Assignment 6
Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410
Daniel Kocher, 0926293

April 26, 2016

Aufgabe 11

i.) Fügen Sie die Schlüssel f, g, h, e, b, a, c in einen (anfangs leeren) Treap ein. Die Prioritäten dieser Schlüssel sind wie folgt gegeben: $a : 8$, $b : 15$, $c : 2$, $e : 3$, $f : 7$, $g : 6$, $h : 25$, $i : 22$, $j : 19$, $k : 13$.

ii.) Entfernen Sie e aus dem Treap.

iii.) Fügen Sie die Schlüssel i, j, k in einen anderen (anfangs leeren) Treap ein. Vereinigen Sie anschließend die zwei Treaps.

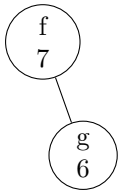
iv.) Führen Sie $Spalte\,(T, d, T_1, T_2)$ durch, wobei T der Treap aus dem vorigen Punkt ist.

Geben Sie den Treap vor und nach jeder Rotation an.

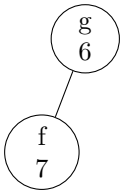
Für den Pseudocode bzw. die grundlegenden Vorgehensweise der Operationen Suchen, Einfügen, Rotiere-NachLinks/Rechts, Entfernen, Vereinige und Spalte, sei auf die Folien vom 14.04.2016 verwiesen.

i.)Fügen Sie die Schlüssel f, g, h, e, b, a, c in einen (anfangs leeren) Treap ein. Die Prioritäten dieser Schlüssel sind wie folgt gegeben: $a : 8$, $b : 15$, $c : 2$, $e : 3$, $f : 7$, $g : 6$, $h : 25$, $i : 22$, $j : 19$, $k : 13$.

Insert g_6:

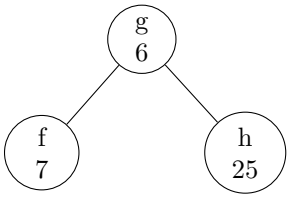


(a) Vorher



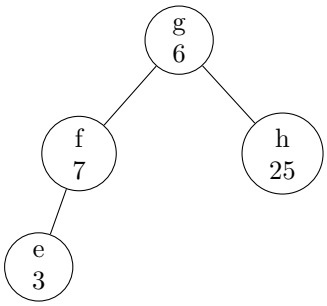
(b) Nachher

Insert h_{25}:

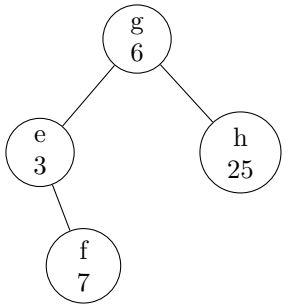


(a) Keine Rotation notwendig

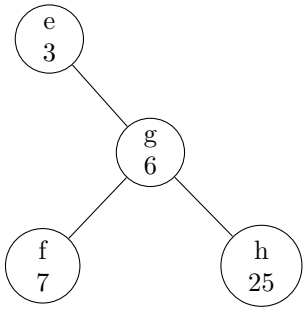
Insert e_3:



(a) Vorher

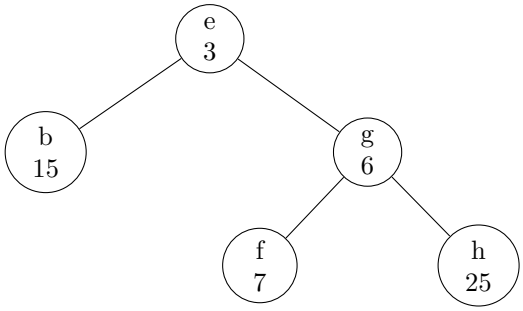


(b) nach: RotiereNachRechts(f_7)



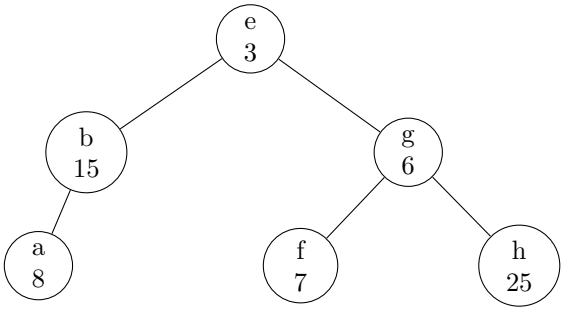
(c) Nachher (nach: RotiereNachRechts(g_6))

Insert b_{15}:

