

Assignment 6

Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410
Daniel Kocher, 0926293

April 25, 2016

Aufgabe 11

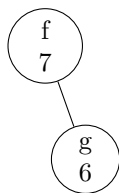
- i.) Fügen Sie die Schlüssel f, g, h, e, b, a, c in einen (anfangs leeren) Treap ein. Die Prioritäten dieser Schlüssel sind wie folgt gegeben: $a : 8, b : 15, c : 2, e : 3, f : 7, g : 6, h : 25, i : 22, j : 19, k : 13$.
- ii.) Entfernen Sie e aus dem Treap.
- iii.) Fügen Sie die Schlüssel i, j, k in einen anderen (anfangs leeren) Treap ein. Vereinigen Sie anschließend die zwei Treaps.
- iv.) Führen Sie *Spalte* (T, d, T_1, T_2) durch, wobei T der Treap aus dem vorigen Punkt ist.

Geben Sie den Treap vor und nach jeder Rotation an.

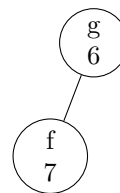
Für den Pseudocode bzw. die grundlegende Vorgehensweise der Operationen Suchen, Einfügen, Rotieren, NachLinks/Rechts, Entfernen, Vereinigen und Spalte, sei auf die Folien vom 14.04.2016 verwiesen.

i.) Fügen Sie die Schlüssel f, g, h, e, b, a, c in einen (anfangs leeren) Treap ein. Die Prioritäten dieser Schlüssel sind wie folgt gegeben: $a : 8, b : 15, c : 2, e : 3, f : 7, g : 6, h : 25, i : 22, j : 19, k : 13$.

Insert g_6 :

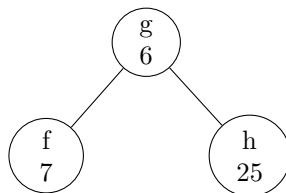


(a) Vorher



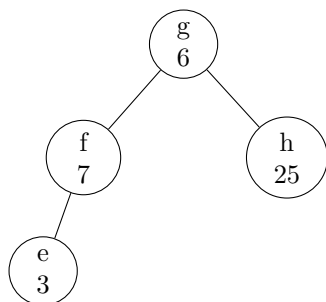
(b) Nachher

Insert h_{25} :

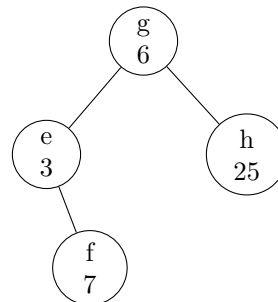


(a) Keine Rotation notwendig

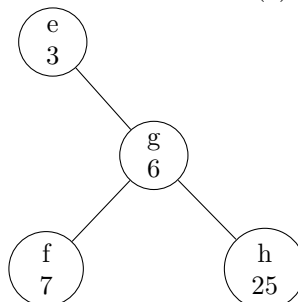
Insert e_3 :



(a) Vorher

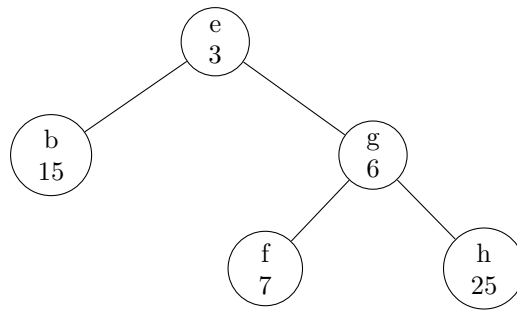


(b) nach: RotiereNachRechts(f_7)



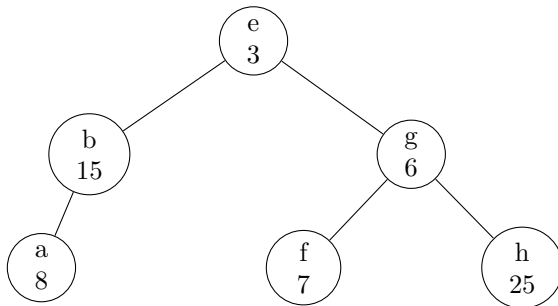
(c) Nachher (nach: RotiereNachRechts(g_6))

