

# Relatório PIBIC

*Daniel Lima Viegas\**  
*Juliana Betini Fachini-Gomes†*

## 1 Introdução

A Análise de sobrevivência é a área da Estatística aplicada nas áreas da saúde, das ciências sociais e econômicas chegando até às engenharias. Por possuir tantas aplicações, essa área também é chamada de Análise de Confiabilidade.

Nesse tipo de análise o objeto de estudo é o tempo até a ocorrência de um evento de interesse. Sua grande diferença com relação às outras áreas da Estatística é a presença de censura no estudo, ou seja, dados cujo a observação de tempo não se concluiu por algum motivo.

O tempo juntamente com essa censura, formam a variável resposta. Considerando o tempo como uma variável aleatória, é possível aplicar certos tipos de gráficos e técnicas com o propósito de descobrir uma possível distribuição para esses dados e assim realizar possíveis inferências e tirar as devidas conclusões.

Na grande maioria dos trabalhos nessa área mensuram a variável tempo de forma contínua, pela grande quantidade de distribuições de probabilidade as quais os dados podem se ajustar. Quando a variável é medida de forma discreta, é necessário utilizar de alguns artifícios para o estudo. Um desses artifícios é o uso da discretização de uma distribuição de probabilidade. Esse método causa uma adaptação nos métodos tradicionais da análise de sobrevivência. Segundo Colosimo e Giolo (2006), uma distribuição de probabilidade muito utilizada como alternativa de distribuições mais flexíveis é a Log-Logística, pois é aplicável em muitas situações práticas.

## 2 Revisão de Literatura

### 2.1 Análise de Sobrevivência

Em determinados tipos de estudo é desejável estudar o tempo até a ocorrência de determinado evento de interesse, na Estatística, o nome que se dá a esse tipo de estudo é Análise de Sobrevivência. O evento de interesse pode ter nomes diferentes para diferentes áreas, em geral o termo usado pela maioria é falha, na medicina esse evento pode ser a morte do paciente, a cura ou a manifestação de uma doença. Na engenharia, em geral, esse termo se refere a falha de um equipamento e nas ciências econômicas esse termo pode se referir a inadimplência de um determinado cliente.

O tempo nesse estudo pode ser medido de diversas formas como dias, meses, anos e até intervalos de tempo pré-determinados. Por ser um tipo de estudo que é observado ao longo do tempo, o acompanhamento de determinadas observações pode ser interrompido por diversos motivos. Dentre esses motivos podem estar a desistência de um paciente em participar do estudo por motivos pessoais ou o defeito de um produto por outro motivo que não o desejado.

---

\*e-mail: daniel.limaviegas454@gmail.com

†e-mail: jfachini@unb.br

Diferentemente de outras áreas da Estatística, na Análise de Sobrevida esses dados incompletos também são utilizados e se caracterizam como censuras. Essa censura forma a variável resposta juntamente com as observações completas do tempo. Dentre essas censuras existem três tipos principais, à direita, à esquerda e a intervalar. A censura à direita acontece quando o tempo registrado no estudo é maior que o tempo de início do estudo.

Dentro da censura à direita, ainda é possível realizar a divisão dessa censura em três tipos. A censura de tipo I ocorre quando existe um tempo limite para a ocorrência desse evento, caso esse tempo seja atingido, todas as observações que não manifestaram o evento são marcadas como censura. Na censura de tipo II, o número de falhas é fixado no começo do estudo e ao atingir esse número de falhas, as outras observações são marcadas como censuras. A censura de tipo III é a censura aleatória e engloba as duas censuras anteriores, esta censura se caracteriza por possuir censuras que não se sabe o motivo dela ter acontecido. Nesse trabalho será utilizada a censura à direita aleatória.

A utilização desse tipo de censura no estudo se mostra importante, pois apesar de não ter apresentado falha, há a informação de que a observação ainda poderia apresentar tal falha caso o estudo tivesse continuado. A ausência dessa censura pode causar um viés às estimativas e ainda não mostrar a verdadeira distribuição dos dados.

