

Matemáticas Discretas 2023-1

Examen 2

Este es un examen de trabajo individual.

1. (2.5 pts) Estima de manera asintótica la cantidad de pasos del modelo RAM que usa el siguiente algoritmo de Python, donde n es un número entero. Tu respuesta debe dar la cantidad de pasos $f(n)$ en términos de la notación Θ de otra función sencilla.

```
min=1/3
i_buena,j_buena,k_buena=1,1,1
for j in range(n):
    for k in range(j):
        for i in range(j+k):
            if 1/(j+k+i)<min:
                min=1/(j+k+i)
                i_buena=i
                j_buena=j
                k_buena=k
print(i_buena,j_buena,k_buena,min)
```

2. (2.5 pts) Ordena asintóticamente las siguientes funciones de acuerdo a cuáles son dominadas por cuáles otras. Si hay dos con el mismo crecimiento asintótico, no importa cuál pongas primero:

$$(\log n)^2, \log(\log n), \log(n^2), \log(n!), n^2.$$

Para cada una de tus comparaciones, verifica que en efecto es válida usando el criterio del límite superior.

3. (2.5 pts) Tienes un arreglo A que tiene n elementos, cada uno de ellos verde, blanco o rojo. Se quiere ordenar los elementos del arreglo de modo que aparezcan primero todos los verdes, luego todos los blancos y luego todos los rojos. Sólo se permiten operaciones del siguiente estilo:

- Para cualquier i , examinar de qué color es el i -ésimo elemento de A .

- Para cualesquiera i y j , intercambiar los elementos en la posición i y j de A .

Encuentra un algoritmo correcto que ordene a los elementos. Tu solución debe correr en tiempo $O(n)$.

4. (2.5 pts) Se tienen n islas. Para cada j en $\{1, 2, \dots, n\}$, en la isla j hay un tesoro con A_j monedas de oro, pero hay B_j tigres que se tienen que enfrentar para obtener el tesoro. Un capitán pirata desea visitar algunas de las islas, pero su tripulación accederá a ello sólo si tras cada isla visitada, la cantidad de monedas de oro obtenidas en total hasta el momento es mayor al número de tigres enfrentados en total hasta el momento. El capitán pirata quiere determinar cuál es la mayor cantidad de monedas de oro que puede obtener.

Escribe en pseudocódigo un algoritmo que resuelva este problema y demuestra que es correcto. Estima de manera asintótica cuántos pasos tomará en el modelo RAM. Explica las suposiciones que estás haciendo. No es necesario que tu algoritmo sea óptimo.

5. (+1 pts extra) Sea $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ una función que satisface la recursión $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil) + g(n)$, en donde $g(n)$ es una función $O(n)$. Demuestra, sin usar el teorema maestro y de manera formal, que $f(n)$ es $O(n \log n)$.

Usa esto para mostrar que el algoritmo de ordenamiento por recursión que vimos, el cual primero ordena la mitad de elementos, luego la otra mitad, y luego las junta comparando los elementos en ambas listas ordenadas de izquierda a derecha, en efecto toma $O(n \log n)$ pasos.