Universidad Nacional Autónoma de México

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas

Axel Daniel Malváez Flores

Examen 1

Matemáticas Discretas

---

9 de septiembre de 2022

Problemas

1. Recuerda que la sucesión de Fibonacci está dada por $F_0 = 0, F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ para cada entero $n0$.

   - Encuentra, con demostración, todos los valores de n para los cuales F_n es múltiplo de 7.

     Proposición: Se cumple que los F_n serán múltiplos de 7, si n es múltiplo de 8.

     Dem. Por Inducción sobre n.

     – Base:
     Sea $n = 0$, entonces $F_0 = 0$ y sabemos que $8|0$ y por tanto es n es múltiplo de 8. Ahora vemos que $F_0 = 0$ y $7|0$ y por tanto F_0 es múltiplo de 7.

       Sea $n = 8$, entonces $F_8 = 21$ y sabemos que $8|8$ y por tanto es n es múltiplo de 8. Ahora vemos que $F_8 = 21$ y $7|21$ y por tanto F_8 es múltiplo de 7.

     – Hipótesis Inductiva:
     Supongamos que para una n múltiplo de 8 ($8|n$), tenemos que F_n es múltiplo de 7 ($7|F_n$).

     – Paso Inductivo:
     P.D se cumple para $n + 8$.

       Sea F_{n+8}, entonces por $H.I.$ sabemos que $8|n$, por tanto

       $$n + 8 \equiv_{mod\ 8} 0$$

       es decir, $8|n + 8$, por tanto por $H.I.$ ocurre que F_{n+8} será múltiplo de 7.
       $\square$

   - Demuestra que la siguiente fórmula para los números de Fibonacci es válida.

     $$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

     Dem. Vemos primero que $F_0 = 0$ y que $F_1 = 1$ usando la fórmula propuesta, por lo tanto hasta ahora se cumple para los primeros dos términos, veamos si vale para $n + 2$. P.D. que

     $$\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}}{\sqrt{5}} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} + \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

     Si tomamos la siguiente sustitución:

- $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

entonces P.D.

$$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 && (1)\\
&= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} && (2)\\
&= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} && (3)\\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{2} && (4)\\
&= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} && (5)\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} && (6)\\
&= 1 + \alpha && (7)
\end{aligned}$$

Y para β:

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 && (8)\\
&= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} && (9)\\
&= \frac{6-2\sqrt{5}}{4} && (10)\\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{2} && (11)\\
&= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} && (12)\\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} && (13)\\
&= 1 - \beta && (14)
\end{aligned}$$

Por lo que entonces:

$$\alpha^{n+2} = \alpha^n\alpha^2 = \alpha^n(1+\alpha) = \alpha^n - \alpha^{n+1}$$

y

$$\beta^{n+2} = \beta^n\beta^2 = \beta^n(1-\beta) = \beta^n - \beta^{n+1}$$

Si a la primera le restamos la segunda y lo dividimos por $\sqrt{5}$, entonces esto nos dará lo que:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

Y por tanto dado que F_0 y F_1 coinciden con los primeros dos términos de la sucesión de Fibonacci y los dos tinen la misma recursión lineal de orden 2, entonces por el lema visto en clase, decimos que las sucesiones coinciden y por tanto F_n es una fórmula válida para los Fibonaccis:

Lema. Si dos sucesiones recursivas lineales de orden coinciden en sus primeros elementos y además tienen la misma regla recursiva, entonces coinciden en todos sus elementos.

Q.E.D

2. Demuestra que todo árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas y que cualquier bosque con n vértices y k componentes conexas tiene nk aristas.

Dem: Por inducción sobre el número de vértices.

