

MARGERIT D.



ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE

## COURS DE MECANIQUE

--oo0oo--

INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Par Hélène DUCAUQUIS

Année Universitaire 1990/1991  
Licence de Mécanique

- INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS -

<b>CHAPITRE I : CINEMATIQUE - DESCRIPTION ANALYTIQUE D'UN SYSTEME EN MOUVEMENT .....</b>	<b>1</b>
1 - Introduction .....	1
2 - Description mathématique du mouvement d'un milieu continu .....	1
3 - Trajectoire. Lignes d'émission. Champ de vitesses. Lignes de courant .....	3
4 - Description Lagrangienne .....	4
5 - Description Eulérienne .....	5
<b>CHAPITRE II : LOIS DE CONSERVATION - GENERALITES - APPLICATION A LA CONSERVATION DE LA MASSE .....</b>	<b>7</b>
1 - Introduction .....	7
2 - Dérivées particulières .....	8
2.1. Intégrales de volume .....	8
2.2. Flux d'un vecteur à travers une surface .....	11
2.3. Circulation d'un vecteur le long d'un arc de courbe .....	11
2.4. Généralisation - Dérivation suivant un champ de vitesse arbitraire ..	12
2.5. Cas où les fonctions sont seulement continûment dérивables par morceaux .....	13
3 - Résultats mathématiques fondamentaux en mécanique des milieux continus ...	15
3.1. Lemme fondamental ou théorème de l'intégrale nulle .....	15
3.2. Applications du théorème de Stokes aux transformations d'intégrales .	17
4 - Applications générales d'une loi de conservation .....	20
4.1. Loi des actions mutuelles de surface .....	21
4.2. Equations aux dérivées partielles associées à une loi de conservation .....	22
4.3. Tenseur densité de flux .....	23
4.4. Equations aux discontinuités et forme intégrale générale d'une loi de conservation .....	24
4.5. Conditions aux limites naturelles associées à une loi de conservation .....	24

	II)
5 - Application à la conservation de la masse .....	25
5.1. Equation de continuité .....	26
5.2. Dérivée particulaire des intégrales prises par rapport à une distribution de masse .....	26
5.3. Surfaces de contact et ondes de choc .....	27
5.4. Conditions aux frontières .....	28
5.5. Milieu incompressible .....	29
 <b>CHAPITRE III : CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT -</b>	
<b>TENSEUR DES CONTRAINTES .....</b> ..... 30	
1 - Objet du chapitre .....	30
2 - Application de la théorie générale .....	32
2.1. Définition du tenseur des contraintes .....	32
2.2. Equations du mouvement .....	32
2.3. Symétrie du tenseur des contraintes .....	33
2.4. Equations aux discontinuités .....	34
2.5. Condition aux frontières .....	35
2.6. Théorème des quantités de mouvement .....	36
3 - Propriétés locales du tenseur des contraintes .....	38
3.1. Contrainte normale. Contrainte de cisaillement. Quadrique des contraintes .....	38
3.2. Forme bilinéaire attachée au tenseur des contraintes. Relation de symétrie. Changement d'axes .....	40
3.3. Directions principales. Contraintes normales principales .....	40
3.4. Invariants scalaires du tenseur des contraintes .....	41
3.5. Déviateur des contraintes .....	41
3.6. Cercles de Mohr .....	41
3.7. Maximum de la contrainte tangentielle .....	43
4 - Exemples remarquables .....	44
4.1. Tenseur des contraintes sphérique (compression ou tension uniforme) ..	44
4.2. Tenseur des contraintes uniaxial (traction simple ou compression simple dans une direction) .....	45
4.3. Tenseur de cisaillement simple dans deux directions orthogonales ...	45

4.4. Tenseur des contraintes planes .....	46
4.5. Combinaisons linéaires de tenseur des contraintes .....	46
CHAPITRE IV : <u>DEFORMATION - VITESSE DE DEFORMATION</u> .....	48
1 - Objet du chapitre .....	48
2 - Transformation linéaire tangente .....	48
2.1. Introduction .....	48
2.2. Calcul de l'allongement relatif de $ \vec{dM} $ entre les instants 0 et t .....	50
2.3. Calcul de l'angle $(\vec{dM}, \delta M)$ connaissant $\theta_0 = (\vec{dM}_0, \delta M_0)$ .....	50
3 - Tenseur des déformations .....	52
3.1. Définition .....	52
3.2. Directions principales de déformation .....	53
3.3. Expression du tenseur des déformations en fonction du dépla- cement et linéarisation .....	54
4 - Tenseur des vitesses (ou taux de déformation) .....	55
5 - Détermination des champs de déplacement ou de vitesse .....	55
5.1. Relation de compatibilité .....	55
5.2. Méthode pratique d'intégration pour $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ .....	56
CHAPITRE V : <u>PIUSSANCE DES EFFORTS INTERIEURS</u>	
<u>CONSERVATION DE L'ENERGIE</u> .....	57
1 - Objet du chapitre .....	58
2 - Puissance des efforts intérieurs et théorème de l'énergie cinétique ..	58
3 - Conservation de l'énergie .....	60
3.1. Enoncé .....	60
3.2. Vecteur "courant de chaleur" .....	61
3.3. Equation aux dérivées partielles .....	61
3.4. Equation aux discontinuités .....	62
3.5. Conditions aux frontières associées .....	63