A função de sobrevivência é definida como a probabilidade de um indivíduo não falhar até um determinado tempo  $t$ , ou seja, é a probabilidade de uma observação viver além do tempo  $t$ . Dada uma variável aleatória  $T$ , discreta, não negativa. Pode-se descrever a função de sobrevivência como:

$$\begin{aligned} S(t) &= P(T > t) \\ &= \sum_{j=t+1}^{\infty} P(T = k), \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{1}$$

## 2.2 Estimação da Função de Sobrevida por Kaplan Meier

O estimador a ser usado nesse trabalho será o estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier. Esse estimador é muito popular em pesquisas que usam análise de sobrevivência. O estimador é escrito da seguinte forma:

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_{(j)} \leq t} \frac{n_j - d_j}{n_j}$$

Onde,  $n_j$  representa o número de dados em risco de falha,  $d_j$  são os dados que falharam no tempo  $t_j$ , em que,  $0 \leq t_{(1)} \leq \dots \leq t_{(n)}$ , são os tempos distintos de falha. Esta técnica não utiliza covariáveis para a estimação, mas pode usar variáveis categóricas para verificar se as funções estimadas são diferentes.

A representação gráfica desse método se comporta em uma função da forma de escada, uma vez que a estimação entre o tempo  $t_{(j)}$  e  $t_{(j+1)}$  é constante.

### 2.3 Distribuição Log-Logística

Para os casos onde  $T$  é uma variável aleatória contínua seguindo uma distribuição Log-Logística, sua função densidade de probabilidade é descrita como:

$$f(t) = \frac{\lambda \left(\frac{t}{\mu}\right)^{\lambda-1}}{\mu \left[1 + \left(\frac{t}{\mu}\right)^\lambda\right]^2}, \quad t > 0, \mu > 0, \lambda > 0 \quad (2)$$

Com isso, é possível definir a função de sobrevivência para a distribuição Log-Logística como:

$$S(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\mu}\right)^\lambda}, \quad t > 0, \mu > 0, \lambda > 0 \quad (3)$$

Segundo D. F. dos Santos (2017), dada uma variável aleatória contínua  $T$ , é possível encontrar sua função de probabilidade discretizada a partir de sua função de distribuição de probabilidade e função de Sobrevivência, através de:

$$\begin{aligned} p(t) &= P(T = t) \\ &= P(t \leq T < t + 1) \\ &= P(T < t + 1) - P(T \leq t) \\ &= F_T(t + 1) - F_T(t) \\ &= [1 - S_T(t + 1)] - [1 - S_T(t)] \\ &= S_T(t) - S_T(t + 1) \end{aligned} \quad (4)$$

Dado que  $T$  é uma variável com distribuição Log-Logística, a função de probabilidade discretizada dessa variável pode ser descrita como:

$$p(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\mu}\right)^\lambda} - \frac{1}{1 + \left(\frac{t+1}{\mu}\right)^\lambda} \quad (5)$$

Com relação ao comportamento da função de risco, quando  $\lambda$  é menor que 1, esta é monótona decrescente, enquanto para valores maiores que 1 a função tem um comportamento monótono crescente.

## 3 Modelo de Regressão Log-Logístico discreto

Uma das técnicas mais utilizadas para tentar explicar a variabilidade de uma variável segundo um conjunto de covariáveis é o modelo de regressão. Na análise de sobrevivência, utiliza-se de covariáveis para tentar explicar o tempo até a ocorrência do evento de interesse, com base na correlação entre a variável tempo e cada uma das covariáveis. Segundo D. F.

dos Santos (2017), dado um vetor de covariáveis  $\mathbf{x}^T = (1, x_1, \dots, x_p)$  utiliza-se uma função de ligação  $g(\cdot)$  que conecte a variável resposta ao vetor  $\mathbf{x}^T$ .

Definindo o preditor linear como  $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}$ , em que,  $\boldsymbol{\beta}$  é o vetor com  $p+1$  coeficientes de regressão. Considerando uma variável aleatória  $T$  com distribuição log-logística discreta definida na seção 2.3, pode-se utilizar o parâmetro de escala  $\mu$ , com  $\mu > 0$  como a função de ligação, ou seja,  $\mu = g(\eta) = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})$ . Com isso, é possível descrever o modelo de regressão Log-Logístico discreto como:

$$p(t|x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})}\right)^\lambda} - \frac{1}{1 + \left(\frac{t+1}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})}\right)^\lambda}, \quad t > 0, \lambda > 0, -\infty < \boldsymbol{\beta} < \infty \quad (6)$$

A partir dessa função, é possível descrever também a função sobrevivência da seguinte forma:

$$S(t|x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})}\right)^\lambda}, \quad t > 0, \lambda > 0, -\infty < \boldsymbol{\beta} < \infty \quad (7)$$

Como a função risco acumulado pode ser descrita como uma função da função de sobrevivência, esta possui a seguinte forma:

$$h(t|x) = -\frac{d}{dt} \log \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})}\right)^\lambda}, \quad t > 0, \lambda > 0, -\infty < \boldsymbol{\beta} < \infty, \quad (8)$$

Onde,  $\lambda$  é o parâmetro de forma e  $\boldsymbol{\beta}$  é o vetor de coeficientes do modelo.

