilt $x'_n(t) = x_n + \eta_n(t)$:

Ausgangspunkt

$$m\ddot{\eta}_l(t) + k(2\eta_l(t) - \eta_{l-1}(t)) + K\eta_l = 0$$

$\Leftrightarrow M\ddot{\eta} + K\eta = 0.$

Kontinuumlimes beschreibt den Grenzfall $a \to 0, N \to \infty$,sodass $Na := L = konst$ im Fall ($\lambda \gg a$): Langwellengrenzfall.

$$\eta_l(t) := u(x_l, t) \qquad \text{sodass} \qquad \ddot{\eta}_l(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

$$\begin{aligned} 2\eta_l - \eta_{l-1}(t) - \eta_{l+1} &= 2u(x_l,t) - u(x_{l-1},t) - u(x_{l+1},t) \\ \text{Taylor Entwickelung: } &= 2u(x_l,t) - \big(- u(x_l,t) - a\frac{\partial u}{\partial x}(x_l,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x_l,t) + O(a^3)\big) \\ &\quad - \big(u(x_l,t) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x_l,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_l,t) + O(a^3)\big) \\ &= -a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l,t) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl

$$\frac{1}{\frac{ka^2}{m}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{K}{ka^2}u(x,t) = 0$$

Grenzwertbetrachtungen:

$$v := \lim_{\substack{a\to 0\\ m\to 0\\ k\to 0}} \sqrt{\frac{ka^2}{m}} \quad \kappa^2 := \lim_{\substack{q\to 0\\ K,k\to 0}} \left(\frac{K}{ka^2}\right)$$

Wir erhalten die Klein-Gordon Gleichung

$$\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2\right) u(x,t)$$

Energie:

$$E = \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{m}{2}\left(\dot{\eta}_l(t)\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\eta_l(t) - \eta_{l-1}(t)\right)^2 + \frac{K}{2}\left(\eta_l(t)\right)^2\right)$$

Da $N \to \infty$

$$E = \int_1^N d\overbrace{la}^{:=x} \left\{\frac{m}{2a}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{ka}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{K}{2a}u^2\right\}$$

wir definieren $\varrho = \lim\limits_{\substack{a\to\\ m\to 0}} \frac{m}{a}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L dx \left\{\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \varrho v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \kappa^2\varrho v^2 u^2\right\}$$

Für den diskreten Ring gilt also

$$\eta_l(t) = \sum_{r=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_r e^{-i(\omega_R t - \frac{2\pi}{N} lr)}$$

mit $A_r \in \mathbb{C}$ und $\omega_r = \sqrt{\frac{K}{m} + \frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{\pi r}{N}\right)}$ für $r = 1, ..., N$ und $L \to \infty$.

Kontinuumslimes

$$u(x,t) = \int_{-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} d\left(r\frac{2\pi}{Na}\right) \underbrace{\left(\frac{A_r Na}{2\pi}\right)}_{:=A(k)} e^{-i\omega_r t - r\frac{2\pi}{Na}al} + kompl.Konj$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad A(k)e^{-i\omega(k)t}e^{ikx} + kompl.Konj$$

Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation (FT)

- Definition der FT:

$$\tilde{\varphi} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \varphi(x)$$

- Umkehrtransformation

$$\varphi(x) \lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} e^{-\epsilon|k|} \tilde{\varphi}(k)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ikx} e^{-\epsilon|k|} e^{-ikx'} \varphi(x') \\
&= \lim_{\epsilon -> 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} e^{-\epsilon|k|} \right\}}_{\substack{:= \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(x-x')^2+\epsilon^2} \\ \text{(Lorentz-Kurve)}}} \varphi(x') \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{\epsilon \varphi(x')}{(x-x')^2+\epsilon^2}}_{\substack{\text{Distributionen} \\ \text{(uneigentliche} \\ \text{Funktionen)}}}
\end{aligned}$$

□

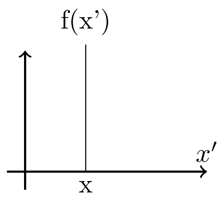


Abbildung 5: δ-Funktion

- Faltungstheorem

$$(\varphi * \psi)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \varphi(x-x') \psi(x')$$

(Faltung, engl. convolution), $kx = const \Leftrightarrow k = \frac{const}{x}$(komplementäre Variablen)

$$\boxed{\Leftrightarrow \varphi * \psi = \tilde{\varphi}\tilde{\psi}}$$

- Parseval'sche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|\varphi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk|\varphi(k)|^2$$

Elementare Eigenschaften von stetigen Funktionalen un Distributionen

Gegeben sei ein stetiges,lineares Funktional über den Funktionenraum $\mathfrak{F}$.
$l : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$, $l(c1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 l(\varphi_1) + c_2 l(\varphi_2)$ (Linearität) für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{F}$.
Funktionen φ werden auch Testfunktionen genannt

- $\mathfrak{D}$: Raum komplexer, unendlich oft differenzierbarer Funktionen mit kompaktem Träger
- $\mathfrak{C}$: Raum unendlich oft differenzierbarer komplexer Funktionen die im Unendlichen stärker abnehmen als jede noch so hohe Potenz (streben gegen Null)
- Um Stetigkeit zu garantierne muss $\mathfrak{F}$ zuem topologischen Raum mit Hilfe der Funktionennorm $\|\varphi\|$ gemacht werden.
- Beispiele: stetiges Funktional
  - $l(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ für $f(x)$ stetig.
    l heißt auch regulär.
  - $l(\varphi) := \varphi(X = 0)$ Dirac-Funktional
    $f(x)$ ist dann die Dirac-(Delta)-Funktion $f(x) := \delta(x)$
  - Zu jedem stetigen linearen FUnktional über $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{C}$ existiert eine FOlge f_n stetiger Funktional-Kerne mit

    $$l(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x)\varphi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \text{für bel } \varphi \in \mathfrak{D} \text{ oder } \mathfrak{C}$$

    $\Rightarrow f$ nennt man Distribution.

Eigenschaften von $\delta(x)$

- $\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x - x_0)\varphi(x) = \varphi(x_0)$
- Es gilt: Im Limes $n \to \infty$
  - $f_n(c) := ne^{-n^2\pi x^2} \to \delta(x)$, denn

    $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} due^{-u^2}\varphi(u\frac{n}{n\sqrt{\pi}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} due^{-u^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(0)\sqrt{\pi} = \varphi(0)\end{aligned}$$

- $f_(x) := \frac{n}{\pi}\left(\frac{\sin(nx)}{xn}\right)^2 \to \delta(x)$
- $f_n(x) := \frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{n}}{x^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} \to \delta(x)$
- $f_n(x) := \frac{1}{\pi}\frac{\sin(nx)}{x} \to \delta x$

- Definition $l'(\varphi) := -l(\varphi')$ für alle Testfunktionen aus $\mathfrak{F}$

$$l' = \int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x)\varphi(x) = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\varphi'(x)$$

  $\Rightarrow$ Jede Distribution auf $\mathfrak{C}$ lässt sich als Distributionsableitung endlicher Ordnung einer stetigen Fkt. darstellen.

- Beispiel: sei $\alpha(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$
  Im Distributionssinn gilt:

$$\alpha'(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

- Es gilt
  - $x\delta(x) = 0$
  - $\delta(-x) = \delta(x)$
  - $\delta(g(x)) = \sum_l \frac{1}{|g(x)|\delta(x-x_l)}$, mit stetigem g,$g(x_l) = 0$ und $g'(x_l) \neq 0$.
  - $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$
  - $\tilde{\delta k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
  - $\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \quad e^{ik(x-x_0)} \cdot 1$ (Fourier-Transformation über 1)

Bestimmung der Amplituden $A(k)$ aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} U(x,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk(A(k)e^{ikx} + A^*(k)e^{ikx}) := F(x) \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{A(k)(-i\omega(k))^{ikx}\right\} + A^*(k)i\omega(k)e^{-ikx} := G(x) \\ A(k) &= \frac{i\omega(k)\tilde{F}(k) - \tilde{G}(k)}{2i\omega(k\sqrt{2\pi})} \end{aligned}$$

Bestimmung der Lösungen für Randbedingungen z.B. (W) für $x \in [0, L]$ mit $0 = u(x = 0, t)$ und $u(x = L, t) = 0$ vorgegeben für alle t.

