עבודה חישובית ממ"ן 13 – מטלה עם 3 תשובות לחלק התיאורטי.

דניאל לוי 207375742

שי גרונלנק 207128190

שאלה מס 1

MLE for Poisson. Given a random sample $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, derive the maximum likelihood estimator λ of the Poisson distribution.

$$P(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

בהינתן n הדגימות $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ של התפלגות הפואסונית, פונקציית ה- likelihood הינה:

$L(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} \right)$ בהנחה שהדגימות הנתונות בלתי תלויות (כפי שמרומז מהגדרתן דגימות של פואסון).

נמצא את פונקציית ה- log-likelihood:

$$l(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln(e^{-\lambda}) - \ln(x_i!) + \ln(\lambda^{x_i}) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\lambda - \ln(x_i!) + x_i \ln(\lambda) \right) = -n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) + \ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\Leftarrow$ פונק' ה- log-likelihood: $l(\lambda; x_1, \dots, x_n) = -n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) + \ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

כעת, נמצא את ה- maximum likelihood estimator של λ:

ה- MLE הוא הפתרון עבור $\hat{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}}\, l(\lambda; x_1, \dots, x_n)$. התנאי הראשון למציאת המקסימום הינו $\frac{d}{d\lambda} l(\lambda; x_1, \dots, x_n) = 0$.

הנגזרת הראשונה של פונקציית ה- log-likelihood ביחס לפרמטר λ הינה:

$$\frac{d}{d\lambda} l(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \frac{d}{d\lambda} \left[-n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) + \ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \right] = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

נשווה את הנגזרת שמצאנו לעיל ל-0 ונקבל: $\hat{\lambda}_n = \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

מכאן שה- estimator של $\hat{\lambda}_n$ הוא למעשה התוחלת של n הדגימות (מה שהגיוני אינטואיטיבית, מכיוון שהערך הצפוי של פואסון רנדומלי

שווה לפרמטר שלו - λ, ותוחלת הדגימות מהווה מעריך עבור הערך הצפוי). ☺

שאלה מס 2

A radar at the beach is used to detect ships. Ships are located in one of four zones: A, B, C and D. The probability of detection per zone is 0.75, 0.5, 0.3, 0.4 for A, B, C, D respectively. The probability of being at a specific zone is 0.4, 0.2, 0.3, 0.1 for A, B, C, D, respectively.

a. What is the probability that a ship will be detected?
b. Given that a ship is detected, what is the probability that it was in zone C?
c. Given that a ship is detected, what is the probability that it was in zone B?

נתונים:

ההסתברויות לאיתור ספינה בהינתן אזור A-D

$$\begin{cases} P(A') = 0.75 \\ P(B') = 0.5 \\ P(C') = 0.3 \\ P(D') = 0.4 \end{cases}$$

ההסתברויות להימצאות ספינה בכל אזור

$$\begin{cases} P(A'') = 0.4 \\ P(B'') = 0.2 \\ P(C'') = 0.3 \\ P(D'') = 0.1 \end{cases}$$

א) ההסתברות לאיתור ספינה: נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה -

$$P(\text{איתור ספינה}) = \sum_{i=A}^{D} P\left(\text{המצאות הספינה ב- zone } i\right) \cdot P\left(\text{איתור הספינה בהינתן שנמצאת ב- zone } i\right) = \sum_{i=A}^{D} P(i'')P(i') =$$

$$P(\text{איתור ספינה}) = P(A'')\cdot P(A') + P(B'')\cdot P(B') + P(C'')\cdot P(C') + P(D'')\cdot P(D')$$

$$P(\text{איתור ספינה}) = 0.4 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.53$$

ב)

$$\underbrace{P(C''}_{\text{הימצאות באזור C}} \mid \text{אותרה ספינה}) \underset{\text{נוסחת ב"ס}}{=} \frac{P(C'') \cdot P(\overbrace{\text{אותרה ספינה} \mid C''}^{C'})}{P(\text{אותרה ספינה})} = \frac{P(C'') \cdot P(C')}{0.53} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.53} = 0.1698$$

ג)

$$\underbrace{P(B''}_{\text{הימצאות באזור B}} \mid \text{אותרה ספינה}) \underset{\text{נוסחת ב"ס}}{=} \frac{P(B'') \cdot P(\overbrace{\text{אותרה ספינה} \mid B''}^{B'})}{P(\text{אותרה ספינה})} = \frac{P(B'') \cdot P(B')}{0.53} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.53} = 0.1886$$

שאלה מס 3

Find 3 random variables X, Y, C such that:

a. $X \perp Y \mid C$ – (X and Y are independent given C.)

b. X and Y are not independent.

c. X, Y take integer values such that $1 \le X, Y \le 10$ and C is binary.

d. The following conditions hold:

 i. $P(1 \le X \le 5) = 0.3$

 ii. $P(1 \le Y \le 5) = 0.3$

 iii. $P(C = 0) = 0.5$

You need to specify the value of $P(X = x, Y = y, C = c)$ for all relevant x, y, c. How many such relevant values exist?

