

# Theoretische Physik 1

Daniel Kallendorf

Mitschrift der Vorlesung Theoretische Physik I  
WS 2015/16 bei Prof. Alber

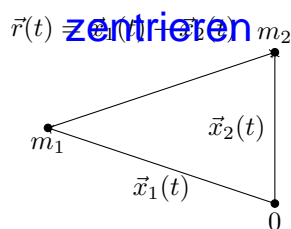
## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Das Zweikörperproblem im Rahmen der Newtonschen Mechanik</b>	<b>2</b>
1.1	Erhaltungssätze . . . . .	3
1.2	Bestimmung der Bahnkurven . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Das Hamiltonsche Prinzip der klassischen Mechanik</b>	<b>6</b>
2.1	Funktionale und Funktionalableitungen . . . . .	6
2.2	Das Hamiltonsche Prinzip . . . . .	7
2.3	Symmetrie und Erhaltungsgrößen . . . . .	10
2.3.1	Nöther Theorem . . . . .	11
2.3.2	Wechselwirkende Systeme . . . . .	13
2.4	Mechanische Systeme mit Nebenbedingunge . . . . .	14
2.4.1	Holone NB und Lagrange-Gl zweiter Art . . . . .	14
2.4.2	Nicht holonome NB und Lagrange-Gl 1. Art . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Lineare Schwingungen</b>	<b>17</b>
3.1	Lineare Schwingungen um Gleichgewichtskonfigurationen . . . . .	18
3.2	Dynamik kleiner Schwingungen – Normalkoordinaten . . . . .	19
3.2.1	Modell eines lineare dreiatomigen Moleküls . . . . .	20
3.3	Dynamische Vielteilchensysteme: Der schwingende Ring . . . . .	22
3.3.1	. . . . .	22
3.3.2	Der Kontinuierliche Grenzfall . . . . .	23
3.4	Erzwungene Schwingungen . . . . .	29
3.4.1	Lösung von DGL mit Hilfe von Integraltransformationen (Fourier, Laplace) . . . . .	29
3.5	Erzwungene Schwingungen und Greensche Fkt. . . . .	30
3.5.1	Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: I) Anfangs- wertprobleme . . . . .	31
3.5.2	Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: II) Rand- wertprobleme . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Hamiltonsche Mechanik</b>	<b>33</b>
4.1	Legendre Transformation . . . . .	33
4.2	Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen . . . . .	35
4.3	Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip . . . . .	36

4.4	Phasenraum, Zustände, physikalische Variable . . . . .	36
4.4.1	Erhaltungsgrößen . . . . .	38
4.5	Die Poincare-Cartan Invariante . . . . .	39
4.6	Kanonische Transformationen . . . . .	41
4.6.1	Erzeugende Funktionen und kanonische Transformationen	43
4.6.2	Kontinuierliche kanonische Transformationen . . . . .	43
4.6.3	Symmetrietransformationen . . . . .	44
4.6.4	Hamilton-Jakobische Differentialgleichung . . . . .	45
4.6.5	Auf den Spuren von Erwin Schrödinger . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Der starre Körper</b>	<b>46</b>
5.1	Der starre Körper als Mechanisches Vielteilchensystem . . . . .	46
5.2	Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art: . . . . .	47
5.3	Lagrange Methode 2. Art . . . . .	47
5.3.1	Lagrange Funktion . . . . .	48
5.4	Der freie starre Körper . . . . .	49
5.4.1	Erhaltungsgrößen . . . . .	49
5.4.2	Dynamik des asymmetrischen starren Körpers . . . . .	50
5.4.3	Dynamik des freien Symmetrischen Kreisel . . . . .	50
5.5	Der starre Körper im homogenen Schwerfeld . . . . .	50
5.5.1	Rotation um eine raumfeste Drehachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit . . . . .	50
5.5.2	Der schwere Kreisel . . . . .	51

# 1 Das Zweikörperproblem im Rahmen der Newtonschen Mechanik

## Problemstellung



## Axiome

1. kräftefreie Massenpunkte bewegen sich geradlinig gleichförmig:  
Inertialsystem
2.  $m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t)$
3. Wechselwirkung:  
actio=reactio

## Bemerkungen

- $\vec{F}(t)$  Kraftkurve
- $\vec{x}_1(t)$  Bahnkurve (ohne Zeitinformation: Bahnkurve)
- Spezielle Kraftfelder:  
 $\vec{K}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \rightarrow \vec{F}(t) = \vec{K}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$

Newton:  $\vec{K}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = -\gamma \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3} m_1^{(T)} m_2^{(s)}$

$m^{(s)}$ : schwere Masse

$m^{(t)}$ : träge Masse

$$\boxed{m^{(T)} \equiv m^{(s)}}$$

$$\begin{aligned} \vec{K}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|} f(\|\vec{r}(t)\|) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} U(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) \\ \Rightarrow \int_{\xi_1|\vec{x}_1^A}^{\vec{x}_1^B} \vec{K}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \left( \frac{d\vec{x}_1}{d\lambda} \right) d\lambda &= -U(\|\vec{x}_1^B - \vec{x}_2\|) - U(\|\vec{x}_1^A - \vec{x}_2\|) \end{aligned}$$

mit Weg  $\xi : \lambda \rightarrow \vec{x}_1(\lambda)$  und wegunabhängiger konservativer Kraft

## 1.1 Erhaltungssätze

- abgeschlossenes System: (action=reactio)

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{x}}_1(t) &= \vec{F}_{12}(t) \\ m_1 \ddot{\vec{x}}_1(t) &= \vec{F}_{12}(t) \end{aligned} \right\} \frac{d}{dt} \underbrace{(m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2)(t)}_{:= \vec{P}(t) \text{ Impuls} = M \dot{\vec{R}}(t)} = 0 \\ \underbrace{(m_1 + m_2)}_{:= M} \vec{R}(t) &:= m_1 \vec{x}_1(t) + m_2 \vec{x}_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \vec{R}(t) + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{x}_2(t) &= \vec{R}(t) + \frac{m_1}{M} \vec{r} \Leftrightarrow \begin{aligned} \vec{R}(t) &= \frac{m_1 \vec{x}_1(t) + m_2 \vec{x}_2(t)}{M} \\ \vec{r}(t) &= \vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t) \end{aligned} \end{aligned}$$

- Zentralkraftfeld  
 $\mu \ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{\vec{r}(t)}{r(t)} f(r(t))$  : allgemeine Zentralkraft (z.B. Gravitation)  
 $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung

$$\begin{aligned} \vec{L} &:= m_1 \vec{x}_1(t) \times \dot{\vec{x}}_1(t) + m_2 \vec{x}_2(t) \times \dot{\vec{x}}_2(t) \quad \text{zu Zeigen: } \dot{\vec{L}}(t) = 0 \\ &= \vec{R} \times \vec{P} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{L}}(t) &= \underbrace{\dot{\vec{R}} \times \vec{P}}_{=0} + \underbrace{\vec{R} \times \dot{\vec{P}}}_{=0} + \underbrace{\mu \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Relativbahndrehimpuls  $L_{rel}$ :

$$\vec{L}_{rel} \cdot \vec{r}(t) = 0 \rightarrow \text{ebene Dynamik}$$

$$\frac{d}{dt} \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = 0 \text{ Flächensatz}$$

- konservative Kraftfelder

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{x}}_1 m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= \vec{F}_{12}(t) &= -\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} U(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) \\ \dot{\vec{x}}_2 m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= -\vec{F}_{12}(t) &= -\vec{\nabla}_{\vec{x}_2} U(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) \end{aligned} \right\} t$$

Die Funktion  $U$  darf nur durch  $x_1$  und  $x_2$  von der Zeit abhängen

$$\begin{aligned} m_1 \dot{\vec{x}}_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= -\dot{\vec{x}}_1 \vec{\nabla}_{\vec{x}_1} U - \dot{\vec{x}}_2 \vec{\nabla}_{\vec{x}_2} U \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 \right) &= -\frac{d}{dt} U(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 + U(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)) \right)}_{:=E} &= 0 \end{aligned}$$

## 1.2 Bestimmung der Bahnkurven

### Erhaltungsgrößen

- abgeschlossenes System:

$$\dot{\vec{P}} = 0, \vec{R}(t) = \vec{R}(t_0) + \frac{\vec{P}}{M}(t - t_0)$$

- Zentralkraftfeld

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2 = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rel} \\ \vec{L}_{rel} &= \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

- konservative Kraft:  $E$

### Ansatz

Aus  $\vec{L}_{rel} \cdot \vec{r} = 0$  folgt, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet.

- Wir definieren  $\vec{L}_{rel} \vec{e}_z$ .

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} \\ y &= r \sin \varphi & \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$L_{rel} = \mu(x\dot{y} - \dot{x}y) = \mu[r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}) - (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}) r \sin \varphi] = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad (1)$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{L_{rel}}{\mu r^2} \\ \varphi(t) - \varphi_0 &= \int_{t_0}^t dt' \frac{L_{rel}}{\mu r^2(t')} \end{aligned}$$

- $E_{rel} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U(r)$

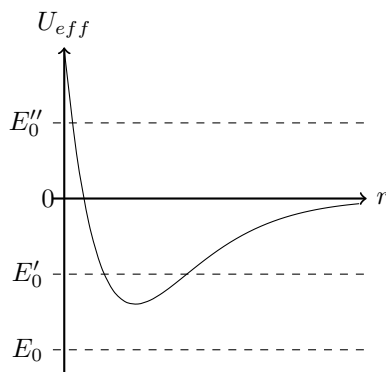
$$\begin{aligned}\dot{r}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \\ E_{rel} &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 \frac{L_{rel}}{\mu^2 r^4} + U(r) \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2}}_{=U_{eff}(r)} + U(r) \\ \dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{\mu} \underbrace{(E_{rel} - U_{eff}(r))}_{\geq 0}} = \frac{dr}{dt}\end{aligned}$$

$$t - t_0 = \pm \int_{r(t_0)}^{r(t)} dr \sqrt{\frac{\mu}{2} (E_{rel} - U(r))}$$

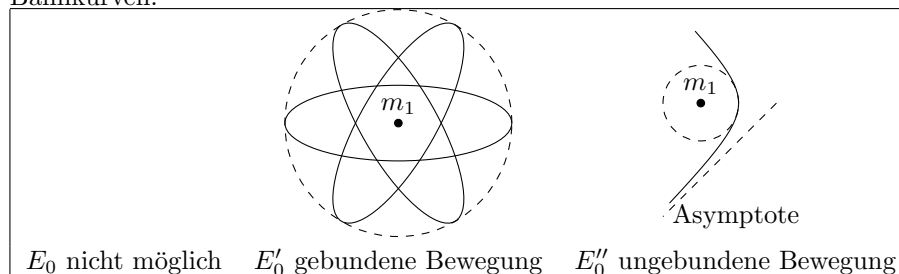
mit + für  $r(t) > r(t_0)$ , - für  $r(t) < r(t_0)$ , sonst 0.

### Bestimmung des Orbits

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} &= \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{L_{rel}}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{rel} - U(r))}} \\ \varphi(r) - \varphi(r_0) &= \pm \int_{r_0}^r dr' \frac{L_{rel}}{r'^2 \sqrt{2\mu (E_{rel} - U(r'))}}\end{aligned}$$



Bahnkurven:



**Funktional:** Jeder möglichen Bahnkurve wird eine Zahl zugeordnet.  
 Man kann also Funktionale finden, sodass die Extrema auf die Newtonschen Bewegungsgleichungen führen.  
 Es ergibt sich ein Variationsproblem im  $\infty$ -dimensionalen Raum der Bahnkurve unendlich vieler Punkte.

## 2 Das Hamiltonsche Prinzip der klassischen Mechanik

Aus dem Variationsprinzip lassen sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen herleiten. Dies ermöglicht

- die Vereinheitlichung mechanischer Prozesse in ihrer Beschreibung
- die Beschreibung von Zwangskräften (Wände, Schiene, etc)

Dabei “bewerten” die Funktionale die möglichen Bahnkurven. Ein Extremum des Bewegungsfunktionals liefert also eine Bewegungsgleichung(= Lösung der Newton Gleichungen)

### 2.1 Funktionale und Funktionalableitungen

Es gilt  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{3N}$ , da jeder der N Massenpunkte je 3 Koordinaten hat.  
 Wir betrachten nun  $B_{x_1, x_2}$ , die Menge aller stückweise stetigen und differenzierbaren Bahnkurven von  $x_1$  (zum Zeitpunkt  $t_1$ ) nach  $x_2$  (zu  $t_2$ ).  
 Und das Funktional  $F : B_{x_1, x_2} \rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto F[\gamma]$  (Punktweise Auswertung).

**Stetigkeit**  $F$  ist stetig, an  $\gamma_0$ , wenn das  $\delta - \epsilon$ -Kriterium gilt:  
 Für alle  $\epsilon > 0$  und für alle  $h$  mit  $\|h\| < \delta$ , existiert ein  $\delta > 0$ , sodass

$$|F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0]| < \epsilon$$

Wobei man  $h$  auch schreiben kann, als

$$\|h\| = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left( \sum_{i=1}^N \sqrt{\vec{h}_i(t) \cdot \vec{h}_i(t)} \right) + \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left( \sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{\vec{h}}_i(t) \cdot \dot{\vec{h}}_i(t)} \right)$$

### Funktionalableitungen

Ein Funktional heißt *ableitbar*, wenn eine Beste Lineare Approximation existiert:

$$\exists F'_{\gamma_0} : F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0] = F'_{\gamma_0}[h] + O(\|h\|^2)$$

### lokales Funktional

$$F_1[\gamma] \sum_{i=1}^N \sqrt{\vec{x}_i(t_0) \cdot \vec{c}_i(t_0)}$$

mit festem  $t_0$  und  $t_1 \leq t_0 \leq t_2$  gilt für

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \quad L(\{\vec{x}_i\}(t), \{\dot{\vec{x}}_i\}(t), t)$$

dass

$$S[\gamma + h] - S[\gamma] = S'_\gamma[h] + O(\|h\|^2)$$

$$\text{mit } S'_\gamma[h] = \sum_{i=1}^{3N} h_i(t) \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt \quad h_i(t) \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right\}_{\gamma(t)}$$

*Beweisidee.*

$$\begin{aligned} S[\gamma + h] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(x_i(t) + h_i(t), \dot{x}_i(t) + \dot{h}_i(t), t) \\ &= S[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left. \frac{\partial L}{\partial x_i} \right|_{\gamma} h_i(t) + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\gamma} \dot{h}_i(t) \right\} + O(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Wir verwenden die Produktregel:  $\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\gamma} \dot{h}_i(t) = \frac{d}{dt} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\gamma} h_i(t) - h_i(t) \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\gamma} \right)$

$$= S[\gamma] + \sum_{i=1}^{3N} h_i(t) \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\gamma} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt h_i(t) \left\{ \left. \frac{\partial L}{\partial x_i} \right|_{\gamma} - \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\gamma} \right) \right\}$$

□

Da das bei  $S'_\gamma = 0$  Extrema liege, kann man Bewegungsgleichungen formulieren: Die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\gamma} \right) - \left. \frac{\partial L}{\partial x_i} \right|_{\gamma} = 0$$

## 2.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Für

$$L(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}, t) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}} + \vec{F}_i(t) \cdot \vec{x}_i \right\}$$

wobei  $\vec{F}_i(t)$  vorgegebene Kraftkurven sind, gilt, dass die EL-Gl äquivalent zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen ( $m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) = \vec{F}_i(t)$ ) sind.