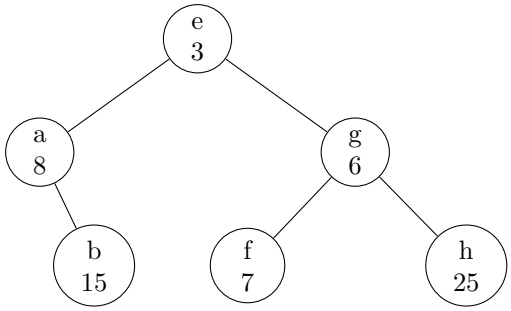


(a) Keine Rotation notwendig

Insert a_8:

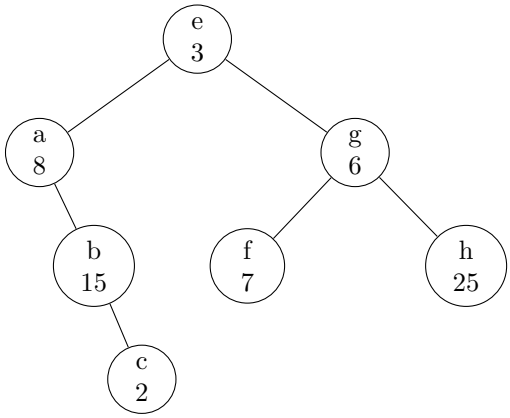


(a) Vorher

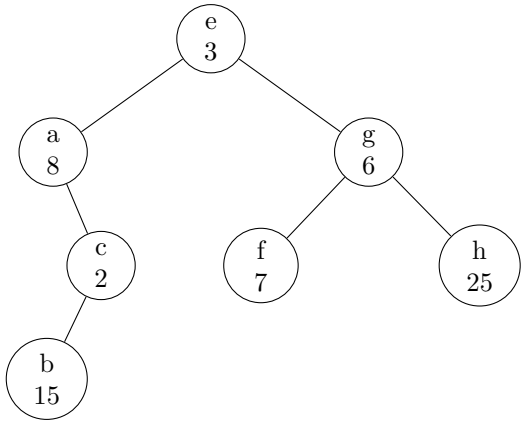


(b) Nachher (nach: RotiereNachRechts(b_{15}))

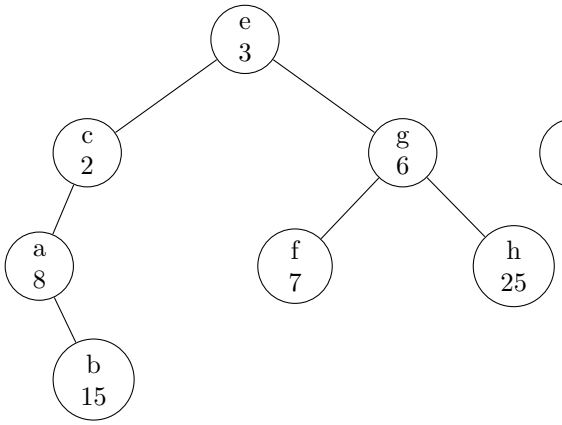
Insert c_2:



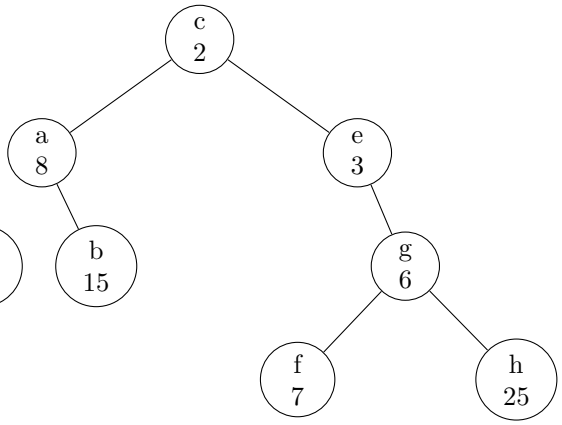
(a) Vorher



(b) nach: RotiereNachLinks(b_{15})

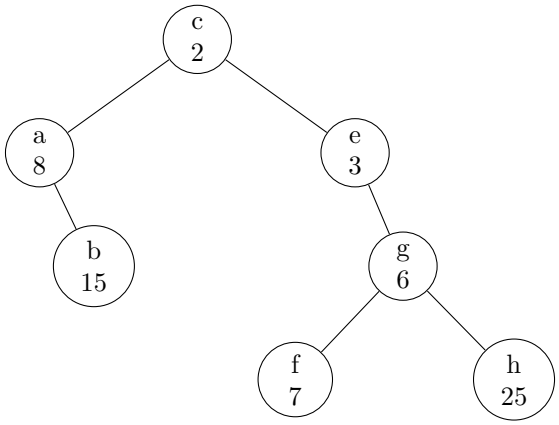


(c) nach: RotiereNachLinks(a_8)

