



SORBONNE UNIVERSITÉ
FACULTÉ DES SCIENCES ET INGÉNIERIE
MASTER COMPUTATIONAL MECHANICS

Flambement et post-flambement d'une poutre hyperélastique

Étudiantes :

Daniella LOPES PINTO - 28615005

Nejma MENOUEUR - 3531972

Encadrant :

S. NEUKIRCH

4 janvier 2021

1 Introduction

Dans cette étude, on analyse la conception non linéaire de pylônes en béton. Les plus grands pylônes sont des ponts à haubans et des ponts suspendus, d'une portée d'environ 1000 m. Les charges de trafic et le poids propre du tablier sont transférés aux fondations par les pylônes, qui sont des structures élancées et, dans la plupart des cas, soumises à une compression. Comme les structures sont élancées, elles sont soumises à des effets de second ordre, qui peuvent conduire à leur ruine.

2 Objectif

Le but de ce projet est de mieux comprendre les effets du second ordre pour le flambement, qui peuvent causer la rupture de la structure et analyser la stabilité de la structure.

3 Étude préliminaire

On considère un modèle simplifié, où un pylône en béton est uniquement soumis à son propre poids. Dans ce cas, l'axe x indique la direction de la gravité, l'axe y est perpendiculaire à x dans même plan perpendiculaire à l'axe z .

Le pylône est modélisé comme une poutre rectangulaire hyperélastique, de longueur Lx et de section transversale $Ly \times Lz$, encastree à une extrémité et soumise à son propre poids. La figure 1 représente le schéma d'étude.

Le pylône est soumis à son propre poids et la tension compressive est maximale sur la base en ($x = 0$). Si le pylône est très long, la compression à sa base sera plus élevée, mais dans le cas étudié, la compression ne devrait pas dépasser 50 MPa. En connaissant la densité du matériaux ($\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$), on peut écrire la relation suivante d'équilibre d'efforts afin de trouver la longueur maximale du pylône :

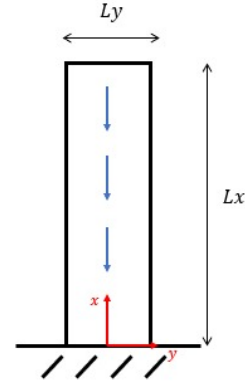


FIGURE 1 – Modèle simplifié de pylône utilisé pour analyser les effets de second ordre.

$$\sigma_{xx} = \rho g Lx < 50 \text{ MPa}$$

$$Lx < 2269 \text{ m}$$

Cependant, ce résultat ne représente pas une valeur réaliste, puisque les pylônes les plus hauts utilisés ont une hauteur d'environ 1000 m. Pour la valeur calculée de Lx , la compression à la base du pylône serait aussi très élevée et le matériau ne supporterait probablement pas tel effort sans casser.

La légère inclinaison peut introduire de la tension dans la structure, et comme le béton ne peut supporter aucune tension, la limite de Lx diminue. Dans la cas étudié, on considère que le pylône fait un angle α petit avec la direction de la gravité. Quand l'angle α tend vers zéro, on note presque aucune différence pour la longueur Lx .

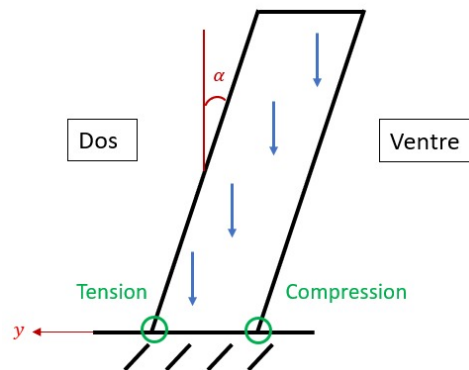


FIGURE 2 – Modèle de pylône incliné avec les efforts appliqués sur le dos et ventre.

D'après la figure 2, le pylône est soumis à deux efforts : un moment et une compression due au poids. Le moment peut se caractériser comme une tension sur le dos ou une compression sur le ventre. Comme le béton ne supporte pas de tension, la condition pour qu'il ne casse pas en tension est donnée par :

$$\sigma_{xx} = \rho g Lx - \frac{M Ly}{I} > 0 \quad (1)$$

Où I est le moment d'inertie d'une poutre et est donné par : $I = \frac{1}{12} Ly^3 Lz$.

Par contre, le ventre du pylône est soumis à une double compression, qui ne peut pas dépasser la valeur $f_c = 50 \text{ MPa}$. On obtient donc :

$$\sigma_{xx} = \rho g Lx + \frac{M Ly}{I} < 50 \quad (2)$$

Où le moment M est donné par :

$$M = \frac{1}{2} \rho g \sin \alpha Lx^2$$

Comme l'angle α est petit, on peut considérer que $\cos \alpha \approx \alpha$. On peut donc réécrire les équations 1 et 2 comme suit, respectivement :

$$Lx \left(1 - 3\alpha \frac{Lx}{Ly} \right) > 0 \quad (3)$$

$$Lx \left(1 + 3\alpha \frac{Lx}{Ly} \right) < \frac{f_c}{\rho g} \quad (4)$$

La figure 3 contient le graphe dans le plan (Lx, Ly) avec les courbes d'équation (3) et (4), qui représentent respectivement les courbes de tension et compression sur le pylône. La zone de sécurité est représentée par la région sous les deux courbes. Cela signifie que le pylône ne cassera pas si les deux valeurs de Lx et Ly sont dans cette zone.