*Beweis.* Es gilt:

$$\vec{\nabla}_{x_i} L = \vec{F}_i(t) \qquad \vec{\nabla}_{\dot{x}_i} L = m_i \dot{\vec{x}}_i$$

Somit also

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\vec{x}}_i} L \Big|_{\gamma}}_{\text{(Newton Gleichungen)}} = \underbrace{\nabla_{\dot{\vec{x}}_i} L \Big|_{\gamma}}_{\text{(Euler-Lagrange-Gleichungen)}}$$

□

*Bemerkung.* • Kraftkurven sind vorgegeben.

$$\bullet S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t)$$

- $h^2(t) \equiv \delta x_i(t)$ , eine Virtuelle Verschiebung.  
Es handelt sich nicht um eine physikalische Bewegung sondern um einen rein mathematische infinitesimale Verschiebung eines Teilchens, die ohne verzögerung (instantan) stattfindet.  
(Unter beachtung der Zwangsbedingungen)
- Die äquivalenz stimmt nicht vollständig, da die Newton-Gleichungen eine Anfangsrandwertproblem darstellen, das Variationsprinzip/ Hamiltonsches Prinzip ein Randwertproblem darstellt:
  - Newton:  $\vec{x}_i(t, x_1, \dot{x}_1)$
  - Hamilton:  $\vec{x}_i(t, x_1, x_2)$

Die Äquivalenz gilt also, wenn dem Ziel bijektiv eine Anfangswert zugeordnet werden kann.

Sei nun  $S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t)$  mit

$$\underbrace{\delta \vec{x}(t_1)}_{\vec{h}(t_1)} = \delta \vec{x}(t_2)$$

Da Hamilton Prinzip selektiert nun  $\gamma_0$

$$\delta S[\gamma_0] = S'_{\gamma_0}[h] = 0$$

ist äquivalent zu den E-L-Gl:

$$\left. \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) \right|_{\gamma_0} - \left. \frac{\partial L}{\partial x_k} \right|_{\gamma_0} = 0$$

und den Newton-Gleichungen:

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}^2 + \sum_{i=1}^N \vec{F}(t) \vec{x}$$

*Bemerkung.* Geschwindigkeitsabhängige Potenziale  
Es gilt für:

$$\vec{F}_i(t) = - \left( \vec{\nabla}_{\vec{x}_i} V - \frac{d}{dt} \left( \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_i} V \right) \right) (\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$$

und es ergibt sich

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$$

*Beweis.* z.Z.:  $\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(t) \vec{x}_i(t) \stackrel{!}{=} -\delta \int_{t_1}^{t_2} dt V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$



Wir beginnen mit der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} dt V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ V(\delta \int_{t_1}^{t_2} dt V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \delta \vec{x}_i(t) \vec{\nabla}_{\vec{x}_i} V + \sum_{i=1}^N \delta \dot{\vec{x}}_i(t) \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_i} V + O(\|h\|^2) \\
\Rightarrow \delta \vec{x}_i(t) \vec{\nabla}_{\vec{x}_i} V_i &= \frac{d}{dt} \left( \Delta x_i \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_i} V \right) - \delta x_i(t) \frac{d}{dt} \left( \vec{\nabla}_{x_i} V \right) \\
\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} dt V(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^N \left( \delta \vec{x}_i(t) \cdot \left[ \vec{\nabla}_{\vec{x}_i} V - \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_i} V \right] + \underbrace{\frac{d}{dt} [\delta \vec{x}_i(t) \cdot \nabla_{\vec{x}_i} V]}_{\delta \vec{x}_i(t_1) = \delta \vec{x}_i(t_2) = 0} \right) \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} dt \quad \vec{F}_i(t) \cdot \Delta x_i(t) \qquad \qquad \qquad \equiv -\delta \int_{t_1}^{t_2} dt
\end{aligned}$$

□

### Mechanische Eichfreiheit

Aus einer Lagrange-Funktion lassen sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen ableiten (nicht bijektiv).

*Beweis.* Sei  $L_1(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t)$ . Und sei

$$L_2(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) = L(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\{x\}, t) + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}_i} f(\{x\}, t)$$

mit einer beliebigen (differenzierbaren) Funktion  $f$ .

Dann führe beide Lagrange-Funktionen auf die selben E-L-Gln, denn

$$\begin{aligned}
S[\gamma] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L_2(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt L_1(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(\{x\}, t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(\{x(t)\}, t) + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{x}}_i(t) \cdot \left( \vec{\nabla}_{\vec{x}_i} f \right) (\{x(t)\}, t) \\
\partial S[\gamma] &\equiv S'_\gamma[h] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \quad L(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) \\
\frac{d}{dt} f(\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\{x(t)\}, t) + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{x}}_i(t) \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{x}_i} f)(\{x(t)\}, t)
\end{aligned}$$

□

Somit hat also  $L$  keine “direkte” physikalische Relevanz.

Daraus folgt jedoch: die Äquivalenzklasse der Lagrange-Funktionen

$$[L] = \{L_2 | \exists f : L_2 = L + f\}$$

Welche Äquivalent zu den E-L-Gln ist.

### Analyse der Extrema von $[\gamma]$

Die Frage, ob ein Extremum von  $S[\gamma]$  ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt ist gibt uns  $\delta^2 S[\gamma]$

$$S[\gamma + \delta x] = S[\gamma] + S'_\gamma[\delta x] + O(\|\delta x\|^2)$$

**Beispiel.** Eine eindimensionale Dynamik mit geschwindigkeitsunabhängiges Potenzial und  $\gamma : t \mapsto \vec{x}(t)$

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t)$$

$$\begin{aligned} S[\gamma + \delta x] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} [\vec{x}(t) + \delta \dot{x}(t)]^2 - V(x(t) + \delta x(t), t) \right) \\ &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - V(x(t), t) \right)}_{S[\gamma]} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \underbrace{\frac{m}{2} \cdot 2\dot{x}(t)\delta\dot{x}(t)}_{=\frac{d}{dt}(\delta x \dot{x}) - \Delta x \frac{d}{dt}\dot{x}} - \delta x(t) \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right)}_{:=S'_\gamma[\delta x] \equiv \delta S[\gamma]} \\ &\quad + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \delta \dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x(t), t) \right)}_{:=\delta^2 S[\delta x]} + O(\|\delta x\|^3) \end{aligned}$$

wobei  $\delta S[\gamma] = 0$  da wir ein Extremum betrachten.

Sei  $|t_2 - t_1|$  klein, dann ist für alle  $\delta x$   $\delta^2 S[\delta x] \geq 0$  weil ???  $> 0$ .

Für  $|t_2 - t_1|$  wachsen, existiert ein anderes Extremum mit  $\delta^2 S[\delta x] < 0$ .

*Hier fehlt etwas*

- $x^i(q, t) \leftrightarrow q^i(x, t)$  sei angenommen

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{L \left( x(q, t), \left\{ \frac{\partial x^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \cdot \vec{\nabla}_{\vec{q}_j} x^i \right\}, t \right)}_{:=\tilde{L}(q, \dot{q}, t)}$$

→ Euler-Lagrange Gleichung für  $i = 1, \dots, 3N$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i}$$

### 2.3 Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Ausgangspunkt:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  Euler-Lagrange für  $L(q, \dot{q}, t)$ .

Sei  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , d.h.:

- Transformation  $\tau \epsilon$

- $L$  unabhängig von  $q_1$ ;  $\tau_{\epsilon^i} Q^i = q^i + \epsilon \delta_{i1}$
- $L$  invariant unter  $\tau_{\epsilon}$
- $\tau_{\epsilon}$  transformiert Lösungen der  $ELG$  wieder in Lösungen (kontinuierliche Symmetrie)

Es folgt daraus, dass auch  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \Leftrightarrow p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(q(t), \dot{q}(t), t)$  berechnet entlang einer Lösung der E-L-Gleichung ist Zeitlich konstant  
 $\rightarrow$ Erhaltungsgröße

$p_1$  :=kanonischer Impuls von  $q_i$

Also "kontinuierliche Symmetrie impliziert Erhaltungsgrößen"

### 2.3.1 Nöther Theorem

Betrachte folgende kontinuierliche Transformation:

$$\begin{aligned} Q^m &= q^m + \epsilon \psi^m(q, \dot{q}, t) + O(\epsilon^2) \\ T &= t + \epsilon \phi(q, \dot{q}, t) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

mit  $\epsilon \in [0, \infty)$ .

Es gelte

$$\int_{T_1}^{T_2} dT_{\epsilon} L(Q_{\epsilon}(T_{\epsilon}), \frac{dQ_{\epsilon}}{dT_{\epsilon}}(T_{\epsilon}), T_{\epsilon}) \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L(q(t), \dot{q}(t), t) + \epsilon \frac{df_{\epsilon}}{dt}(q(t), t) \right\}$$

Von dynamischer  $\tau_{\epsilon}$ -Symmetrie gefordert, mit mechanischem Eichterm  $f_{\epsilon}$ .  
 Es ergibt sich eine Erhaltungsgröße  $E$  der Form

$$E = \sum_m \psi^m \frac{dL}{d\dot{q}^m} + \phi(L - \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}) - f_{\epsilon=0}(q, t) \Big|_{\gamma}$$

#### Bemerkung

- mechanische Eichtransformationen sollen in sinnvoller Weise bei dynamischer Symmetrie berücksichtigt werden ( $f_{\epsilon}(q, t) \neq 0$ )
- Symmetrische  $\tau_{\epsilon}$  Symmetrie bedeutet:  
 $Q_{\epsilon=0}^m(T_{\epsilon=0})$  ist Lösung der ELG  $\rightarrow Q_{\epsilon}^m(T_{\epsilon})$  ist Lösung. Sowie  $Q_{\epsilon=0}^m = q^m$  und  $T_{\epsilon=0} = t$

#### Bemerkung

- Sei Transformation  $Q_{\epsilon}^m = q^m + \epsilon \psi^m(q, \dot{q}, t) + O(\epsilon^2)$
- Sei  $T_{\epsilon} = 0$  gegeben.  
 Es folgt:

$$\frac{dQ_{\epsilon}}{dT_{\epsilon}}(T_{\epsilon}) = \underbrace{\frac{dq^m}{dt}}_{:=\dot{q}^m} + \epsilon \frac{d\psi^m}{dt}(q(t), \dot{q}(t), t) + O(\epsilon)$$

Aus  $\tau_\epsilon$  Symmetrie:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT_\epsilon L(Q_\epsilon(T_\epsilon), \frac{dQ_\epsilon}{dT_\epsilon}(T_\epsilon), T_\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{L\left(\{q^m + \epsilon\psi^m\} \dot{q}^m + \epsilon \frac{d\psi^m}{dt}, t\right)}_{=L(q(t), \dot{q}(t), t) + \epsilon \left\{ \sum_m \psi^m \frac{\partial L}{\partial q^m} + \sum_m \frac{d\psi^m}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right\} + O(\epsilon^2)} =! \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

mit  $f_\epsilon(q, t) = 0$

$$0 = \sum_m \left( \psi^m \frac{\partial L}{\partial q^m} + \frac{d\psi^m}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) = \sum_m \psi^m \left( \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^m} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right)}_{=0 \text{ für } \gamma \text{ Lsg}} \right) + \frac{d}{dt} \sum_m \left( \psi^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right)$$

Es folgt

$$E = \sum_m \psi^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \Big|_\gamma$$

- Sei  $Q_\epsilon^m = q^m, T_\epsilon = t + \epsilon$   
 $\rightarrow \frac{dQ_\epsilon^m}{dT_\epsilon} = \frac{dq^m}{dt} \equiv \dot{q}^m$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dT_\epsilon L(Q_\epsilon(T_\epsilon), \frac{dQ_\epsilon}{dT_\epsilon}(T_\epsilon), T_\epsilon) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{L(q(t), \dot{q}(t), t + \epsilon)}_{=L(q(t), \dot{q}(t), t) + \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} + O(\epsilon^2)} =! \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \\ &= L(q(t), \dot{q}(t), t) + \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Aus  $\tau_\epsilon$ -Symmetrie:  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_m \left( \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial q^m} + \underbrace{\ddot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}}_{=0} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_m \dot{q}^m \left( \frac{\partial L}{\partial q^m} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) \right) + \frac{d}{dt} \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) - \dot{q}^m \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \text{für } \gamma \text{ Lösung der E-L-Gl: } \frac{d}{dt} \left( L - \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) \Big|_\gamma = \frac{\partial L}{\partial t} \Big|_\gamma$$

$$\tau_\epsilon\text{-Symmetrie: } \frac{d}{dt} (L - \sum_m \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}) = 0 \text{ (Erhaltungsgröße)}$$

**Beispiel: der freie Massenpunkt**

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i)^2$$

**zu Zeigen:** 10-parametrische Symmetriegruppe (eigentliche orthochrone Galilei Gruppe).

**Transformationsgesetze :**

$$\vec{x}' = R(\underbrace{\vec{\omega}}_3) \vec{x} + \underbrace{\vec{a}}_3 + \underbrace{\vec{v}}_3 t$$

$$T = t + \underbrace{s}_3$$

1. Translation:  $\vec{a} \neq 0$

$$\tau_{trans} : x_k = x_k + a_{k0} \delta_{kk_0}, T = t$$

$\rightarrow$  L-invariant unter  $\tau_\epsilon; f, \phi = 0; \psi_k = \delta_{kk_0}$

$$P_{k_0} = \sum_k \psi_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{k_0}} \text{ ist Erhaltungsgröße}$$

$\vec{P}(t) = m \dot{\vec{x}}(t)$  Impuls ist konstant entlang Lösung.