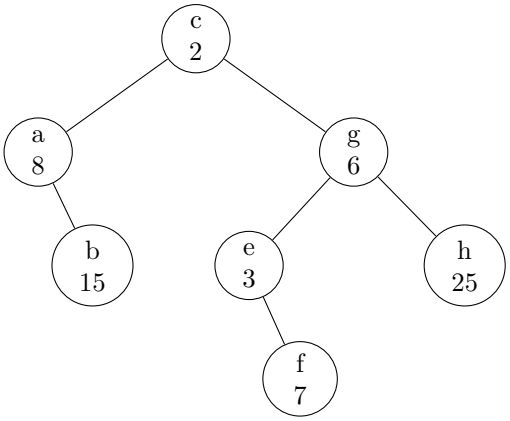


(d) Nachher (nach: RotiereNachRechts(e_3))

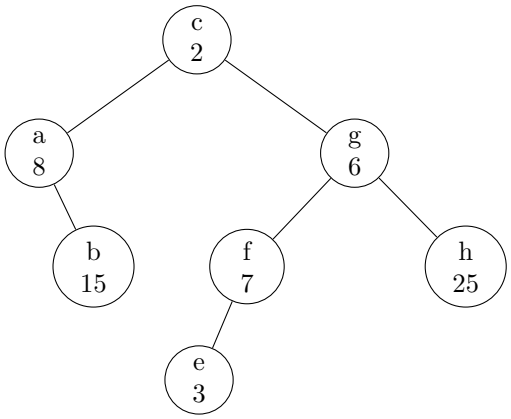
ii.) Entfernen Sie e aus dem Treap.



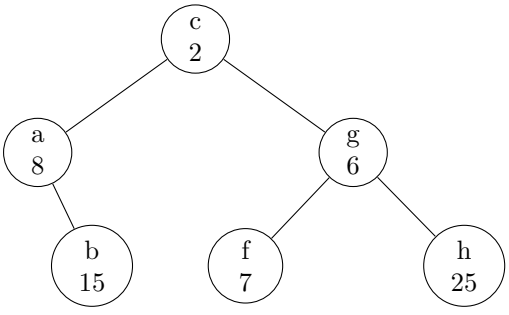
(a) Start



(a) nach: g_6 is rechtes Kind von e_3 $\Longrightarrow$ RotiereNachLinks(e_3)



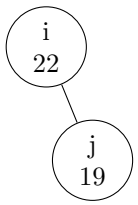
(b) nach: f_7 is rechtes Kind von e_3 $\Longrightarrow$ RotiereNachLinks(e_3)



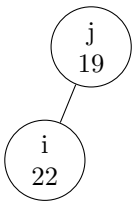
(a) Ende

iii.) Fügen Sie die Schlüssel i_{22}, j_{19}, k_{13} in einen anderen (anfangs leeren) Treap ein. Vereinigen Sie anschließend die zwei Treaps.

Insert j_{19}:

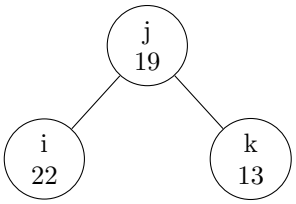


(a) Vorher

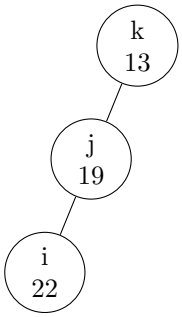


(b) Nachher (nach: RotiereNachLinks(i_{22}))

Insert k_{13}:

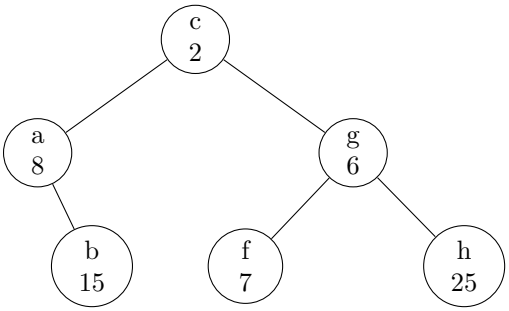


(a) Vorher

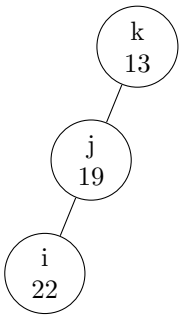


(b) Nachher (nach: RotiereNachLinks(j_{19}))

