

Assignment 5

Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410

Daniel Kocher, 0926293

April 20, 2016

Aufgabe 9

Zu zeigen: Sei $m \leq i$: x_i Vorfahre von $x_m \Leftrightarrow P_{\min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$

Proof.

i) " \Leftarrow "

Annahme: $P_{\min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$

Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt \Rightarrow aus der Menge $\{x_m, \dots, x_i\}$ wird x_i als erster eingefügt.

Für die Knoten x_k mit Schlüsseln k die vor x_i eingefügt wurden haben die Eigenschaft: $k < \text{key}(x_m)$ oder $k > \text{key}(x_i)$.¹

Wenn $x_j \in \{x_m, \dots, x_{i-1}\}$ eingefügt wird durchläuft x_j denselben Pfad wie x_i ² und wird im linken Unterbaum von x_i eingefügt. Es gilt daher: x_j ist Nachfahre von x_i und insbesondere x_m ist Nachfahre von $x_i \Rightarrow x_i$ ist Vorfahre von x_m

ii) " \Rightarrow "

Sei: $P_{\min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_j$; Zeige: $i = j$

Annahme: x_i Vorfahre von x_m

Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt \Rightarrow aus der Menge $\{x_m, \dots, x_i\}$ wird x_j als erster eingefügt.

Für die Knoten x_k mit Schlüssel k die vor x_j eingefügt wurden haben die Eigenschaft: $k < \text{key}(x_m)$ oder $k > \text{key}(x_i)$. Jeder Knoten x_l aus $\{x_m, \dots, x_i\}$ mit $l \neq j$ muss beim Einfügen denselben Pfad durchlaufen wie x_j .

Falls $j \neq i, m$: x_m landet im linken Unterbaum von x_j und x_i im rechten Unterbaum von $x_j \Rightarrow x_i$ ist kein Vorfahr von x_m .

Falls $j = m$: x_i landet im rechten Unterbaum von $x_m \Rightarrow x_m$ ist Vorfahre von x_i

$\Rightarrow j = i$

□

¹Würde $\text{key}(x_m) \leq k \leq \text{key}(x_i)$ gelten wäre der Knoten mit dem Schlüssel k Teil der Menge $\{x_m, \dots, x_i\}$ und würde wegen $P_{\min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$ nach x_i eingefügt werden

²Es gilt für alle sich im Baum befindlichen Schlüssel k $k < \text{key}(x_m) \leq \text{key}(x_j) \leq \text{key}(x_i)$ oder $k > \text{key}(x_i) \geq \text{key}(x_j) \geq \text{key}(x_m)$

Aufgabe 10

Zu zeigen: Sei m die Anzahl der Schlüssel, die kleiner als der gesuchte Schlüssel k sind. Die erwartete Anzahl von Knoten auf dem Suchpfad ist $H_m + H_{n-m}$.

Proof.

Sei x_k der Knoten mit Schlüssel k der ohne Berücksichtigung der Prioritäten in den gegebenen Suchbaum imaginär eingefügt wird.

Sei:

$$X_{k,i} = \begin{cases} 1, & x_i \text{ ist Vorfahr des neuen imaginären Knotens } x_k \text{ mit } \text{key}(x_k) = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und:

Sei X_k die Anzahl der Knoten auf dem Pfad von der Wurzel nach dem Knoten x_k (ohne x_k)

$$X_k = \sum_{i < k} X_{k,i} + \sum_{i > k} X_{k,i} \quad (1)$$

$$E[X_k] = E\left[\sum_{i < k} X_{k,i}\right] + E\left[\sum_{i > k} X_{k,i}\right] \quad (2)$$

$$E[X_k] = \sum_{i < k} E[X_{k,i}] + \sum_{i > k} E[X_{k,i}] \quad (3)$$

F1($i < k$): gilt für m Knoten des Suchbaums

$$E[X_{k,i}] = \Pr[P_{\min}(\{x_1, \dots, x_i\}) = x_i] = \frac{1}{i} \quad (4)$$

F2($i > k$): gilt für $n - m$ Knoten des Suchbaums

$$E[X_{k,i}] = \Pr[P_{\min}(\{x_i, \dots, x_n\}) = x_i] = \frac{1}{n - i + 1} \quad (5)$$

Also:

$$E[X_k] = \sum_{i < k} E[X_{k,i}] + \sum_{i > k} E[X_{k,i}] \quad (6)$$

$$E[X_k] = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} + \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{n - i + 1} \quad (7)$$

$$E[X_k] = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{n - (m+1) + 1} + \dots + \frac{1}{n - n + 1}\right) \quad (8)$$

$$E[X_k] = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{n - m} + \dots + 1\right) \quad (9)$$

$$E[X_k] = H_m + H_{n-m} \quad (10)$$

□