- Base:
  Sea un árbol con $n = 1$, entonces este árbol tiene un vértice y ninguna arista por lo que se cumple que:
  $$|E| = |V| - 1 = 0$$
- Hipótesis Inductiva:
  Supongamos que para un árbol de n vértices, tiene $n - 1$ aristas.
- Paso Inductivo:
  P.D. para $n + 1$. Sea un árbol T de $n + 1$ vértices. Supongamos que tenemos un vértice hoja u con padre v, entonces si eliminamos al vértice u de T, nos queda un nuevo árbol T' (pues al eliminar un vértice hoja de un árbol, la gráfica resultante mantiene su propiedad de ser árbol) con n vértices. Por tanto por $H.I$ tenemos que T' tiene $n - 1$ aristas. Ahora es importante notar que al eliminar el vértice u de T, la única arista que unía a v con u también es removida, por lo que entonces si T' tiene n vértices y $n - 1$ aristas, entonces T tiene $n + 1$ vértices y n aristas, lo cual nos dice que $|E| = |V| - 1$
  $\square$

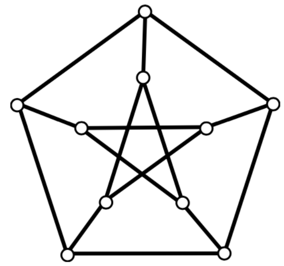
Finalmente demostrar que cualquier bosque con n vértices y k componentes conexas tiene nk aristas.

Sea x_i el número de vértices de la componente conexa i, entonces tenemos que $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ y por tanto el número de aristas será $x_i - 1$ para la componente conexa i, así entonces el número de aristas totales será:

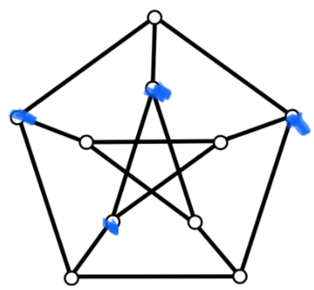
$$\sum_{i=1}^{k}(x_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k} 1 = n - k$$

Q.E.D

3. Considera la siguiente gráfica:



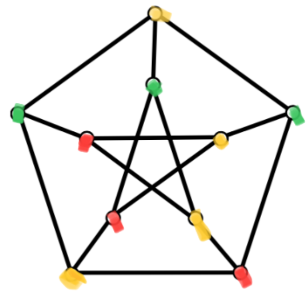
a) Encuentra su número de independencia.



Y tenemos que es el máximo pues si consideramos a los dos ciclos interno y externo de la gráfica, ambos son C_5, ciclos de longitud 5, entonces notemos que solo podemos escoger un conjunto A de 2 vértices dentro de un ciclo 5 de tal manera que no exista ninguna arista entre vértices de A. Dado que tenemos dos ciclos uno interno y uno externo, únicamente podremos tomar dos de cada ciclo tales que ninguno entre ellos estén unidos por una arista y por tanto será a lo más $|A| = 4$.

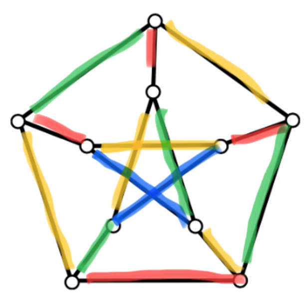
Y por tanto $\alpha(G) = 4$

b) Encuentra su número cromático.



No hay una $2-$coloración en esta gráfica pues notemos que tenemos un $5-$ciclo. Para colorear un $5-$ciclo notemos que si tenemos el ciclo $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$ entonces el color 1 tiene a v_1, v_3 y el color dos a v_2, v_4, como v_5 es adyacente a v_4 y v_1, entonces es necesario que su color sea distinto al de estos dos.
$\chi(G) = 3$

c) Encuentra su índice cromático.



Tenemos que por un teorema visto en clase el índice cromático de una gráfica G con grado máximo $\Delta(G)$ es a lo más $\Delta(G)+1$, por lo que si el $\Delta(G) = 3$, entonces a lo más $\chi'(G) = 4$, pero veamos que este es el mínimo:

Supongamos que existe una $3-$coloración, entonces como cada vértice tiene grado 3, entonces cada color aparece en cada vértice. Sean u y v vértices en el pentágono con la arista uv de un color X. Sea entonces w un vecino de u dentro del ciclo interno, entonces notemos que la arista uw no puede ser del color X, por tanto una de las dos aristas de w (que está en la estrella) tiene que ser del color X. Por otra parte sea a un vecino de v dentro del ciclo interno, notemos que la arista av no puede ser del color X, por tanto una de las dos aristas de a (que está en la estrella) tiene que ser de color X, en particular notemos que ni el vértice interno a ni el vértice interno w son adyacentes, pues a es vecino de v y w es vecino de u y sabemos que uv es arista en el ciclo de afuera.