Insert b_{15} :

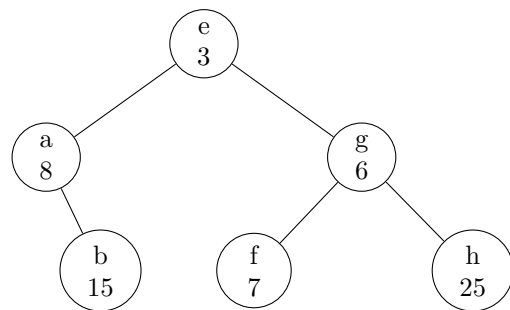


(a) Keine Rotation notwendig

Insert a_8 :

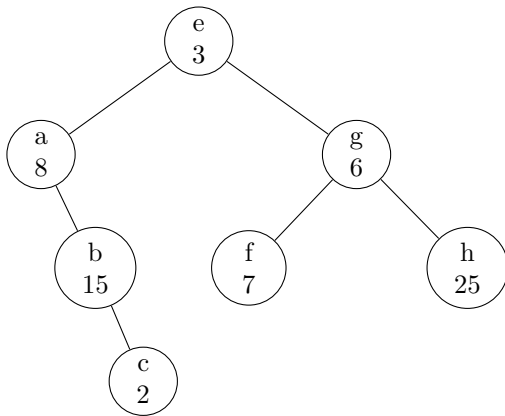


(a) Vorher

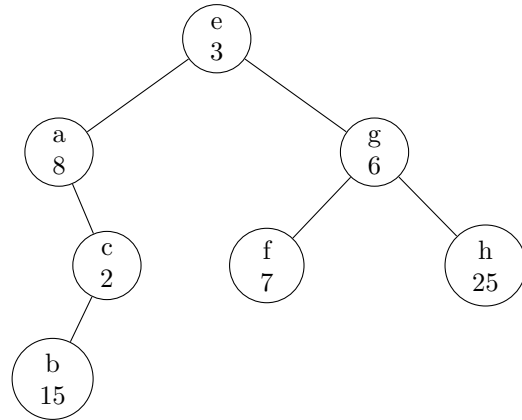


(b) Nachher (nach: RotiereNachRechts(b_{15}))

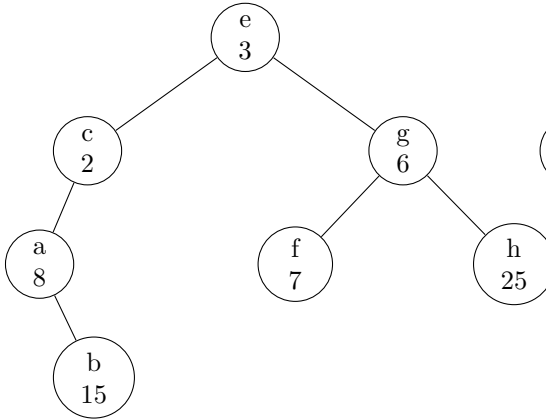
Insert c_2 :



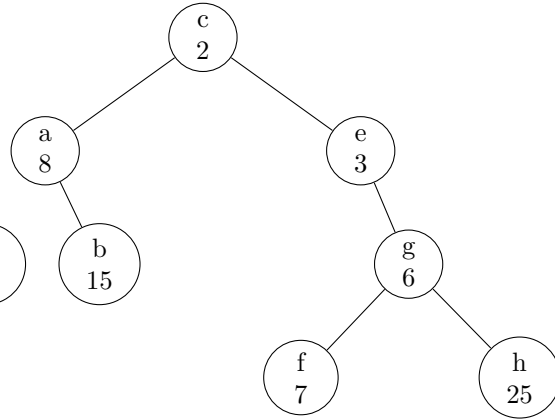
(a) Vorher



(b) nach: RotiereNachLinks(b_{15})