Vereinige(T_1,T_2):

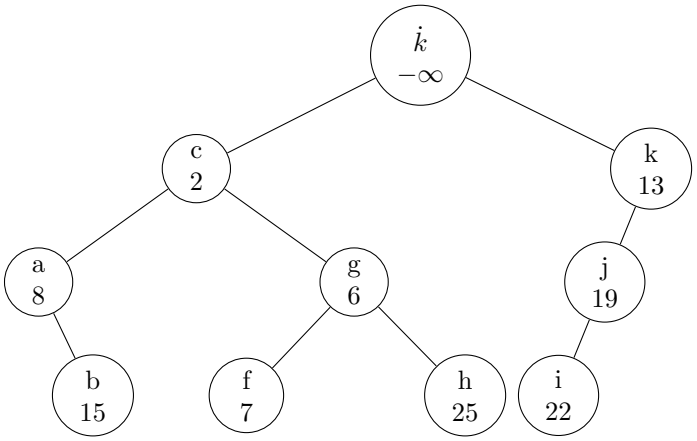


(a) T_1



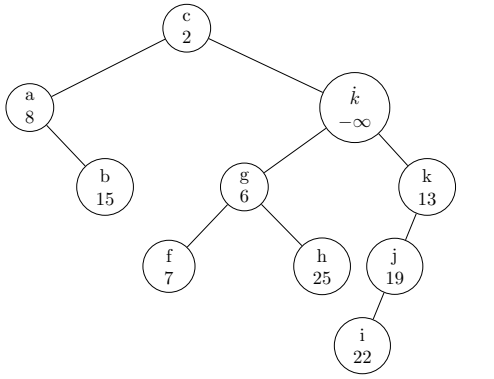
(b) T_2

Sei $\dot{k}$ ein Schlüssel mit $\text{key}(x_1) < \dot{k} < \text{key}(x_2)$ für alle $x_1 \in T_1$ und $x_2 \in T_2$. Ein echter Buchstabe kann hier nicht verwendet werden, da ein solcher im deutschen Alphabet (natürliche Ordnung) nicht existiert. Es gilt also: $a < b < c < ... < \dot{k} < i < j < k < ... < z$.

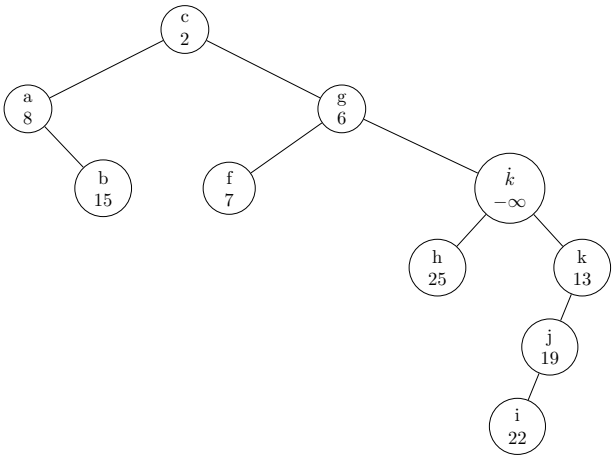


(a) Neuer Knoten mit Schlüssel $\dot{k}$ als Wurzel.

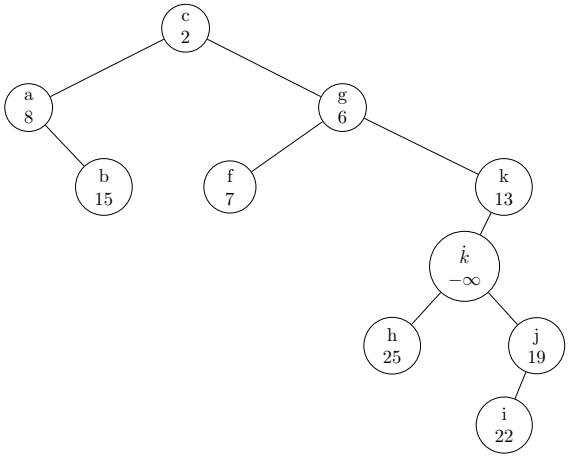
Entferne Wurzel aus Treap:



