

Assignment 13

Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410
Daniel Kocher, 0926293

June 28, 2016

Aufgabe 23

Finden Sie die optimale Klammerung für das Matrixkettenprodukt gegeben durch die Folge von Dimensionen $(41, 40, 4, 25, 34, 12)$. Geben Sie alle $m[i, j]$ und $s[i, j]$ an.

$m[i, j]$... minimale Anzahl von Operationen zur Berechnung des Teilprodukts $A_{i, \dots, j}$.

$s[i, j]$... optimaler Splitwert k , für den das Minimum angenommen wird.

$$m[i, j] = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_kp_j\}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

$$P = \{p_0 = 41, p_1 = 40, p_2 = 4, p_3 = 25, p_4 = 34, p_5 = 12\} \quad (2)$$

Aus P kann man also entnehmen, dass wir $n = 5$ Matrizen multiplizieren wollen:

$$\begin{aligned} A_1 &: 41 \times 40 & A_4 &: 25 \times 34 \\ A_2 &: 40 \times 4 & A_5 &: 34 \times 12 \\ A_3 &: 4 \times 25 \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der optimalen Klammerung sowie aller Werte für $m[i, j]$ bzw. $s[i, j]$, wenden wir nun den dynamischen Algorithmus *dyn – mat – ket* und den rekursiven Algorithmus *Opt – Klam* an. Im Folgenden sind die Ergebnisse für $m[i, j]$ (Table 1) bzw. $s[i, j]$ (Table 2) zusammengefasst. Darunter sind die Berechnungsschritte angegeben (die ersten wurden weggelassen, da ohnehin immer der berechnete Wert bleibt, da das min mit ∞ gebildet wird). Die fett markierten Werte sind jene, die in $m[i, j]$ bzw. $s[i, j]$ eingetragen wurden.

$j \setminus i$	1	2	3	4	5
5	13560	6952	5032	10200	0
4	15536	8840	3400	0	-
3	10660	4000	0	-	-
2	6560	0	-	-	-
1	0	-	-	-	-

Table 1: $m[i, j]$ für $1 \leq i, j \leq 5$.

$j \setminus i$	1	2	3	4
5	2	2	4	4
4	2	2	3	-
3	2	2	-	-
2	1	-	-	-

Table 2: $s[i, j]$ für $1 \leq i \leq 4$ und $2 \leq j \leq 5$.

$$m[1, 3] = \min_{1 \leq k < 3} \{m[1, k] + m[k + 1, 3] + p_0 p_k p_3\} \quad (3)$$

$$m[1, 3] = \min \begin{cases} m[1, 1] + m[2, 3] + p_0 p_1 p_3 = 0 + 4000 + 41000 = 45000 (k = 1) \\ m[1, 2] + m[3, 3] + p_0 p_2 p_3 = 6560 + 0 + 4100 = \mathbf{10660} \text{ (k = 2)} \end{cases} \quad (4)$$

$$m[2, 4] = \min_{2 \leq k < 4} \{m[2, k] + m[k + 1, 4] + p_1 p_k p_4\} \quad (5)$$

$$m[2, 4] = \min \begin{cases} m[2, 2] + m[3, 4] + p_1 p_2 p_4 = 0 + 3400 + 5440 = \mathbf{8840} \text{ (k = 2)} \\ m[2, 3] + m[4, 4] + p_1 p_3 p_4 = 4000 + 0 + 34000 = 38000 (k = 3) \end{cases} \quad (6)$$

$$m[3, 5] = \min_{3 \leq k < 5} \{m[3, k] + m[k + 1, 5] + p_2 p_k p_5\} \quad (7)$$

$$m[3, 5] = \min \begin{cases} m[3, 3] + m[4, 5] + p_2 p_3 p_5 = 0 + 10200 + 1200 = 11400 (k = 3) \\ m[3, 4] + m[5, 5] + p_2 p_4 p_5 = 3400 + 0 + 1632 = \mathbf{5032} \text{ (k = 4)} \end{cases} \quad (8)$$

$$m[1, 4] = \min_{1 \leq k < 4} \{m[1, k] + m[k + 1, 4] + p_0 p_k p_4\} \quad (9)$$

$$m[1, 4] = \min \begin{cases} m[1, 1] + m[2, 4] + p_0 p_1 p_4 = 0 + 8840 + 55760 = 64600 (k = 1) \\ m[1, 2] + m[3, 4] + p_0 p_2 p_4 = 6560 + 3400 + 5576 = \mathbf{15536} \text{ (k = 2)} \\ m[1, 3] + m[4, 4] + p_0 p_3 p_4 = 10660 + 0 + 34850 = 45510 (k = 3) \end{cases} \quad (10)$$

$$m[2, 5] = \min_{2 \leq k < 5} \{m[2, k] + m[k + 1, 5] + p_1 p_k p_5\} \quad (11)$$

$$m[2, 5] = \min \begin{cases} m[2, 2] + m[3, 5] + p_1 p_2 p_5 = 0 + 5032 + 1920 = \mathbf{6952} \text{ (k = 2)} \\ m[2, 3] + m[4, 5] + p_1 p_3 p_5 = 4000 + 10200 + 12000 = 26200 (k = 3) \\ m[2, 4] + m[5, 5] + p_1 p_4 p_5 = 8840 + 0 + 16320 = 25160 (k = 4) \end{cases} \quad (12)$$

$$m[1, 5] = \min_{1 \leq k < 5} \{m[1, k] + m[k + 1, 5] + p_0 p_k p_5\} \quad (13)$$

$$m[1, 5] = \min \begin{cases} m[1, 1] + m[2, 5] + p_0 p_1 p_5 = 0 + 6952 + 19680 = 26632 (k = 1) \\ m[1, 2] + m[3, 5] + p_0 p_2 p_5 = 6560 + 5032 + 1968 = \mathbf{13560} \text{ (k = 2)} \\ m[1, 3] + m[4, 5] + p_0 p_3 p_5 = 10660 + 10200 + 12300 = 33160 (k = 3) \\ m[1, 4] + m[5, 5] + p_0 p_4 p_5 = 15536 + 0 + 16728 = 32264 (k = 4) \end{cases} \quad (14)$$

Damit ergibt sich nach Aufruf von $Opt-Klam(A, s, 1, n)$ folgende optimale Klammerung: $((A_1)(A_2))(((A_3)(A_4))(A_5))$.

Mit dieser Klammerung ergeben sich die minimalen Kosten von 13560:

$$A' = A_1 \cdot A_2 \Rightarrow (41 \times 40)\text{-Matrix} \cdot (40 \times 4)\text{-Matrix} = 41 \cdot 40 \cdot 4 = 6560 \quad (41 \times 4)\text{-Matrix} \quad (15)$$

$$A'' = A_3 \cdot A_4 \Rightarrow (4 \times 25)\text{-Matrix} \cdot (25 \times 34)\text{-Matrix} = 4 \cdot 25 \cdot 34 = 3400 \quad (4 \times 34)\text{-Matrix} \quad (16)$$

$$A''' = A'' \cdot A_5 \Rightarrow (4 \times 34)\text{-Matrix} \cdot (34 \times 12)\text{-Matrix} = 4 \cdot 34 \cdot 12 = 1632 \quad (4 \times 12)\text{-Matrix} \quad (17)$$

$$A'''' = A' \cdot A''' \Rightarrow (41 \times 4)\text{-Matrix} \cdot (4 \times 12)\text{-Matrix} = 41 \cdot 4 \cdot 12 = 1968 \quad (41 \times 12)\text{-Matrix} \quad (18)$$

Damit ergeben sich die Gesamtkosten dieser Klammerung mit $6560 + 3400 + 1632 + 1968 = \mathbf{13560}$.