D'après le graphique, si on prend $Ly = 10 \text{ m}$, on trouve que le Lx maximum est

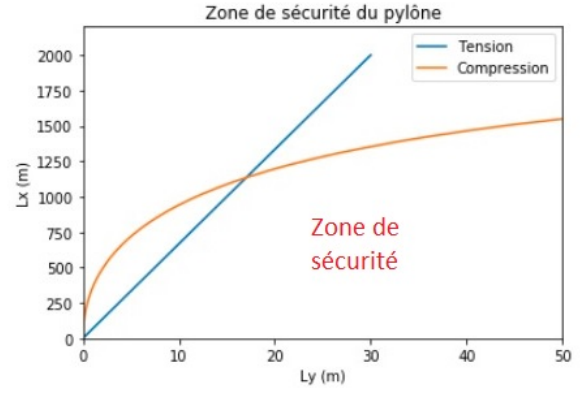


FIGURE 3 – Zone de sécurité du pylône en dessous des deux courbes.

d'environ 650 m et le pylône casserait en tension. Déjà, si on prend $Ly = 20 \text{ m}$, le Lx maximum est d'environ 1100 m et le pylône casserait à cause de la compression.

4 Analyse de la réponse quasi-statique non linéaire

Jusqu'à présent, les calculs n'ont pas pris en compte la déformation du pylône sous la charge appliquée. On les prendra désormais en compte et on verra qu'elle baisse considérablement les valeurs limites. Les effets du second ordre sont estimés numériquement au moyen d'une simulation 2D (contrainte plane) utilisant FEniCS. On note que la gravité est selon l'axe x dans ce cas.

Pour les simulations numériques on pose les paramètres suivants : $Lx = 1,0 \text{ m}$, $Ly = 0,1 \times Lx$, $E = 10^3 \text{ Pa}$ et $\nu = 0,3$. On obtient donc le graphe présenté par la figure 4, qui contient le déplacement normalisé de la pointe du pylône par rapport à la charge appliquée à la structure.

Afin d'analyser l'influence que l'angle α a sur les résultats obtenus, on calcule le déplacement normalisé de la pointe en fonction de la charge appliquée et on obtient le graphe présenté par la Figure 5, où chaque courbe représente des angles α différents.

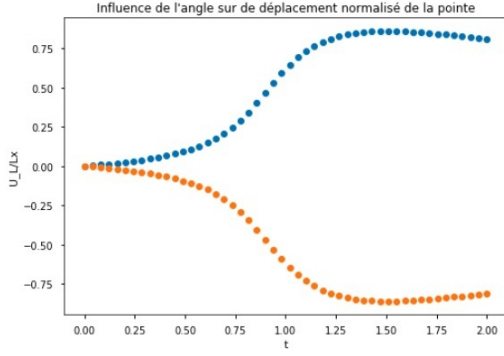


FIGURE 4 – Déplacement normalisé de la pointe du pylône par rapport à la charge appliquée.

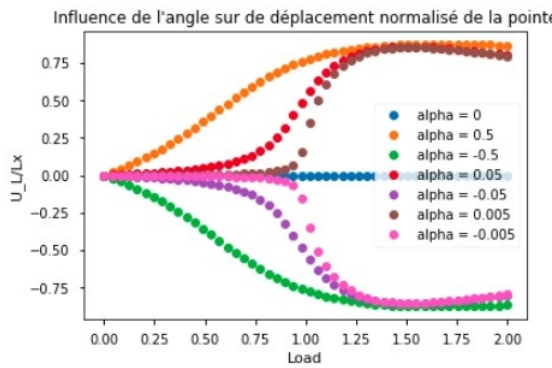


FIGURE 5 – Déplacement normalisé de la pointe du pylône par rapport à la charge appliquée pour différents angles.

D'après le graphe de la figure 5, on peut observer que la pointe de la courbe du déplacement normal par rapport au chargement croît avec l'angle α . On peut aussi observer que pour les faibles valeurs de α , la courbe obtenue est quasiment horizontale et à partir d'un moment elle explose. Pour la plus petite valeur d'angle $\alpha = 0,005$ on peut voir que le bifurcation se produit quand le chargement est égal à 1 (la valeur théorique est égal à 7,8 mais on a paramétré le chargement). Donc on peut conclure que plus la valeur de α est grande, plus petite est la charge critique de flambement.

5 Analyse de stabilité

Pour étudier la stabilité du système, on analyse le signe de la plus petite valeur propre de la matrice Hessienne, qui est ob-

tenue avec la dérivée seconde de l'énergie et est symétrique. On peut donc avoir deux cas :

- Si la plus petite valeur propre est positive, l'équilibre est stable ;
- Sinon l'équilibre est instable.