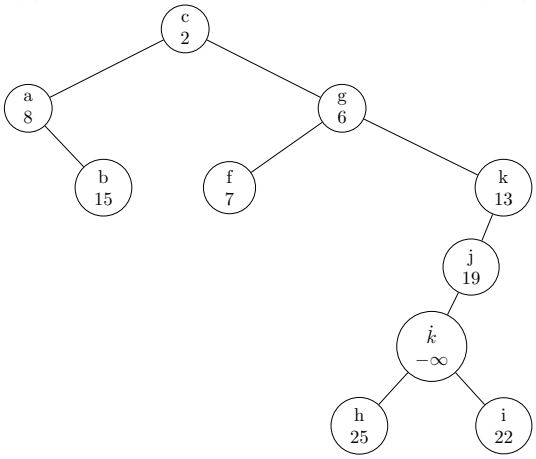
(a) nach: c_2 is linkes Kind von $\dot{k}_{-\infty} \implies$ RotiereNachRechts($\dot{k}_{-\infty}$)



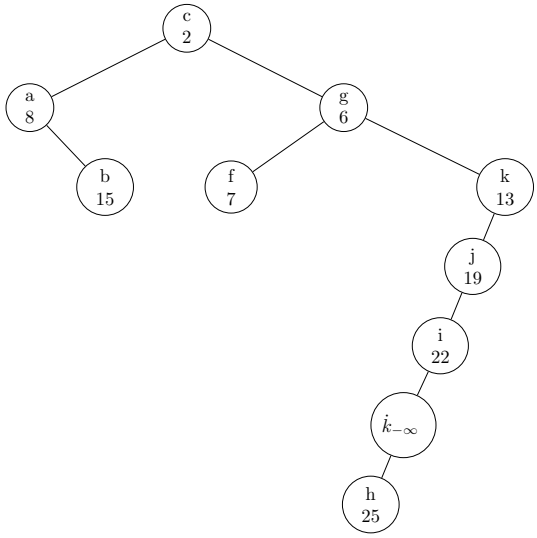
(b) nach: g_6 is linkes Kind von $\dot{k}_{-\infty} \implies$ RotiereNachRechts($\dot{k}_{-\infty}$)



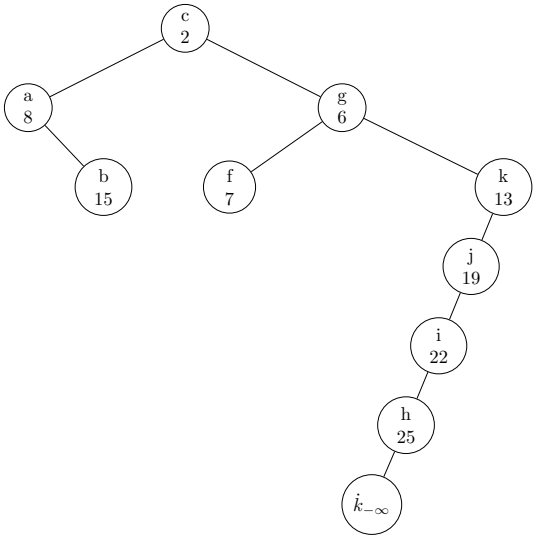
(c) nach: k_{13} is rechtes Kind von $\dot{k}_{-\infty} \implies$ RotiereNachLinks($\dot{k}_{-\infty}$)



(d) nach: j_{19} is rechtes Kind von $\dot{k}_{-\infty} \implies$ RotiereNachLinks($\dot{k}_{-\infty}$)



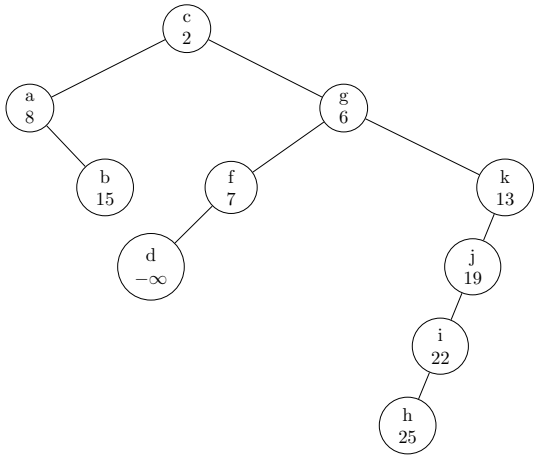
(e) nach: i_{22} is rechtes Kind von $\dot{k}_{-\infty} \implies$ RotiereNachLinks($\dot{k}_{-\infty}$)