## 4 Método de Máxima Verossimilhança para dados discretos

Para a estimação dos parâmetros da função de distribuição, e também para os parâmetros do modelo, existe uma grande variedade de formas para efetuar tal procedimento. Como a característica principal da análise de sobrevivência é a presença de censuras, o procedimento também deve incorporar tal característica. Por esse motivo, é descartado alguns métodos para a estimação.

Um método que consegue incorporar a censura é o método da máxima verossimilhança. Este método tem como objetivo encontrar o valor do parâmetro que maximiza a probabilidade da amostra observada ser encontrada. Este método mostra-se adequado por permitir a incorporação das censuras através da inclusão da função de sobrevivência para os tempos censurados, enquanto os tempos em que ocorreram falha, considera-se a função densidade.

Para os tipos de censura à direita mostrados, a função de máxima verossimilhança a ser maximizada pode ser descrita analiticamente e a menos de constantes, é dada por Colosimo e Giolo (2006):

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto \prod_{i=1}^n [p(t_i; \boldsymbol{\theta})]^{\delta_i} [S(t_i; \boldsymbol{\theta})]^{1-\delta_i}, \quad (9)$$

onde  $\delta_i$  é a variável indicadora de falha e  $\theta$  é o vetor de parâmetros que serão estimados.

Para o modelo Log-Logístico, utilizando as equações 6 e 7, a função de máxima verossimilhança a ser maximizada possui a seguinte forma:

$$L(\theta) \propto \prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{t}{\exp(x^T \beta)} \right)^\lambda} - \frac{1}{1 + \left( \frac{t+1}{\exp(x^T \beta)} \right)^\lambda} \right]^{\delta_i} \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{t}{\exp(x^T \beta)} \right)^\lambda} \right]^{1-\delta_i}, \quad (10)$$

A partir da equação 10, é possível obter os parâmetros do modelo encontrando o ponto de máximo global na função. Isto pode ser feito ao resolver o sistema:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

## 5 Análise de Dados

A fim de ilustrar o funcionamento do modelo de regressão Log-Logístico, serão utilizados dois bancos de dados com aplicações distintas. O primeiro banco de dados é o banco utilizado por Barreto et al. (1994). Este banco estuda o tempo desde a suplementação de vitamina A ou placebo, até o primeiro episódio de diarreia em crianças com idades entre 0 e 24 meses. Os dados foram obtidos ao acompanhar pouco mais de 1200 crianças e possui em sua estrutura 3 variáveis explicativas.

O segundo banco de dados foi cedido pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). O banco estuda o tempo que um aluno leva para evadir do curso de Química nesta universidade com mais de 600 alunos presentes no conjunto. O banco possui informações sobre os alunos como covariáveis.

### 5.1 Suplementação de Vitamina em Episódios de Diarreia

No estudo de suplementação de vitamina, o evento de interesse era a ocorrência do primeiro episódio de diarreia em crianças com idades entre 0 e 24 meses. Para o estudo, foi definido que um episódio da doença é quando a doença persiste por uma sequência de dias. Além da covariável que indica o uso de vitamina A ou placebo, o banco também conta com a idade da criança e o sexo. Para o estudo, foram coletadas as informações de 1207 crianças.

#### 5.1.1 Análise Descritiva

Para observar inicialmente o comportamento da variável tempo e levar em consideração as censuras ao longo do estudo, utiliza-se o estimador de Kaplan-Meier para a função de sobrevivência e assim poder estimar a curva de sobrevivência. Utiliza-se a função risco acumulado estimada para encontrar uma possível distribuição para realizar a modelagem através de seu gráfico.