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2\right) u(x, t) = 0 \tag{W}$$

zusätzliche Anfangsbedingungen:

$$u(x, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \text{ für } x \in [0, L]$$

Fouriertransformation:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{A(k)}_{\in\mathbb{C}} e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} + k.k.$$

Randbedingung:

$$\begin{aligned}
0 = u(x = 0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{-i\omega(k)t} + k.k. \\
0 = u(x = L, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{-i\omega(k)t} e^{ikL} + k.k. \\
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{-i\omega(k)t} \underbrace{(1 + e^{ikL})}_{=0} + k.k.
\end{aligned}$$

$1 + e^{ikl} = 0 \Rightarrow kL = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_n = \frac{\pi}{L} n$
$\Rightarrow A(k) = A_n \delta(k - \frac{pi}{L} n)$

$$\Rightarrow \quad u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega(k_n)t + ik_n x} + k.k. \quad \text{mit } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

zusätzlich:

$$\begin{aligned}
u(x = 0, L) &= 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + A_{-n}) e^{i\omega(k_n)t} + A_0 e e^{-i\omega(k=0)t} + k.k.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow A_n + A_{-n} = 0$ und $A_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega(k_n)t} e^{i\frac{k_n\pi}{L}x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^* e^{i\omega(k_n)t} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(A_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + A_{-n} e^{i\frac{n\pi}{L}x}\right)}_{=A_n\cdot 2i\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)-A_n} e^{-i\omega(k_n)t} + k.k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2|A_n| \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot 2\Re\{e^{-i\omega(k_n)t+i\phi_n} i\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 4|A_n| \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \sin(\omega(k_n)t - \phi_n)
\end{aligned}
$$

$\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ bilden dabie ein vollständiges UFnktionensystem für stetige Funktionen f im Intervall $[0, L)$ mit $f(x=0) = f(x=L) = 0$ (sogar orthogonals Funktionensystem)

Es gilt

$$
\int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\right) = \delta_{nm}
$$

d.h. $v = \sum_i a_i e_i$, $w = \sum_i b_i e_i$, $(v, w) = \sum_i a_i b_i$. Somit

$$
\int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\right) u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 4|A_n| \delta_{nm} = -4|A_m| \sin\varphi_m
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 4|A_n| \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \omega(k_n) \cos(\omega(k_n)t - \varphi_n)
$$

???, das heißt Linear-Kombination von allgemeiner homogene und partikulärer Lösung. $\to$??? $\to$???

3.4 Erzwungene Schwingungen und Greensche Funktionen

1. Transformation auf Normalkoordinaten $\to$ ungekoppelte erzwungenen Schwingungen
2. $\ddot{Q}(t) + \omega^2 Q(t) = \mathfrak{F}(t)$ linear <u>inhomogen</u>
3. Allgemeine Lösung

$$
Q(t) = \underbrace{Aq_1(t) + Bq_2(t)}_{\substack{\text{Lösung der} \\ \text{homogenen Gleichung}}} + \underbrace{Q_p(t)}_{\substack{\text{partikuläre} \\ \text{Lösung}}}
$$

4. Konstruktion von $Q_p(t)$:
   Idee: $\mathfrak{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\delta(t-t')\mathfrak{F}(t')$

$$\mathfrak{L}G(t,t') = \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,t') + \omega^2 G(t,t') = \delta(t-t')$$

$$Q_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t')\mathfrak{F}(t') \text{ denn } \mathfrak{L}Q_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{L}G(t,t')\mathfrak{F}(t') = \mathfrak{F}(t')$$

3.4.1 Lösung von DGL mit Hilfe von Integraltransformationen (Fourier, Laplace)

$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^3 e^x$; $y(0) = y'(0) = 0$; $y(x) = f = f(x)$ Laplace-Transformation $L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} dx f(x) e^{-px}$, $p > 0$

Mehtode. *zur Lösung*

1. *Transformiere die DGL mit Hilfe von L und erhalten eine rein algebraische Gl. für $F(p)$ bzgl. p.*
2. *Löse die algebraischen Gl. nach $F(p)$ auf*
3. *Suche die inverse Transformation von $F(p)$, $y(x) = L^{-1}\big(L(y)\big)$*

$\Rightarrow$ *Laplace Transformation ist linear $L(y'') - 2L(y') + L(y) = L(x^3 e^x)$*

$$\begin{aligned} L(y') = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dy}{dx} e^{-px} &= \big[ye^{-px}\big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} dx y e^{-px}(-p) \\ &= -y(0) + p\int_0^{\infty} dx y e^{-px} \\ &= -y(0) + pL(y) = pL(y) - y(0) \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned} L(y'') &= p^2 L(y) - py(0) - y'(0) \\ L(x^3 e^x) &= \int_0^{\infty} x^2 x^2 e^{-x(p-1)} dx = \frac{6}{(p-1)^4}, \quad p-1>0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eingesetzt in Gl 1

$$\begin{aligned} (p^2 - 2p + 1)L(y) &= \frac{6}{(p-1)^4} \\ L(y) &= \frac{6}{(p-1)^4(p^2-2p+1)} \end{aligned}$$

3.5 Erzwungene Schwingungen und Greensche Fkt.

Schwingungsgleichung

$$M\ddot{\nu}(t) + K\nu(t) = F(t)$$

Normalkoordinaten $Q(t)$ Einführen

$$\ddot{Q}(t) + kQ = F(t)$$

$$F(t) = O^T M^{-1/2} F(t)$$

$$F(t) = AQ_1(t) + BQ_2(t) + Q_p(t)$$

Konstruktion von $Q_P(t)$ auf $F(t)$ Def. Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(t,t')$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t,t') + kG(t,t') = \delta(t-t')$$

Für $Q(t)$ gilt

$$Q_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') F(t')$$

Beweis.

$$\ddot{Q}_p(t) + kQ_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\left\{\ddot{G}(t,t') + kG(t,t')\right\}}_{:=\delta(t-t')} F(t') = F(t)$$

□

Es gilt:

- $G_{ret}(t,t') = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}(t-t'))\theta(t-t')$ (retardiert)
- $G_{av}(t,t') = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}(t'-t))\theta(t'-t)$ (avanciert)

Beweis. Für $G_{ret}(t,t')$ und $k > 0$ $t > t'$: $G_{ret}(t,t') = A\sin(\sqrt{k}(t-t')) + B\cos(\sqrt{k}(t-t'))$ (Ansatz)
$t < t'$: $G_{ret}(t,t') = 0$
Übergangsbedingung für $t = t'$: Sei $\epsilon > 0$
Integration von (2) nach t

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{ret}(t,t') + kG_{ret}(t,t')\right\} = \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t-t')$$

Im Limes $\epsilon \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{ret}(t'+\epsilon,t') - \frac{\partial}{\partial t} G_{ret}(t'-\epsilon,t') = 1$$

Weper Stetigkeit:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial t}G_{ret}(t'+\epsilon,t')=0$$

$\Rightarrow B=0,\ A\frac{1}{\sqrt{k}}$

$\Rightarrow$ Eine Partikuläre Lösung der DGL ist gegeben durch

$$Q_p(t)=\int_{-\infty}^{t}dt'F(t')\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}(t-t'))$$

Spezialfall $F(t)=F_0\theta(t')\theta(T-t')\sin\Omega t'$

$\Rightarrow$ Eingesetzt in Gl 5

$$Q_p(t\geq T>0)=\frac{-F_0}{2\sqrt{k}}\left\{\frac{\sin[(\Omega-\sqrt{k})T+\sqrt{k}t]-\sin(\sqrt{k}t)}{\Omega-\sqrt{k}}-\frac{\sin[(\Omega+\sqrt{k})T-\sqrt{k}t]t\sin\sqrt{k}t}{Omega+\sqrt{k}}\right\}$$

mit $\sin\alpha\sin\beta=\frac{-1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta))$

$$\xrightarrow[\Omega\to\sqrt{k}]{}-\frac{F_0T}{2\sqrt{k}}\cos\sqrt{k}t\quad\text{resonante Anregung}$$

□

3.5.1 Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: I) Anfangswertprobleme

Beispiel $\ddot{y}(t)+\omega^2y(t)=f(t)$, $y(0=\dot{y}(0)=0)$, $t>0$
Sowie $\ddot{G}(t,t')+\omega^2G(t,t')=\delta(t-t')$, $G(0,t')=\dot{G}(0,t')=0$ Durch Multiplikation mit $f(t')$ und integrieren über t':

$$\int_0^\infty dt'\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2\right)G(t,t')f(t')=\int_0^\infty dt'\delta(t-t')f(t')$$

Ergibt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2\right)\int_0^\infty G(t,t')f(t')=f(t)$$

Transformieren mit Hilfe der Laplace Transformation bzg. p

$$G(p,t')=\frac{e^{-pt'}}{p^2+\omega^2},\quad \text{p¿0}$$

$$G(t,t')=\frac{\sin(\omega(t-t'))}{\omega}\theta(t-t')$$

Fazit

1. Formuliere 6 mit Hilfe von $G(t,t')$ in 7
2. Löse 7 mciht Laplace Trasnfomration
3. Trasnformiere G(p,t') zurück zu $G(t,t')$
4. Interpretiere $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') f(t')$ und erhalte $y(t)$ für ein bestimmtes $f'(t)$.