2. Translation in der Zeit:  $s \neq 0$

$$\tau_{tZeit} : X_k = x_k, T = t + s$$

$$-E_{kin} = L - \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = -\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 \text{ Erhaltungsgröße.}$$

3. Drehungen  $\vec{\omega} = c \vec{e}_3, c \in \mathbb{R} \setminus 0$

$$\tau_{rot} : \vec{X} = R(\vec{\omega}) \vec{x}, T = t$$

$$\vec{X} = x + \underbrace{c \vec{e}_3}_{\equiv \vec{\omega}} \times \vec{x} + O(\epsilon^2)$$

$$\dot{\vec{X}} = R(\omega) \dot{\vec{x}}$$

Somit  $\dot{\vec{X}}^2 = \dot{\vec{x}}^2 \rightarrow$  L-Invarianz mit  $f, \phi = 0$

$$X_l = x_l + c \underbrace{\sum_{k=1}^3 \epsilon_{l3k} x_k}_{:= \psi_l} + O(\epsilon^2)$$

$$E = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{l3k} x_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} = \vec{e}_3 \underbrace{(\vec{x} \times m \dot{\vec{x}})}_{:= L}$$

$$\text{Sodass } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

4. eigentliche Galilei Transformation:  $\vec{v} = v \vec{e}$

$$\tau : X_k = x_k + ct \vec{e}, T = t$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k + c \vec{e} \rightarrow f_c(x, t) \neq 0$$

### 2.3.2 Wechselwirkende Systeme (konservativ, durch Langeragefunktion beschrieben)

$$L(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_{(i)}}{2} \dot{\vec{x}}_{(i)}^2 + U(x)$$

für  $\vec{F}_i(t) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}_i} U(x(t))$

Damit eine eigentliche orthochrone Galilei Gruppe eine Symmetriegruppe ist muss für  $U(x)$  gelten (hinreichend),

- $U(x)$  invariant unter  $G_{10}$
- $U(x)$  muss translationsinvariant sein: z.B.  $U(x) = \sum_{1 \leq i < j}^N U_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$
- $U(x)$  muss rotationsinvariant sein: z.B.  $U(x) = \sum_{i,j} U_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$

## 2.4 Mechanische Systeme mit Nebenbedingunge

- holonome Nebenbedingungen  $f(q(t), t) = 0, y^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow f(x(t), y(t)) = x^2 - y^2 - R^2 = 0$   
 $\Rightarrow$  globale Einschränkung der Dynamik
- nicht holonome Nebenbedingungen: Involvieren Ungleichungen, Differentiale  
(Schränken die Teilchenbewegung auf einen kleinen Bereich der Dynamikmanigfaltigkeit ein)

### 2.4.1 Holone NB und Lagrange-Gl zweiter Art

Gegeben:  $L(q, \dot{q}, t), \{q_i, i = 1, \dots, 3N\}$  mit verallgemeinerten Koordinaten  $q_i$

$$F_l(q, t) = 0; l = 1, \dots, r$$

Die Zwangsbedingungen schränken die Teilchendynamik auf einen  $f := (3N - r)$ -dimensionale Unterraum (Untermannigfaltigkeit) ein.

Stellen eine Matrix auf:  $\left( \frac{\partial F_l}{\partial q_k} \right)_{r \times k}$  zwangsbedingungs-Matrix  $F_{lk}$  mit Rang

$$F_{lk} = r^k \forall q \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$\Rightarrow q_l(Q_1, \dots, Q_{3N-r}, t), l = 1, \dots, 3N$$

$$\Rightarrow L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(\hat{Q}, t), \sum_{k=1}^{3N-r} \frac{\partial q}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q}{\partial t}\right) := \tilde{L}(\hat{Q}, \dot{\hat{Q}}, t), \text{ wobei } \hat{Q} \equiv (Q_1, \dots, Q_{3N-r})$$

$\Rightarrow$  Euler Lagrange Gl.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k}; k = 1, \dots, 3N - r$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{X}_i} \right) = F_i(t) + Z_i(t), X(q(Q, t), t)$$

- Für die kinetische Energie gilt:  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$

$$\sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j \dot{x}_j = \sum_{l,j,k} \frac{m_{(j)}}{2} \frac{\partial x_j}{\partial Q_u} \frac{\partial x_i}{\partial Q_l} \dot{Q}_k \dot{Q}_l := \sum_{k,l} g_{kl}(Q) \dot{Q}_k \dot{Q}_l$$

$$g_{kl}(Q) \equiv \sum_j \frac{m_{(j)}}{2} \frac{\partial x_j}{\partial Q_k} \frac{\partial x_j}{\partial Q_l} \text{ symmetrisch } (g_{kl} = g_{lk}), \text{ positiv semidefinit}$$

**Beispiel.** Sphärisches Pendel

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T - V = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - (-m\vec{g}\vec{x}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + m\vec{g}\vec{x}$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} l \sin \theta \cos \varphi \\ l \sin \theta \sin \varphi \\ l \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} l(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}) \\ l(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}) \\ -l \sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta$$

Erhaltungsgrößen:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0, \quad L_z := (\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_l \dot{q}_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - L \right)}_{:= E} = 0$$

$$:= \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta$$

(Legendre Transformation von Lagrange zu Hamilton Funktion)

$$E = \frac{m}{2} l^2 \left\{ \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \sin^4 \theta} \right\} + mgl \cos \theta \stackrel{?}{=} \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$$

$$U_{eff}(\theta) := \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^4 \theta} + mgl \cos \theta$$

Fallunterscheidung

- $L_z = 0 \rightarrow \dot{\varphi} = 0$  (ebenes Pendel)
- $L_z \neq 0 \rightarrow U_{eff}$  singularär bei  $\theta = 0, \pi$

$E_{min}$  bei  $L_z \neq 0$ , Teilchen vollführt eine Kreisbewegung  $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta_s}$

#### 2.4.2 Nicht holonome NB und Lagrange-Gl 1. Art

Gegeben sei ein System mit  $f$  Freiheitsgraden

$$\sum_{j=1}^f a_{kj}(q_j, t) dq_j + b_{(u)}(q, t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, s$$

$\text{Rang } a_{kj} = A$  (Anzahl der Zwangsbedingungen)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^f a_{kj}(q_j, t) \frac{dq_j}{dt} + b_k(q, t)$$

Mit Hilfe virtueller Verrückungen hat man:

$$\sum_{j=1}^f a_{kj}(q_j(t), t) dq_j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, s$$

i.A. hat man  $(f - s)$  unabhängige virtuelle Verrückungen  $\delta q'(t), \dots, \delta q_{f-s}(t)$   
 Holone NB:  $F_{(k)}(q, t) = 0$  für  $k = 1, \dots, s$

$$dF_{(k)} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial F_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F_k}{\partial t} dt = 0$$

$dF_k$  existieren nur dann wenn Integrabilitätsbedingungen gelten (Satz von Schwarz)

$$\boxed{\begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial^2 F_k}{\partial q_i \partial q_j} \equiv \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 F_k}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \\ 2) \quad \frac{\partial^2 F_k}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial b_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 F_k}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial a_{kj}}{\partial t} \end{array}}$$

Eine Zwangsbedingung  $F_k$  ist holonom, wenn  $dF_k$  existiert und 1) und 2) gelten, sonst ist  $F_k$  nicht holonom.

**Das Hamilton Prinzip** (Optimierung des Wirkungsfunctionals)

$$NB: \sum_{j=1}^f a_{kj}(q(t), t) \dot{q}(t) = 0, \quad k = 1, \dots, s$$

Stationäre Lösungen des Variationsproblems  $f + s$  Euler-Lagrange-Gleichungen  
 1. Art.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{k=1}^s \lambda_k(t) a_{kj}(q(t), t) & \quad j = 1, \dots, f \\ \sum_{k=1}^s \lambda_k(t) a_{kj}(q(t), t) + \sum_{k=1}^s b_k(q(t), t), & \quad k = 1, \dots, s \end{aligned}$$

$f$  Bahnkurven  $q_j(t)$  und  $s$  Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_k(t)$

Für holone Zwangsbedingungen:

$$a_{kj}(q, t) = \frac{\partial F_k}{\partial q_j}(q, t)$$

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, \lambda, t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{k=1}^s \lambda_k F_k(q, t) \text{ Effektive Lagrange Funktion}$$

**Satz.** Für zeitliche Veränderung der Energie

$$E := \left( \sum_{j=1}^f \dot{q}_j(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) \Big|_{\gamma}$$

ist für  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  und holonome, Zeitunabhängige  $F_k(q, t) = 0$  eine Erhaltungsgröße auch für  $\tilde{L}$ .



*Beweis.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}_k} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j} &= \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_k} &= F_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \Big|_{\gamma} &= \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^s \lambda_k(t) \frac{\partial F_k}{\partial q_j} \Big|_{\gamma} \\ \Rightarrow F_k &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E := \sum_j \dot{q}_j - L \Big|_{\gamma} \quad \text{Ist Erhaltungsgröße}$$

□

**Beispiel.** ebenes Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt  $f(t)$ :

$$\text{ZB: } (x - f(t))^2 + y^2 - l^2 = F(x, y, t) = 0$$

ZB ist holonom, rheonom (da Zeitabhängig)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2(x - f(t))\dot{f}(t) \neq 0$$

Lagrange-Gl 2. Art:

$$\begin{aligned}x - f(t) &:= l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x} = \dot{f} + l \cos \varphi \\ y &:= -l \cos \varphi & & \dot{y} = \dot{l} \sin \varphi\end{aligned}$$

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{m}{2} \left\{ l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \cos \varphi \dot{f} \right\} + mgl \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} + ml \cos \varphi \dot{f}$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varphi} = -ml \sin \varphi \dot{f} - mgl \cos \varphi$$

Daraus folgt, dass

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\cos \varphi \frac{\ddot{f}}{l}$$

### 3 Lineare Schwingungen

Lineare Systeme: einfachste, exakt lösbare Vielteilchensysteme.

Betrachte: mechanisches Vielteilchensystem (N Massenpunkte) mit holonom-sklernomen Randbedingungen.

**Koordinaten**  $x_\mu(q_i)$  mit  $\mu=1, \dots, 3N$  und  $i = 1, \dots, f < 3N$   
 Koordinatentransformation, sodass  $q_i$  durch Zwangsbedingungen wegfallen.

**Potenzial** :

$$T = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i = \sum_{\alpha, \beta=1}^f \dot{q}_\alpha g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta$$

mit  $g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\beta} > 0$

**Lagrange Gleichung** :

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{\alpha, \beta=1}^f \dot{q}_\alpha g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta - U(q)$$

Wir setzen auch voraus:

- Existenz einer Gleichgewichtskonfiguration
- kleine Auslenkung um diese Gleichgewichtskonfiguration

**Anwendung**

- Beschreibung von Festkörpern
- Elektromagnetisches Strahlungsfeld
- Systeme ungekoppelter Harmonischer Oszillatoren

Beschreibt z.B. nicht: Gase, Schmelzende Körper,...

### 3.1 Lineare Schwingungen um Gleichgewichtskonfigurationen

**Gleichgewichtskonfigurationen** :  $\{q_{\alpha(0)}(t) \text{ Zeitungsabhängig}, \alpha = 1, \dots, f\}$

oder:  $\dot{q}_{\alpha(0)}(t) = \ddot{q}_{\alpha(0)} = \ddot{q}_{\alpha(0)=\dots=0}$

Es gilt:  $\left. \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right|_{q(0)} = 0$

**Beweisidee** : Euler-Lagrange und Bedingungen für Gleichgewicht.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^f g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^f \dot{q}_\beta g_{\beta\alpha}(q) \quad \text{da } g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \\
&= \sum_{\beta=1}^f g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta \\
\rightarrow \text{E-L: } \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}}_{=0} &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \\
\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} &= - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma=1}^f \dot{q}_\beta \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} \\
&= - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}
\end{aligned}$$

Für kleine Auslenkungen nähern wir über Taylor-Polynome:

$q_\alpha(t) = q_{\alpha(0)} + \eta_\alpha(t)$ ,  $\eta_\alpha(t)$  klein

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \underbrace{g(q_{(0)})}_{:=K} \dot{\eta} - U(q_{(0)}) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^f \nu_\alpha \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \Big|_{q_{(0)}}}_{:=K} \eta_\beta + O^3(\eta, \dot{\eta}) \\
L(\eta, \dot{\eta}) &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T q(q_{(0)}) \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^T K \eta
\end{aligned}$$

$M$  Massenmatrix, symmetrisch positiv definit

$K$  Kopplungsmatrix, symmetrisch positiv definit

### 3.2 Dynamik kleiner Schwingungen – Normalkoordinaten

:

$$L(\eta\dot{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\eta} M \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^T K \eta$$

mit  $M > 0$ ,  $M = M^t$  und  $K > 0$ ,  $K = K^T$ , sodass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^f M_{\alpha,\beta} \dot{\eta}_\beta \\
\frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha} &= - \sum_{\beta=1}^f K_{\alpha,\beta} \eta_\beta \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^f M_{\alpha,\beta} \ddot{\eta}_\beta = - \sum_{\beta=1}^f K_{\alpha,\beta} \eta_\beta = \frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha}
\end{aligned}$$

mit Orthogonalmatrix  $O$ ,  $Q = O^T M^{\frac{1}{2}} \mu$ ,  $M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} = O K O^T$

$M_{ij}^{1/2}$  Verändert die Matrix indem wir  $M$  diagonalisieren, die Wurzeln der Diagonalelemente Zeilen und danach die Transformationsmatrizen wieder einrechnen.

Sei  $M = SAS^T$  und  $B_{ii} = \sqrt{A_{ii}}$ , dann def.  $M^{1/2} = SBS^T$ .