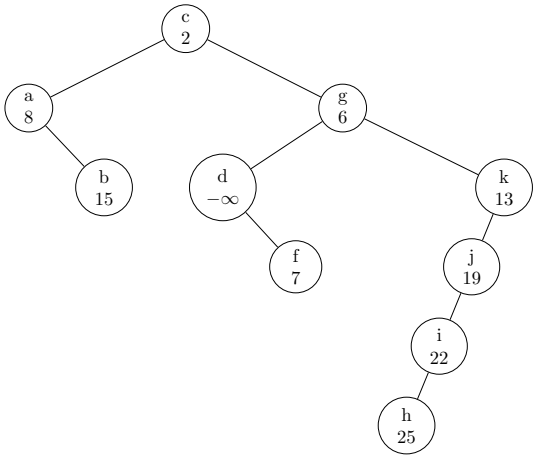
(f) nach: h_{25} ist linkes Kind von $\dot{k}_{-\infty} \implies$ RotiereNachRechts($\dot{k}_{-\infty}$)
Der Hilfsknoten $\dot{k}_{-\infty}$ ist jetzt ein Blatt und kann einfach entfernt werden.

iv.)Führen Sie $Spalte\,(T, d, T_1, T_2)$ durch, wobei T der Treap aus dem vorigen Punkt ist.

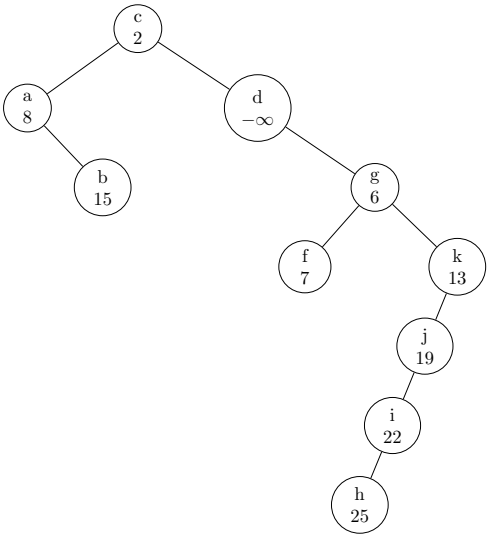
Füge Knoten $d_{-\infty}$ in T ein:



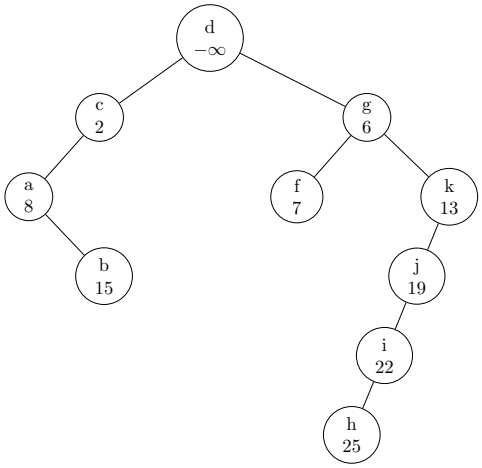
(a) Vorher



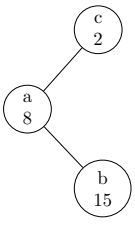
(b) nach: $d_{-\infty}$ ist linkes Kind von $f_7 \implies$ RotiereNachRechts(f_7)



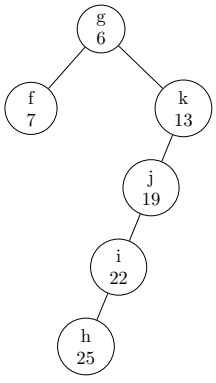
(c) nach: $d_{-\infty}$ ist linkes Kind von $g_6 \implies$ RotiereNachRechts(g_6)



(d) nach: $d_{-\infty}$ ist rechtes Kind von $c_2 \implies$ RotiereNachLinks(c_2)



(e) T_1



(f) T_2

Aufgabe 12

Der *linke Rand* in einem binären Suchbaum T ist der Pfad von der Wurzel zum Knoten mit dem kleinsten Schlüssel. Der *rechte Rand* in einem binären Suchbaum T ist der Pfad von der Wurzel zum Knoten mit dem größten Schlüssel. Betrachten Sie einen Treap T direkt nach dem Einfügen eines Objektes x. Sei C die Länge des rechten Randes des linken Unterbaums des Knotens mit dem Element x und sei D die Länge des linken Randes des rechten Unterbaums des Knotens mit dem Element x. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Rotationen, die während des Einfügens von x durchgeführt wurden, $C + D$ ist.