<b>CHAPITRE VI : LOIS DE COMPORTEMENT</b>	.....	64
<b>1 - Objet du chapitre .....</b>	.....	64
<b>2 - Principes généraux et définitions utiles pour l'énoncé des lois de comportement .....</b>	.....	65
<b>2.1. Dépendance du passé ou principe de causalité .....</b>	.....	65
<b>2.2. Principe de localisation spatiale .....</b>	.....	65
<b>2.3. Principe d'indifférence matérielle .....</b>	.....	65
<b>2.4. Définition d'un milieu homogène .....</b>	.....	66
<b>2.5. Définition d'un milieu isotrope .....</b>	.....	66
<b>3 - Exemples de lois de comportement .....</b>	.....	66
<b>3.1. Elasticité linéaire .....</b>	.....	66
<b>3.2. Thermique .....</b>	.....	68
<b>3.3. Fluides proprement dit .....</b>	.....	69
<b>4 - Conclusion .....</b>	.....	70

---

## BIBLIOGRAPHIE

### P. GERMAIN

Cours de Mécanique des milieux continus - tome 1 -  
Théorie générale - Masson et Cie - Paris 1973.

### J. MANDEL

Cours de Mécanique des milieux continus - tomes 1 et 2 -  
Gauthier - Villars - Paris 1966.

### C. TRUESDELL

Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus -  
Masson et Cie - Paris 1974.

---

## - INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS -

### CHAPITRE I : CINEMATIQUE - DESCRIPTIION ANALYTIQUE D'UN SYSTEME EN MOUVEMENT.

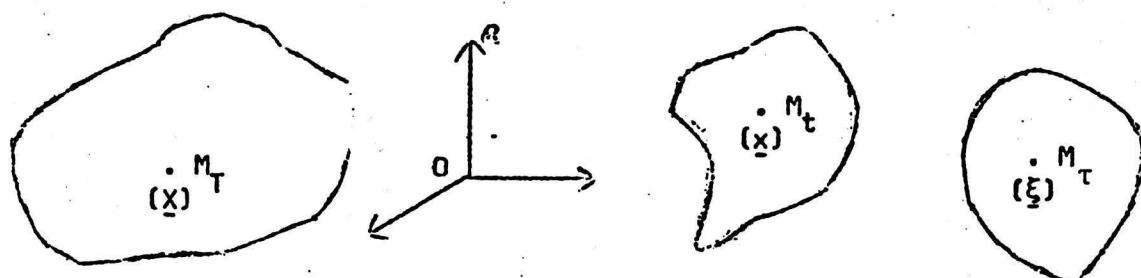
#### 1 - Introduction.

La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent ; celle du point ou du solide rigide est tellement intuitive qu'il suffit de notions très simples pour la décrire. Il n'en est pas de même pour les milieux déformables (solides ou fluides) où les systèmes considérés peuvent prendre au cours du temps des formes très différentes tout en restant composés des mêmes particules. Il est donc nécessaire d'introduire un formalisme mathématique original qui permettra de décrire l'évolution mécanique d'un tel ensemble en dépit des apperances changeantes que nous sommes susceptibles d'observer.

#### 2 - Description mathématique du mouvement d'un milieu continu.

Un milieu continu est un système matériel qui ne peut être considéré ni comme un ensemble de points de  $\mathbb{E}^3$  à cause de sa mouvance ni comme un ensemble de particules indépendantes à cause de l'action mutuelle non négligeable qu'elles ont les unes sur les autres.

Soit  $S_t$  la configuration à l'instant  $t$  d'un système  $S$  en mouvement, c'est à dire, l'ensemble des positions  $M_t \in \mathbb{E}^3$  à l'instant  $t$  des particules  $M$  composant le milieu continu  $S$ . ( $\mathbb{E}^3$  espace Euclidien affine).