3.5.2 Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: II) Randwertprobleme

1. Jede DGL hat die Form $\mathfrak{D}y(x) = f(x)$.
   Bringe jede DGL 2. Ordnung in die sog. Sturm-Lioville Form

$$\frac{d}{dx}(p(x)y'(x)) + a(x)a(x) = f(x)$$

   Wobei $p(x) > 0$ und $a(x)$ stetig, reell

2. Löse die homogene DGL

$$y_n(x)c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

3. $y_{ges} = y_n(z) + \int_a^b dx G(x,z) f(x)$

$$G(x,z) := c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(z)}{p(z)\omega(z)} & \text{für } a < x < z \\ \frac{y_1(z)y_2(x)}{p(z)\omega(z)} & \text{für } a < x < b \end{cases}$$

   mir $\omega(z) = y_1(z)y_2'(z) - y_1'(z)y_2(z)$ (Wronski Determinante)

1. $p(x) = 1$
2. Homogene DGL: $y'' = 0$
3. $G(x,z) = c_1 + c_2x + \begin{cases} z, & \text{für } 0 < x < z \\ x, & \text{für } z < x < 1 \end{cases}$ Bestimme a_1, c_2 aus Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} G(0,z) &= 0 \\ G(1,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= -z \\ c_2 &= z-1 \end{aligned} \Rightarrow G(x,y) = \begin{cases} x(z-1) & \text{, für } 0 < x < z \\ z(x-1) & \text{, für } z < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_P(z) =$$

Hier fehlt was!

4 Hamiltonsche Mechanik

Motivation: Lagrange-Formulierung

1. Grundlegende Variablen $q, q\dot{q}, t$
2. Lagrange Funktion $L(q, \dot{q}, t)$
3. $\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \quad L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big) = 0$ (Hamilton Prinzip)

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$ mit $j = 1, ..., f$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_{j_0}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_{j_0}} := p_{j_0}$ ist Erhaltungsgröße

$\Rightarrow$ Suche nach einer alternativen Formulierung der Lagrange-Menchanik im bezug auf q, p statt q und $\dot{q}$.

4.1 Legendre Transformation

Ersetze $f(x)$ durch $g(p)$ mit $P := \frac{\partial f}{\partial x}$
Ziel: FInde eine eindeutige Zuordnung $f(x) \leftrightarrow g(p)$ (Bijektivität)

$\Rightarrow$ Übergang von $L(q, \dot{q}, t)$ zur Hamilton Funktion $H(P := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, q, t)$

Gegeben sei $f(x)$ konvex, $f''(x) > 0$

$$F(x, p) := px - f(x)$$

Es gilt:

- $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_P = p - \frac{df}{dx}$
- $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_P = -\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$, da $f''(x) > 0$

$\Rightarrow \max F(x, p) = g(p) := F\big(x(P), P\big)$ mit $P = \frac{\partial f}{\partial x}$

$\Rightarrow$ d.h. durch die Abbildungsvorschrift $f(x) \to g(p) := px(p) - f(x(p))$ mit $p := \frac{\partial f}{\partial x} \to x(p)$ lässt sich jeder konvexen Funktion $f(x)$ eine Legendre-Trasnformierte $g(p)$ zuordnen.

Es gilt:

- $\frac{dg}{dp} = x(p) + p\frac{dx}{dp} - \frac{df}{dx}\frac{dx}{dp} = x(p)$
- $\frac{d^2 g}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = \left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]^{-1} > 0 \to g(p)$ ist auch konvex

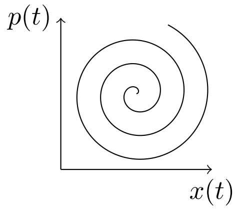


Abbildung 6: Phasenraum-Darstellung

- Die Legendre Transformation ist involutiv, d.h. die Legendre Transformation von $g(p)$ ist wieder $f(x)$
  Beweis: $\max G(x,p) = p(x)x - g(p(x)) := p(x)x - \{p(x)x - f(x)\} = f(x)$
- $-g(P(x))$ ist die Ordinate Ψ des Punktes $x = 0 = x_0$ der Tangente an die Kurve $f(x)$ an der Stelle x_0

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \frac{f(x_0) - \Psi}{x_0 - 0} \Leftrightarrow -\Psi = x_0 \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} - f(x_0) \equiv g(p(x_0))$$

- Für $f(x)$ von mehreren Unbekannten x_j, $j = 1, ..., d$ gilt:

$$g(p) = \sum_{j=1}^{d} p_j x_j(p) - f(x(p)) \text{ mit } p_j := \frac{\partial f}{\partial x^j} \to x_j(p_j)$$

  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} > 0$ (positiv definit)
  Analog gilt für die Umkehrung:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d} p_j(x) x_j - g\big(p(x)\big)$$
$$x_j = \frac{\partial q}{\partial p_j} p \to p_j(x_j)$$
$$\frac{\partial^2 q}{\partial p_j \partial p_j} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}\right]^{-1} > 0$$

- Youngsche Ungleichung

$$F(x,p) := \sum_{j=1}^{d} p_j x_j - f(x) \leq g(p) \equiv F\big(x(p), p\big) \equiv \max_x F(x,p), \text{ für } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- $dg = \sum_{i=1}^{d} \left\{ dx_i p_i + x_i dp_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right\} = \sum_{i=1}^{d} p_i dp_i \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial p_i} = x_i$
  $df = \sum_{i=1}^{d} \left\{ dx_i p_i + x_i dp_i - \frac{\partial g}{\partial p_i} dp_i \right\} = \sum_{i=1}^{d} p_i dp_i \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = p_i$
- Die Legendre-Funtion (engl. Hemiltonian) mit $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t) \to \dot{q}(q, p, t)$ für $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_j} > 0$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_{j_0}} = 0 \to \frac{\partial H}{\partial q_{j_0}} = 0$ (zyklische Koordinaten)

4.2 Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

Es gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{mit Anfangsbedingungen}$$

Es gilt:

$$\begin{array}{ll} \dot{q}_j(t) & = \frac{\partial H}{\partial p_j}(p, q, t) \\ \dot{p}_j(t) & = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(p, q, t) \end{array} \to (p(t), q(t)) \text{ für gegebenen Anfangsbedingungen } (p(t_0), q(t_0))$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

- $\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} a$
- $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$
- $\frac{dH}{dt}\big(p(t), q(t), t\big) = \frac{\partial H}{\partial t}\big(p(t), q(t), t\big)$
  Lösung der Hamilton-Bewegungsgleichung
  $\Rightarrow$ für $\frac{\partial H}{\partial t}(p, q, t) = 0 \Rightarrow H\big(p(t), q(t), t\big)$ ist Erhaltungsgröße (Energie)

Beweis. Freiheitsgrade $f =: H(p, q, t) = \sum_{j=1}^{f} [q_j \dot{q}_j(q, p, t)] - L\big(q, \dot{q}(q, p, t), t\big)$

$$dH(p, q, t)|_p = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt\right)\Bigg|_P$$

$$\frac{df}{dx}(x) \equiv f'(x) \equiv \sum_{j=1}^{f} \left(dp_j \dot{q}_j + p_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt\right)\Bigg|_T$$

mit $\left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) d\dot{q}_j = 0$

$$\Leftrightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

Es folgt daraus dass

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} \quad \text{Hamilton I}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{Hamilton II}$$

Weiterhin

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} = \underset{\dot p_j}{-\frac{\partial H}{\partial q_j}} + \frac{\partial H}{\partial q_j} = \underset{\dot q_j}{\frac{\partial H}{\partial p_j}} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$\square$

Es gilt: Sei q_1 Zyklische Koordinate
$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \Rightarrow p_1$ Erhaltungsgröße: $H(p_1 = c, p_2, ..., p_f)$

4.3 Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip

Wenn $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}(q, \dot q, t)$ (lokal) bijektiv ist

$$\begin{aligned} S :&= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^{f} p_j dq_i - H(q,p,t)dt \right\} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^{f} p_j(t)\dot q_j(t) - H(p(t), q(t), t) \right\} \leq \int_{t_0}^{t_1} dt L\big(q(t), \dot q(t), t\big) \quad \text{Youngsche Ungleichung} \end{aligned}$$

$$\delta S[\gamma] = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^{f} p_j(t)\dot q_j(t) - H(p(t), q(t), t) \right\} = 0$$

Wobei der Weg $\gamma : t \mapsto (p(t), q(t))$.
Es gilt: Die Variation ist gleich 0:

$$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$$

bzw. $p(t_0), p(t_1)$ beliebig

Beweis. betrachte virtuelle Verrückung $\big(\delta p(t_1), \delta q(t_1)\big)$

$$\delta S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^{f} \left(\delta p_j(t)\dot q_j(t) + \underbrace{p_j(t)\delta\dot q_j(t)}_{=\frac{d}{dt}(p_j(t)\delta q_j(t) - \delta q_j(t) p_j(t) q_j(t))} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j(t) - \frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j(t) \right) \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{f} p_j \delta q_j(t) \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^{f} \delta q_j(t) \left(\dot q_j(t) - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \delta q_j(t) \left(-\dot p_j(t) - \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \right\}_{\text{da } \delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0} \overset{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\dot q_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \square$$

4.4 Phasenraum, Zustände, physikalische Variable

Ausgangspunkt $H(p,q,t)$ kodiert mechanisches System
$\underset{\sim}{\text{Raum}} = \{(p,q,t)\}$ Phasenraum
$\widetilde{\text{Raum}} := \{(p,q,t)\}$ erweiterter Phasenraum

$$\begin{matrix} \dot q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot p_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \end{matrix} \Leftrightarrow \dot z^k = \sum_{l=1}^{2f} S_{kl} \frac{\partial H}{\partial z_l} = V_k(z)$$

$$V_k = \sum_{j=1}^{2f} \overset{\substack{\text{konvar.}\\\text{Tenstor}\\\text{2. Stufe}}}{S_{kl}} \underset{\substack{\text{konvariantes}\\\text{Vektorfeld}}}{\frac{\partial H}{\partial z_l}} \text{ kontravariantes Vektorfeld}$$

Trajektorien $\dot z_k(t) = \sum_{l=1}^{2f} S_{kl} \frac{\partial H}{\partial z_l}(z)$ Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Zustand (rein) $z = (p,q)$ charakterisier das mechanische System Vollständig

Physikalische Variable Funjtion über dem Phasenraum (z.B. $H(z(t),t)$)

Physikalische Variable (Zustandsgröße, physikalische Variable) $H(z_0,t_0)$

gemischte Zustande Charakterisierung durch Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

$$P(z,t) \geq 0 \qquad \int dz P(z,t_0) = 1$$

$$\langle F \rangle_{P(t_0)} = \int dz P(z,t_0) F(z,t_0)$$

Zeitliche Entwicklung und Poisson Klammern:

Sie $F(p, q, t)$ eine Physikalische Variable

$$\dot{q}_l = \{q_l, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad \dot{p}_l = \{p_l, H\} = \frac{\partial H}{\partial q_l}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}\big(p(t), q(t), t\big) &\underset{\text{H-B-Gl}}{=} \sum_{l=1}^{f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_l}\dot{p}_l + \frac{\partial F}{\partial q_l}\dot{q}_l \right\} + \frac{\partial F}{\partial t}\big(p(t), q(t), t\big) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}\big(p(t), q(t), t\big) + \{F, H\} \end{aligned}$$

wobei $\{F, G\} = \sum_{l=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial G}{\partial q_l} \right)$

$$= \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial H}{\partial q_l} \right)$$

Neue Struktur: Über die Menge der physikalischen Variablen $\{F(z)\}$ ist eine algebraische Struktur definiert

- gewöhnliche Multiplikation $(FG)(z) := F(z)G(z)$ ist kommutativ
- Poisson-Klammern $\{F, G\} := R(z)(:= F \circ G)$ ist nicht kommutativ

Eigenschaften der Poisson-Klammern

- $\{F, c\} = 0$ für $\frac{\partial c}{\partial p_i} = \frac{\partial c}{\partial q_i} = 0$ für alle $i = 1, ..., f$
- $\{F, \alpha G_1 + \beta G_2\} = \alpha\{F, G_1\} + \beta\{F, G_2\}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\{F, G\} = -\{G, F\} \Rightarrow \{F, F\} = 0$ antikommutativ
- $\{F, G_1 G_2\} = \{F, G_1\}G_2 + G_1\{F, G_2\}$ (Produktregel)
- $\{F, \{G_1, G_2\}\} + \{G_1, \{G_2, F\}\} + \{G_2, \{F, G_1\}\}$

$\rightarrow$Quantenmechanik: Heisenberg: p, q sind Matrizen $\rightarrow$ lineare Vektorraum Transformationen.

$$\{F, G\} \rightarrow [\hat{F}, \hat{G}] := \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}$$

Beispiel: Poisson-Klammer-Strukturen $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} := \{\vec{a}, \vec{b}\} \qquad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Entwickelung

$$F(p(t),q(t)) = F\big(p(t),q(t)\big) + (t-t_0)\underbrace{\frac{dF}{dt}\Big| t_0}_{=-\{H,F\}_{t_0}} + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\underbrace{\frac{d^2F}{dt^2}\Big|_{t_0}}_{(-1)^2\{H,\{H,F\}_{t_0}} + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t-t_0)^n}{n!}\{\underbrace{H\{H\{...\{H,F}_{\text{n-mal}}\}...\}|_{t_0}$$

4.4.1 Erhaltungsgrößen

$$\stackrel{!}{=} \frac{dF}{dt}\big(p(t),q(t),t\big) = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Es gilt der Poissonsche Satz: Seien F_1 und F_2 Erhaltungsgrößen: $\Rightarrow$ $\{F,G\}$ist Erhaltungsgröße

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{F_1,F_2\} &= \{\{F_1,F_2\},H\} && + && \frac{\partial}{\partial t}\{F_1,F_2\} \\
&= -\{H,\{F_1,F_2\}\} && + && \{\frac{\partial F_1}{\partial t},F_2\} + \{F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}\} \\
\text{Mit Jacobi-Id} &= \{F_1,\{F_2,H\}\} + \{F_2,\{H,F_1\}\} && + && \{\frac{\partial F_1}{\partial t},F_2\} + \{F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}\} \\
&= \{F_1,\underbrace{\{F_2,H\} + \frac{\partial F_2}{\partial t}}_{=0}\} && + && \{F_2,\underbrace{\underbrace{\{H,F_1\}}_{=-\{F_1,H\}} - \frac{\partial F_1}{\partial t}}_{=0}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Erhaltungsgröße eines dreien nicht relativistischen Massepunkts

Zusammenhänge:

$$\{q_i,p_k\} = \delta_{ik}$$
$$\{q_i,q_k\} = \{p_i,p_k\} = 0$$

$$H = \sum_{i=1}^{3}\frac{p_i p_i}{2m}$$

1. Impulserhaltung

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}\{p_i, p_k, p_k\} = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}\underbrace{\{p_i, p_k\}}_{=0} p_k + p_k \underbrace{\{p_i, p_k\}}_{=0} = 0$$

2. Energieerhaltung

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 \quad \text{da } \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

3. Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \qquad\qquad L_i = \sum_{l,k=1}^{3} \epsilon_{ilk} x_l p_k$$

$$\frac{dL_i}{dt} = \{L_i, H\} = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}\{L_i p_k p_k\} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{3}\{L_i, p_k\}p_k = \frac{1}{m}\sum_{k,b=1}^{3}\epsilon_{ikb}p_k p_b = 0$$

7 Erhaltungsgrößen in 6 dim $\Rightarrow$ min 2 sind Abhängig *Hier fehlt was!*

4.5 Die Poincare-Cartan Invariante

erweiterter Phasenraum $\{(p, q, t)\}$,geschlossener Weg $C : \lambda \in [0, 1] \mapsto \big(p(\lambda), q(\lambda), t(\lambda)\big)$.

$$\begin{aligned} I(C) &= \oint_C \left\{ \sum_{i=1}^{f} p_1(\lambda)\frac{dq_i}{d\lambda} - H\big(p(\lambda), q(\lambda), t(\lambda)\big)\frac{dt}{d\lambda} \right\} d\lambda \\ &= \oint_C \sum_{i=1}^{f} p_i dq_i - H dt \\ &= I(C') \end{aligned}$$

Ist äquivalent zu

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad\qquad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Konsequenz Die Koordinaten $(P, Q, T), K(P, Q, T), S(P, Q, T)$ hängen von (p, q, t) und $H(p, q, t)$ ab, sodass wenn

$$\sum_{i=1}^{f} p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^{f} P_i dQ_i - K dT + dS$$

Dann folgt durch die Poincare-Cartan Invariante (P-C-I) und durch $\oint_C dS = 0$ die Äquivalenz zwischen

$$\begin{matrix} \frac{dq_i}{dt} & = \dot{q}_i & = \frac{\partial H}{\partial p_i} & \multirow{2}{*}{$\Leftrightarrow$} & \frac{dQ_i}{dT} & = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \frac{dp_i}{dt} & = \dot{p}_i & = \frac{\partial H}{\partial q_i} & & \frac{dP_i}{dT} & = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{matrix}$$

Beweisidee betrachte eine beliebige (glatte) Abbildung $s \in [0, ...)$ und $\big(P(p,q,t), Q(p,q,t), T(p,q,t)\big)$ und $\tilde{H}(P,Q,T) := H\big(p(P,Q,T), q(P,Q,T), t(P,Q,T)\big)$. Wir betrachten die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} P_i &= p_i + s\dot{P} + O(s^2) \\ Q_i &= q_i + s\dot{Q} + O(s^2) \\ T &= t + s\dot{T} + O(s^2) \end{aligned}$$

Durch einsetzen diese in die PCI

$$\begin{aligned} I(C') &= \oint_{C'} \sum_{i=1}^{f} P_i\ dQ_i - \tilde{H}\ dT \\ &= \oint \sum_{i=1}^{f} (p_q + s\dot{P}_i)(dq_i + sd\dot{Q}_i) - \left(H + \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} s\dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial q} s\dot{Q}_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} s\dot{T}\right) \Big(dt + sd\dot{T}\Big) + O(s^2) \\ &= \left(\oint_{C'} \sum_{i=1}^{f} p_i\ dq_i - H\ dt\right) \\ &\quad + s \oint_{C'} \left\{ \sum_{i=1}^{f} \left(\dot{P}_i\ dq_o + p_i\ d\dot{Q}_i - \dot{Q}_i\ dp_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{P}_i\ dt - \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{Q}_i\ dt - \frac{\partial H}{\partial t}\dot{T} dt\right) - Hd\dot{T} \right\} + O(s^2) \end{aligned}$$

wobei $p_i\ d\dot{Q}_i = d(p_i\dot{Q}_i) - \dot{Q}_i\ dp_i$ und $Hd\dot{T} = d(H\dot{T}) - \dot{T}dH$

Durch Ordnen der Summe

$$\begin{aligned} &= \oint_{C'} \left(\sum_{i=1}^{f} p_i\ dq_i - H\ dt\right) + \underbrace{\oint_{C'} d(p_i Q_i) - d(\tilde{H}\dot{T})}_{=0} \\ &\quad + s \underbrace{\oint \sum_{i=1}^{f} \left\{ \dot{P}_i \left(dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt\right) + \dot{Q}_i \left(-dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt\right) + \dot{T}\left(-\frac{\partial H}{\partial t} + d\tilde{H}\right)\right\}}_{=\tilde{I}} + O(s^2) \end{aligned}$$

Fall 1: Gelte für die Kurve, dass $dt \equiv \frac{dt}{d\lambda} d\lambda = 0$

$$\tilde{I} = \oint_C \sum_{i=1}^{f} (\dot{P}_i + \dot{T}\frac{\partial dH}{\partial dq_i}) dq_i + (-\dot{Q}_i + \dot{T}\frac{\partial H}{\partial p_i}) dp_i \overset{!}{=} 0$$

Ist äquivalent zu

$$\frac{dp_i}{dt} \equiv \frac{\frac{dP}{ds}\big|_{s=0}}{\frac{dT}{ds}\big|_{s=0}} = \frac{\dot{P}_i}{\dot{T}} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad\qquad \frac{\dot{Q}_i}{\dot{T}} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}$$

4.6 Kanonische Transformationen

Sei z die ...

$$z_i = (p, q)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{k=1}^{2f} S_{ik} \frac{\partial H}{\partial z_k} = \{z_i, H\}$$

und gebe es eine Transformation $Z(z)$, sodass

$$Z(z) \mapsto \dot{Z}_I \tilde{S}^{(ik)} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Z_k} = \{Z_i, \tilde{H}\}$$

$$\tilde{S}_{ik} = \sum_{a,b=1}^{2f} \frac{\partial Z_i}{\partial z_a} A_{ab} \frac{\partial Z_k}{\partial z_b} \tilde{H}(Z := H(z(Z)))$$

Wenn $S_{ik} = \tilde{S}_{ik}$, dann herrscht formale "Gleichheit" der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Kanonische Transformationen (erhalten die Poissonklammern) und es gilt $S_{ik} = \{z_i, z_k\}$

Eigenschaften kanonischer Transformationen: $z \leftrightarrow Z$ ist kanonisch $\Leftrightarrow$

1. $\int_{G'} \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik}^{-1} \; dZ_i dZ_k = \int_G \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik}^{-1} dz_i dz_k$ für alle $G(G')$ im Phasenraum

   Beweisidee. Sei $z \leftrightarrow Z$ beliebig:

$$\begin{aligned}\int_G \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik} \; dz_i \; dz_k &= \int_{G'} \sum_{i,k=1}^{2f} \tilde{S}_{ik} \; dZ_i \; dZ_k \\ &= \int_{G'} \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik} \; dZ_i \; dZ_k\end{aligned}$$

□

2. $\oint_{\partial G} \sum_{i=1}^{f} p_i \; dq_i = \oint_{\partial G'} \sum_{i=1}^{f} P_i \; dQ_i$ für alle $\partial G(\partial G')$

   Beweisidee.

$$\int_G \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik} \frac{\partial z_i}{\partial u} \frac{\partial z_k}{\partial v} \; du \; dv = \sum_{i=1}^{f} \int \; du \; dv \left(\frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial v} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right)$$

Wir wählen $u_< \leq u \leq u_>$ und $v_< \leq v \leq v_>$

$$= \sum_{i=1}^{f} \left\{ \int dv\ p_i\ \frac{\partial q_i}{\partial v}\bigg|_{u_<}^{u_>} - \int du\ dv\ p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial u \partial v} \right.$$
$$\left. - \int du\ dv\ p_i\ \frac{\partial^2 q_i}{\partial u \partial v}\bigg|_{v_<}^{v_>} + \int du\ dv\ p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial u \partial v} \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{f} \oint p_i\ dq_i$$

□

3. Aus (2) folgt:
Wenn $\sum_{i=1}^{f} p_i\ dq_i = \sum_{i=1}^{f} P_i\ dQ_i + d\tilde{S}$ für die erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation $\tilde{S}(P,Q) = S\big(p(P,Q), q(P,Q)\big)$,
dann gilt $z \leftrightarrow Z$ ist kanonisch.