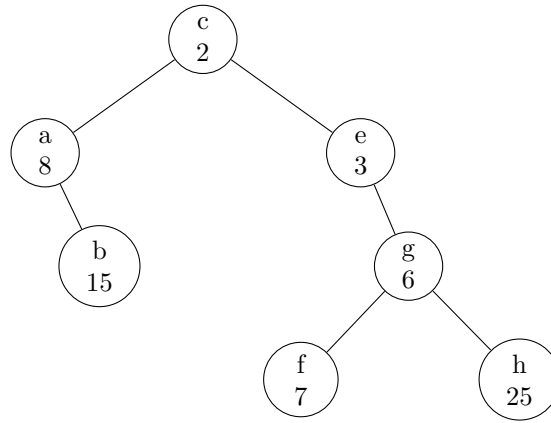


(c) nach: RotiereNachLinks(a_8)

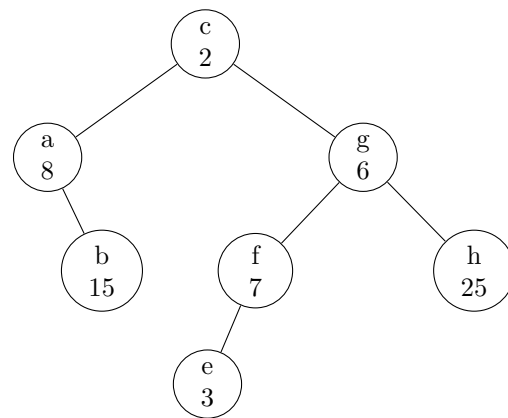
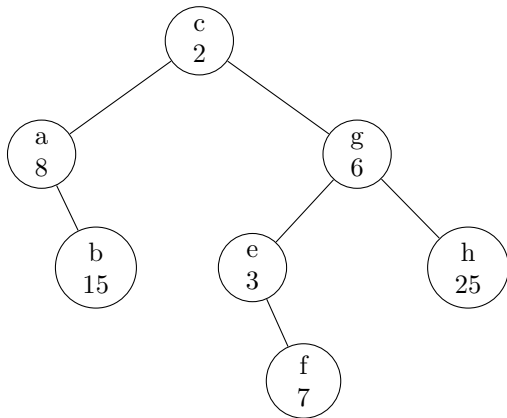


(d) Nachher (nach: RotiereNachRechts(e_3))

ii.) Entfernen Sie e aus dem Treap.

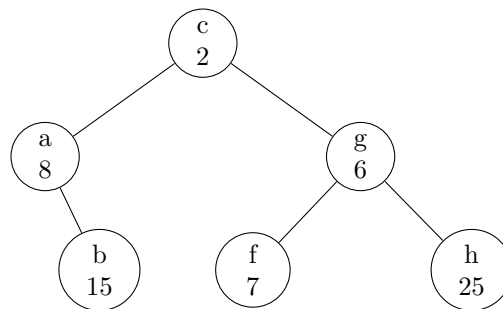


(a) Start



(a) nach: g_6 is rechtes Kind von $e_3 \implies \text{RotiereNachLinks}(e_3)$

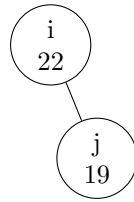
(b) nach: f_7 is rechtes Kind von $e_3 \implies \text{RotiereNachLinks}(e_3)$



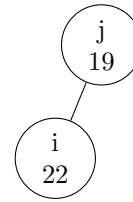
(a) Ende

iii.) Fügen Sie die Schlüssel i_{22} , j_{19} , k_{13} in einen anderen (anfangs leeren) Treap ein. Vereinigen Sie anschließend die zwei Treaps.

