# Assignment 5
# Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410
Daniel Kocher, 0926293

April 19, 2016

**Aufgabe 9**Zu zeigen: Sei $m \leq i$: $x_i$ Vorfahre von $x_m \Leftrightarrow P_{min}(\{x_m, ..., x_i\}) = x_i$

*Proof.*
i) " $\Leftarrow$ "
Annahme: $P_{min}(\{x_m, ..., x_i\}) = x_i$
Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt $\Rightarrow$ aus der Menge $\{x_m, ..., x_i\}$ wird $x_i$ als erster eingefügt.
Für die Knoten $x_k$ mit Schlüsseln $k$ die vor $x_i$ eingefügt wurden haben die Eigenschaft: $k < key(x_m)$ oder $k > key(x_i)$.[1].
Wenn $x_j \in \{x_m, ..., x_{i-1}\}$ eingefügt wird durchläuft $x_j$ denselben Pfad wie $x_i$ [2] und wird im linken Unterbaum von $x_i$ eingefügt. Es gilt daher: $x_j$ ist Nachfahre von $x_i$ und insbesonders $x_m$ ist Nachfahre von $x_i \implies x_i$ ist Vorfahre von $x_m$

ii) " $\Rightarrow$ "
Sei: $P_{min}(\{x_m, ..., x_i\}) = x_j$; Zeige: $i = j$
Annahme: $x_i$ Vorfahre von $x_m$
Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt $\Rightarrow$ aus der Menge $\{x_m, ..., x_i\}$ wird $x_j$ als erster eingefügt.
Für die Knoten $x_k$ mit Schlüssel $k$ die vor $x_i$ eingefügt wurden haben die Eigenschaft: $k < key(x_m)$ oder $k > key(x_i)$. Jeder Knoten $x_l$ aus $\{x_m, ..., x_i\}$ mit $l \neq j$ muss beim Einfügen denselben Pfad durchlaufen wie $x_j$.
Falls $j \neq i, m$: $x_m$ landet im linken Unterbaum von $x_j$ und $x_i$ im rechten Unterbaum von $x_j \implies x_i$ ist kein Vorfahr von $x_m$.
Falls $j = m$: $x_i$ landet im rechten Unterbaum von $x_m \implies x_m$ ist Vorfahre von $x_i$
$\implies j = i$ ◻

[1] Würde $key(x_m) \leq k \leq key(x_i)$ gelten wäre der Knoten mit dem Schlüssel $k$ Teil der Menge $\{x_m, ..., x_i\}$ und würde wegen $P_{min}(\{x_m, ..., x_i\}) = x_i$ nach $x_i$ eingefügt werden

[2] Es gilt für alle sich im Baum befindlichen Schlüssel $k$ $k < key(x_m) \leq key(x_j) \leq key(x_i)$ oder $k > key(x_i) \geq key(x_j) \geq key(x_m)$

**Aufgabe 10**

Zu zeigen: Sei $m$ die Anzahl der Schlüssel, die kleiner als der gesuchte Schlüssel $k$ sind. Die erwartete Anzahl von Knoten auf dem Suchpfad ist $H_m + H_{n-m}$.

*Proof.*
Sei $x_k$ der Knoten mit Schlüssel $k$ der ohne Berücksichtigung der Prioritäten in den gegebenen Suchbaum imaginär eingefügt wird.

Sei:

$$X_{k,i} = \begin{cases} 1, x_i \text{ ist Vorfahr des neuen imaginaren Knotens } x_k \text{ mit } key(x_k) = k \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

und:
Sei $X_k$ die Anzahl der Knoten auf dem Pfad von der Wurzel nach dem Knoten $x_k$ (ohne $x_k$)

$$X_k = \sum_{i<k} X_{k,i} + \sum_{i>k} X_{k,i} \tag{1}$$

$$E[X_k] = E[\sum_{i<k} X_{k,i}] + E[\sum_{i>k} X_{k,i}] \tag{2}$$

$$E[X_k] = \sum_{i<k} E[X_{k,i}] + \sum_{i>k} E[X_{k,i}] \tag{3}$$

F1($i < k$):

$$E[X_{k,i}] = Pr[P_{min}(\{x_1, ..., x_i\}) = x_i] = \frac{1}{i} \tag{4}$$

F2($i > k$):

$$E[X_{k,i}] = Pr[P_{min}(\{x_i, ..., x_n\}) = x_i] = \frac{1}{n-i+1} \tag{5}$$

Also:

$$E[X_k] = \sum_{i<k} E[X_{k,i}] + \sum_{i>k} E[X_{k,i}] \tag{6}$$

$$E[X_k] = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{n-i+1} \tag{7}$$

$$E[X_k] = (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m}) + (\frac{1}{n-(m+1)+1} + ... + \frac{1}{n-n+1}) \tag{8}$$

$$E[X_k] = (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m}) + (\frac{1}{n-m} + ... + 1) \tag{9}$$

$$E[X_k] = H_m + H_{n-m} \tag{10}$$

□