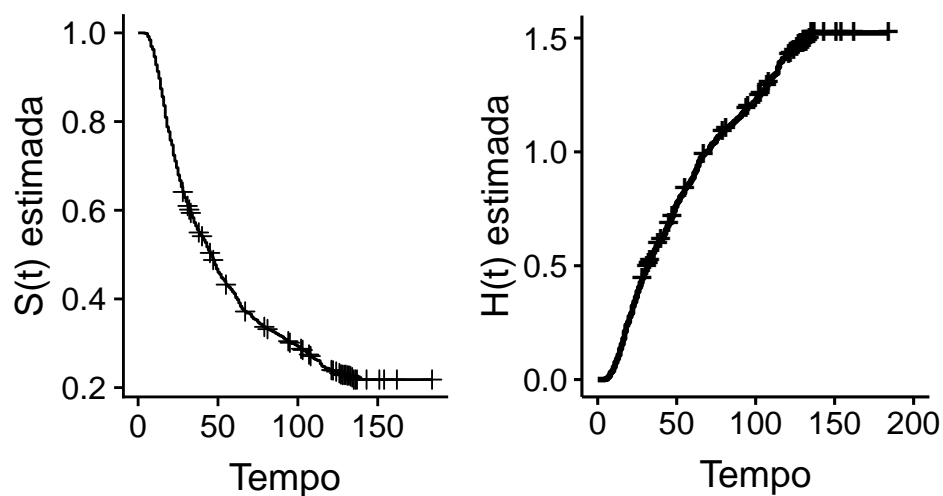


Figura 1: À esquerda, está a curva de sobrevivência e à direita, está a curva risco acumulado.

Pode-se perceber pelos gráficos que as censuras começam a aparecer em tempos próximos de 50 e grande parte das censuras se concentram no final das curvas, próximo ao tempo 150. É possível perceber na curva risco acumulado na 1, um comportamento decrescente. Esse tipo de comportamento é o indicador de que a distribuição Log-Logística é uma das possíveis distribuições a serem estudadas.

Outra forma de se analisar descritivamente as variáveis em sobrevivência, é realizar o gráfico de sobrevivência facetado pelas covariáveis categóricas. Para a variável numérica idade, foi realizada uma categorização para a análise. Valores abaixo de 12 meses foram descritos como 0 e acima disso como 1.

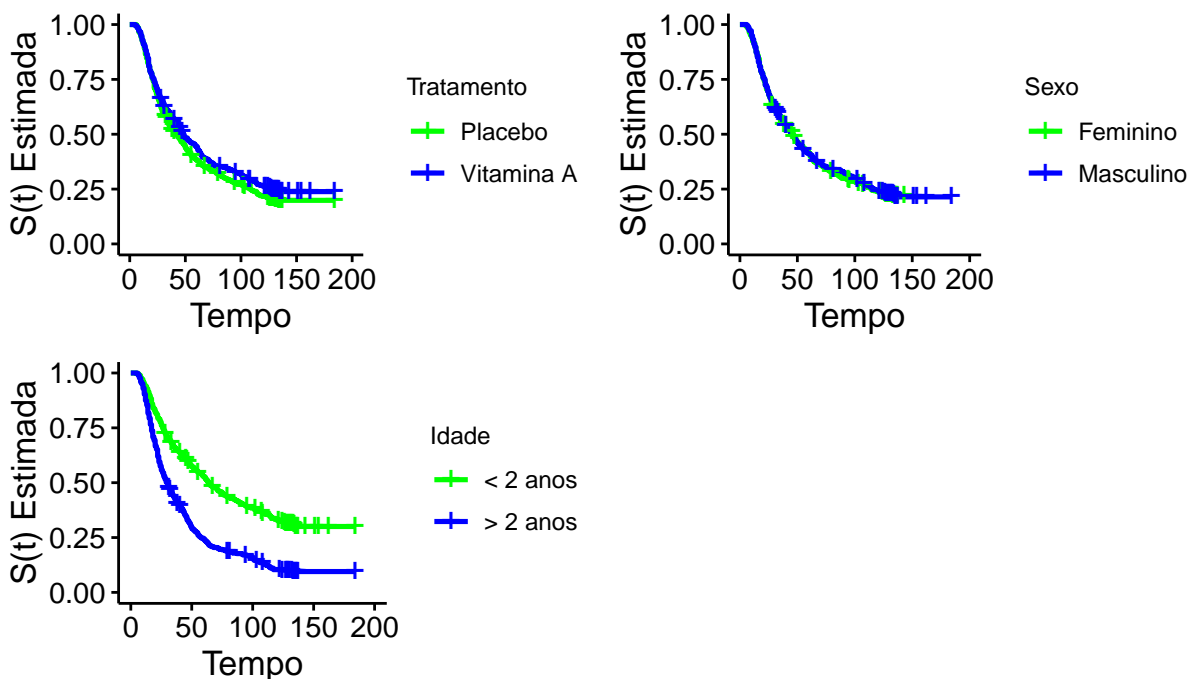


Figura 2: Curvas de sobrevivência facetadas pelas covariáveis

As variáveis que melhor explicam o tempo sem considerar nenhuma distribuição, são

aquelas que possuem maior diferença nas curvas quando facetadas. Ao observar os gráficos na figura 2 percebe-se que a variável de idade possui curvas muito diferentes, o que indica que a covariável explica bem o tempo. A variável tratamento também apresenta diferença, apesar de não ser tão perceptível. O sexo da criança não mostrou grande diferença, o que indica que esse fator não é muito explicativo para a variável resposta.