Insert j_{19} :

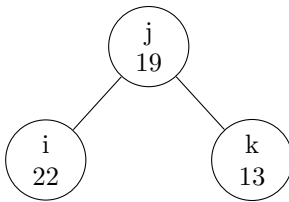


(a) Vorher

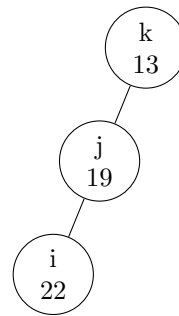


(b) Nachher (nach: RotiereNachLinks(i_{22}))

Insert k_{13} :

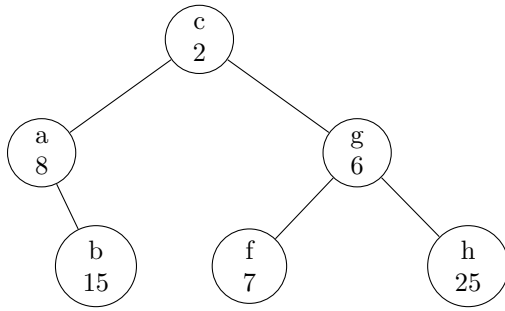


(a) Vorher

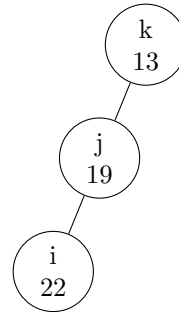


(b) Nachher (nach: RotiereNachLinks(j_{19}))

Vereinige(T_1, T_2):

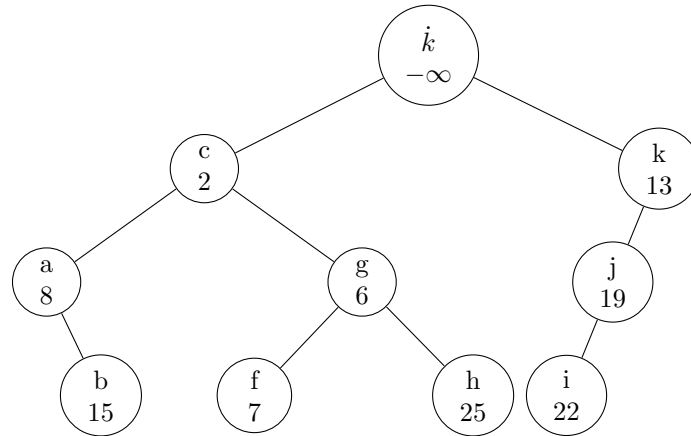


(a) T_1



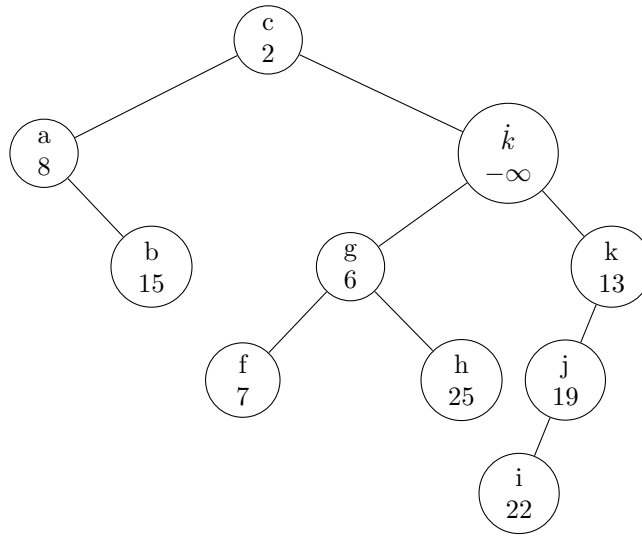
(b) T_2

Sei \dot{k} ein Schlüssel mit $\text{key}(x_1) < \dot{k} < \text{key}(x_2)$ für alle $x_1 \in T_1$ und $x_2 \in T_2$. Ein echter Buchstabe kann hier nicht verwendet werden, da ein solcher im deutschen Alphabet (natürliche Ordnung) nicht existiert. Es gilt also: $a < b < c < \dots < \dot{k} < i < j < k < \dots < z$.

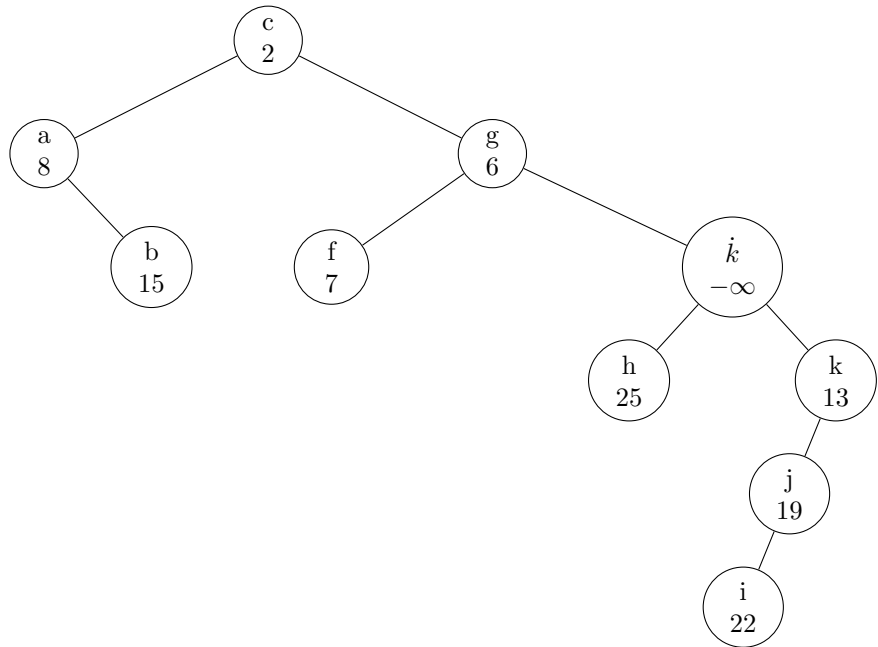


(a) Neuer Knoten mit Schlüssel \dot{k} als Wurzel.

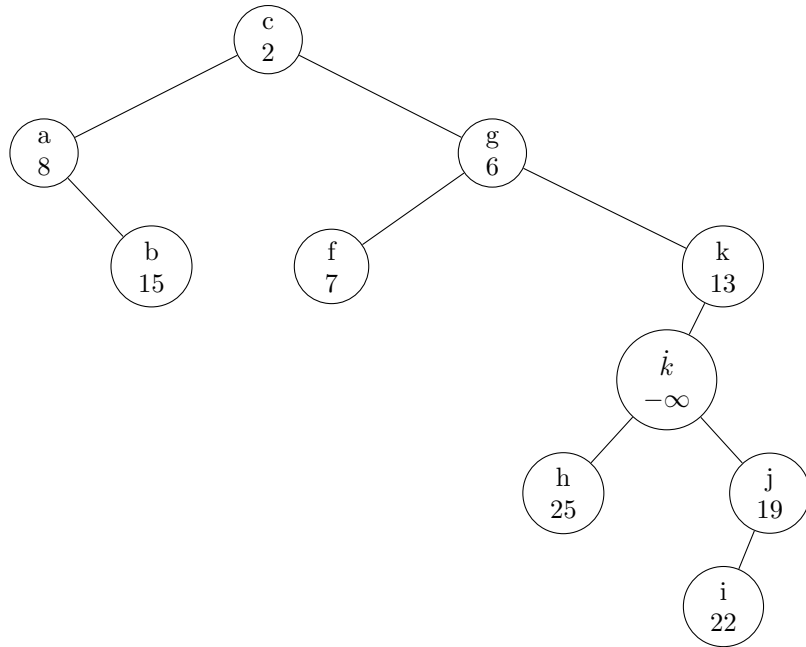
Entferne Wurzel aus Treap:



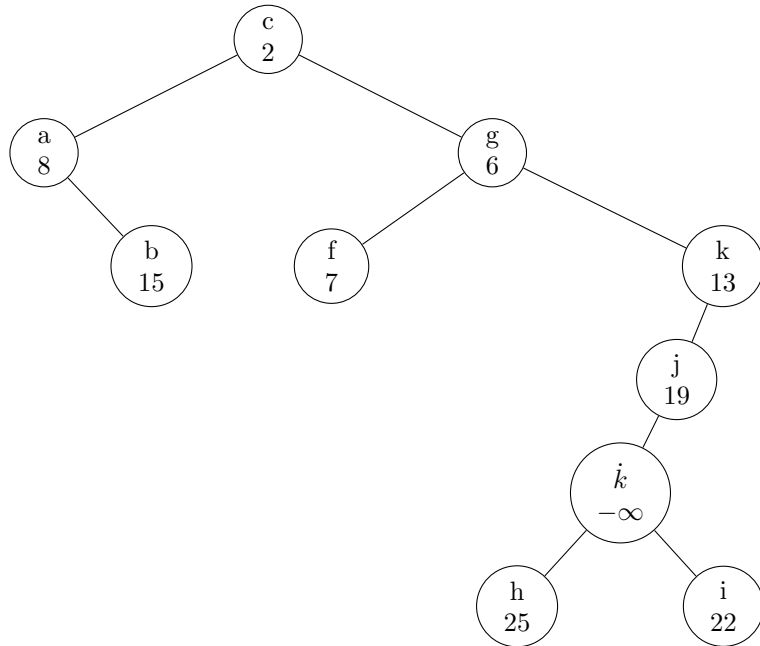
(a) nach: c_2 ist linkes Kind von $k_{-\infty} \Rightarrow$
 RotiereNachRechts($k_{-\infty}$)



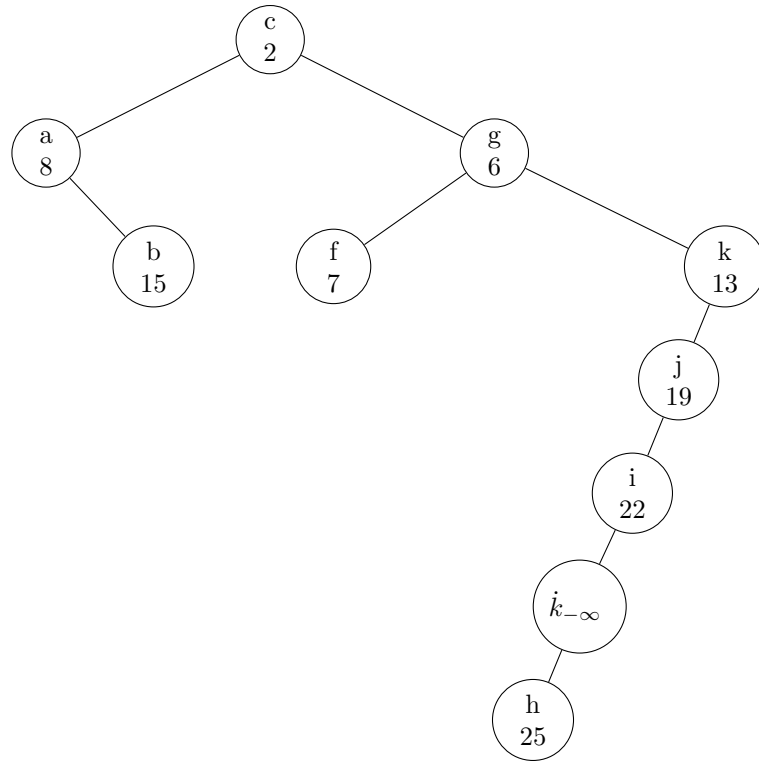
(a) nach: g_6 ist linkes Kind von $k_{-\infty} \Rightarrow$
 RotiereNachRechts($k_{-\infty}$)



