

A ÓN چیز

MLE for Poisson. Given a random sample $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, derive the maximum likelihood estimator λ of the Poisson distribution.

$$P(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

בהתאם להגדרה הנדרשת, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ זו התחמזהות הולכת וגדלה, כלומר $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

הנראה ש $L(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{-x_i} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} \right)$ מוגדרת בכל $\lambda > 0$.

: log-likelihood → מ-3 גורםatic ic3 NJ

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} \right) \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} \right) = \sum_{i=1}^n (\ln(e^{-\lambda}) - \ln(x_i!) + \ln(\lambda^{x_i})) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (-\lambda - \ln(x_i!) + x_i \ln(\lambda)) = -n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) + \ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n) = -n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) + \ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad : \text{log-likelihood} \rightarrow \text{prob}$$

: λ the maximum likelihood estimator \rightarrow NK 13NJ, 14D

המינימום של המילוי מתקבל בנקודה $\hat{\lambda} = \operatorname{arg\,max}_{\lambda} l(\lambda; x_1, \dots, x_n)$.

תירצ'קוּת נוֹאָרָה מִפְּרַטְתָּה לְבָנָה log-likelihood - ה-LL.

$$\frac{d}{d\lambda} l(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \frac{d}{d\lambda} \left[-n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) + \ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right] = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i$$

$\hat{\lambda}_n = \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$: גודל ארך סטטיסטיק נורמליזציה של נתונים.

ה-**estimator** מעריכים את ה-**mean** (ה-**μ**) כ-

באה לפלנינג - א, ורוכת ה זו נוחה נהייה נפריר פלאו (פלו הצעה). (ב)

A radar at the beach is used to detect ships. Ships are located in one of four zones: A, B, C and D. The probability of detection per zone is 0.75, 0.5, 0.3, 0.4 for A, B, C, D respectively. The probability of being at a specific zone is 0.4, 0.2, 0.3, 0.1 for A, B, C, D, respectively.

- What is the probability that a ship will be detected?
- Given that a ship is detected, what is the probability that it was in zone C?
- Given that a ship is detected, what is the probability that it was in zone B?

הסתברות
שנמצא
באזור
A = 0.4

$$\begin{cases} P(A) = 0.4 \\ P(B) = 0.2 \\ P(C) = 0.3 \\ P(D) = 0.1 \end{cases}$$

הסתברות
שנמצא
באזור
B = 0.5

$$\begin{cases} P(A') = 0.35 \\ P(B') = 0.5 \\ P(C') = 0.3 \\ P(D') = 0.4 \end{cases}$$

(3) **הסתברות שספינה תdetected: רצף אוסף הסתברות השגגה**
 $P(c) = \sum_{i=A}^D P(\text{ספינה נמצאת בזירה } i \text{ או יותר}) \cdot P(\text{ספינה נמצאת בזירה } i)$

$$P(c) = P(A) \cdot P(A') + P(B) \cdot P(B') + P(C) \cdot P(C') + P(D) \cdot P(D')$$

$$P(c) = 0.4 \cdot 0.35 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.53$$

$$P(c' | \text{ספינה נמצאה בזירה } C \text{ או יותר}) = \frac{P(c') \cdot P(\text{ספינה נמצאה בזירה } C \text{ או יותר}))}{P(\text{ספינה נמצאה בזירה } C \text{ או יותר})} = \frac{P(c') \cdot P(c')}{0.53} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.53} = 0.1698$$

$$P(b' | \text{ספינה נמצאה בזירה } B \text{ או יותר}) = \frac{P(b') \cdot P(\text{ספינה נמצאה בזירה } B \text{ או יותר}))}{P(\text{ספינה נמצאה בזירה } B \text{ או יותר})} = \frac{P(b') \cdot P(b')}{0.53} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.53} = 0.1886$$

Find 3 random variables X, Y, C such that:

- a. $X \perp Y | C$ – (X and Y are independent given C .)
 - b. X and Y are not independent.
 - c. X, Y take integer values such that $1 \leq X, Y \leq 10$ and C is binary.
 - d. The following conditions hold:
 - i. $P(1 \leq X \leq 5) = 0.3$
 - ii. $P(1 \leq Y \leq 5) = 0.3$
 - iii. $P(C = 0) = 0.5$

You need to specify the value of $P(X = x, Y = y, C = c)$ for all relevant x, y, c . How many such relevant values exist?

$$(x \leq 10 \text{ or } x \geq 1) \text{ and } (x = 5 \text{ or } x = 6)$$

$$(1 \leq y \leq 10) \quad \text{good possible age} = y = \begin{cases} 1 & \text{likes pasta} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} 1 & \text{child is female} \\ 0 & \text{child is male} \end{cases}$$