On peut analyser les résultats pour différents cas, par exemple quand $\alpha = 0$, la plus petite valeur propre diminue jusqu'à devenir négative, comme montré sur la figure 6. Pour les autres angles étudiés, on observe que la plus petite valeur propre est toujours positive, donc c'est un équilibre stable.

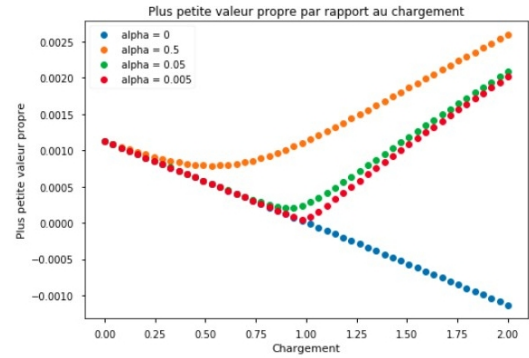


FIGURE 6 – La plus petite valeur propre par rapport au chargement pour différents angles α .

La solution de ce système présente deux régions (Figure 7) : une première dans l'intervalle de chargement $[0, 1]$, où les valeurs propres les plus petites sont positives et représentent donc un équilibre stable et sont affichés en vert ; une deuxième région dans l'intervalle $[1, 2]$ où les valeurs propres deviennent négatives et traduisent un équilibre instable en rouge.

On défini le rapport sans dimension Γ suivant :

$$\Gamma = 12 \frac{\rho \cdot g \cdot Lx^3}{E \cdot Ly^2} \quad (5)$$

Lorsque $\alpha = 0$ (pylône parfaitement aligné avec la gravité), la configuration droite devient instable lorsque $\Gamma > 7,8$. Au-delà

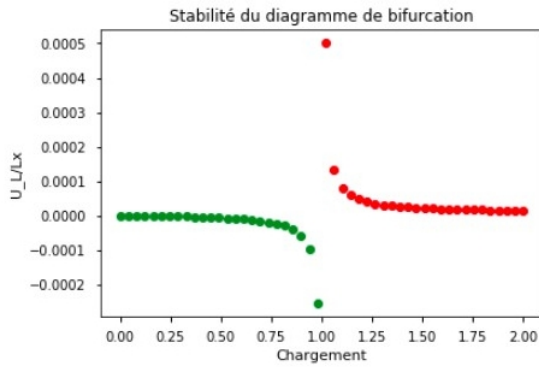


FIGURE 7 – Représentation de la partie stable et instable du déplacement pour $\alpha = 0$.

de cette valeur critique, la configuration d'équilibre stable est déviée dans le plan (x, y) .

On peut remarquer que quand l'angle α tend vers zéro la limite de stabilité tend aussi vers la charge critique. Plus l'angle est grand, plus la limite de stabilité s'éloigne de la première charge de flambement, donc la limite de stabilité de la branche fondamentale ne coïncide pas avec la première charge de flambage pour chaque cas.

6 Limite de longueur

Maintenant on considère que le module d'Young pour le béton est égal à $E = 35 \text{ GPa}$ et que l'angle avec la direction de la gravité est $\alpha = 0.005 \text{ rad}$.

En utilisant la relation 5, si on pose que $Ly = 10 \text{ m}$ et $\Gamma = 7,8$, d'après cette relation on peut calculer $Lx \approx 459 \text{ m}$. En utilisant la relation 3 pour la tension et la 4 pour la compression, on peut trouver que la hauteur vaut $Lx \approx 667 \text{ m}$ en tension $Lx \approx 902 \text{ m}$ en compression, donc l'hauteur maximale est donnée par tension. Cette valeur maximale est donc 70% inférieur à celle de l'Étude préliminaire (Section 3).

On fait le même calcul précédent en considérant $Ly = 20 \text{ m}$ et on trouve que $Lx \approx 728 \text{ m}$. À l'aide des relations 3 et 4 on trouve que $Lx \approx 1333 \text{ m}$ en tension et

$Lx \approx 1143 \text{ m}$ en compression, donc la limite est donnée par la compression et est 50% inférieure à celle de la Section 3.

7 Conclusion

Avec ce projet on a pu étudier les effets de second ordre pour le flambement, bien comme analyser la stabilité de la structure étudiée (pylône). On a pu aussi voir que pour les problèmes de flambement les résultats dépendent de la présence de imperfections, comme l'angle α avec la direction de la gravité ou les propriétés matérielles, qui influencent directement les résultats.

Références

- [1] Wikipedia. Flambage.
<https://fr.wikipedia.org/wiki/Flambage>.
- [2] Wikipedia. Self-buckling.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Self-buckling>
- [3] NOTION DE STABILITÉ : FLAMBEMENT
[https://www.itterbeek.org/uploads/documents/RM-Chap8\(Flambement\).pdf](https://www.itterbeek.org/uploads/documents/RM-Chap8(Flambement).pdf)