

# Assignment 5

## Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410  
Daniel Kocher, 0926293

April 19, 2016

**Aufgabe 9** Zu zeigen: Sei  $m \leq i$ :  $x_i$  Vorfahre von  $x_m \Leftrightarrow P_{\min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$

*Proof.*

i) "  $\Leftarrow$  "

Annahme:  $P_{\min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$

Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt  $\Rightarrow$  aus der Menge  $\{x_m, \dots, x_i\}$  wird  $x_i$  als erster eingefügt.

Für die Knoten  $x_k$  mit Schlüsseln  $k$  die vor  $x_i$  eingefügt wurden haben die Eigenschaft:  $k < \text{key}(x_m)$  oder  $k > \text{key}(x_i)$ .<sup>1</sup>

Wenn  $x_j \in \{x_m, \dots, x_{i-1}\}$  eingefügt wird durchläuft  $x_j$  denselben Pfad wie  $x_i$  <sup>2</sup> und wird im linken Unterbaum von  $x_i$  eingefügt. Es gilt daher:  $x_j$  ist Nachfahre von  $x_i$  und insbesondere  $x_m$  ist Nachfahre von  $x_i \Rightarrow x_i$  ist Vorfahre von  $x_m$

ii) "  $\Rightarrow$  "

Sei:  $P_{\min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_j$ ; Zeige:  $i = j$

Annahme:  $x_i$  Vorfahre von  $x_m$

Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt  $\Rightarrow$  aus der Menge  $\{x_m, \dots, x_i\}$  wird  $x_j$  als erster eingefügt.

Für die Knoten  $x_k$  mit Schlüssel  $k$  die vor  $x_i$  eingefügt wurden haben die Eigenschaft:  $k < \text{key}(x_m)$  oder  $k > \text{key}(x_i)$ . Jeder Knoten  $x_l$  aus  $\{x_m, \dots, x_i\}$  mit  $l \neq j$  muss beim Einfügen denselben Pfad durchlaufen wie  $x_j$ .

Falls  $j \neq i, m$ :  $x_m$  landet im linken Unterbaum von  $x_j$  und  $x_i$  im rechten Unterbaum von  $x_j \Rightarrow x_i$  ist kein Vorfahr von  $x_m$ .

Falls  $j = m$ :  $x_i$  landet im rechten Unterbaum von  $x_m \Rightarrow x_m$  ist Vorfahre von  $x_i$

$\Rightarrow j = i$

□

---

<sup>1</sup>Würde  $\text{key}(x_m) \leq k \leq \text{key}(x_i)$  gelten wäre der Knoten mit dem Schlüssel  $k$  Teil der Menge  $\{x_m, \dots, x_i\}$  und würde wegen  $P_{\min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$  nach  $x_i$  eingefügt werden

<sup>2</sup>Es gilt für alle sich im Baum befindlichen Schlüssel  $k$   $k < \text{key}(x_m) \leq \text{key}(x_j) \leq \text{key}(x_i)$  oder  $k > \text{key}(x_i) \geq \text{key}(x_j) \geq \text{key}(x_m)$

### Aufgabe 10

Zu zeigen: Sei  $m$  die Anzahl der Schlüssel, die kleiner als der gesuchte Schlüssel  $k$  sind. Die erwartete Anzahl von Knoten auf dem Suchpfad ist  $H_m + H_{n-m}$ .

*Proof.*

Sei  $x_k$  der Knoten mit Schlüssel  $k$  der ohne Berücksichtigung der Prioritäten in den gegebenen Suchbaum imaginär eingefügt wird.

Sei:

$$X_{k,i} = \begin{cases} 1, & x_i \text{ ist Vorfahr des neuen imaginären Knotens } x_k \text{ mit } \text{key}(x_k) = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und:

Sei  $X_k$  die Anzahl der Knoten auf dem Pfad von der Wurzel nach dem Knoten  $x_k$  (ohne  $x_k$ )

$$X_k = \sum_{i < k} X_{k,i} + \sum_{i > k} X_{k,i} \quad (1)$$

$$E[X_k] = E\left[\sum_{i < k} X_{k,i}\right] + E\left[\sum_{i > k} X_{k,i}\right] \quad (2)$$

$$E[X_k] = \sum_{i < k} E[X_{k,i}] + \sum_{i > k} E[X_{k,i}] \quad (3)$$

F1( $i < k$ ): gilt für  $m$  Knoten des Suchbaums

$$E[X_{k,i}] = \Pr[P_{\min}(\{x_1, \dots, x_i\}) = x_i] = \frac{1}{i} \quad (4)$$

F2( $i > k$ ): gilt für  $n - m$  Knoten des Suchbaums

$$E[X_{k,i}] = \Pr[P_{\min}(\{x_i, \dots, x_n\}) = x_i] = \frac{1}{n - i + 1} \quad (5)$$

Also:

$$E[X_k] = \sum_{i < k} E[X_{k,i}] + \sum_{i > k} E[X_{k,i}] \quad (6)$$

$$E[X_k] = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} + \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{n - i + 1} \quad (7)$$

$$E[X_k] = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{n - (m+1) + 1} + \dots + \frac{1}{n - n + 1}\right) \quad (8)$$

$$E[X_k] = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{n - m} + \dots + 1\right) \quad (9)$$

$$E[X_k] = H_m + H_{n-m} \quad (10)$$

□