Beweis. Es existiert eine erzeugende Funktion kanonischer Transformationen $S(P,Q,t) = S\big(P(p,q,t), Q(p,q,t), t\big)$ sodass:

$$\sum_{i=1}^{f} p_i\ dq_i = \sum_{i=1}^{f} \left(P_i\ dQ_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right)$$
$$\oint_{\partial G} \sum_{i=1}^{f} p_i\ dq_i \equiv \oint_{\partial G} \sum_{i=1}^{f} P_i\ dQ_i + \underbrace{\oint_{\partial G'} \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right)}_{=0}$$

Daraus folgt, dass

$$I(c) := \oint_C \sum_{i=1}^{f} p_i\ dq_i - H(p,q,t)dt$$
$$= \oint_{C'} \sum_{i=1}^{f} P_i\ dQ_i - \underbrace{(\overbrace{H\big(p(P,Q,t), q(P,Q,t), t\big)}^{:=\tilde{H}(P,Q,t)} + \frac{\partial S}{\partial t}}_{=K(P,Q,t)})dt$$
$$+ \underbrace{\oint_C \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt}_{=0}$$

□

Bemerkung. Es gilt:
Hamilton-Dynamik mit $\big(p,q;H(p,q,t)\big) \Leftrightarrow$ Hamilton-Dynamik mit $\big(P,Q;k(P,Q,t)\big)$
$(p,q) \leftrightarrow (P,Q)$ mit $K(P,Q,t) = H\big(p(P,Q,t),q(P,Q,t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}(P,Q,q)\big)$ ist kanonisch (Newtonsche Zeilt t wir nicht Tranformiert)

Verbindung zur Poincare-Cartan Invariante

Sei eine kanonische Transformation $z \leftrightarrow Z$ bzw $(p,q,t) \leftrightarrow (P,Q,T)$ gegeben, dann gilt

$$\oint_C \sum_{i=1}^f p_i \; dq_i - H \; dt = \oint_{C'} \sum_{i=1}^f P_i \; dQ_i - \tilde{H} \; dt + d\tilde{S}$$

und

$$\sum_{i=1}^f p_i \; dq_i = \sum_{i=1}^f \left(P_i \; dQ_i + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial Q_i} dQ_i \right)$$

sodass $\boxed{H = \tilde{H} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}}$

4.6.1 Erzeugende Funktionen und kanonische Transformationen

Ausgangspunkt: kanonische Transformation $(p,Q) \leftrightarrow (P,Q)$ mit erzeugender Funktion $\tilde{S}(P,Q,t) \equiv S(p,q,t)$.
Lokal ist det $\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} \neq 0$. Existiert eine Transformationsformel?

Sei $(p,q) \leftrightarrow (P,Q) \leftrightarrow (q,Q)$. Daraus definieren wir $S_2(q,Q,t) := \tilde{S}(P(q,Q,t),Q,t)$.

$$\sum_{i=1}^f \left\{ p_i \; dq_i - P_i \; dQ_i - \frac{\partial S_2}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial S_2}{\partial Q_i} dQ_i \right\} = 0$$

(q,Q) sind Koordinaten. Daraus folgt dq_i, dQ_i sind linaer unabhängig:

$$p_i = \frac{\partial S_2}{\partial q_i}(q,Q,t) \qquad P_i = -\frac{\partial S_2}{\partial Q_i}(q,Q,t)$$

Wahl $(p,q) \leftrightarrow (P,Q)$ ist nicht immer möglich (zB. id: $q_i = Q_i$, $p_i = P_i$)

4.6.2 Kontinuierliche kanonsche Transformationen

Sei $g_\epsilon(q,p) \to (P,Q)$ stetig aus den Einheitstransformationen erzeugbar, also erzeugt aus

$$S_3(P,q,t,\epsilon) = \sum_{i=1}^f P_i q_i + \epsilon F(P,q,t,\epsilon)$$

Für die erzeugende Funktion $F(p,q,t)$ gilt

$$\frac{dp_i}{d\epsilon} = -\frac{\partial F}{\partial q_i} \qquad\qquad \frac{dq_i}{d\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$
\begin{aligned}
g_\epsilon : \qquad & p_i = \frac{\partial S_3}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q_i}(P, q, t, \epsilon) \\
& \Rightarrow \frac{dp_i}{d\epsilon} = \left.\frac{P_i - p_i}{\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}(P, q, t, \epsilon = 0) = -\frac{\partial F}{\partial q_i}(p, q, t, \epsilon = 0) \\
& Q_i = \frac{\partial S_3}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q P i}(P, q, t, \epsilon) \\
& \Rightarrow \frac{dq_i}{d\epsilon} = \left.\frac{Q_i - q_i}{\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -\frac{\partial F}{\partial P_i}(P, q, t, \epsilon = 0) = -\frac{\partial F}{\partial p_i}(p, q, t, \epsilon = 0)
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Einene Speziallfall der Erzeugenden Funktion stellt die Zeitliche Entwickelung dar:
Wenn $\epsilon \to t$ dann ist $F \to H$ einen kontinuierliche Kanonische Transformation.

4.6.3 Symmetrietransformationen

Definition einer Symmetrietransformation

$$
\begin{tikzcd}
z = (p, q) \arrow[r, "h_t", "H"'] \arrow[d, "g_\epsilon"', "F"] & (p_t, q_t) \arrow[d, "g_\epsilon"', "F"] \\
z_\epsilon = \big(P(\epsilon), Q(\epsilon)\big) \arrow[r, "H", "h_t"'] & \big(P_t(\epsilon), Q_t(\epsilon)\big)
\end{tikzcd}
\qquad \Leftrightarrow \{F, H\} = 0
$$

Sei $F(p, q)$ explizit Zeitunabhängig $\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \{F, H\} = 0$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
h_t\big(g_\epsilon(z)\big) &= M_1 \\
h_t\big(h_t(z)\big) &= M_2
\end{aligned}
$$

Durch verwenden der Jacobi Identität:

$$
M_1 - M_2 = \epsilon t \{z, \{F, H\}\} + O(\epsilon^2, t^2, \epsilon t)
$$

□

Beispiele: freie Teilchen mit $H(p, q, t))\frac{\vec{p}^2 2}{2m}$
Erhaltungsgröße $\overset{?}{\Rightarrow}$ Symmetrietransformation

$$
\{H, p_i\} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{i_0}(p, q, t) \equiv p_{i_0}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{p}}{d\epsilon} &= \vec{e}_{i_0} \times \vec{p} \\
\frac{d\vec{x}}{d\epsilon} &= \vec{e}_{i_0} \times \vec{x}
\end{aligned}
$$

$$\frac{dq_i}{d\epsilon} = \frac{\partial F_{i_0}}{\partial p_i} = \delta_{ii_0}$$
$$\frac{dp_i}{d\epsilon} = -\frac{\partial F_{i_0}}{\partial q_i} = 0$$

4.6.4 Hamilton-Jakobische Differentialgleichung

Es gilt: nicht partielle DGL 1. Ordnung $\leftrightarrow$ Hamiltonisches System von gewöhnlichen DGLs
kanonische Transformation in ein Hamilton System: $(p, q) \leftrightarrow (P, Q)$.
Es existier eine erzeugende Funktion $S(P, Q, p, q, t)$, sodass

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial P} \qquad P = \frac{\partial S}{\partial Q}$$

$$\begin{matrix} \dot{q} & = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{q} & = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{matrix} \overset{S}{\leftrightarrow} \begin{matrix} \dot{Q} & = \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} & = -\frac{\partial K}{\partial P} \end{matrix}$$

Es folgt die H-J-DGl:

$$K = 0 = H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Beispiel. Der Freie Massenpunkt:

$$H(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2M}$$

H-J-DGl:

$$H(\frac{\partial S}{\partial x_i}, x_j, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = K = \frac{1}{2}M(\vec{\nabla}_{\vec{x}} S)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} \overset{!}{=} 0$$

Damit das problme eindeutig gelöst werden kann nehemn wir an, dass $S(\vec{P}, \vec{x}, t = 0)$ vorgegeben ist.
Nun suchen wir eine Lösung mit dem Separationsansatz: $S(\vec{P}, \vec{x}, t) = W(\vec{P}, \vec{x}) + \eta t$.
Es ergibt sich eine reduziertes Problem:

$$\frac{1}{2M}(\vec{\nabla}_{\vec{x}} S)^2 + \eta = 0$$

Es folgt, als mögliche Lösung $W(\vec{P}, \vec{x}) = \vec{P}\vec{x}$, sodass $\eta = -\frac{\vec{P}^2}{2M}$

$$S(\vec{P}, \vec{x}, t) = \vec{P}\vec{x} - \frac{\vec{P}^2}{2M}t$$

erfüllt die H-J-DGl mit $S = \vec{P}\vec{x}$, sodass

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial S}{\partial x_i} = P_i \\
Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i} = x_i - \frac{P_i}{M} t \\
x_i &= Q_i + \frac{P_i}{M} \\
p_i &= P_i
\end{aligned}
$$

Hamilton gl zu H-J-DGl Löse die Hamiltonsche Bewegunggelichung mit vorgegebenenm $S_0(\vec{x})$

