

# Assignment 5

## Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410

Daniel Kocher, 0926293

April 18, 2016

### Aufgabe 9

*Proof.*

Zu zeigen: Sei  $m \leq i$ :  $x_i$  Vorfahre von  $x_m \Leftrightarrow P_{min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$

i) "  $\Leftarrow$  "

Annahme:  $P_{min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$

Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt  $\Rightarrow$  aus der Menge  $\{x_m, \dots, x_i\}$  wird  $x_i$  als erster eingefügt.

Für die Knoten  $x_k$  mit Schlüsseln  $k$  die vor  $x_i$  eingefügt wurden haben die Eigenschaft:  $k < key(x_m)$  oder  $k > key(x_i)$ .<sup>1</sup>

Wenn  $x_j \in \{x_m, \dots, x_{i-1}\}$  eingefügt wird durchläuft  $x_j$  denselben Pfad wie  $x_i$  <sup>2</sup> und wird im linken Unterbaum von  $x_i$  eingefügt. Es gilt daher:  $x_j$  ist Nachfahre von  $x_i$  und insbesondere  $x_m$  ist Nachfahre von  $x_i \Rightarrow x_i$  ist Vorfahre von  $x_m$

ii) "  $\Rightarrow$  "

Sei:  $P_{min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_j$ ; Zeige:  $i = j$

Annahme:  $x_i$  Vorfahre von  $x_m$

Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt  $\Rightarrow$  aus der Menge  $\{x_m, \dots, x_i\}$  wird  $x_j$  als erster eingefügt.

Für die Knoten  $x_k$  mit Schlüssel  $k$  die vor  $x_i$  eingefügt wurden haben die Eigenschaft:  $k < key(x_m)$  oder  $k > key(x_i)$ . Jeder Knoten  $x_l$  aus  $\{x_m, \dots, x_i\}$  mit  $l \neq j$  muss beim Einfügen denselben Pfad durchlaufen wie  $x_j$ .

Falls  $j \neq i, m$ :  $x_m$  landet im linken Unterbaum von  $x_j$  und  $x_i$  im rechten Unterbaum von  $x_j \Rightarrow x_i$  ist kein Vorfahr von  $x_m$ .

Falls  $j = m$ :  $x_i$  landet im rechten Unterbaum von  $x_m \Rightarrow x_m$  ist Vorfahre von  $x_i$

$\Rightarrow j = i$

□

---

<sup>1</sup>Würde  $key(x_m) \leq k \leq key(x_i)$  gelten wäre der Knoten mit dem Schlüssel  $k$  Teil der Menge  $\{x_m, \dots, x_i\}$  und würde wegen  $P_{min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$  nach  $x_i$  eingefügt werden

<sup>2</sup>Es gilt für alle sich im Baum befindlichen Schlüssel  $k$   $k < key(x_m) \leq key(x_j) \leq key(x_i)$  oder  $k > key(x_i) \geq key(x_j) \geq key(x_m)$