### 5.1.2 Modelagem dos dados

Ao realizar a construção do modelo completo, obteve-se os seguintes parâmetros com seus respectivos p-valores:

	Parâmetros	P.valor
Intercepto	4.13	0.00
Idade	-0.68	0.00
Tratamento	0.12	0.04
Sexo	0.04	0.48

Tabela 1: Parâmetros do modelo completo

A partir da tabela, percebe-se que a idade e o tipo de tratamento são informações significativas para o modelo, enquanto a informação de sexo, não. Desta forma, utilizando o método *backward* para seleção de variáveis com o p-valor como critério de retirada.

Com isso, o modelo escolhido em seguida foi com as variáveis de idade e o tipo do tratamento:

	Parâmetros	P.valor
Intercepto	4.15	0.00
Idade	-0.68	0.00
Tratamento	0.13	0.04

Tabela 2: Parâmetros do modelo sem a variável sexo

Observando a tabela 2, nota-se que todas as variáveis são significativas ao nível de 5% de significância. Pelo método *backward*, não tem nenhuma variável a ser retirada do modelo, sendo assim, este é o modelo escolhido no estudo.

Para verificar a qualidade do ajuste do modelo, utiliza-se o critério gráfico de Cox-Snell. Neste critério, compara-se a curva de sobrevivência do resíduo do modelo com a curva de sobrevivência de uma exponencial com parâmetro 1.

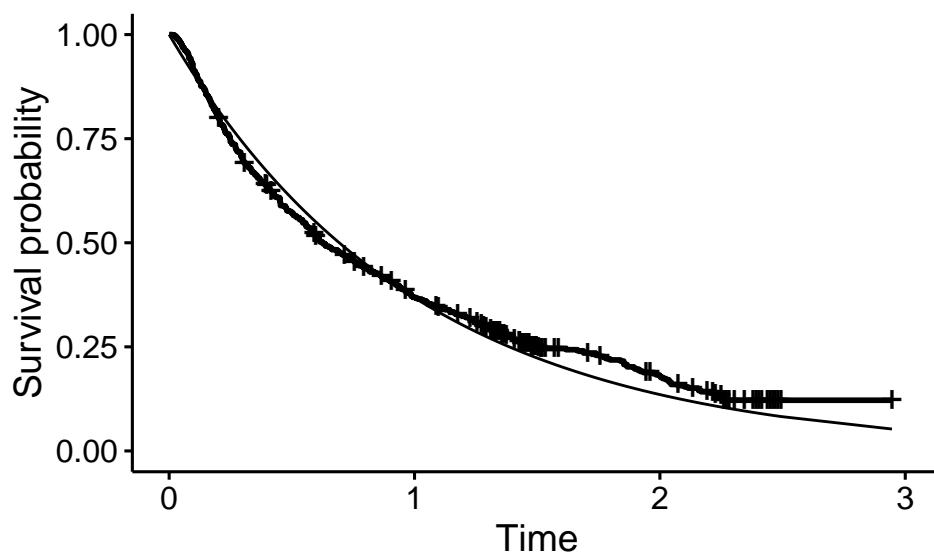


Figura 3: Resíduo de Cox-Snell.

Pela figura 3, percebe-se que a curva estimada é próxima da curva da exponencial, o que mostra que o modelo ajustado possui boa qualidade, e por isso o modelo final para esse estudo é o modelo com as variáveis de idade e tipo de tratamento.

## 5.2 Evasão dos alunos de química

Para este estudo, o evento de interesse foi definido como a evasão do aluno, é dito que houve censura caso o aluno se forme, ou o estudo acabe antes da evasão. O banco conta com 671 alunos do curso de química e 6 possíveis variáveis explicativas, sendo essas: Sexo, Turno, Tipo da Escola, Por onde ingressou, Idade e a Origem do aluno. Todas as variáveis são binárias, inclusive idade que está definida como “Maior que a idade mediana” e “Menor que a idade mediana”.

### 5.2.1 Análise Descritiva

Primeiramente observa-se o comportamento da variável tempo através do estimador de Kaplan-Meier, incorporando as censuras e verificando o comportamento da função risco acumulado:



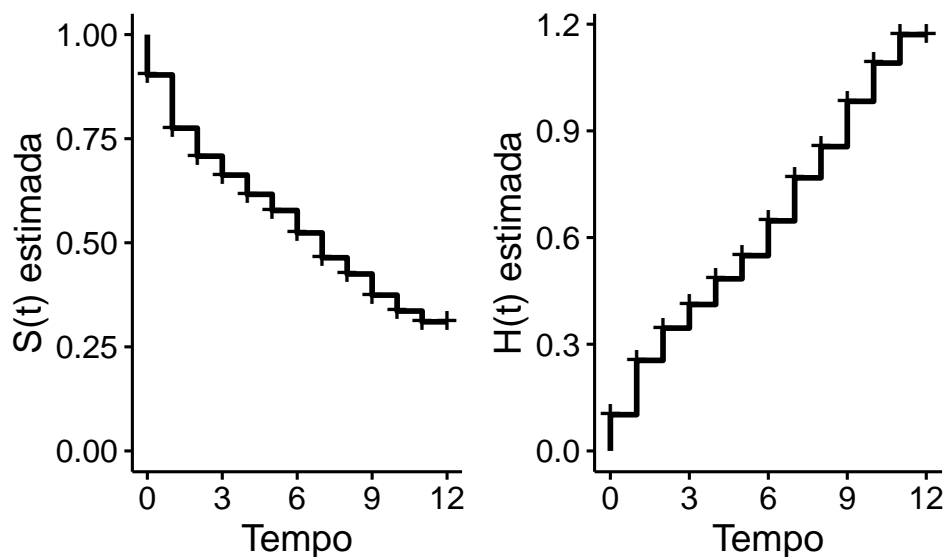
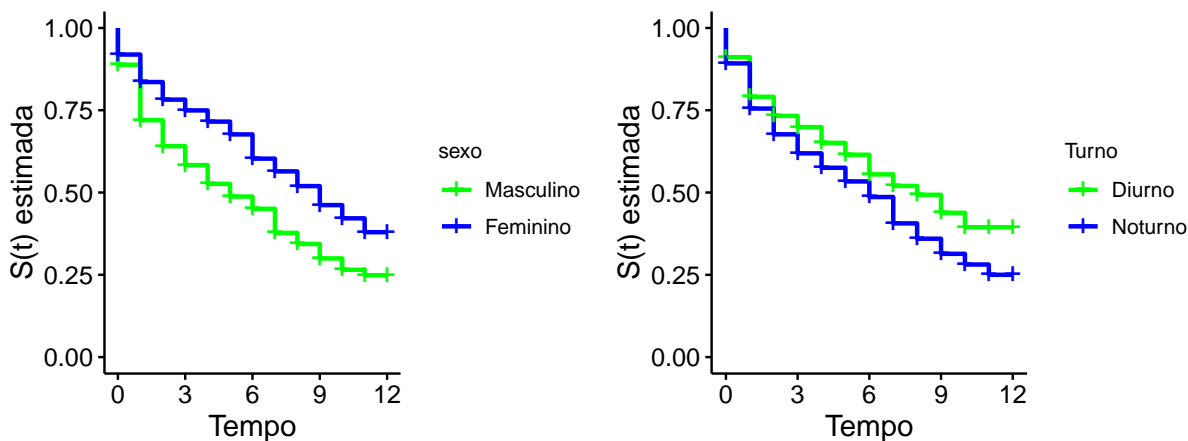


Figura 4: À esquerda, está a curva de sobrevivência e à direita, está a curva risco acumulado.

É interessante notar pelo gráfico que as probabilidades de sobrevivência vão diminuindo de forma muito mais rápida nos primeiros tempos e para os tempos finais a probabilidade vai convergindo para algo em torno dos 0,25. A função risco acumulada à direita mostra um comportamento decrescente o que mostra que a distribuição estudada se adequa bem aos dados.

Para verificar a relação entre o tempo e as variáveis explicativas, pode-se realizar o procedimento de Kaplan-Meier para cada uma das variáveis. Esse procedimento ajuda a entender se cada variável, individualmente, pode influenciar no tempo sem depender de distribuição nenhuma.