Entonces como ya vimos que ni a ni w son adyacentes tenemos que hay 2 aristas distintas del color X en la estrella. Como ya sabemos que un $5-$ciclo tiene como mínimo una $3-$coloración y tomamos a u y v vértices arbitrarios y el color X arbitrario, si lo repetimos con cada par de vértices en el pentágono notaremos que cada color aparecerá en dos aristas distintas 2 dentro de la estrella y esto no se puede dado que solo tenemos 5 aristas en este ciclo interno.

Por tanto como no existe una $3-$coloración, concluimos que $\chi'(G) = 4$.

Q.E.D

4. Sea G una gráfica bipartita cuyo conjunto de vértices está partido en conjuntos A y B, y en donde cada vértice tiene grado 3.

- Muestra de $|A| = |B|$.

  Como sabemos que G es bipartita y sus conjuntos son A y B, entonces por una proposición vista en clase sabemos que:

  $$\sum_{v \in A} d(v) = \sum_{v \in B} d(v)$$

  entonces tenemos que:

  $$\sum_{v \in A} d(v) = \sum_{v \in B} d(v) \tag{15}$$

  Como el grado de cada vértice de G es 3 entonces:

  $$\sum_{v \in A} 3 = \sum_{v \in B} 3 \tag{16}$$
  $$3|A| = 3|B| \tag{17}$$
  $$|A| = |B| \tag{18}$$
  $$\tag{19}$$

  Q.E.D

- Muestra que G tiene un emparejamiento que cubre a A. Como sugerencia, tendrás que usar el teorema de Hall.

  Notemos que al tomar un subconjunto S ya sea de A o de B, entonces no es posible que la cantidad vecinos de S sea menor que la cardinalidad de S (pues de cada vértice en S salen 3 aristas hacia diferentes vértices en B). Por lo que de nuestro subconjunto S salen $3|S|$ aristas que salen hacia B, entonces para recibir tales aristas necesita por lo menos $|X|$ vértices que reciban una o más aristas, por lo que a lo menos hay tantos vértices en $N(S)$ como en S para cualquier $S \subseteq A$, por lo que por el teorema de Hall podemos concluir que existe un apareamiento que cubre a A.

Obs. Notemos que $N(S) = 3$ siempre pues todos los vértices son de grado 3 y $|A| = |B|$

Q.E.D.

- Muestra que G tiene una 3-coloración propia de sus aristas. Como sugerencia, tendrás que usar repetidas veces el teorema de Hall.

  Podemos tomar un subconjunto de elementos de S_1 con cardinalidad 1 y como $N(S_1) = 3$ entonces del vértice en S_1 salen 3 aristas a tres vértices distintos en $N(S_1)$ por lo que por el teorema de Hall tenemos que existe un emparejamiento, como $|S_1| = 1$ entonces tomamos este emparejamiento que es de una sola arista y lo coloreamos de un color. Si ahora $|S_2| = 2$ (incluyendo el vértice de S_1), entonces como $N(S_2) = 3$, entonces por el teorema de Hall existe un emparejamiento y en particular es de dos aristas, cada una incide en cada vértice distinto de S_2, entonces coloreamos a estas dos aristas de colores distintos, como ya habíamos pintado una en S_1, escogemos únicamente un color distinto. Finalmente para $|S_3| = 3$ (incluimos los vértices de S_2), entonces como $N(S_3) = 3$, por el teorema de hall existe un emparejamiento y en particular será de tres aristas que inciden en vértices distintos de S_3, y por tanto las coloreamos de distinto color a las 3. Como ya no tenemos más vértices en la gráfica, entonces terminamos. Y concluimos que tenemos una $3-$coloración y notando que si en el emparejamiento con S_3 llenamos las aristas con los 3 distintos colores, cada que vértice tenga una arista de distinto color dado por el emparejamiento, entonces será una $3-$coloración propia.