- נגדיר: בגן המעבדה 10 ילדים (בנים ובנות) בגילאים 5-6. נגדיר עבור הגן את המשתנים הבאים:

X = גיל (כמובן שהגילאים הוא 5-6 ולכן מתקיים $X \ge 1$ וגם $X \le 10$)

ילדים שאוהבים פסטה = $Y = \begin{cases} 1 & \text{likes pasta} \\ 6 & \text{otherwise} \end{cases}$ $(1 \le Y \le 10)$

$C = \begin{cases} 1 & \text{child is female} \\ 0 & \text{child is male} \end{cases}$

נפרט את נתוני האוכלוסיה בטבלה:

X	Y	C
6	1	0
6	1	0
6	1	0
6	6	0
6	6	0
6	6	1
6	6	1
5	6	1
5	6	1
5	6	1

$P(X=6, Y=1, C=0) = 0.3 \Leftarrow$

$P(X=6, Y=6, C=0) = 0.2$

$P(X=6, Y=6, C=1) = 0.2$

$P(X=5, Y=6, C=1) = 0.3$

מהנתונים מתקיים:

$P(1 \le X \le 5) = \frac{3}{10} = 0.3$

$P(1 \le Y \le 5) = \frac{3}{10} = 0.3$

$P(C=0) = \frac{5}{10} = 0.5$

בנוסף, נשים ♡ ש-X ו-Y תלויים מכיוון שמתקיים:

$$P(X=5) = 0.3 \neq P(X=5 \mid Y=6) = \frac{P(X=5, Y=6)}{P(Y=6)} = \frac{0.3}{0.7} = 0.428$$

נראה שבהינתן C, X,Y ב"ת:

$$0 = P(X=5, Y=6 \mid C=0) = P(X=5 \mid C=0) \cdot P(Y=6 \mid C=0) = 0 \cdot \frac{2}{5} = 0$$

$$0 = P(X=5, Y=1 \mid C=0) = P(X=5 \mid C=0) \cdot P(Y=1 \mid C=0) = 0 \cdot \frac{3}{5} = 0$$

$$\frac{2}{5} = P(X=6, Y=6 \mid C=0) = P(X=6 \mid C=0) \cdot P(Y=6 \mid C=0) = \frac{5}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5} = P(X=6, Y=1 \mid C=0) = P(X=6 \mid C=0) \cdot P(Y=1 \mid C=0) = \frac{5}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} = P(X=5, Y=6 \mid C=1) = P(X=5 \mid C=1) \cdot P(Y=6 \mid C=1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{3}{5}$$

$$0 = P(X=5, Y=1 \mid C=1) = P(X=5 \mid C=1) \cdot P(Y=1 \mid C=1) = \frac{3}{5} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{2}{5} = P(X=6, Y=6 \mid C=1) = P(X=6 \mid C=1) \cdot P(Y=6 \mid C=1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5} = P(X=5, Y=6 \mid C=1) = P(X=5 \mid C=1) \cdot P(Y=6 \mid C=1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{3}{5}$$

✓ כל התנאים מתקיימים כנדרש ☺

שאלה מס 4

The probability of having a decent meal in Karnaf is 0.65.

a. What is the probability of having 3 descent meals in a week (5 days)?

b. What is the probability of having at least 2 descent meals in a week?

c. A class of 300 students recorded the number of descent meals they had during a specific week. They averaged their results. What do you expect the value of that average to be?

א) נגדיר כ-X את מס׳ הארוחות הראויות בשבוע (5 ימים). אזי: $X \sim B(5, 0.65)$. נחשב:

ההסתברות שנאכל 3 ארוחות ראויות בקרנף במשך שבוע (5 ימים) היא:

$$P(X=3) = \binom{5}{3} 0.65^3 \cdot (1-0.65)^2 = 0.3364$$

ב) נחשב:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - \left[\binom{5}{0} 0.65^0 (1-0.65)^5 + \binom{5}{1} \cdot 0.65^1 \cdot (1-0.65)^4\right] =$$

ההסתברות שנאכל יותר מ-2 ארוחות ראויות בקרנף בשבוע (5 ימים) היא:

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.054 = 0.946$$

ג) נצפה שהממוצע יתקרב לתוחלת של X:

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0.65 = 3.25$$

שאלה מס 5

Bivariate Normal Distribution: you are given a dataset of 1,000 (x_1, x_2) points drawn from a Bivariate Normal distribution with unknown parameters (data/bivariate_normal_data.csv).

a. Estimate the distribution parameters using the following (these are the MLE parameters):

$$\mu_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} x_i^{(k)}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(x_i^{(k)} - \mu_i\right)^2$$

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(x_1^{(k)} - \mu_1\right) \cdot \left(x_2^{(k)} - \mu_2\right)$$

(א) ראשית כל (באמצעות האקסל), נמצא את הערכים של μ_1, μ_2 ע"י ממוצע העמודות x,y בהתאמה:

$$\mu_1 = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{i=1}^{1000} x_i = 0.51113139$$

$$\Rightarrow \mu = \begin{bmatrix} 0.5113139 \\ -2.0159914 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{i=1}^{1000} y_i = -2.0159914$$

שנית (עם באמצעות האקסל), חישבנו את σ_1, σ_2 עפ"י הנוסחה ובאמצעות ערכי μ שמצאנו לעיל:

$$\sigma_1 = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (x_i - \mu_1)^2 = 0.93302132$$

$$\Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} 0.93302132 \\ 0.99689616 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (y_i - \mu_2)^2 = 0.99689616$$

לבסוף נמצא את ρ עפ"י הנוסחה הנתונה עם כן ובאמצעות האקסל והערכים שמצאנו לעיל:

$$\rho = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (x_i - \mu_1)(y_i - \mu_2) = 0.6619576$$

(ב) הגרף שמתאים לפרמטרים שמצאנו: