Matemáticas Discretas 2023-1
Examen 3 (colegiado)

Este es un examen de trabajo individual. Debes entregarlo mediante Moodle, con todas las indicaciones precisadas en la actividad correspondiente.

1. (2.5 pts) Resuelve las siguientes recursiones.

   - $T(n) = 7T(n/2) + 4^n$
   - $T(n) = 5T(n/5) + (n/\log(n))$

2. (2.5 pts) Se toma un entero positivo a. Dado un entero n, queremos saber si entre los números $a, 2a, 3a, \ldots, na$, hay dos que tengan la misma cantidad de dígitos iguales a 9.

   Describe un algoritmo que pueda hacer esto en tiempo $O(n \log n)$. No es necesario que lo implementes ni en código, ni en pseudocódigo. Sin embargo, sí debes discutir su correctitud y explicar por qué corre en el tiempo indicado (ver también Problema 5).

3. (2.5 pts) Se tiene un reloj con las 12 posiciones usuales $(1, 2, \ldots, 12)$. Se va a colocar un número del 1 al 24 en cada una de las posiciones, con las siguientes reglas:

   - Todos los números que se pusieron son distintos.
   - Para cualesquiera dos posiciones que queden una junto a otra, el producto de ambos números es menor que 144.

   Se quiere encontrar aquel acomodo (o acomodos) que cumpla ambas condiciones anteriores y en donde la suma de los números que se escribieron en las posiciones sea lo más grande posible.

   - Una forma básica de plantear un espacio de estados para este problema es considerar todos los vectores de 12 entradas con números distintos de 1 a 18. ¿Cuántos vectores de estos existen?
   - Imagina que pasar por una posibilidad de las anteriores, verificar si cumple la condición del producto, y verificar si la suma mejora, toma aproximadamente 0.000001 segundos. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo tomaría pasar por todos los casos?

- Explica cómo usarías una estrategia de simetría para reducir el tiempo anterior en por lo menos un factor de 12. Escribe pseudocódigo para un algoritmo de este estilo.
- Explica cómo usarías una estrategia de *backtracking* para reducir el tiempo anterior significativamente. Escribe pseudocódigo para un algoritmo de este estilo (ver también Problema 5).

4. (2.5 pts) Se tiene un rectángulo R. Este rectángulo R está subdividido en rectángulos $R_1, R_2, \ldots, R_k$. Supongamos que cada uno de los rectángulos R_i tiene al menos un lado con longitud entera. El objetivo de este problema es demostrar que R también tiene al menos un lado de longitud entera.

   Coloca el rectángulo de modo que una de sus esquinas esté en el punto $(0,0)$ del plano y de modo que sus lados sean paralelos a los ejes. Crea una gráfica bipartita como sigue. En un lado de la partición están los rectángulos R_i. En el otro lado, están los puntos con coordenadas enteras del plano que sean esquina de cualquiera de los rectángulos R_i. Hay una arista del rectángulo R_i al punto p si p es una esquina del rectángulo R_i.

   - Explica por qué todo vértice de la gráfica tiene grado par, salvo quizás aquellos que correspondan a las esquinas del rectángulo R.
   - Usa lo anterior para demostrar que alguna esquina de R distinta de $(0,0)$ también es vértice de la gráfica. Da la conclusión del problema.

5. (+2 pts extra) Para obtener puntos extra en este examen, realiza las implementaciones de los problemas 1 y 3.

   - Para obtener 1 punto del problema 1, evaluaremos tu implementación con experimentación de algunos números a y n entre $5,000$ y $10,000$. Tu algoritmo debe terminar en menos de 1 minuto para cada caso y dar la respuesta correcta.
   - Para obtener 1 punto del problema 3, tu algoritmo debe correr en menos de 10 minutos y dar la respuesta correcta.