Linker Rand eines binären Suchbaums: von der Wurzel zum linkesten Kind, d.h. verfolge ausgehend von der Wurzel immer die Kante zum linken Kind.
Rechter Rand eines binären Suchbaums: analog (verfolge immer die Kante zum rechten Kind).

C ... Länge des rechten Randes des linken Unterbaums des Knotens mit dem Element x.
D ... Länge des linken Randes des rechten Unterbaums des Knotens mit dem Element x.
R ... # der Rotationen, die während des Einfügens von x durchgeführt wurden.

Zu zeigen: $C + D = R$

Proof. Ausgehend von der Annahme, dass $C + D = R$ vor der ersten Rotation gilt, zeigen wir nun, dass $C + D = R$ auch nach der darauffolgenden Rotation gilt.

I.A.: $C + D = 0$ gilt trivialerweise, da $C = D = 0$.

I.B.: $C + D = R$ gilt für N Rotation.

I.S.: Seien C, D, C_{NR} und D_{NR} wie folgt:

C ... Länge des rechten Randes des linken Unterbaums des Knotens mit dem Element x *vor der Rotation.*
D ... Länge des linken Randes des rechten Unterbaums des Knotens mit dem Element x *vor der Rotation.*
C_{NR} ... Länge des rechten Randes des linken Unterbaums des Knotens mit dem Element x *nach der Rotation.*
D_{NR} ... Länge des linken Randes des rechten Unterbaums des Knotens mit dem Element x *nach der Rotation.*

Es gibt nun zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: Linksrotation bzgl. Knoten x

Vor der Rotation hat der linke Rand des rechten Unterbaums von x die Länge D. Analog hat der rechte Rand des linken Unterbaums von x die Länge C.

Bei einer Linksrotation passiert Folgendes. Sei y der Elternknoten von x vor der Linksrotation.

- x wird auf die Position von y geschoben und y wird linkes Kind von x.
- Der linke Unterbaum von x wird zum rechten Unterbaum von y.
- Der rechte Unterbaum von x bleibt dessen rechter Unterbaum.
- Der linke Unterbaum von y bleibt dessen linker Unterbaum.

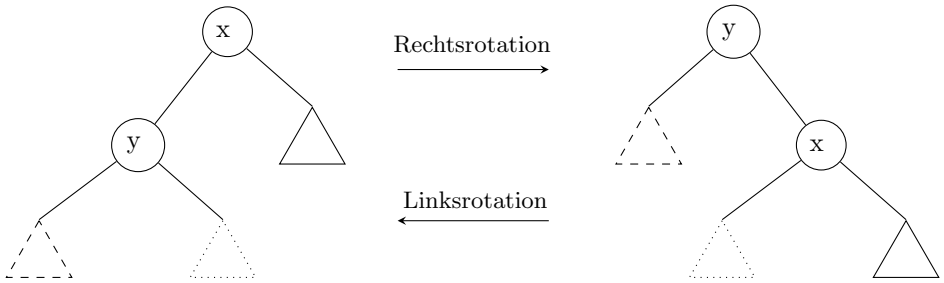


Figure 16: Links- und Rechtsrotation bzgl. x

Durch die "Nach-Unten-Verschiebung" des linken Unterbaums von x um eine Ebene, wird der rechte Rand des linken Unterbaums des Knotens mit dem Element x ebenfalls um 1 länger, d.h. $C_{NR} = C+1$. Die Länge des linken Randes des rechten Unterbaums des Knotens mit dem Element x bleibt hingegen unverändert, d.h. $D_{NR} = D$.

Für diesen Fall gilt also für N Rotationen, dass C N-mal um 1 länger wird, d.h. $C_{NR} = C + \sum_{i=1}^{N-1} 1 = C + N = N$. D_{NR} bleibt hingegen immer gleich bleibt, d.h. $D_{NR} = D = 0$.

Daraus folgt: $C_{NR} + D_{NR} = N = N$ für N Rotationen. □

Fall 2: Rechtsrotation bzgl. Knoten x

Die selbe Argumentation kann für die Rechtsrotation verwendet werden. Der einzige Unterschied liegt in der Veränderung des Baumes. Bei einer Rechtsrotation gilt Folgendes. Sei y das linke Kind von x vor der Rechtsrotation.

- y wird der neue Elternknoten von x.
- Der linke Unterbaum von y bleibt dessen linker Unterbaum.
- Der rechte Unterbaum von y wird linker Unterbaum von x.
- x wird das rechte Kind von y.