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T K Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \dot{Q}_i \dot{Q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f Q_i K_i Q_i$$

### Beweisidee

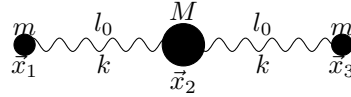
$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} (M^{\frac{1}{2}} \dot{\eta})^T (M^{\frac{1}{2}} \dot{\eta}) - \frac{1}{2} \eta^T K \eta = \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^T \dot{\bar{Q}} - \frac{1}{2} \dot{\bar{Q}}^T \bar{Q} - \frac{1}{2} \bar{Q}^T M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} \bar{Q} = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T K Q$$

da  $Q = O^T M^{\frac{1}{2}} \eta$ ,  $O^T O = O O^T = 1$

### Lösungen

- $K_i > 0$ :  $Q_i(t) = Q_i(0) \cos(\sqrt{K_i}t) + \frac{\dot{Q}_i(0)}{\sqrt{K_i}} \sin(\sqrt{K_i}t)$
- $K_i = 0$ :  $Q_i(t) = Q_i(0) + \dot{Q}_i(0)t$
- $K_i < 0$ :  $Q_i(t) = Q_i(0) \cosh(\sqrt{K_i}t) + \frac{\dot{Q}_i(0)}{\sqrt{K_i}} \sinh(\sqrt{K_i}t)$

### 3.2.1 Modell eines lineare dreiatomigen Moleküls



$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$$L(\eta \dot{\eta}) = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 - \underbrace{\frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - l_0)^2 - \frac{1}{2} k (x_3 - x_2 - l_0)^2}_{:= -U(x)}$$

Es ergibt sich zusammengefasst:

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^T K \eta$$

Wir bestimmen nu die Massen-Kopplungs-Matrix

$$M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{2k}{M} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Wir Bestimmen eine Matrix  $O$  um  $M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}}$  zu Diagonalisieren, indem wir die Eigenwerte bestimmen:

$$M^{-\frac{1}{2}} O = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m} & \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & -\frac{2m/M}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \end{pmatrix}$$

Jede Spalte stellt dabei eine Mögliche Schwingungsmode (Energieverteilung) dar.

### Bemerkung

- Transaktionsmoden im  $\mathbb{R}^3$ : 3 Freiheitsgrade
- Grenzfall:  $k \rightarrow \infty$  Relativbewegungen unmöglich  $\rightarrow$  Starrer Körper; 6 Freiheitsgrade

### Zusammenfassung

Lagrange Gleichung:  $L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^T K \eta$

Mit Massenmatrix  $M$ , Kopplungsmatrix  $K$  (symmetrisch, positiv definit).

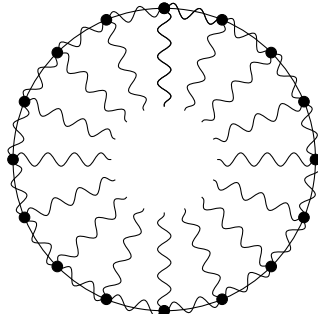
$$M \ddot{\eta} = -K \eta$$

Die allgemeinen Koordinaten unseres System berechnen sich als  $Q = O^T M^{1/2} \eta$

Wobei  $O$  definiert ist über  $M^{-1/2} K M^{-1/2} = O \kappa O^T$

Es folgt, dass  $\dot{Q} = O^T M^{1/2} \dot{\eta} = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T \kappa Q$

### 3.3 Dynamische Vielteilchensysteme: Der schwingende Ring



$a = x^{(i)} a_0 - x_0^{(i-1)}$ : Abstand der Gleichgewichtspositionen  
(mit  $i = 1, \dots, N$  und  $N + 1 \equiv 1$ )

$x^{(i)} - x_0^{(i)} = \eta_i$

$K$ : ???

#### 3.3.1

$$\begin{aligned} L(\eta, \dot{\eta}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{\eta}_i)^2 m - \frac{1}{2} \eta^T \kappa \eta \\ &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \sum_{i=1}^{N+1} (\eta^{(i)} \eta^{(i-1)})^2 k \end{aligned}$$

$$M = m \cdot \mathbb{K} \quad \kappa = \begin{pmatrix} 2k + K & -k & & & -k \\ -k & 2k + K & -k & & \\ & -k & 2k + K & -k & \\ & & & & \\ -k & & & & \end{pmatrix}$$

**Modenbestimmung**  $r = 1, \dots, N$

- $\eta_r = \Re(C_r e^{-i\omega_r t})$
- $\omega_r$ : Eigenwerte
- $(-M\omega_r^2 + K)l_r = 0$  Eigenwertproblem

**Ansatz**  $l_r^l = e^{il\Phi_r}$ , da  $C^{(N+1)} = C_r^{(1)}$

$$\Rightarrow e^{i(N+1)\Phi_r} = e^{i\Phi_r}$$

$$N\Phi_r = 2\pi r$$

$$\Phi_r = \frac{2\pi}{N} r$$

$$0 = \left[ -\omega_r^2 + \frac{k}{m} (2 - e^{i\Phi_r} - e^{i\Phi_r}) + \frac{K}{m} \right] C_r^{(l)}$$

Wobei gilt:

$$\begin{aligned} 2 - e^{i\Phi_r} - e^{-i\Phi_r} &= 2(1 - \cos \Phi_r) \\ &= 4 \sin^2 \left( \frac{\Phi_r}{2} \right) \end{aligned}$$

Sodass

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega_r &= \sqrt{\frac{K}{m} + 4 \frac{k}{M} \sin^2 \left( \frac{\Phi_r}{2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{K}{m} + 4 \frac{k}{M} \sin^2 \left( \frac{\pi r}{N} \right)} \end{aligned}$$

mit  $r = 1, \dots, N$  und  $C_r^{(l)} = e^{i \frac{2\pi r}{N} l}$ .

Wir betrachten nun  $\sin^2 \left( \frac{\pi r}{N} \right)$ . Für  $\frac{\pi r}{N} = 0$  oder  $= \frac{\pi}{2}$  gibt es keine Entartung uns somit nur eine Lösung, sonst  $(\frac{\pi r}{N} \in (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\})$  gibt es 2 Lösungen.

$$\begin{aligned} \eta^{(i)}(t) &= \sum_{i=1}^N |A_r| \operatorname{Re} \{ e^{-i\omega_r t} e^{i\phi_r} e^{i \frac{2\pi r}{N} l} \} \\ &= \cos \{ \omega_r t - \frac{2\pi r}{N} l - \phi_r \} \end{aligned}$$

*Bemerkung.* • Mode  $r$ :  $\omega_r = \sqrt{\frac{K}{m}}$   
 $\rightarrow \eta_{r=N}^{(l)}(t)$  ist eine Translation entlang des Rings

- Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit  
 $\psi_r = \omega_r t - \frac{2\pi r}{N} l - \phi_r$ . Für  $x_0^{(1)} = la$  gilt:

$$\begin{aligned} \psi_r &= \omega_r t - \frac{2\pi r}{Na} (la) - \phi_r \\ 0 &= d\psi_r = \omega_r dt - \frac{2\pi r}{N} + dx_0^{(l)} \\ v_{ph} &= \frac{dx_0^{(l)}}{dt} = \frac{\omega_r}{\underbrace{2\pi r}_{\nu_r}} \underbrace{Na}_{\lambda} \end{aligned}$$

- Dispersionsrelation: Lösung = Dispersionsrelation + Moden

### 3.3.2 Der Kontinuierliche Grenzfall

Für Gleichgewichtspositionen  $x_n$  und ausgelenkte Position  $x'_n$  gilt  $x'_n(t) = x_n + \eta_n(t)$ :

**Ausgangspunkt**

$$m\ddot{\eta}_l(t) + k(2\eta_l(t) - \eta_{l-1}(t)) + K\eta_l = 0$$

$$\Leftrightarrow M\ddot{\eta} + K\eta = 0.$$

**Kontinuuumlimes** beschreibt den Grenzfall  $a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ , sodass  $Na := L = konst$  im Fall ( $\lambda \gg a$ ): Langwellengrenzfall.

$$\eta_l(t) := u(x_l, t) \quad \text{sodass} \quad \ddot{\eta}_l(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

$$2\eta_l - \eta_{l-1}(t) - \eta_{l+1} = 2u(x_l, t) - u(x_{l-1}, t) - u(x_{l+1}, t)$$

$$\begin{aligned} \text{Taylor Entwicklung: } &= 2u(x_l, t) - \left( -u(x_l, t) - a \frac{\partial u}{\partial x}(x_l, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t) + O(a^3) \right) \\ &\quad - \left( u(x_l, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x_l, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t) + O(a^3) \right) \\ &= -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl

$$\frac{1}{\frac{ka^2}{m}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{K}{ka^2} u(x, t) = 0$$

Grenzwertbetrachtungen:

$$v := \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{ka^2}{m}} \quad \kappa^2 := \lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ K, k \rightarrow 0}} \left( \frac{K}{ka^2} \right)$$

Wir erhalten die Klein-Gordon Gleichung

$$\left( \frac{1}{v^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \right) u(x, t)$$

**Energie:**

$$E = \sum_{l=1}^N \left( \frac{m}{2} (\dot{\eta}_l(t))^2 + \frac{k}{2} (\eta_l(t) - \eta_{l-1}(t))^2 + \frac{K}{2} (\eta_l(t))^2 \right)$$

Da  $N \rightarrow \infty$

$$E = \int_1^N d \overbrace{la}^{:=x} \left\{ \frac{m}{2a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{ka}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{K}{2a} u^2 \right\}$$

wir definieren  $\varrho = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0}} \frac{m}{a}$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L dx \left\{ \varrho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \varrho v^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \kappa^2 \varrho v^2 u^2 \right\}$$

Für den diskreten Ring gilt also

$$\eta_l(t) = \sum_{r=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_r e^{-i(\omega_R t - \frac{2\pi}{N} l r)}$$

mit  $A_r \in \mathbb{C}$  und  $\omega_r = \sqrt{\frac{K}{m} + \frac{4k}{m} \sin^2 \left( \frac{\pi r}{N} \right)}$  für  $r = 1, \dots, N$  und  $L \rightarrow \infty$ .



## Kontinuumslimes

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_{-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} d \left( r \frac{2\pi}{Na} \right) \underbrace{\left( \frac{A_r Na}{2\pi} \right)}_{:=A(k)} e^{-i\omega_r t - r \frac{2\pi}{Na} a l} + \text{kompl. Konj} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad A(k) e^{-i\omega(k)t} e^{ikx} + \text{kompl. Konj}
 \end{aligned}$$

## Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation (FT)

- Definition der FT:

$$\tilde{\varphi} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \varphi(x)$$

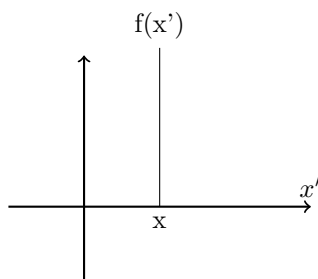
- Umkehrtransformation

$$\varphi(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} e^{-\epsilon|k|} \tilde{\varphi}(k)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ikx} e^{-\epsilon|k|} e^{-ikx'} \varphi(x') \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} e^{-\epsilon|k|} \right\}}_{\substack{:= \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(x-x')^2 + \epsilon^2} \\ \text{(Lorentz-Kurve)}}} \varphi(x') \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{\epsilon \varphi(x')}{(x-x')^2 + \epsilon^2}}_{\substack{\text{Distributionen} \\ \text{(uneigentliche} \\ \text{Funktionen)}}}
 \end{aligned}$$

□



- Faltungstheorem

$$(\varphi * \psi)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \varphi(x-x') \psi(x')$$

(Faltung, engl. convolution),  $kx = \text{const} \Leftrightarrow k = \frac{\text{const}}{x}$  (komplementäre Variablen)

$$\boxed{\Leftrightarrow \varphi * \psi = \tilde{\varphi} \tilde{\psi}}$$

- Parseval'sche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\varphi(k)|^2$$

### Elementare Eigenschaften von stetigen Funktionalen und Distributionen

Gegeben sei ein stetiges, lineares Funktional über den Funktionenraum  $\mathfrak{F}$ .

$l : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1l(\varphi_1) + c_2l(\varphi_2)$  (Linearität) für  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  und  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{F}$ .

Funktionen  $\varphi$  werden auch Testfunktionen genannt

- $\mathfrak{D}$ : Raum komplexer, unendlich oft differenzierbarer Funktionen mit kompaktem Träger
- $\mathfrak{E}$ : Raum unendlich oft differenzierbarer komplexer Funktionen die im Unendlichen stärker abnehmen als jede noch so hohe Potenz (streben gegen Null)
- Um Stetigkeit zu garantieren muss  $\mathfrak{F}$  zum topologischen Raum mit Hilfe der Funktionennorm  $\|\varphi\|$  gemacht werden.
- Beispiele: stetiges Funktional

$$- l(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \text{ für } f(x) \text{ stetig.}$$

$l$  heißt auch regulär.

$$- l(\varphi) := \varphi(X=0) \text{ Dirac-Funktional}$$

$f(x)$  ist dann die Dirac-(Delta)-Funktion  $f(x) := \delta(x)$

$$- \text{Zu jedem stetigen linearen Funktional über } \mathfrak{D} \text{ oder } \mathfrak{E} \text{ existiert eine Folge } f_n \text{ stetiger Funktional-Kerne mit}$$

$$l(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x)\varphi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \text{für bel } \varphi \in \mathfrak{D} \text{ oder } \mathfrak{E}$$

$\Rightarrow f$  nennt man Distribution.

### Eigenschaften von $\delta(x)$

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0)\varphi(x) = \varphi(x_0)$$

- Es gilt: Im Limes  $n \rightarrow \infty$

$$- f_n(x) := ne^{-n^2\pi x^2} \rightarrow \delta(x), \text{ denn}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} \varphi\left(u \frac{n}{n\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(0) \sqrt{\pi}$$

$$- f(x) := \frac{n}{\pi} \left( \frac{\sin(nx)}{xn} \right)^2 \rightarrow \delta(x)$$

$$- f_n(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{n}}{x^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow \delta(x)$$

$$- f_n(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x} \rightarrow \delta x$$

- Definition  $l'(\varphi) := -l(\varphi')$  für alle Testfunktionen aus  $\mathfrak{F}$

$$l' = \int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x) \varphi(x) = [f(x) \varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \varphi'(x)$$

$\Rightarrow$  Jede Distribution auf  $\mathfrak{L}$  lässt sich als Distributionsableitung endlicher Ordnung einer stetigen Fkt. darstellen.