	X	Y	C	
$P(X=6, Y=1, C=0) = 0.3 \Leftarrow$	6	1	0	
$P(X=6, Y=6, C=0) = 0.3$	6	1	0	
$P(X=6, Y=6, C=1) = 0.2$	6	1	0	
$P(X=5, Y=6, C=1) = 0.3$	6	6	0	$P(4 \leq X \leq 5) = \frac{3}{10} = 0.3$
	6	6	0	
	6	6	1	$P(4 \leq Y \leq 5) = \frac{3}{10} = 0.3$
	6	6	1	
	5	6	1	$P(C=0) = \frac{5}{10} = 0.5$
	5	6	1	
	5	6	1	

$$P(X=5) = 0.3 \neq P(X=5|Y=6) = \frac{P(X=5, Y=6)}{P(Y=6)} = \frac{0.3}{0.9} = 0.444$$

$$0 = p(x=5, y=6 | c=0) = p(x=5 | c=0) \cdot p(y=6 | c=0) = 0 \cdot \frac{2}{5} = 0$$

פְּנִימָה וְכָמָרֶן אַ, בָּנָגֶל

$$0 = p(x=5, y=1 \mid c=0) = p(x=5 \mid c=0) \cdot p(y=1 \mid c=0) = 0 \cdot \frac{3}{5} = 0$$

$$\frac{2}{5} = p(x=6, y=6 \mid c=0) = p(x=6 \mid c=0) \cdot p(y=6 \mid c=0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$\underline{z} = p(x=6, y=1 \mid c=0) = p(x=6 \mid c=0) \cdot p(y=1 \mid c=0) = 5 \cdot \frac{3}{5} = \underline{3}$$

$$\frac{3}{5} = P(X=5, Y=6 \mid C=1) = P(X=5 \mid C=1) \cdot P(Y=6 \mid C=1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{3}{5}$$

$$0 = p(x=5, y=4 \mid c=1) = p(x=5 \mid c=1) \cdot p(y=4 \mid c=1) = \frac{3}{5} \cdot 0 = 0$$

$$p_{\text{all}} = p(x=6, y=6 | c=1) = p(x=6 | c=1) \cdot p(y=6 | c=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

$$o = p(x=6, y=1 \mid c=1) = p(x=6 \mid c=1) \cdot p(y=1 \mid c=1) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1$$

Digitized by srujanika@gmail.com

The probability of having a decent meal in Karmaf is 0.65.

- What is the probability of having 3 decent meals in a week (5 days)?
- What is the probability of having at least 2 decent meals in a week?
- A class of 300 students recorded the number of decent meals they had during a specific week. They averaged their results. What do you expect the value of that average to be?

רעיון: $X \sim B(5, 0.65)$ כלומר, ($n=5$) מינימום 3 מזונות decent

$$P(X=3) = \binom{5}{3} 0.65^3 \cdot (1-0.65)^2 = 0.3364$$

הסתברות שפחות מ-3 מזונות decent

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - \left[\binom{5}{0} 0.65^0 (1-0.65)^5 + \binom{5}{1} 0.65^1 (1-0.65)^4 \right] = 0.946$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.054 = 0.946$$

הסתברות שפחות מ-2 מזונות decent

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0.65 = 3.25 : X \text{avarage מזונות decent}$$

5. סעיפים

Bivariate Normal Distribution: you are given a dataset of 1,000 (x_1, x_2) points drawn from a Bivariate Normal distribution with unknown parameters (data/bivariate_normal_data.csv).

- a. Estimate the distribution parameters using the following (these are the MLE parameters):

$$\mu_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N x_i^{(k)}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_i^{(k)} - \mu_i)^2}$$

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_1^{(k)} - \mu_1) \cdot (x_2^{(k)} - \mu_2)$$

: סעיפים X, Y גודל מוגן בדוחה ו- μ_1, μ_2 מוגן מילויים (סבירות) ב- 5 ניטרליות (5)

$$\mu_1 = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{i=1}^{1000} x_i = 0.54113139$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0.54113139 \\ -0.0459914 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{i=1}^{1000} y_i = -0.0459914$$

: סדר ערך מינימום מינימום ומקסימום ומקסימום σ_1, σ_2 מוקטן (סבירות) מ- 0.05 (0.05)

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (x_i - \mu_1)^2} = 0.93302132$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0.93302132 \\ 0.99689616 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (y_i - \mu_2)^2} = 0.99689616$$

: סדר ערך מינימום מינימום ומקסימום ומקסימום (סבירות) מ- 0.05 (0.05)

$$\rho = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (x_i - \mu_1)(y_i - \mu_2) = 0.6619536$$

: סעיף 9 סעיפים מינימום ומקסימום (5)