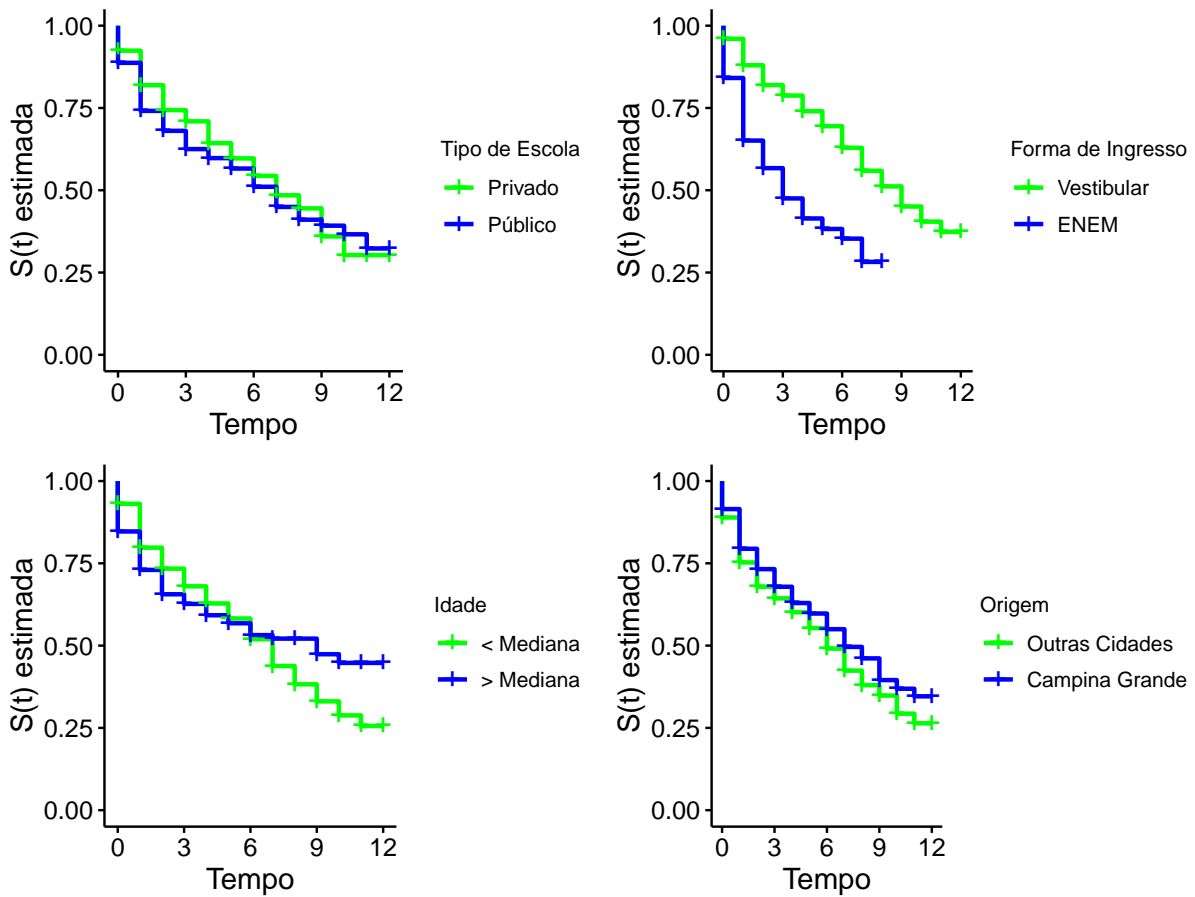


Figura 5: Curva de sobrevivência estimada para as covariáveis

Segundo os gráficos de cada covariável, nem todas aparentam ser bem explicativas para a resposta. Variáveis como tipo de escola e origem do aluno, possuem curvas muito parecidas entre suas categorias. Por outro lado, as variáveis de sexo e forma de ingresso se distanciam o suficiente para supor boa correlação com o tempo. As variáveis turno e idade são parecidas ao longo de parte da curva e depois começam a se diferenciar, não se sabe ao certo se elas poderiam explicar bem o tempo ou não.

### 5.2.2 Modelagem dos dados

Para modelagem deste banco de dados, será realizada uma adaptação mais fraca do método *forward* de seleção de variáveis. Assim, será realizada a estimação do modelo apenas com o intercepto e após isso, serão estimados modelos adicionando variáveis uma a uma e escolhendo a variável mais significativa. A seleção pára quando não tiver mais nenhuma variável significativa.

