

# Assignment 3

## Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410  
Daniel Kocher, 0926293

April 3, 2016

### Aufgabe 5

*Proof.* Zu zeigen:

- i.) Ist  $D_{ij}$  ungerade, so gilt  $D'_{kj} \leq D'_{ij}$  für alle Nachbarn  $k$  von  $i$  und
- ii.) es gibt einen Knoten  $k \in \Gamma(i)$ , so dass  $D'_{kj} < D'_{ij}$ .

$$D_{ij} \pmod{2} = 1 \quad (1)$$

$$\implies \exists l \in \mathbb{N} : D_{ij} = 2l - 1 \quad (2)$$

und es gilt (Lemma aus VO):

$$D_{ij} = 2D'_{ij} - 1 \text{ (für } D_{ij} \text{ ungerade)} \quad (3)$$

$$D_{ij} = 2D'_{ij} \text{ (für } D_{ij} \text{ gerade)} \quad (4)$$

aus (2) und (3) folgt:

$$2l - 1 = 2D'_{ij} - 1 \implies D'_{ij} = l \quad (5)$$

Der Knoten  $k$  ist direkter Nachbar von  $i$  also gilt (Lemma aus VO):

$$D_{ij} - 1 \leq D_{kj} \leq D_{ij} + 1 \quad (6)$$

Fall 1:  $D_{kj} = D_{ij} - 1$

$$D_{kj} = D_{ij} - 1 = 2l - 2 \quad (7)$$

$$D_{kj} \pmod{2} = 0 \stackrel{(4)}{\implies} D_{kj} = 2D'_{kj} \quad (8)$$

$$2l - 2 = 2D'_{kj} \implies D'_{kj} = l - 1 \quad (9)$$

$$D'_{ij} = l \wedge D'_{kj} = l - 1 \implies D'_{kj} < D'_{ij} \quad (10)$$

Fall 2:  $D_{kj} = D_{ij}$

$$D_{kj} = D_{ij} = 2l - 1 \quad (11)$$

$$D_{kj}(\bmod 2) = 1 \stackrel{(4)}{\implies} D_{kj} = 2D'_{kj} - 1 \quad (12)$$

$$2l - 1 = 2D'_{kj} - 1 \implies D'_{kj} = l \quad (13)$$

$$D'_{ij} = l \wedge D'_{kj} = l \implies D'_{kj} \leq D'_{ij} \quad (14)$$

Fall 3:  $D_{kj} = D_{ij} + 1$

$$D_{kj} = D_{ij} + 1 = 2l \quad (15)$$

$$D_{kj}(\bmod 2) = 0 \stackrel{(4)}{\implies} D_{kj} = 2D'_{kj} \quad (16)$$

$$2l = 2D'_{kj} \implies D'_{kj} = l \quad (17)$$

$$D'_{ij} = l \wedge D'_{kj} = l \implies D'_{kj} \leq D'_{ij} \quad (18)$$

Damit sind i.) und ii.) wie folgt bewiesen:

i.) durch (10), (14) und (18).

ii.) durch (10).

□

## Aufgabe 6

*Proof.* Zu zeigen:

- i.)  $D_{ij}$  ist gerade genau dann, wenn  $\sum_{k \in \Gamma(i)} D'_{kj} \geq D'_{ij} \cdot \deg(i)$ .
- ii.)  $D_{ij}$  ist ungerade genau dann, wenn  $\sum_{k \in \Gamma(i)} D'_{kj} < D'_{ij} \cdot \deg(i)$ .

$$D_{ij} \pmod{2} = 0 \quad (19)$$

$$\implies \exists l \in \mathbb{N} : D_{ij} = 2l \quad (20)$$

und es gilt:

$$D_{ij} = 2D'_{ij} \quad (21)$$

aus (20) und (21) folgt:

$$2l = 2D'_{ij} \implies D'_{ij} = l \quad (22)$$

Der Knoten  $k$  ist direkter Nachbar von  $i$  also gilt:

$$D_{ij} - 1 \leq D_{kj} \leq D_{ij} + 1 \quad (23)$$

Fall 1:  $D_{kj} = D_{ij} - 1$

$$D_{kj} = D_{ij} - 1 = 2l - 1 \quad (24)$$

$$D_{kj} \pmod{2} = 1 \implies D_{kj} = 2D'_{kj} - 1 \quad (25)$$

$$2l - 1 = 2D'_{kj} - 1 \implies D'_{kj} = l \quad (26)$$

Fall 2:  $D_{kj} = D_{ij}$

$$D_{kj} = D_{ij} = 2l \quad (27)$$

$$D_{kj} \pmod{2} = 0 \implies D_{kj} = 2D'_{kj} \quad (28)$$

$$2l = 2D'_{kj} \implies D'_{kj} = l \quad (29)$$

Fall 3:  $D_{kj} = D_{ij} + 1$

$$D_{kj} = D_{ij} + 1 = 2l + 1 \quad (30)$$

$$D_{kj} \pmod{2} = 1 \implies D_{kj} = 2D'_{kj} - 1 \quad (31)$$

$$2l + 1 = 2D'_{kj} - 1 \implies D'_{kj} = l + 1 \quad (32)$$

Es folgt also aus (26), (29) und (32):

$$\forall k \in \Gamma(i) : D'_{kj} \geq l \quad (33)$$

Weiters folgt aus (10), (14) und (18) sowie ii.) (Aufgabe 5):

$$\forall k \in \Gamma(i) : D'_{kj} < l \quad (34)$$

Sei  $m = |\Gamma(i)| = \deg(i)$ , dann folgen daraus die sich gegenseitig ausschließenden Formeln:

$$\sum_{k \in \Gamma(i)} D'_{kj} \geq l \cdot m = D'_{ij} \cdot \deg(i) \quad (35)$$

$$\sum_{k \in \Gamma(i)} D'_{kj} < l \cdot m = D'_{ij} \cdot \deg(i) \quad (36)$$

Aus (35) und (36) folgt dann das Lemma der Angabe. □