4.6.5 Auf den Spuren von Erwin Schrödinger

Schrödinger Gleichungen: Punktquant im äußeren Potenzial

$$
\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\vec{x}} + V(\vec{x}, t) \right\} \Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{x}, t)
$$

Kurzwellenasymptotik $\hbar \to 0$ für kleine Wellenlängen

$$
\begin{aligned}
\Psi(\vec{x}, t) &= A e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, t)} \\
(\vec{\nabla}\Psi)(\vec{x}, t) &= \frac{i}{\hbar} (\vec{\nabla} S) \Psi(\vec{c}, t) \\
(\vec{\nabla}\Psi)(\vec{x}, t) &= \frac{i}{\hbar} (\Delta S) \Psi(\vec{x}, t) + (\frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S)^2 \Psi(\vec{x}, t) \\
|(\vec{\nabla} S)^2| &\gg |\hbar \Delta S|
\end{aligned}
$$

Also folgt für kleine Wellenlängen

$$
\frac{1}{2M} (\vec{\nabla}_{\vec{x}} S)^2 + V(\vec{x}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}
$$

Die allgemeine Lösung ist $\Psi(x, t = 0) = A e^{\frac{i}{\hbar} S_0(x)} := \phi(x)$.
Mit der H-J-DGl bauen wir A zu $A(\vec{x}, t)$ aus, sodass

$$
\Psi(Q, t) = \sum_j \phi(q_0^{(j)}) \frac{1}{\det(\frac{\partial Q}{\partial q_0})_j} e^{\frac{i}{\hbar} S_j(Q,t) - \frac{i}{2} \pi \mu j}
$$

Wobei μ den sog. Morse Index bezeichnet.

Grenzwert $\hbar$ gegen 0

5 Der starre Körper

5.1 Der starre Körper als Mechanisches Vielteilchensystem

Definition Zwangsbedingungen: $|\vec{x}^{(i)} - \vec{y}^{(j)}| = C_{ij}\ i, j \in \{1, ..., N\}$

- zeitunabhängig für alle Massepunkte
- Holonom

Bemerkung. • Es gibt keine innere Dynamik

- kontinuierliche starre Körper durch kontinuums Limes
  Abstände bleiben im Körperfesten Bezugsystem Konstant.
  $3 + 3(N-3) = 3N - 6$ unabhängige Zwangsbedingungen.
- N Massenpunkte $\to 3N$ Koordinaten für die Positionierung.
  Die Anzahl der Freien Parameter ist jedoch $3N - (3N-6) = 6$ unabhängig von N

5.2 Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art:

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2(t) + \vec{F}_i(t) \cdot \vec{x}_i(t) + \sum_{l,m \in I} \lambda_{lm}(t) \big(|\vec{x}_l(t) - \vec{x}_x(t)| - c_{lm} \big) \right\}$$

Bewegunsgleichungen

$$\frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{x}}_i(t) = \vec{F}_i(t) + \underbrace{\sum_{i,m \in I} \lambda_{im}(t) \frac{\vec{x}_I(t) - \vec{x}_m(t)}{|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_m(t)|} - \sum_{l,i \in I} \frac{\vec{x}_l(t) - \vec{x}_i(t)}{|\vec{x}_l(t) - \vec{x}_i(t)|}}_{=\vec{Z}_i(t)}$$

-

Kontaktbedingungen

- Gleiten: Zwangskraft steht orthogonal auf der Kontaktfläche
- Rollen: verschwindende Relativgeschwindigkeit

5.3 Lagrange Methode 2. Art

- 6 Freiheitsgrade
- Bezugssystem B im starren Körper $B \leftrightarrow \vec{R}(t)$
  entspricht der Position des Körpers

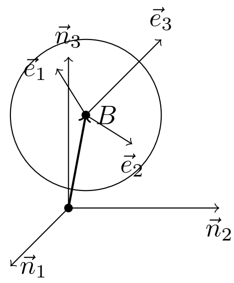


Abbildung 7: Freiheitsgrade im starren Körper

- $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ charakterisiert eien Körperfestes Orthonormalsystem
  $\Rightarrow \quad \vec{x}^{(i)}(t) = \vec{R}(t) + \sum_{r=1}^{3} b_r^{(i)} \vec{e}_r$

- Die Transformation $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \leftrightarrow \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ ist von 3 Parametern abhängig und eine Drehung.
- $\vec{e}_l = \sum_{r=1}^{3} \vec{n}_r D_{rl}(\vec{\varphi}(t))$.

Drehungen Eine Drehung wir beschrieben, indem mit $|\vec{\varphi}| = \varphi$

$$D(\vec{\varphi}\vec{x}) = (\cos\varphi)\vec{x} + \sin\varphi\frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \times \vec{x} + (1 - \cos\varphi)\frac{\vec{\varphi}}{\varphi}(\frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \cdot \vec{x})$$

Sodass allgemein für $D(\varphi)$ gilt:

$$D(\vec{\varphi}) = \cos\varphi \cdot \mathbb{1} + \sin\varphi\frac{\vec{\varphi}}{\varphi} + (1 - \cos\varphi)\frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \times \frac{\vec{\varphi}}{\varphi}$$

Charakteristische Eigenschaften:

- $D^{-1}(\vec{\varphi}) = D^T(\vec{\varphi}) = D(-\varphi)$
- $\dot{\vec{e}}_l(t) = \sum_{r=1}^{3} \vec{n}_r \dot{D}_{rl}(\vec{\varphi}) = \dot{\vec{\varphi}} \times \vec{e}_l := \vec{\omega}$

Parametrisierung durch Euler Winkel $\vec{\alpha} \leftrightarrow (\varphi\theta, \psi)$
Wir zerlegen also in 3 Drehungen

- $\{\vec{n}_i\} \stackrel{D^{(1)}}{\rightarrow} \{\vec{n}_j{}'\}$
- $\{\vec{n}_i'\} \stackrel{D^{(2)}}{\rightarrow} \{\vec{n}_j{}''\}$
- $\{\vec{n}_i''\} \stackrel{D^{(3)}}{\rightarrow} \{\vec{e}_l\}$

$$D_{rl}(\varphi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

5.3.1 Lagrange Funktion

$$L(\vec{R},\dot{\vec{R}},\vec{\Omega}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\dot{\vec{x}}_i}^2$$

Weiterhin gilt:

$$\vec{x}^{(i)}(t) = \vec{R}(t) + \sum_{r=1}^{3} b_r^{(i)} \vec{e}_r(t) \dot{\vec{x}}^{(i)}(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \sum_{r=1}^{3} b_r^{(i)} \underbrace{\dot{\vec{e}}_r(t)}_{=\vec{\Omega}(t)\times\vec{e}_r(t)}$$

Sodass:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\dot{\vec{x}}_i}^2 = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + (\dot{\vec{R}}\times\vec{\Omega})\cdot(\vec{X}_s - \vec{R})M + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3} \underbrace{(\vec{\Omega}\vec{e}_k) I_{kl} (\vec{\Omega}\vec{e}_l)}_{:=\Omega\cdot(I\vec{\Omega})}$$

Der sog Trägheisttensor I wird definiert als

$$I := \sum_{l,k=1}^{3} I_{kl} \vec{e}_k \times \vec{e}_l$$

Wobei I_{kl} definiert ist als

$$I_{kl} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{r=1}^{3} (b_r^{(i)})^2 \delta_{kl} - b_k^{(i)} b_l^{(i)} \right)$$

in körperfester Orthonormalbasis, zeitunabhängig. I ist also nur abhängig von der Wahl von $\vec{R}$ und $\{\vec{e}_i\}$.
Die Trägheitsmatrix/ der Trägheitstensor kodiert die Struktur des Starren Körpers.

Steinersche Satz Für I mit Bezugspunkt $\vec{R}$ und I' mit Bp. $\vec{R}+\vec{a}$ gilt:

$$I'_{kl} = I_{kl} + M\left(\delta kl(\vec{a})^2 - (\vec{a}\vec{e}_k)(\vec{a}\vec{e}_l)\right)$$

5.4 Der freie starre Körper

Definition. Ein starrer Körper heißt **frei**, wenn nur die Zwangskräfte wirken.

Definition. Ein freier starrer Körper heißt **Kreisel**, wenn nur ein Punkt fest ist.

