Matemáticas Discretas 2023-1
Reposiciones y Examen Final

Recuerda que sólo puedes elegir una de las siguientes:

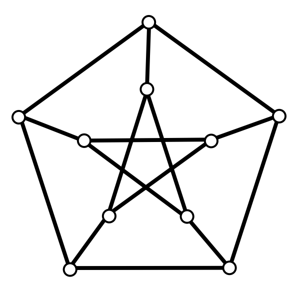
- No reponer nada ni hacer final.
- Reponer exactamente un parcial.
- Hacer examen final.

Si repones un parcial, queda lo más alto entre la calificación original y la reposición. Si haces examen final, eso se compara contra tus parciales + prácticas, y queda lo más alto. **Tu proyecto final todavía cuenta el 35 %.**

Para reponer un parcial, responde las preguntas de la sección correspondiente. Para hacer examen final, responde las preguntas de todas las secciones.

1. Unidad 1

1. ¿De cuántas formas es posible colocar 3 torres en un tablero de ajedrez de 8×8 sin que haya dos de ellas que se ataquen entre sí?
2. Considera la siguiente gráfica:



   - Encuentra su número de independencia.
   - Encuentra todos sus conjuntos independientes máximos.
   - Encuentra todos sus conjuntos independientes maximales.

3. Considera la gráfica cuyos vértices son los enteros $2, 3, 4, \ldots, 100$ y en donde dos vértices a y b son adyacentes si a divide a b, o si b divide a a. Responde lo siguiente:
   - ¿Cuántas componentes conexas tiene esta gráfica?
   - ¿Cuáles son los dos vértices u y v que están en la misma componente conexa y que estén a la mayor distancia posible entre sí?
4. Sea $n > 1$ un entero. ¿De cuántas formas se pueden acomodar los números $1, 2, 3, \ldots, 2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula? Como sugerencia, haz los primeros casos, propón una fórmula y demuéstrala por inducción.

2. Unidad 2

1. Se quiere hacer un plan de vacunación para docentes. Estima de manera asintótica y usando la menor cantidad de información externa que puedas la cantidad de docentes que existen en México. Explica todo el procedimiento de tu estimación. Tu respuesta no debe estar más de dos órdenes de magnitud de diferencia de la respuesta.
2. Ordena asintóticamente las siguientes funciones de acuerdo a cuáles son dominadas por cuáles otras. Si hay dos con el mismo crecimiento asintótico, no importa cuál pongas primero:

$$n^2 \log^3 n, \quad \left(\frac{n}{4}\right)^3, \quad n^{\frac{8}{9}}.$$

   Para cada una de tus comparaciones, verifica que en efecto es válida usando el criterio del límite.
3. Se tienen n posibles sabores de helados. El sabor i uno tiene α_i unidades de grasa por gramo, β_i unidades de carbohidratos por gramo y γ_i unidades de proteinas por gramo. Cada bola de helado es de 100 gramos. Se quiere saber si existe un helado de tres bolas de sabores distintos que cumpla que la cantidad total de grasa sea menor que un número α dado, la cantidad total de carbohidratos sea menor que un número β dado y la cantidad total de proteínas sea mayor que un número γ dado, todo ello de manera simultánea.

   Escribe en pseudocódigo (o código en Python) un algoritmo que reciba como entrada las listas $A = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, $B = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$ y $C = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ y responda `True` si sí existe dicho helado y `False` si no. Estima de manera asintótica cuántos pasos y espacio tomará en el modelo RAM. Explica las suposiciones que estás haciendo. No es necesario que tu algoritmo sea óptimo, pero sí que sea correcto.

4. Explica a detalle el algoritmo de ordenamiento `BubbleSort`. Deberás dar pseudocódigo que describa cómo se puede usar para ordenar una lista L con n elementos. También, deberás de dar una demostración completa de su correctitud y de que corre en tiempo $O(n^2)$.

3. Unidad 3

1. Aplica el teorema maestro a las siguientes recursiones para cerrarlas asintóticamente, o bien explica por qué no puede ser usado.
   - $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$
   - $T(n) = 3T(n/3) + n/2$
2. Diseña un algoritmo que te permita encontrar la potencia n-ésima de una matriz de 2×2 en tiempo $O(\log n)$. Verifica su correctitud y que en efecto el tiempo en el que corre tiene dicha complejidad asintótica.
3. Diseña un algoritmo por *backtracking* que enliste todos los posibles subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que tengan exactamente 4 elementos distintos a, b, c, d, con $a + b + c + d$ múltiplo de 4.
4. Se tienen $n \geq 4$ números enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, quizás positivos, negativos o cero. Se quiere encontrar cuáles son los cuatro números de esta lista que tienen el mayor producto posible.
   - Diseña un algoritmo que resuelva este problema por *backtraking*. Puede correr hasta en tiempo $O(n^4)$.
   - Diseña un algoritmo que resuelva este problema de manera *greedy* (voraz). Puede correr hasta en tiempo $O(n \log n)$.

4. Unidad 4

1. Un *fragmento de ADN* es una palabra que usa únicamente las letras A, C, G y T. Se tienen n fragmentos de ADN de longitud 5. Si se tienen dos fragmentos de ADN, podemos *pegarlos* si las dos últimas letras del primero son iguales a las dos primeras letras del segundo.

   Por ejemplo, los fragmentos $ACGG$ y GGT se pueden pegar para obtener $ACGGTT$. Los fragmentos $TCGACTG$ y $TGAA$ se pueden pegar para obtener $TCGACTGAA$.

   Dados dos de estos n fragmentos F_1 y F_2, propón en pseudocódigo un algoritmo que determine si se pueden pegar algunos de los n fragmentos para obtener un fragmento (de la longitud que sea) que comience con F_1 y termine con F_2.

   Explica las suposiciones de tu modelo y evalúa asintóticamente la complejidad en tiempo de tu propuesta.

2. Diseña un algoritmo por *backtracking* que determine si una gráfica tiene una 3-coloración. Tu algoritmo deberá de descartar una coloración parcial una vez que haya vértices adyacentes del mismo color.

   Demuestra que tu algoritmo es correcto y estudia en cuánto tiempo y espacio asintótico corre.

3. Sea A la matriz de adyacencia de una gráfica G con n vértices. Toma enteros i, j en $\{1, \ldots, n\}$ y un entero positivo k. Demuestra por inducción que la entrada ij de la matriz A^k es igual a la cantidad de caminos que hay del vértice i al vértice j que tengan longitud k. Usa esto para proponer un algoritmo que calcule esta cantidad de caminos y analiza su tiempo de ejecución.

4. Plantea el siguiente problema en términos de algún problema de teoría de gráficas. Luego, propón un algoritmo correcto para resolverlo. Verifica que es correcto y estúdialo en complejidad de tiempo y espacio.

   "En un salón de clases hay $3n$ personas. Se midió para cada pareja de personas qué tan bien se llevan, y se obtuvo un número entero del 1 al 10 (mientras mejor se llevan, es más alto). El profesor quiere saber si puede dividirlos en n equipos de 3 personas de modo que en cada equipo se lleven relativamente bien. Así, no quiere que haya dos personas en el mismo equipo cuya medida sea menor o igual a 3. ¿Cómo puede saber el profesor si un acomodo así existe?"