In diesem Fall wir der Pfad D um 1 länger und C bleibt unverändert, d.h. $D_{NR} = D + 1$ und $C_{NR} = C$.

Analog zu Fall 1 ergibt sich daraus für N Rotationen: $C_{NR} + D_{NR} = N = N$. □

Das heißt, dass $C + D = R$ auch für die Kombination von Links- und Rechtsrotationen gilt, da nur entweder D oder C um 1 länger werden. □

Aufgabe 13

Sei $U = \{0, \ldots, N-1\}$, wobei N eine Primzahl ist und sei $m = 4$. Seien $a_i = 40i$ und $b_i = 60i$. Wir definieren folgende Klasse von Hashfunktionen:

$$H = \left\{ h_i(k) = \left((a_i k + b_i) \mod N - 1 \right) \mod m \right\} \text{ für } i \in \left\{ 1, \ldots, N(N-1) \right\} \tag{1}$$

Ist H universell? Warum? Falls H nicht universell ist, so modifizieren Sie h_i, a_i und b_i, sodass Sie eine universelle Klasse erhalten.

H ist nicht universell.

Proof. Da N prim ist, wissen wir, dass (1) $(N-1)$ keine Primzahl ist (außer $N=3$) und (2) $(N-1)$ eine gerade Zahl ist (da alle Primzahlen außer 2 ungerade sind).

Weiters wissen wir, dass $a_i = 40i$ und $b_i = 60i$ beides gerade Zahlen sind, da eine Multiplikation mit einer geraden Zahl immer eine gerade Zahl ergibt.

Dies hat zur Folge, dass $H = \left\{h_i(k) = (40ik + 60i) \bmod N - 1 \bmod 4\right\}$ immer eine gerade Zahl ergibt (gerade Zahl mod gerader Zahl ergibt immer gerade Zahl). Dadurch wird nur der halbe Bereich von m ausgenutzt (nämlich nur jede zweite - gerade - Zahl), d.h. nur $\frac{m}{2}$.

Damit H universell ist, muss nun Folgendes für (x, y) mit $x \neq y$ erfüllt sein:

$$\frac{|\left\{h \in H : h(x) = h(y)\right\}|}{|H|} \leq \frac{1}{m} \Longleftrightarrow |\left\{h \in H : h(x) = h(y)\right\}| \leq \frac{|H|}{m} \tag{2}$$

Da $i \in \left\{1, \ldots, N(N-1)\right\}$, ist $|H| = N(N-1)$. Weiters ist $m = 4$. Da nur jede zweite - gerade - Zahl aus dem Wertebereich von m genutzt wird, ist $|\left\{h \in H : h(x) = h(y)\right\}| = \frac{|H|}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$. Eingesetzt in (2) ergibt sich dadurch

$$\frac{N(N-1)}{2} \leq \frac{N(N-1)}{4} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} \tag{3}$$

(3) ist nicht erfüllt $\Rightarrow$ H ist nicht universell. □

Damit H universell ist, halten wir uns nun an den Satz von Folie 20:

$$H = \left\{h_{a,b}(x) \,|\, 1 \leq a < N \wedge 0 \leq b < N\right\} \tag{4}$$

ist eine universelle Klasse von Hash-Funktionen.

Das heißt, wir müssen a_i, b_i und h_i so anpassen, dass Folgendes gilt:

$$a_i \in \{1, \ldots, N-1\}, b_i \in \{0, \ldots, N-1\}, h_i(x) = \left((a_i k + b_i) \bmod N\right) \bmod m \tag{5}$$

Es wurde in der Vorlesung bewiesen, dass diese Klasse von Hash-Funktionen universell ist.

$$a_i = f(i,N), f(i,N) \in \{1,\ldots,N-1\} \text{ für } i \in \{1,\ldots,N(N-1)\} \tag{6}$$

$$b_i = g(i,N), g(i,N) \in \{0,\ldots,N-1\} \text{ für } i \in \{1,\ldots,N(N-1)\} \tag{7}$$

Die folgenden Funktionen $f(i,N)$ und $g(i,N)$ erfüllen diese Bedingungen:

$$a_i = 1 + \big((i-1) \mod N-1\big) \tag{8}$$

$$b_i = \left\lceil \frac{i-1}{N} \right\rceil \tag{9}$$

Daraus ergibt sich

$$H = \Big\{ h_i(x) = \big((a_i k + b_i) \mod N\big) \mod m \Big\} \tag{10}$$

was eine universelle Klasse von Hash-Funktionen ist.