- Beispiel: sei  $\alpha(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

Im Distributionssinn gilt:

$$\alpha'(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

- Es gilt

$$- x\delta(x) = 0$$

$$- \delta(-x) = \delta(x)$$

$$- \delta(g(x)) = \sum_l \frac{1}{|g(x)| \delta(x-x_l)}, \text{ mit stetigem } g, g(x_l) = 0 \text{ und } g'(x_l) \neq 0.$$

$$- \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$- \tilde{\delta}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$- \delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x_0)} \cdot 1 \text{ (Fourier-Transformation über 1)}$$

### Bestimmung der Amplituden $A(k)$ aus den Anfangsbedingungen

$$U(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk (A(k)e^{ikx} + A^*(k)e^{-ikx}) := F(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \{A(k)(-i\omega(k))e^{ikx}\} + A^*(k)i\omega(k)e^{-ikx} := G(x)$$

$$A(k) = \frac{i\omega(k)\tilde{F}(k) - \tilde{G}(k)}{2i\omega(k)\sqrt{2\pi}}$$

**Bestimmung der Lösungen für Randbedingungen** z.B. (W) für  $x \in [0, L]$  mit  $0 = u(x=0, t)$  und  $u(x=L, t) = 0$  vorgegeben für alle  $t$ .

$$\left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \right) u(x, t) = 0 \quad (\text{W})$$

zusätzliche Anfangsbedingungen:

$$u(x, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \text{ für } x \in [0, L]$$

Fouriertransformation:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} + k.k.$$

Randbedingung:

$$\begin{aligned} 0 = u(x=0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{-i\omega(k)t} + k.k. \\ 0 = u(x=L, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{-i\omega(k)t} e^{ikL} + k.k. \\ 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{-i\omega(k)t} \underbrace{(1 + e^{ikL})}_{=0} + k.k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + e^{ikL} = 0 &\Rightarrow kL = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_n = \frac{\pi}{L}n \\ \Rightarrow A(k) &= A_n \delta(k - \frac{\pi}{L}n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega(k_n)t + ik_n x} + k.k. \quad \text{mit } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

zusätzlich:

$$\begin{aligned} u(x=0, L) &= 0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + A_{-n}) e^{i\omega(k_n)t} + A_0 e^{-i\omega(k=0)t} + k.k. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_n + A_{-n} = 0 \text{ und } A_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega(k_n)t} e^{i\frac{k_n\pi}{L}x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^* e^{i\omega(k_n)t} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + A_{-n} e^{i\frac{n\pi}{L}x})}_{=A_n \cdot 2i \sin(\frac{n\pi}{L}x) - A_n} e^{-i\omega(k_n)t} + k.k. \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2|A_n| \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot 2\Re\{e^{-i\omega(k_n)t + i\phi_n} i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 4|A_n| \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin(\omega(k_n)t - \phi_n) \end{aligned}$$

$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  bilden dabei ein vollständiges Ufktionensystem für stetige Funktionen  $f$  im Intervall  $[0, L)$  mit  $f(x=0) = f(x=L) = 0$  (sogar orthogonals Funktionensystem)

Es gilt

$$\int_0^L \left( \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \left( \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right) = \delta_{nm}$$

d.h.  $v = \sum_i a_i e_i$ ,  $w = \sum_i b_i e_i$ ,  $(v, w) = \sum_i a_i b_i$ . Somit

$$\int_0^L \left( \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right) u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 4|A_n| \delta_{nm} = -4|A_m| \sin \varphi_m$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 4|A_n| \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \omega(k_n) \cos(\omega(k_n)t - \varphi_n)$$

???, das heißt Linear-Kombination von allgemeiner homogene und partikulärer Lösung.

→ ??? → ???

### 3.4 Erzwungene Schwingungen und Greensche Funktionen

1. Transformation auf Normalkoordinaten → ungekoppelte erzwungenen Schwingungen
2.  $\ddot{Q}(t) + \omega^2 Q(t) = \mathfrak{F}(t)$  linear inhomogen
3. Allgemeine Lösung

$$Q(t) = \underbrace{Aq_1(t) + Bq_2(t)}_{\text{Lösung der homogenen Gleichung}} + \underbrace{Q_p(t)}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

4. Konstruktion von  $Q_p(t)$ :  
Idee:  $\mathfrak{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t-t') \mathfrak{F}(t')$

$$\mathfrak{L}G(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \omega^2 G(t, t') = \delta(t-t')$$

$$Q_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') \mathfrak{F}(t') \text{ denn } \mathfrak{L}Q_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{L}G(t, t') \mathfrak{F}(t') = \mathfrak{F}(t')$$

#### 3.4.1 Lösung von DGL mit Hilfe von Integraltransformationen (Fourier, Laplace)

$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^3 e^x$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ ;  $y(x) = f = f(x)$  Laplace-Transformation  $L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} dx f(x) e^{-px}$ ,  $p > 0$

**Mehtode.** zur Lösung

1. Transformiere die DGL mit Hilfe von  $L$  und erhalten eine rein algebraische Gl. für  $F(p)$  bzgl.  $p$ .
2. Löse die algebraischen Gl. nach  $F(p)$  auf
3. Suche die inverse Transformation von  $F(p)$ ,  $y(x) = L^{-1}(L(y))$

$\Rightarrow$  Laplace Transformation ist linear  $L(y'') - 2L(y') + L(y) = L(x^3 e^x)$

$$\begin{aligned} L(y') &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dy}{dx} e^{-px} = [ye^{-px}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} dx ye^{-px}(-p) \\ &= -y(0) + p \int_0^{\infty} dx ye^{-px} \\ &= -y(0) + pL(y) = pL(y) - y(0) \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned} L(y'') &= p^2 L(y) - py(0) - y'(0) \\ L(x^3 e^x) &= \int_0^{\infty} x^2 x^2 e^{-x(p-1)} dx = \frac{6}{(p-1)^4}, \quad p-1 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Eingesetzt in Gl 1

$$\begin{aligned} (p^2 - 2p + 1)L(y) &= \frac{6}{(p-1)^4} \\ L(y) &= \frac{6}{(p-1)^4(p^2 - 2p + 1)} \end{aligned}$$

### 3.5 Erzwungene Schwingungen und Greensche Fkt.

Schwingungsgleichung

$$M\ddot{v}(t) + K\nu(t) = F(t)$$

Normalkoordinaten  $Q(t)$  Einführen

$$\ddot{Q}(t) + kQ = F(t)$$

$$F(t) = O^T M^{-1/2} F(t)$$

$$F(t) = AQ_1(t) + BQ_2(t) + Q_p(t)$$

**Konstruktion von  $Q_P(t)$  auf  $F(t)$**  Def. Eigenschaften der Greenschen Funktion  $G(t, t')$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + kG(t, t') = \delta(t - t')$$

Für  $Q(t)$  gilt

$$Q_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') F(t')$$

*Beweis.*

$$\ddot{Q}_p(t) + kQ_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\left\{ \ddot{G}(t, t') + kG(t, t') \right\}}_{:=\delta(t-t')} F(t') = F(t)$$

□

Es gilt:

- $G_{ret}(t, t') = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}(t - t'))\theta(t - t')$  (retardiert)
- $G_{av}(t, t') = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}(t' - t))\theta(t' - t)$  (avanciert)

*Beweis.* Für  $G_{ret}(t, t')$  und  $k > 0$   $t > t'$ :  $G_{ret}(t, t') = A \sin(\sqrt{k}(t - t')) + B \cos(\sqrt{k}(t - t'))$  (Ansatz)

$t < t'$ :  $G_{ret}(t, t') = 0$

Übergangsbedingung für  $t = t'$ : Sei  $\epsilon > 0$

Integration von (2) nach  $t$

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{ret}(t, t') + k G_{ret}(t, t') \right\} = \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t - t')$$

Im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{ret}(t' + \epsilon, t') - \frac{\partial}{\partial t} G_{ret}(t' - \epsilon, t') = 1$$

Weper Stetigkeit:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} G_{ret}(t' + \epsilon, t') = 0$$

$$\Rightarrow B = 0, A \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$\Rightarrow$  Eine Partikuläre Lösung der DGL ist gegeben durch

$$Q_p(t) = \int_{-\infty}^t dt' F(t') \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}(t - t'))$$

Spezialfall  $F(t) = F_0 \theta(t') \theta(T - t') \sin \Omega t'$

$\Rightarrow$  Eingesetzt in Gl 5

$$Q_p(t \geq T > 0) = \frac{-F_0}{2\sqrt{k}} \left\{ \frac{\sin[(\Omega - \sqrt{k})T + \sqrt{k}t] - \sin(\sqrt{k}t)}{\Omega - \sqrt{k}} - \frac{\sin[(\Omega + \sqrt{k})T - \sqrt{k}t] \sin \sqrt{k}t}{\Omega + \sqrt{k}} \right\}$$

mit  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

$$\xrightarrow{\Omega \rightarrow \sqrt{k}} -\frac{F_0 T}{2\sqrt{k}} \cos \sqrt{k}t \quad \text{resonante Anregung}$$

□

### 3.5.1 Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: I) Anfangswertprobleme

**Beispiel**  $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = f(t)$ ,  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ ,  $t > 0$

Sowie  $\ddot{G}(t, t') + \omega^2 G(t, t') = \delta(t - t')$ ,  $G(0, t') = \dot{G}(0, t') = 0$  Durch Multiplikation mit  $f(t')$  und integrieren über  $t'$ :

$$\int_0^\infty dt' \left( \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \omega^2 \right) G(t, t') f(t') = \int_0^\infty dt' \delta(t - t') f(t')$$

Ergibt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right) \int_0^\infty G(t, t') f(t') dt' = f(t)$$

Transformieren mit Hilfe der Laplace Transformation bzgl.  $p$

$$G(p, t') = \frac{e^{-pt'}}{p^2 + \omega^2}, \quad p \geq 0$$

$$G(t, t') = \frac{\sin(\omega(t - t'))}{\omega} \theta(t - t')$$

### Fazit

1. Formuliere 6 mit Hilfe von  $G(t, t')$  in 7
2. Löse 7 mit Laplace Transformation
3. Transformiere  $G(p, t')$  zurück zu  $G(t, t')$
4. Interpretiere  $y(t) = \int_{-\infty}^\infty dt' G(t, t') f(t')$  und erhalte  $y(t)$  für ein bestimmtes  $f'(t)$ .

### 3.5.2 Konstruktion Greenscher Funktionen für DGL: II) Randwertprobleme

1. Jede DGL hat die Form  $\mathfrak{D}y(x) = f(x)$ .  
Bringe jede DGL 2. Ordnung in die sog. Sturm-Liouville Form

$$\frac{d}{dx}(p(x)y'(x)) + a(x)y(x) = f(x)$$

Wobei  $p(x) > 0$  und  $a(x)$  stetig, reell

2. Löse die homogene DGL

$$y_n(x)c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

3.  $y_{ges} = y_n(z) + \int_a^b dx G(x, z) f(x)$

$$G(x, z) := c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(z)}{p(z)\omega(z)} & \text{für } a < x < z \\ \frac{y_1(z)y_2(x)}{p(z)\omega(z)} & \text{für } a < z < b \end{cases}$$

mir  $\omega(z) = y_1(z)y_2'(z) - y_1'(z)y_2(z)$  (Wronski Determinante)

1.  $p(x) = 1$
2. Homogene DGL:  $y'' = 0$
3.  $G(x, z) = c_1 + c_2x + \begin{cases} z, & \text{für } 0 < x < z \\ x, & \text{für } z < x < 1 \end{cases}$  Bestimme  $a_1, c_2$  aus Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} G(0, z) = 0 \\ G(1, z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -z \\ c_2 = z - 1 \end{array} \Rightarrow G(x, y) = \begin{cases} x(z - 1) & , \text{für } 0 < x < z \\ z(x - 1) & , \text{für } z < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_P(z) =$$

Hier fehlt was!



## 4 Hamiltonsche Mechanik

### Motivation: Lagrange-Formulierung

1. Grundlegende Variablen  $q, \dot{q}, t$
  2. Lagrange Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$
  3.  $\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \quad L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$  (Hamilton Prinzip)
- $\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$  mit  $j = 1, \dots, f$
- $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_{j_0}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_{j_0}} := p_{j_0}$  ist Erhaltungsgröße
- $\Rightarrow$  Suche nach einer alternativen Formulierung der Lagrange-Mechanik im bezug auf  $q, p$  statt  $q$  und  $\dot{q}$ .

### 4.1 Legendre Transformation

Ersetze  $f(x)$  durch  $g(p)$  mit  $P := \frac{\partial f}{\partial x}$

Ziel: Finde eine eindeutige Zuordnung  $f(x) \leftrightarrow g(p)$  (Bijektivität)

$\Rightarrow$  Übergang von  $L(q, \dot{q}, t)$  zur Hamilton Funktion  $H(P := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, q, t)$

Gegeben sei  $f(x)$  konvex,  $f''(x) > 0$

$$F(x, p) := px - f(x)$$

Es gilt:

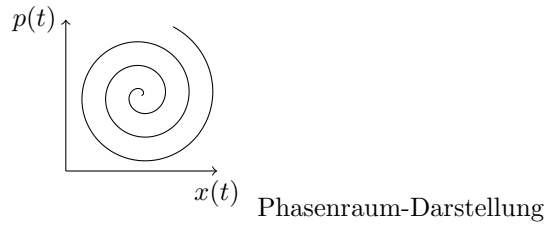
- $\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_P = p - \frac{df}{dx}$
- $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_P = -\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$ , da  $f''(x) > 0$

$\Rightarrow \max F(x, p) = g(p) := F(x(P), P)$  mit  $P = \frac{\partial f}{\partial x}$

$\Rightarrow$  d.h. durch die Abbildungsvorschrift  $f(x) \rightarrow g(p) := px(p) - f(x(p))$  mit  $p := \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow x(p)$  lässt sich jeder konvexen Funktion  $f(x)$  eine Legendre-Transformierte  $g(p)$  zuordnen.

Es gilt:

- $\frac{dq}{dp} = x(p) + p \frac{dx}{dp} - \frac{df}{dx} \frac{dx}{dp} = x(p)$
  - $\frac{d^2 g}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]^{-1} > 0 \rightarrow g(p)$  ist auch konvex
  - Die Legendre Transformation ist involutiv, d.h. die Legendre Transformation von  $g(p)$  ist wieder  $f(x)$
- Beweis:  $\max G(x, p) = p(x)x - g(p(x)) := p(x)x - \{p(x)x - f(x)\} = f(x)$



- $-g(P(x))$  ist die Ordinate  $\Psi$  des Punktes  $x = 0 = x_0$  der Tangente an die Kurve  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \frac{f(x_0) - \Psi}{x_0 - 0} \Leftrightarrow -\Psi = x_0 \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} - f(x_0) \equiv g(p(x_0))$$

- Für  $f(x)$  von mehreren Unbekannten  $x_j, j = 1, \dots, d$  gilt:

$$g(p) = \sum_{j=1}^d p_j x_j(p) - f(x(p)) \text{ mit } p_j := \frac{\partial f}{\partial x_j} \rightarrow x_j(p_j)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} > 0 \text{ (positiv definit)}$$

Analog gilt für die Umkehrung:

$$f(x) = \sum_{j=1}^d p_j(x) x_j - g(p(x))$$

$$x_j = \frac{\partial g}{\partial p_j} p \rightarrow p_j(x_j)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right]^{-1} > 0$$

- Youngsche Ungleichung

$$F(x, p) := \sum_{j=1}^d p_j x_j - f(x) \leq g(p) \equiv F(x(p), p) \equiv \max_x F(x, p), \text{ für } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} dg &= \sum_{i=1}^d \left\{ dx_i p_i + x_i dp_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right\} = \sum_{i=1}^d p_i dp_i \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial p_i} = x_i \\ df &= \sum_{i=1}^d \left\{ dx_i p_i + x_i dp_i - \frac{\partial g}{\partial p_i} dp_i \right\} = \sum_{i=1}^d p_i dx_i \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i \end{aligned}$$

- Die Legendre-Funktion (engl. Hamiltonian) mit  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \rightarrow \dot{q}(q, p, t)$   
für  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} > 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_{j0}} = 0 \rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_{j0}} = 0 \text{ (zyklische Koordinaten)}$$

## 4.2 Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

Es gilt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{mit Anfangsbedingungen}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{q}_j(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_j}(p, q, t) \\ \dot{p}_j(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}(p, q, t) \end{aligned} \rightarrow (p(t), q(t)) \text{ für gegebenen Anfangsbedingungen } (p(t_0), q(t_0))$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

- $\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} a$
- $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$
- $\frac{dH}{dt}(p(t), q(t), t) = \frac{\partial H}{\partial t}(p(t), q(t), t)$   
 Lösung der Hamilton-Bewegungsgleichung  
 $\Rightarrow$  für  $\frac{\partial H}{\partial t}(p, q, t) = 0 \Rightarrow H(p(t), q(t), t)$  ist Erhaltungsgröße (Energie)

*Beweis.* Freiheitsgrade  $f =: H(p, q, t) = \sum_{j=1}^f [q_j \dot{q}_j(q, p, t)] - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$

$$\begin{aligned} dH(p, q, t)|_P &= \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \Big|_P \\ \frac{df}{dx}(x) \equiv f'(x) &\equiv \sum_{j=1}^f \left( dp_j \dot{q}_j + p_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \right) \Big|_T \end{aligned}$$

mit  $\left( p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) d\dot{q}_j = 0$

$$\Leftrightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

Es folgt daraus dass

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} \quad \text{Hamilton I}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{Hamilton II}$$

Weiterhin

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} \underset{\dot{p}_j}{=} -\frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \underset{\dot{q}_j}{=} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

□

Es gilt: Sei  $q_1$  Zyklische Koordinate

$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \Rightarrow p_1$  Erhaltungsgröße:  $H(p_1 = c, p_2, \dots, p_f)$

### 4.3 Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip

Wenn  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t)$  (lokal) bijektiv ist

$$\begin{aligned} S &:= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^f p_j dq_j - H(q, p, t) dt \right\} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^f p_j(t) \dot{q}_j(t) - H(p(t), q(t), t) \right\} \leq \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad \text{Youngsche Ungleichung} \end{aligned}$$

$$\delta S[\gamma] = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^f p_j(t) \dot{q}_j(t) - H(p(t), q(t), t) \right\} = 0$$

Wobei der Weg  $\gamma : t \mapsto (p(t), q(t))$ .

Es gilt: Die Variation ist gleich 0:

$$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$$

bzw.  $p(t_0), p(t_1)$  beliebig

*Beweis.* betrachte virtuelle Verrückung  $(\delta p(t_1), \delta q(t_1))$

$$\begin{aligned} \delta S[\gamma] &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^f \left( \delta p_j(t) \dot{q}_j(t) + \underbrace{p_j(t) \delta \dot{q}_j(t)}_{= \frac{d}{dt} (p_j(t) \delta q_j(t) - \delta q_j(t) p_j(t) q_j(t))} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j(t) - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j(t) \right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^f p_j \delta q_j(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^f \delta q_j(t) \left( \dot{q}_j(t) - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \delta p_j(t) \left( -\dot{p}_j(t) - \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \right\} \stackrel{!}{=}_{\text{da } \delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0} 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned}$$

□

### 4.4 Phasenraum, Zustände, physikalische Variable

**Ausgangspunkt**  $H(p, q, t)$  kodiert mechanisches System

Raum =  $\{(p, q, t)\}$  Phasenraum

$\widetilde{\text{Raum}} := \{(p, q, t)\}$  erweiterter Phasenraum

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned} \Leftrightarrow \dot{z}^k = \sum_{l=1}^{2f} S_{kl} \frac{\partial H}{\partial z_l} = V_k(z)$$

$$V_k = \sum_{j=1}^{2f} \overset{\text{konvar.}}{\underset{\text{konvariantes}}{\text{Tensor}}} S_{kl} \frac{\partial H}{\partial z_l} \quad \text{kontravariantes Vektorfeld}$$

**Trajektorien**  $\dot{z}_k(t) = \sum_{l=1}^{2f} S_{kl} \frac{\partial H}{\partial z_l}(z)$  Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

**Zustand** (rein)  $z = (p, q)$  charakterisiert das mechanische System vollständig

**Physikalische Variable** Funktion über dem Phasenraum (z.B.  $H(z(t), t)$ )

**Physikalische Variable** (Zustandsgröße, physikalische Variable)  $H(z_0, t_0)$

**gemischte Zustände** Charakterisierung durch Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

$$P(z, t) \geq 0 \quad \int dz P(z, t_0) = 1$$

$$\langle F \rangle_{P(t_0)} = \int dz P(z, t_0) F(z, t_0)$$

### Zeitliche Entwicklung und Poisson Klammern:

Sie  $F(p, q, t)$  eine Physikalische Variable

$$\dot{q}_l = \{q_l, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad \dot{p}_l = \{p_l, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(p(t), q(t), t) &\stackrel{\text{H-B-Gl}}{=} \sum_{l=1}^f \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_l} \dot{p}_l + \frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l \right\} + \frac{\partial F}{\partial t}(p(t), q(t), t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(p(t), q(t), t) + \{F, H\} \end{aligned}$$

wobei  $\{F, G\} = \sum_{l=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right)$

$$= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

Neue Struktur: Über die Menge der physikalischen Variablen  $\{F(z)\}$  ist eine algebraische Struktur definiert

- gewöhnliche Multiplikation  $(FG)(z) := F(z)G(z)$  ist kommutativ
- Poisson-Klammern  $\{F, G\} := R(z) (= F \circ G)$  ist nicht kommutativ

### Eigenschaften der Poisson-Klammern

- $\{F, c\} = 0$  für  $\frac{\partial c}{\partial p_i} = \frac{\partial c}{\partial q_i} = 0$  für alle  $i = 1, \dots, f$
- $\{F, \alpha G_1 + \beta G_2\} = \alpha \{F, G_1\} + \beta \{F, G_2\}$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\{F, G\} = -\{G, F\} \Rightarrow \{F, F\} = 0$  antikommutativ
- $\{F, G_1 G_2\} = \{F, G_1\} G_2 + G_1 \{F, G_2\}$  (Produktregel)

$$\bullet \{F, \{G_1, G_2\}\} + \{G_1, \{G_2, F\}\} + \{G_2, \{F, G_1\}\}$$

→ Quantenmechanik: Heisenberg:  $p, q$  sind Matrizen → lineare Vektorraum Transformationen.

$$\{F, G\} \rightarrow [\hat{F}, \hat{G}] := \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}$$

**Beispiel:** Poisson-Klammer-Strukturen  $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} := \{\vec{a}, \vec{b}\} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

**Entwicklung**

$$\begin{aligned} F(p(t), q(t)) &= F(p(t_0), q(t_0)) + (t - t_0) \underbrace{\left. \frac{dF}{dt} \right|_{t_0}}_{=-\{H, F\}_{t_0}} + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \underbrace{\left. \frac{d^2 F}{dt^2} \right|_{t_0}}_{=(-1)^2 \{H, \{H, F\}_{t_0}} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t - t_0)^n}{n!} \underbrace{\{H \{H \{ \dots \{H, F\} \dots \}\}}_{n\text{-mal}}|_{t_0} \end{aligned}$$

#### 4.4.1 Erhaltungsgrößen

$$\stackrel{!}{=} \frac{dF}{dt}(p(t), q(t), t) = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Es gilt der Poissonsche Satz: Seien  $F_1$  und  $F_2$  Erhaltungsgrößen:  $\Rightarrow \{F, G\}$  ist Erhaltungsgröße

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{F_1, F_2\} &= \{\{F_1, F_2\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{F_1, F_2\} \\ &= -\{H, \{F_1, F_2\}\} + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} \\ \text{Mit Jacobi-Id} &= \{F_1, \{F_2, H\}\} + \{F_2, \{H, F_1\}\} + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} \\ &= \underbrace{\{F_1, \{F_2, H\} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\}}_{=0} + \underbrace{\left\{ F_2, \underbrace{\{H, F_1\}}_{=-\{F_1, H\}} - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right\}}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

#### Erhaltungsgröße eines dreien nicht relativistischen Massepunkts

Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \{q_i, p_k\} &= \delta_{ik} \\ \{q_i, q_k\} &= \{p_i, p_k\} = 0 \\ H &= \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} \end{aligned}$$

1. Impulserhaltung

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^3 \{p_i, p_k, p_k\} = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^3 \underbrace{\{p_i, p_k\}}_{=0} p_k + p_k \underbrace{\{p_i, p_k\}}_{=0} = 0$$

2. Energieerhaltung

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 \quad \text{da} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

3. Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \qquad L_i = \sum_{l,k=1}^3 \epsilon_{ilk} x_l p_k$$

$$\frac{dL_i}{dt} = \{L_i, H\} = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^3 \{L_i p_k p_k\} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^3 \{L_i, p_k\} p_k = \frac{1}{m} \sum_{k,b=1}^3 \epsilon_{ikb} p_k p_b = 0$$

7 Erhaltungsgrößen in 6 dim  $\Rightarrow$  min 2 sind Abhängig *Hier fehlt was!*

## 4.5 Die Poincare-Cartan Invariante

erweiterter Phasenraum  $\{(p, q, t)\}$ , geschlossener Weg  $C : \lambda \in [0, 1] \mapsto (p(\lambda), q(\lambda), t(\lambda))$ .

$$\begin{aligned} I(C) &= \oint_C \left\{ \sum_{i=1}^f p_i(\lambda) \frac{dq_i}{d\lambda} - H(p(\lambda), q(\lambda), t(\lambda)) \frac{dt}{d\lambda} \right\} d\lambda \\ &= \oint_C \sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt \\ &= I(C') \end{aligned}$$

Ist äquivalent zu

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

**Konsequenz** Die Koordinaten  $(P, Q, T), K(P, Q, T), S(P, Q, T)$  hängen von  $(p, q, t)$  und  $H(p, q, t)$  ab, sodass wenn

$$\sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^f P_i dQ_i - K dT + dS$$

Dann folgt durch die Poincare-Cartan Invariante (P-C-I) und durch  $\oint_C dS = 0$  die Äquivalenz zwischen

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} &\Leftrightarrow \frac{dQ_i}{dT} &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} &\Leftrightarrow \frac{dP_i}{dT} &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

**Beweisidee** betrachte eine beliebige (glatte) Abbildung  $s \in [0, \dots)$  und  $(P(p, q, t), Q(p, q, t), T(p, q, t))$  und  $\tilde{H}(P, Q, T) := H(p(P, Q, T), q(P, Q, T), t(P, Q, T))$ . Wir betrachten die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} P_i &= p_i + s\dot{P} + O(s^2) \\ Q_i &= q_i + s\dot{Q} + O(s^2) \\ T &= t + s\dot{T} + O(s^2) \end{aligned}$$

Durch einsetzen diese in die PCI

$$\begin{aligned} I(C') &= \oint_{C'} \sum_{i=1}^f P_i dQ_i - \tilde{H} dT \\ &= \oint \sum_{i=1}^f (p_i + s\dot{P}_i)(dq_i + s\dot{Q}_i) - \left( H + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} s\dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} s\dot{Q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} s\dot{T} \right) (dt + s\dot{T}) + O(s^2) \\ &= \left( \oint_{C'} \sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt \right) \\ &\quad + s \oint_{C'} \left\{ \sum_{i=1}^f \left( \dot{P}_i dq_i + p_i d\dot{Q}_i - \dot{Q}_i dp_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{P}_i dt - \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{Q}_i dt - \frac{\partial H}{\partial t} \dot{T} dt \right) - H d\dot{T} \right\} + O(s^2) \end{aligned}$$

wobei  $p_i d\dot{Q}_i = d(p_i \dot{Q}_i) - \dot{Q}_i dp_i$  und  $H d\dot{T} = d(H\dot{T}) - \dot{T} dH$

Durch Ordnen der Summe

$$\begin{aligned} &= \oint_{C'} \left( \sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt \right) + \underbrace{\oint_{C'} d(p_i \dot{Q}_i) - d(\tilde{H} \dot{T})}_{=0} \\ &\quad + s \underbrace{\oint \sum_{i=1}^f \left\{ \dot{P}_i \left( dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) + \dot{Q}_i \left( -dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right) + \dot{T} \left( -\frac{\partial H}{\partial t} + d\tilde{H} \right) \right\}}_{=\tilde{I}} + O(s^2) \end{aligned}$$

Fall 1: Gelte für die Kurve, dass  $dt \equiv \frac{dt}{d\lambda} d\lambda = 0$

$$\tilde{I} = \oint_C \sum_{i=1}^f (\dot{P}_i + \dot{T} \frac{\partial dH}{\partial d q_i}) dq_i + (-\dot{Q}_i + \dot{T} \frac{\partial H}{\partial p_i}) dp_i \stackrel{!}{=} 0$$

Ist äquivalent zu

$$\frac{dp_i}{dt} \equiv \frac{\frac{dP}{ds} \big|_{s=0}}{\frac{dT}{ds} \big|_{s=0}} = \frac{\dot{P}_i}{\dot{T}} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \frac{\dot{Q}_i}{\dot{T}} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}$$



## 4.6 Kanonische Transformationen

Sei  $z$  die ...

$$z_i = (p, q)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{k=1}^{2f} S_{ik} \frac{\partial H}{\partial z_k} = \{z_i, H\}$$

und gebe es eine Transformation  $Z(z)$ , sodass

$$Z(z) \mapsto \dot{Z}_I \tilde{S}^{(ik)} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Z_k} = \{Z_i, \tilde{H}\}$$

$$\tilde{S}_{ik} = \sum_{a,b=1}^{2f} \frac{\partial Z_i}{\partial z_a} A_{ab} \frac{\partial Z_k}{\partial z_b} \tilde{H}(Z := H(z(Z)))$$

Wenn  $S_{ik} = \tilde{S}_{ik}$ , dann herrscht formale "Gleichheit" der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Kanonische Transformationen (erhalten die Poissonklammern) und es gilt  $S_{ik} = \{z_i, z_k\}$

**Eigenschaften kanonischer Transformationen:**  $z \leftrightarrow Z$  ist kanonisch  $\Leftrightarrow$

1.  $\int_{G'} \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik}^{-1} dZ_i dZ_k = \int_G \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik}^{-1} dz_i dz_k$  für alle  $G(G')$  im Phasenraum

*Beweisidee.* Sei  $z \leftrightarrow Z$  beliebig:

$$\begin{aligned} \int_G \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik} dz_i dz_k &= \int_{G'} \sum_{i,k=1}^{2f} \tilde{S}_{ik} dZ_i dZ_k \\ &= \int_{G'} \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik} dZ_i dZ_k \end{aligned}$$

□

2.  $\oint_{\partial G} \sum_{i=1}^f p_i dq_i = \oint_{\partial G'} \sum_{i=1}^f P_i dQ_i$  für alle  $\partial G(\partial G')$

*Beweisidee.*

$$\int_G \sum_{i,k=1}^{2f} S_{ik} \frac{\partial z_i}{\partial u} \frac{\partial z_k}{\partial v} du dv = \sum_{i=1}^f \int du dv \left( \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial v} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right)$$

Wir wählen  $u_{<} \leq u \leq u_{>}$  und  $v_{<} \leq v \leq v_{>}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^f \left\{ \int dv p_i \frac{\partial q_i}{\partial v} \Big|_{u_{<}}^{u_{>}} - \int du dv p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial u \partial v} \right. \\
&\quad \left. - \int du dv p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial u \partial v} \Big|_{v_{<}}^{v_{>}} + \int du dv p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial u \partial v} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^f \oint p_i dq_i
\end{aligned}$$

□

3. Aus (2) folgt:

Wenn  $\sum_{i=1}^f p_i dq_i = \sum_{i=1}^f P_i dQ_i + d\tilde{S}$  für die erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation  $\tilde{S}(P, Q) = S(p(P, Q), q(P, Q))$ , dann gilt  $z \leftrightarrow Z$  ist kanonisch.

*Beweis.* Es existiert eine erzeugende Funktion kanonischer Transformationen  $S(P, Q, t) = S(P(p, q, t), Q(p, q, t), t)$  sodass:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^f p_i dq_i &= \sum_{i=1}^f \left( P_i dQ_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right) \\
\oint_{\partial G} \sum_{i=1}^f p_i dq_i &\equiv \oint_{\partial G} \sum_{i=1}^f P_i dQ_i + \underbrace{\oint_{\partial G'} \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right)}_{=0}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
I(c) &:= \oint_C \sum_{i=1}^f p_i dq_i - H(p, q, t) dt \\
&= \oint_{C'} \sum_{i=1}^f P_i dQ_i - \underbrace{\left( H(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right)}_{=: \tilde{H}(P, Q, t)} dt \\
&\quad + \underbrace{\oint_C \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right)}_{=0} + \frac{\partial S}{\partial t} dt
\end{aligned}$$

□

*Bemerkung.* Es gilt:

Hamilton-Dynamik mit  $(p, q; H(p, q, t)) \Leftrightarrow$  Hamilton-Dynamik mit  $(P, Q; k(P, Q, t))$   
 $(p, q) \leftrightarrow (P, Q)$  mit  $K(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t)) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}(P, Q, t)$  ist kanonisch (Newtonsche Zeilt  $t$  wird nicht transformiert)

### Verbindung zur Poincare-Cartan Invariante

Sei eine kanonische Transformation  $z \leftrightarrow Z$  bzw  $(p, q, t) \leftrightarrow (P, Q, T)$  gegeben, dann gilt

$$\oint_C \sum_{i=1}^f p_i dq_i - H dt = \oint_{C'} \sum_{i=1}^f P_i dQ_i - \tilde{H} dt + d\tilde{S}$$

und

$$\sum_{i=1}^f p_i dq_i = \sum_{i=1}^f \left( P_i dQ_i + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial Q_i} dQ_i \right)$$

sodass  $\boxed{H = \tilde{H} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}}$

#### 4.6.1 Erzeugende Funktionen und kanonische Transformationen

Ausgangspunkt: kanonische Transformation  $(p, Q) \leftrightarrow (P, Q)$  mit erzeugender Funktion  $\tilde{S}(P, Q, t) \equiv S(p, q, t)$ .

Lokal ist  $\det \frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)} \neq 0$ . Existiert eine Transformationsformel?

Sei  $(p, q) \leftrightarrow (P, Q) \leftrightarrow (q, Q)$ . Daraus definieren wir  $S_2(q, Q, t) := \tilde{S}(P(q, Q, t), Q, t)$ .

$$\sum_{i=1}^f \left\{ p_i dq_i - P_i dQ_i - \frac{\partial S_2}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial S_2}{\partial Q_i} dQ_i \right\} = 0$$

$(q, Q)$  sind Koordinaten. Daraus folgt  $dq_i, dQ_i$  sind linear unabhängig:

$$p_i = \frac{\partial S_2}{\partial q_i}(q, Q, t) \quad P_i = -\frac{\partial S_2}{\partial Q_i}(q, Q, t)$$

Wahl  $(p, q) \leftrightarrow (P, Q)$  ist nicht immer möglich (zB. id:  $q_i = Q_i, p_i = P_i$ )

#### 4.6.2 Kontinuierliche kanonsche Transformationen

Sei  $g_\epsilon(q, p) \rightarrow (P, Q)$  stetig aus den Einheitstransformationen erzeugbar, also erzeugt aus

$$S_3(P, q, t, \epsilon) = \sum_{i=1}^f P_i q_i + \epsilon F(P, q, t, \epsilon)$$

Für die erzeugende Funktion  $F(p, q, t)$  gilt

$$\frac{dp_i}{d\epsilon} = -\frac{\partial F}{\partial q_i} \quad \frac{dq_i}{d\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$\begin{aligned} g_\epsilon : \quad p_i &= \frac{\partial S_3}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q_i}(P, q, t, \epsilon) \\ \Rightarrow \frac{dp_i}{d\epsilon} &= \frac{P_i - p_i}{\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}(P, q, t, \epsilon=0) = -\frac{\partial F}{\partial q_i}(p, q, t, \epsilon=0) \\ Q_i &= \frac{\partial S_3}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial P_i}(P, q, t, \epsilon) \\ \Rightarrow \frac{dq_i}{d\epsilon} &= \frac{Q_i - q_i}{\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial F}{\partial P_i}(P, q, t, \epsilon=0) = \frac{\partial F}{\partial p_i}(p, q, t, \epsilon=0) \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Einene Spezialfall der Erzeugenden Funktion stellt die Zeitliche Entwicklung dar:

Wenn  $\epsilon \rightarrow t$  dann ist  $F \rightarrow H$  einen kontinuierliche Kanonische Transformation.

#### 4.6.3 Symmetrietransformationen

##### Definition einer Symmetrietransformation

$$\begin{array}{ccc} z = (p, q) & \xrightarrow[H]{h_t} & (p_t, q_t) & \Leftrightarrow \{F, H\} = 0 \\ g_\epsilon \downarrow F & & g_\epsilon \downarrow F & \\ z_\epsilon = (P(\epsilon), Q(\epsilon)) & \xrightarrow[h_t]{H} & (P_t(\epsilon), Q_t(\epsilon)) & \end{array}$$

Sei  $F(p, q)$  explizit Zeitunabhängig  $\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \{F, H\} = 0$

*Beweis.*

$$h_t(g_\epsilon(z)) = M_1$$

$$h_t(h_t(z)) = M_2$$

Durch verwenden der Jacobi Identität:

$$M_1 - M_2 = \epsilon t \{z, \{F, H\}\} + O(\epsilon^2, t^2, \epsilon t)$$

□

**Beispiele:** freie Teilchen mit  $H(p, q, t) \frac{\vec{p}^2 2}{2m}$

Erhaltungsgröße  $\stackrel{?}{\Rightarrow}$  Symmetrietransformation

$$\{H, p_i\} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{i_0}(p, q, t) \equiv p_{i_0}$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\epsilon} = \vec{e}_{i_0} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\epsilon} = \vec{e}_{i_0} \times \vec{x}$$

$$\frac{dq_i}{d\epsilon} = \frac{\partial F_{i_0}}{\partial p_i} = \delta_{ii_0}$$

$$\frac{dp_i}{d\epsilon} = -\frac{\partial F_{i_0}}{\partial q_i} = 0$$

#### 4.6.4 Hamilton-Jakobische Differentialgleichung

Es gilt: nicht partielle DGL 1. Ordnung  $\leftrightarrow$  Hamiltonisches System von gewöhnlichen DGLs

kanonische Transformation in ein Hamilton System:  $(p, q) \leftrightarrow (P, Q)$ .

Es existiert eine erzeugende Funktion  $S(P, Q, p, q, t)$ , sodass

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial P} \qquad P = \frac{\partial S}{\partial Q}$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} & \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{q} &= -\frac{\partial H}{\partial q} & \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial P} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

Es folgt die H-J-DGL:

$$K = 0 = H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

**Beispiel.** Der Freie Massenpunkt:

$$H(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2M}$$

H-J-DGL:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, x_j, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = K = \frac{1}{2}M(\vec{\nabla}_{\vec{x}}S)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$$

Damit das problem eindeutig gelöst werden kann nehmen wir an, dass  $S(\vec{P}, \vec{x}, t = 0)$  vorgegeben ist.

Nun suchen wir eine Lösung mit dem Separationsansatz:  $S(\vec{P}, \vec{x}, t) = W(\vec{P}, \vec{x}) + \eta t$ .

Es ergibt sich eine reduziertes Problem:

$$\frac{1}{2M}(\vec{\nabla}_{\vec{x}}S)^2 + \eta = 0$$

Es folgt, als mögliche Lösung  $W(\vec{P}, \vec{x}) = \vec{P}\vec{x}$ , sodass  $\eta = -\frac{\vec{P}^2}{2M}$

$$S(\vec{P}, \vec{x}, t) = \vec{P}\vec{x} - \frac{\vec{P}^2}{2M}t$$

erfüllt die H-J-DGL mit  $S = \vec{P}\vec{x}$ , sodass

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial x_i} = P_i \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i} = x_i - \frac{P_i}{M}t \\ x_i &= Q_i + \frac{P_i}{M} \\ p_i &= P_i \end{aligned}$$

**Hamilton gl zu H-J-DGL** Löse die Hamiltonsche Bewegungsgleichung mit vorgegebenem  $S_0(\vec{x})$

#### 4.6.5 Auf den Spuren von Erwin Schrödinger

Schrödinger Gleichungen: Punktquant im äußeren Potenzial

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\vec{x}} + V(\vec{x}, t) \right\} \Psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{x}, t)$$

Kurzwellenasymptotik  $\hbar \rightarrow 0$  für kleine Wellenlängen

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, t) &= A e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, t)} \\ (\vec{\nabla} \Psi)(\vec{x}, t) &= \frac{i}{\hbar} (\vec{\nabla} S) \Psi(\vec{x}, t) \\ (\vec{\nabla} \Psi)(\vec{x}, t) &= \frac{i}{\hbar} (\Delta S) \Psi(\vec{x}, t) + \left( \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S \right)^2 \Psi(\vec{x}, t) \\ |(\vec{\nabla} S)^2| &\gg |\hbar \Delta S| \end{aligned}$$

Also folgt für kleine Wellenlängen

$$\frac{1}{2M} (\vec{\nabla}_{\vec{x}} S)^2 + V(\vec{x}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Die allgemeine Lösung ist  $\Psi(x, t=0) = A e^{\frac{i}{\hbar} S_0(x)} := \phi(x)$ .

Mit der H-J-DGL bauen wir  $A$  zu  $A(\vec{x}, t)$  aus, sodass

$$\Psi(Q, t) = \sum_j \phi(q_0^{(j)}) \frac{1}{\det(\frac{\partial Q}{\partial q_0})_j} e^{\frac{i}{\hbar} S_j(Q, t) - \frac{i}{2} \pi \mu_j}$$

Wobei  $\mu$  den sog. Morse Index bezeichnet.