5.4.1 Erhaltungsgrößen

$$L = \sum_{i=1}^{N} m^{(i)} \frac{\dot{\vec{x}}^{(i)^2}}{2} + \underbrace{\sum_{i,j} \lambda_{ij} \left(|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(j)}| - C_{ij} \right)}_{L_z}$$

Translationen im Ort

$$\begin{aligned} \vec{x^{(i)}}' &= \vec{x}^{(i)} + \epsilon \vec{a} \\ t' &= t \\ L' &= L \end{aligned}$$

Es folgt dass

$$\begin{aligned} \vec{P}_i &= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}^{(i)} = M \dot{\vec{X}}_S \\ E &= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{N} a_j m_i \dot{\vec{x}}_j^{(i)} = \vec{a} \vec{P} \end{aligned}$$

Sodass

$$\dot{\vec{P}} = 0$$

Translation in der Zeit Sei $\phi = 1$,$\psi_i = 0$, $L = L'$. Dann

$$E = -\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\dot{\vec{x}}^{(i)^2}}{2} - \dot{\vec{x}}^{(i)^2} \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}^{(i)^2}$$

Veränderung der Geschwindigkeit Sei $\vec{x^{(i)}}' = \vec{x}^{(i)} + \epsilon \vec{v} t$. Wir bezeichnen $\vec{v}t$ als $\vec{\psi}$. Sei zusätzlich $t' = t$.

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{\vec{x}}^{(i)} + \epsilon \vec{v})^2 + L_z = L + \epsilon \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}^{(i)} \right)$$

5.4.2 Dynamik des asymmetrischen starren Körpers

wähle $\vec{R} = \vec{X}_s = \vec{O}$. und $I_{11} < I_{22} < I_{33}$

Mehtode. *Erhaltungsgrößen:*

$$E_{rot} = \tfrac{1}{2}(\vec{\Omega} I \vec{\Omega}) = \textstyle\sum_{i=1}^{3} \vec{I}_{ii} \vec{\Omega}_{ii}$$

5.4.3 Dynamik des freien Symmetrischen Kreisels

5.5 Der starre Körper im homogenen Schwerefeld/unter dem Einfluss äußerer Kräfte

5.5.1 Rotation um eine raumfeste Drehachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

Problemstellung Betrachte eine einfache Bewegung eines starren Körpers mit $\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}_0 \Rightarrow \dot{\Omega}(t) = \ddot{\Omega}(t) = ... = 0$.
Welche Kräfte sind zur Aufrechterhaltung der Bewegung erforderlich? (ohne Kräfte möglich?)
Sei $\{\vec{e}_j\}$ ein körperfestes Orthonormalsystem. Dann

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{(i)} &= \vec{R}(t) + \sum_{j=1}^{3} b_j^{(i)} \vec{e}_j \\
\dot{\vec{x}}^{(i)}(t) &= \dot{\vec{R}}(t) + \sum_{j=1}^{3} b_j^{(i)} \vec{\Omega}_0 \times \vec{e}_j(t) \\
\ddot{\vec{x}}^{(i)}(t) &= m_i \ddot{\vec{R}}(t) + \sum_{j=1}^{3} m_i j_j^{(i)} \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{e}_j(t))
\end{aligned}$$

Es folgt für die Gesamtkraft

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{x}}_i &= M\ddot{\vec{R}}(t) + \vec{\Omega}_0 \times \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} m_i b_j^{(i)} \vec{e}_j(t) \right) \\
&= M\ddot{\vec{R}}(t) + \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_o \times (\vec{x}_s - \vec{R}))
\end{aligned}$$

o.B.d.A: Sei $\vec{R}$ auf der Drehachse $\Rightarrow \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$

$$= \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times (\vec{x}_s - \vec{R}))M \quad \text{Unwucht erster Art}$$

Drehimpulsbilanz $\vec{R}(t) = \vec{x}_s$

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= M\vec{x}_s \times \vec{x}_s + I\vec{\Omega} \\
\frac{d\vec{L}}{dt} &= M\vec{x}_s \times \ddot{\vec{x}}_s + \sum_{k=1}^{3} \vec{\Omega}_0 \times \vec{e}_k(t) I_{kl} (\vec{\Omega}_0)_l = \vec{N}
\end{aligned}$$

Sei die Unwucht 1. Art beseitigt ($\vec{x}_s$ auf Drehachse $\Leftrightarrow \ddot{\vec{x}}_s = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$)
Dann ist

$$\vec{N} = \vec{\Omega}_0 \times \vec{L}_{rel} \qquad \vec{L}_{rel} = I\vec{\Omega}_0$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\Omega}_0 \parallel \vec{L}_{rel} \qquad \vec{L}_{rel} = I\vec{\Omega}_0 = \alpha\vec{\Omega}_0$$

Ist also eine Drehung um eine Hauptträgheitsachse

5.5.2 Der schwere Kreisel

Ein Kreisel im homogene Schwerefeld($V(\vec{x}^{(i)}) = -m_i\vec{g}\vec{x}^{(i)}$).
Lagrange Methode 2. Art:

$$L = \frac{M}{2}\dot{\vec{x}}_s^2 + \frac{1}{2}(\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}) - \sum_{i=1}^{N} V(\vec{x}^{(i)}) + \text{Zwbedg}$$

Entlang der Hauptträgheistachsen

$$(\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}) = \sum_{j=1}^{3} \Omega_j I_{jj} \Omega_j$$

verwende Eulerwinkel (φ, θ, ψ)

$$L = \frac{1}{2}(I_{11}]Mb_3^{(P)^2})(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta^2) + I_{33}(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta) + Mgb_3^{(P)}\cos\theta - Mg\cos\theta - Mg\vec{n}_3\vec{C}$$

Es folgt:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_{11} + Mb_3^{(P)^2})\sin^2\theta\dot{\varphi} + I_{33}\cos^2\theta\dot{\varphi} + I_{33}\dot{\psi}\cos\theta \quad := A = \vec{L}\vec{n}_3$$
$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) \quad := B = \vec{L}\vec{e}_3$$
$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L \quad := E = L_2 - L_1$$

Einsetzen der Erhaltungsgrößen in L:

$$\dot{\psi} = \frac{B}{I_{33}} - \dot{\varphi}\cos\theta \qquad \dot{\varphi} = \frac{A - B\cos\theta}{\sin^2\theta[I_{11} + b_3^{(P)^2}]}$$

$$E = \frac{1}{2}(I_{11} + Mb_3^{(P)^2}\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta))$$
$$U_{eff}(\theta) = \frac{(A - B\cos\theta)^2}{2(I_{11} + Mb_3^{(P)^2})\sin^2\theta} + \frac{B^2}{2I_{33}} - Mgb_3^{(P)}\cos\theta$$

...

- $\theta(t) = \theta_0$, $\dot{\varphi} = \dfrac{A - B\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0 I'_{11}}$:
  reine Präzessionsbewegung, keine Nutation

- $U_{eff}(\theta) = U_{eff}(\theta_0) + \dfrac{1}{2}(\theta-\theta_0)^2 U''_{eff}(\theta_0) + O\big((\theta-\theta_0)^3\big)$,
  $E = \frac{1}{2} I'_{11}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^2 U''_{eff}(\theta_0) \to$ harmonische Schwingung um θ_0

Spezialfall $\theta \approx 0$ Gibt es eine Beewgung mit $\theta(t) = 0$?
Existiert nur für spezielle Werte von A, B.
Sei $A = B, |\theta| \ll 1$

$$U_{eff}(\theta) \to \frac{(A - B(1-\frac{\theta}{2}))}{2I'_{11}\theta^2} + \frac{B^2}{2I_{33}} - Mgb_3^{(P)}(1-\frac{\theta^2}{2}) + O(\theta^3) = \left(\frac{B^2}{2I'_{11}}\frac{1}{4} + Mgb_3^{(P)}\frac{1}{2}\right)\theta^2 + \frac{B^2}{2I_{33}} - Mgb_3^{(P)}$$

Es ergibt sich eien Harmonsiche Schwingung mit $\omega > 0$:

$\omega^2 := \frac{\frac{B^2}{8I'_{11}} + \frac{Mg}{2}b_3^{(P)}}{\frac{1}{2}I'_{11}}$, $B = \vec{L}\vec{n}_3 = \vec{L}\cdot\vec{e}_3$

Eine instaile Dynamik für $\omega^2 < 0$ mit $b_3^{(P)} = -|b_3^{(P)}|$:

$\frac{B^2}{8I'_{11}} < \frac{Mg}{2}|b_3^{(P)}|$