O modelo apenas com o intercepto e uma variável apresentou os seguintes resultados:

	Parâmetro	P.valor
Sexo	0.40	0.00
Turno	-0.15	0.09
Escola	-0.18	0.04
Ingresso	-0.86	0.00
Idade	-0.09	0.37
Origem	0.15	0.09

Tabela 3: Parâmetros do modelo apenas com o intercepto

Segundo a tabela 3, as variáveis sexo e forma de ingresso são as mais propícias a entrar no modelo, porém a variável de ingresso é mais significativa e por isso é a variável adicionada. Após isso, repetindo o processo para uma segunda variável, tem-se:

	Parâmetro	P.valor
Sexo	0.27	0.00
Turno	-0.13	0.05
Escola	-0.07	0.30
Idade	-0.09	0.25
Origem	0.12	0.08

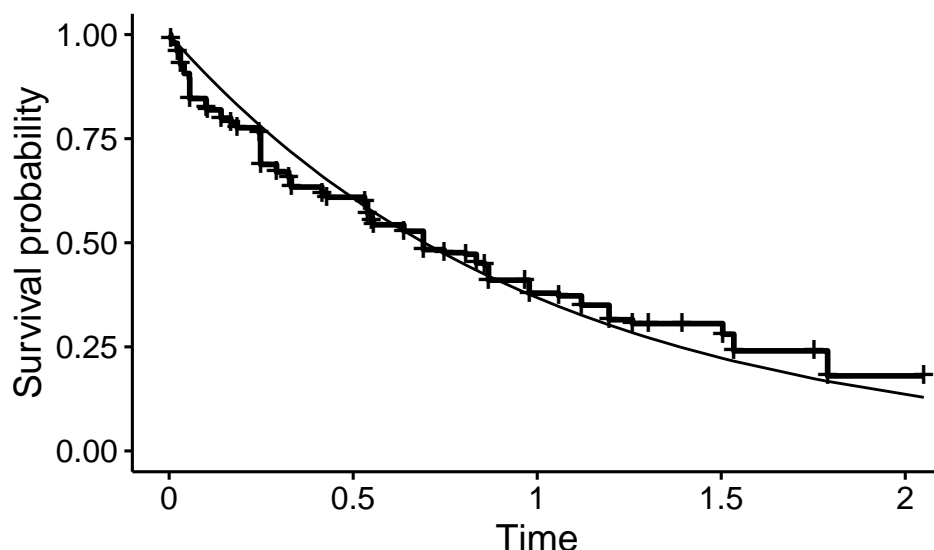
Tabela 4: Parâmetros do modelo apenas com o intercepto

Pela tabela 4, nota-se que a variável sexo é a mais significativa e por isso deve ser incluída no modelo. Repetindo o processo para as variáveis restantes, encontra-se o seguinte:

	Parâmetro	P.valor
Turno	-0.11	0.10
Escola	-0.08	0.27
Idade	-0.10	0.17
Origem	0.11	0.10

Tabela 5: Parâmetros do modelo apenas com o intercepto

Como nenhuma das variáveis se mostra significativa, não é incluído mais nenhum fator no modelo, chegando assim a um possível modelo final. Após a seleção do modelo, é necessário medir a qualidade do ajuste com o critério gráfico de Cox-Snell.



Como é possível notar pelo gráfico, a curva da distribuição exponencial é muito próxima à curva de sobrevivência do resíduo do modelo e por isso, é possível dizer que o modelo aparenta ter boa qualidade de ajuste. Com isso, o modelo final para esse estudo é o modelo que explica o tempo segundo as variáveis Sexo e Forma de Ingresso.

## 6 Considerações Finais

Na análise de sobrevivência não existem muitas distribuições discretas para se realizar a modelagem, como uma alternativa para esse problema está a discretização de distribuições contínuas, tais como a Log-Logística.

Pelos resultados apresentados no texto, a distribuição Log-Logística discretizada é uma boa alternativa no que tange a uma alternativa para tempos discretos na análise de sobrevivência. Os modelos estimados em ambos os bancos mostraram bons ajustes.

No primeiro banco, o resultado seguiu esperado na análise exploratória com as variáveis de idade e tratamento sendo significativas. O mesmo aconteceu no segundo banco com as variáveis de sexo e turno. Essas variáveis em ambos os estudos aparentavam explicar bem o tempo independente da distribuição.

## 7 Referências

Barreto, M. L., L. M. P. Santos, A. M. O. Assis, M. P. N. Araújo, G. G. Franzena, P. A. B. Santos, e R. L. Fiaccone. 1994. "Effect of vitamin A supplementation on diarrhoea acute lower-respiratory-tract infection in young children in Brazil". *Lancet* 344, 228–31.

Colosimo, A., E, e S. R. Giolo. 2006. *Análise de Sobrevivência Aplicada*. São Paulo: Editora Bucher.

Santos, D. F. dos. 2017. "Modelo de Regressão Log-Logístico discreto com fração de cura para dados de sobrevivência". Dissertação de mestrado, Brasília: Universidade de Brasília. Departamento de Estatística - Instituto de Ciências Exatas.