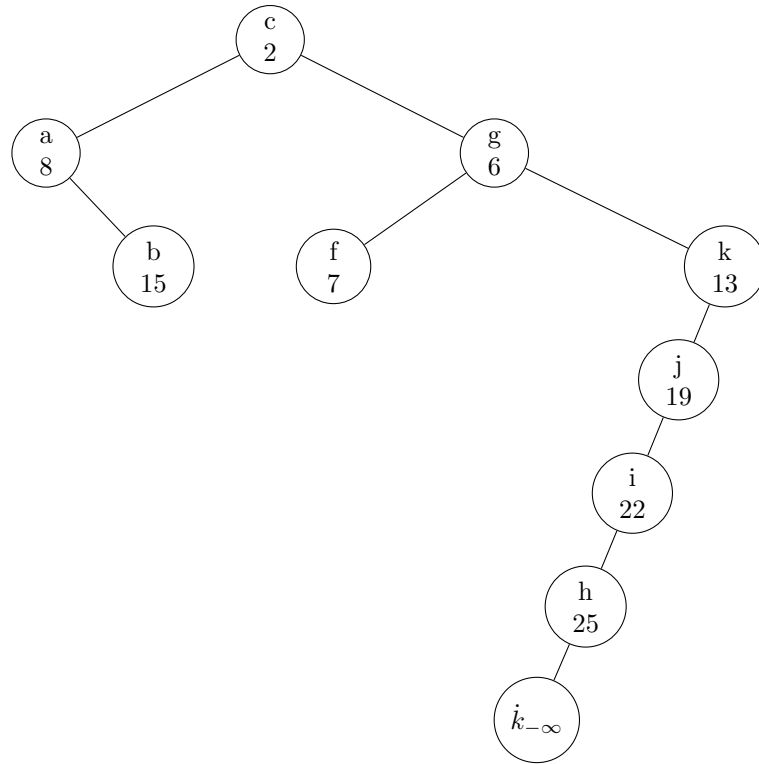
(a) nach: k_{13} ist rechtes Kind von $\dot{k}_{-\infty} \Rightarrow$
 RotiereNachLinks($\dot{k}_{-\infty}$)



(a) nach: j_{19} ist rechtes Kind von $\dot{k}_{-\infty} \Rightarrow$
 RotiereNachLinks($\dot{k}_{-\infty}$)



(a) nach: i_{22} ist rechtes Kind von $\dot{k}_{-\infty} \implies$
 RotiereNachLinks($\dot{k}_{-\infty}$)



(a) nach: h_{25} ist linkes Kind von $k_{-\infty} \implies$
 RotiereNachRechts($k_{-\infty}$)

Aufgabe 12

Der *linke Rand* in einem binären Suchbaum T ist der Pfad von der Wurzel zum Knoten mit dem kleinsten Schlüssel. Der *rechte Rand* in einem binären Suchbaum T ist der Pfad von der Wurzel zum Knoten mit dem größten Schlüssel. Betrachten Sie einen Treap T direkt nach dem Einfügen eines Objektes x . Sei C die Länge des rechten Randes des linken Unterbaums des Knotens mit dem Element x und sei D die Länge des linken Randes des rechten Unterbaums des Knotens mit dem Element x . Zeigen Sie, dass die Anzahl der Rotationen, die während des Einfügens von x durchgeführt wurden, $C + D$ ist.

Aufgabe 13

Sei $U = \{0, \dots, N-1\}$, wobei N eine Primzahl ist und sei $m = 4$. Seien $a_i = 40i$ und $b_i = 60i$. Wir definieren folgende Klasse von Hashfunktionen:

$$H = \left\{ h_i(k) = ((a_i k + b_i) \bmod N - 1) \bmod m \right\} \text{ für } i \in \{1, \dots, N(N-1)\} \quad (1)$$

Ist H universell? Warum? Falls H nicht universell ist, so modifizieren Sie h_i , a_i und b_i , sodass Sie eine universelle Klasse erhalten.