**Grenzwert  $\hbar$  gegen 0**

## 5 Der starre Körper

### 5.1 Der starre Körper als Mechanisches Vielteilchensystem

**Definition** Zwangsbedingungen:  $|\vec{x}^{(i)} - \vec{y}^{(j)}| = C_{ij}$   $i, j \in \{1, \dots, N\}$

- zeitunabhängig für alle Massepunkte
- Holonom

*Bemerkung.* • Es gibt keine innere Dynamik

- kontinuierliche starre Körper durch kontinuums Limes  
Abstände bleiben im Körperfesten Bezugssystem Konstant.  
 $3 + 3(N-3) = 3N - 6$  unabhängige Zwangsbedingungen.
- $N$  Massenpunkte  $\rightarrow 3N$  Koordinaten für die Positionierung.  
Die Anzahl der Freien Parameter ist jedoch  $3N - (3N - 6) = 6$  unabhängig von  $N$

## 5.2 Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art:

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2(t) + \vec{F}_i(t) \cdot \vec{x}_i(t) + \sum_{l,m \in I} \lambda_{lm}(t) (|\vec{x}_l(t) - \vec{x}_m(t)| - c_{lm}) \right\}$$

### Bewegungsgleichungen

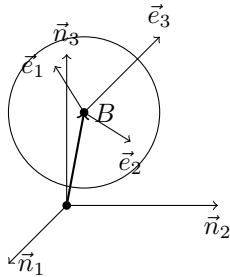
$$\frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{x}}_i(t) = \vec{F}_i(t) + \underbrace{\sum_{i,m \in I} \lambda_{im}(t) \frac{\vec{x}_i(t) - \vec{x}_m(t)}{|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_m(t)|} - \sum_{l,i \in I} \frac{\vec{x}_l(t) - \vec{x}_i(t)}{|\vec{x}_l(t) - \vec{x}_i(t)|}}_{=\vec{Z}_i(t)}$$

•

### Kontaktbedingungen

- Gleiten: Zwangskraft steht orthogonal auf der Kontaktfläche
- Rollen: verschwindende Relativgeschwindigkeit

## 5.3 Lagrange Methode 2. Art



- 6 Freiheitsgrade
- Bezugssystem B im starren Körper  $B \leftrightarrow \vec{R}(t)$   
entspricht der Position des Körpers
- $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  charakterisiert ein körperfestes Orthonormalsystem  
 $\Rightarrow \vec{x}^{(i)}(t) = \vec{R}(t) + \sum_{r=1}^3 b_r^{(i)} \vec{e}_r$
- Die Transformation  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \leftrightarrow \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$  ist von 3 Parametern abhängig und eine Drehung.
- $\vec{e}_l = \sum_{r=1}^3 \vec{n}_r D_{rl}(\vec{\varphi}(t))$ .

**Drehungen** Eine Drehung wird beschrieben, indem mit  $|\vec{\varphi}| = \varphi$

$$D(\vec{\varphi} \vec{x}) = (\cos \varphi) \vec{x} + \sin \varphi \frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \times \vec{x} + (1 - \cos \varphi) \frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \left( \frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \cdot \vec{x} \right)$$

Sodass allgemein für  $D(\varphi)$  gilt:

$$D(\vec{\varphi}) = \cos \varphi \cdot \mathbb{K} + \sin \varphi \frac{\vec{\varphi}}{\varphi} + (1 - \cos \varphi) \frac{\vec{\varphi}}{\varphi} \times \frac{\vec{\varphi}}{\varphi}$$

Charakteristische Eigenschaften:

- $D^{-1}(\vec{\varphi}) = D^T(\vec{\varphi}) = D(-\varphi)$
- $\dot{\vec{e}}_l(t) = \sum_{r=1}^3 \vec{n}_r \dot{D}_{rl}(\vec{\varphi}) = \dot{\vec{\varphi}} \times \vec{e}_l := \vec{\omega}$

**Parametrisierung durch Euler Winkel**  $\vec{\alpha} \leftrightarrow (\varphi, \theta, \psi)$

Wir zerlegen also in 3 Drehungen

- $\{\vec{n}_i\} \xrightarrow{D^{(1)}} \{\vec{n}_j'\}$
- $\{\vec{n}_j'\} \xrightarrow{D^{(2)}} \{\vec{n}_j''\}$
- $\{\vec{n}_j''\} \xrightarrow{D^{(3)}} \{\vec{e}_l\}$

$$D_{rl}(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

### 5.3.1 Lagrange Funktion

$$L(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, \vec{\Omega}) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2$$

Weiterhin gilt:

$$\vec{x}^{(i)}(t) = \vec{R}(t) + \sum_{r=1}^3 b_r^{(i)} \vec{e}_r(t) \dot{\vec{x}}^{(i)}(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \sum_{r=1}^3 b_r^{(i)} \underbrace{\dot{\vec{e}}_r(t)}_{=\vec{\Omega}(t) \times \vec{e}_r(t)}$$

Sodass:

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + (\dot{\vec{R}} \times \vec{\Omega}) \cdot (\vec{X}_s - \vec{R})M + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 \underbrace{(\vec{\Omega} \vec{e}_k) I_{kl} (\vec{\Omega} \vec{e}_l)}_{:=\Omega \cdot (I \vec{\Omega})}$$

Der sog Trägheitstensor  $I$  wird definiert als

$$I := \sum_{l,k=1}^3 I_{kl} \vec{e}_k \times \vec{e}_l$$

Wobei  $I_{kl}$  definiert ist als

$$I_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{r=1}^3 (b_r^{(i)})^2 \delta_{kl} - b_k^{(i)} b_l^{(i)} \right)$$

in körperfester Orthonormalbasis, zeitunabhängig.  $I$  ist also nur abhängig von der Wahl von  $\vec{R}$  und  $\{\vec{e}_i\}$ .

Die Trägheitsmatrix/ der Trägheitstensor kodiert die Struktur des Starren Körpers.



**Steinersche Satz** Für  $I$  mit Bezugspunkt  $\vec{R}$  und  $I'$  mit Bp.  $\vec{R} + \vec{a}$  gilt:

$$I'_{kl} = I_{kl} + M \left( \delta kl (\vec{a})^2 - (\vec{a} \vec{e}_k)(\vec{a} \vec{e}_l) \right)$$

## 5.4 Der freie starre Körper

**Definition.** Ein starrer Körper heißt **frei**, wenn nur die Zwangskräfte wirken.

**Definition.** Ein freier starrer Körper heißt **Kreisel**, wenn nur ein Punkt fest ist.

### 5.4.1 Erhaltungsgrößen

$$L = \sum_{i=1}^N m^{(i)} \frac{\dot{\vec{x}}^{(i)2}}{2} + \underbrace{\sum_{i,j} \lambda_{ij} \left( |\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(j)}| - C_{ij} \right)}_{L_z}$$

**Translationen im Ort**

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(i)'} &= \vec{x}^{(i)} + \epsilon \vec{a} \\ t' &= t \\ L' &= L \end{aligned}$$

Es folgt dass

$$\begin{aligned} \vec{P}_i &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}^{(i)} = M \dot{\vec{X}}_S \\ E &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^N a_j m_i \dot{x}_j^{(i)} = \vec{a} \vec{P} \end{aligned}$$

Sodass

$$\dot{\vec{P}} = 0$$

**Translation in der Zeit** Sei  $\phi = 1, \psi_i = 0, L = L'$ . Dann

$$E = - \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\dot{\vec{x}}^{(i)2}}{2} - \dot{\vec{x}}^{(i)2} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}^{(i)2}$$

**Veränderung der Geschwindigkeit** Sei  $\vec{x}^{(i)'} = \vec{x}^{(i)} + \epsilon \vec{v} t$ . Wir bezeichnen  $\vec{v} t$  als  $\vec{\psi}$ . Sei zusätzlich  $t' = t$ .

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{x}}^{(i)} + \epsilon \vec{v})^2 + L_z = L + \epsilon \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}^{(i)} \right) \cdot \vec{v}$$

### 5.4.2 Dynamik des asymmetrischen starren Körpers

wähle  $\vec{R} = \vec{X}_s = \vec{O}$ . und  $I_{11} < I_{22} < I_{33}$

**Mehtode.** *Erhaltungsgrößen:*

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(\vec{\Omega} I \vec{\Omega}) = \sum_{i=1}^3 \vec{I}_{ii} \vec{\Omega}_{ii}$$

### 5.4.3 Dynamik des freien Symmetrischen Kreisels

## 5.5 Der starre Körper im homogenen Schwerfeld/unter dem Einfluss äußerer Kräfte

### 5.5.1 Rotation um eine raumfeste Drehachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

**Problemstellung** Betrachte eine einfache Bewegung eines starren Körpers mit  $\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}_0 \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}}(t) = \ddot{\vec{\Omega}}(t) = \dots = 0$ .

Welche Kräfte sind zur Aufrechterhaltung der Bewegung erforderlich? (ohne Kräfte möglich?)

Sei  $\{\vec{e}_j\}$  ein körperfestes Orthonormalsystem. Dann

$$\begin{aligned}\vec{x}^{(i)} &= \vec{R}(t) + \sum_{j=1}^3 b_j^{(i)} \vec{e}_j \\ \dot{\vec{x}}^{(i)}(t) &= \dot{\vec{R}}(t) + \sum_{j=1}^3 b_j^{(i)} \vec{\Omega}_0 \times \vec{e}_j(t) \\ \ddot{\vec{x}}^{(i)}(t) &= m_i \ddot{\vec{R}}(t) + \sum_{j=1}^3 m_i j_j^{(i)} \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{e}_j(t))\end{aligned}$$

Es folgt für die Gesamtkraft

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{x}}_i &= M \ddot{\vec{R}}(t) + \vec{\Omega}_0 \times \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 m_i b_j^{(i)} \vec{e}_j(t) \right) \\ &= M \ddot{\vec{R}}(t) + \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times (\vec{x}_s - \vec{R}))\end{aligned}$$

o.B.d.A: Sei  $\vec{R}$  auf der Drehachse  $\Rightarrow \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$

$$= \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times (\vec{x}_s - \vec{R})) M \quad \text{Unwucht erster Art}$$

**Drehimpulsbilanz**  $\vec{R}(t) = \vec{x}_s$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= M \vec{x}_s \times \vec{x}_s + I \vec{\Omega} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= M \vec{x}_s \times \ddot{\vec{x}}_s + \sum_{k=1}^3 \vec{\Omega}_0 \times \vec{e}_k(t) I_{kl} (\vec{\Omega}_0)_l = \vec{N}\end{aligned}$$

Sei die Unwucht 1. Art beseitigt ( $\vec{x}_s$  auf Drehachse  $\Leftrightarrow \ddot{\vec{x}}_s = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ )  
Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{\Omega}_0 \times \vec{L}_{rel} & \vec{L}_{rel} &= I\vec{\Omega}_0 \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= 0 \Rightarrow \vec{\Omega}_0 \parallel \vec{L}_{rel} & \vec{L}_{rel} &= I\vec{\Omega}_0 = \alpha\vec{\Omega}_0\end{aligned}$$

Ist also eine Drehung um eine Hauptträgheitsachse

### 5.5.2 Der schwere Kreisel

Ein Kreisel im homogene Schwerfeld ( $V(\vec{x}^{(i)}) = -m_i \vec{g} \vec{x}^{(i)}$ ).  
Lagrange Methode 2. Art:

$$L = \frac{M}{2} \dot{\vec{x}}_s^2 + \frac{1}{2} (\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}) - \sum_{i=1}^N V(\vec{x}^{(i)}) + \text{Zwbedg}$$

Entlang der Hauptträgheitsachsen

$$(\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}) = \sum_{j=1}^3 \Omega_j I_{jj} \Omega_j$$

verwende Eulerwinkel  $(\varphi, \theta, \psi)$

$$L = \frac{1}{2} (I_{11} M b_3^{(P)^2}) (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_{33} (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta) + M g b_3^{(P)} \cos \theta - M g \cos \theta - M g \vec{n}_3 \vec{C}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 & \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_{11} + M b_3^{(P)^2}) \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_{33} \cos^2 \theta \dot{\varphi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta & := A = \vec{L} \vec{n}_3 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 & \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) & := B = \vec{L} \vec{e}_3 \\ \frac{\partial L}{\partial t} = 0 & \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L & := E = L_2 - L_1\end{aligned}$$

Einsetzen der Erhaltungsgrößen in  $L$ :

$$\dot{\psi} = \frac{B}{I_{33}} - \dot{\varphi} \cos \theta \quad \dot{\varphi} = \frac{A - B \cos \theta}{\sin^2 \theta [I_{11} + b_3^{(P)^2}]}$$

$$E = \frac{1}{2} (I_{11} + M b_3^{(P)^2}) \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$$

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(A - B \cos \theta)^2}{2(I_{11} + M b_3^{(P)^2}) \sin^2 \theta} + \frac{B^2}{2I_{33}} - M g b_3^{(P)} \cos \theta$$

...

- $\theta(t) = \theta_0, \dot{\varphi} = \frac{A - B \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0 I'_{11}}$ :  
reine Präzessionsbewegung, keine Nutation
- $U_{eff}(\theta) = U_{eff}(\theta_0) + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2 U''_{eff}(\theta_0) + O((\theta - \theta_0)^3)$ ,  
 $E = \frac{1}{2} I'_{11} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2 U''_{eff}(\theta_0) \rightarrow$  harmonische Schwingung um  $\theta_0$

**Spezialfall**  $\theta \approx 0$  Gibt es eine Bewegung mit  $\theta(t) = 0$ ?

Existiert nur für spezielle Werte von  $A, B$ .

Sei  $A = B, |\theta| \ll 1$

$$U_{eff}(\theta) \rightarrow \frac{(A - B(1 - \frac{\theta}{2}))}{2I'_{11}\theta^2} + \frac{B^2}{2I_{33}} - Mgb_3^{(P)}(1 - \frac{\theta^2}{2}) + O(\theta^3) = \left( \frac{B^2}{2I'_{11}} \frac{1}{4} + Mgb_3^{(P)} \frac{1}{2} \right) \theta^2 + \frac{B^2}{2I_{33}} - Mgb_3^{(P)}$$

Es ergibt sich eine harmonische Schwingung mit  $\omega > 0$ :

$$\omega^2 := \frac{\frac{B^2}{8I'_{11}} + \frac{Mg}{2} b_3^{(P)}}{\frac{1}{2} I'_{11}}, \quad B = \vec{L} \vec{n}_3 = \vec{L} \cdot \vec{e}_3$$

Eine instabile Dynamik für  $\omega^2 < 0$  mit  $b_3^{(P)} = -|b_3^{(P)}|$ :

$$\frac{B^2}{8I'_{11}} < \frac{Mg}{2} |b_3^{(P)}|$$