Soit  $R$  un repère fixe de  $\mathbb{R}^3$  défini par une origine  $O$  et une base ortho-normée  $(\vec{e}_1)$ .

$$(1) \quad \underline{x} = (x_1, x_2, x_3), \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \text{ et } \underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

seront les coordonnées dans  $R$  des positions  $M_T$ ,  $M_t$  et  $M_{Tt}$  d'une même particule  $M$ .

de S aux instants respectifs quelconques  $T, t, \tau$  pris dans un ordre chronologique arbitraire.

Le mouvement du système S sera défini dans un intervalle de temps  $(t_0, t_1)$  si nous connaissons la relation :

$$(2) \quad \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, T, t)$$

donnant à l'instant  $t$  la position  $M_t$  de la particule M qui à l'instant T occupe la position  $M_T$ .  $\forall t$  et  $T \in (t_0, t_1)$

Les  $\underline{\underline{F}}_i(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , désignent 3 fonctions à valeurs réelles de 5 variables réelles ; elles ne peuvent être choisies arbitrairement, elles doivent en effet satisfaire :

Une propriété de réflexivité :

$M_t$  étant la position à l'instant  $t$  de la particule M qui est en  $M_t$  au même instant  $t$  donc :

$$(3) \quad \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, t, t)$$

Une propriété de symétrie :

Si  $M_t$  est la position à  $t$  de la particule M qui à  $T$  est en  $M_T$ , alors réciproquement  $M_T$  est la position à  $T$  de la particule M qui à  $t$  est en  $M_t$  d'où :

$$(4) \quad \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, T, t) \iff \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, t, T)$$

Une propriété de transitivité :

Si  $M_T$  est la position de M à  $t$  et  $M_T$  sa position à  $T$  alors sa position à  $t$  est donnée indifféremment par  $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, T, t)$  ou  $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, t, T)$  ce qui écrit :

$$(5) \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, T, t) \implies \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, T, t) = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{\xi}}, t, T) \text{ ou encore}$$

$$(6) \quad \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, T, t) = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{\xi}}, t, T) \iff \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, t, T) = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{\xi}}, T, t)$$

Exercice 1 : Montrer que les relations

$$\underline{\underline{x}}_1 = \underline{\underline{x}}_1 e^{-k(t-T)}$$

$$\underline{\underline{x}}_2 = \underline{\underline{x}}_2 e^{k(t-T)}$$

$$\underline{\underline{x}}_3 = \underline{\underline{x}}_3$$

représentent bien la description du mouvement d'un milieu continu.

3 - Trajectoires. Lignes d'émission. Champ de vitesses. Lignes de courant.

Définition 1 : La trajectoire d'une particule M est le lieu des positions  $M_t$  quand t varie.

Les relations  $x_i = F_i(x_1, x_2, x_3, T, t)$ , définissent dans  $\mathbb{R}^3$  une représentation paramétrique de la trajectoire de la particule M qui à l'instant T se trouve en  $X$ . Ici,  $x_1, x_2, x_3, T$  sont fixes, ces quantités caractérisent une particule. L'ensemble des trajectoires d'un système S est obtenu en maintenant fixe T et en changeant de particule, c'est-à-dire en faisant varier  $X$  dans  $S_T$ .

Définition 2 : La ligne d'émission du point donné X à l'instant donné T est le lieu des positions à l'instant T des particules qui, à un instant t, sont passées ou passeront en X.

Cette ligne d'émission est donnée paramétriquement par les fonctions  $x_i(t)$

$$(7) \quad x_i = F_i(x_1, x_2, x_3, t, T),$$

où  $x_1, x_2, x_3, T$  ont des valeurs fixes.

Définition 3 : La vitesse à l'instant t de la particule située en X à l'instant T est le vecteur  $\vec{v}$  dont les composantes dans  $\mathbb{R}^3$  sont données par :

$$(8) \quad v_i = \frac{\partial F_i}{\partial t}(X, T, t)$$

On vérifie que l'expression est indépendante du choix du point de référence  $M_T$  choisi pour définir la trajectoire ; en effet, pour un autre choix  $M_{T'}$ , on a puisque (5) est vérifiée pour tout t, on peut écrire :

$$\frac{\partial F_i}{\partial t}(X, T, t) = \frac{\partial F_i}{\partial t}(\xi, \tau, t) = \frac{\partial F_i}{\partial t}(x, t, t)$$

On peut donc écrire directement les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}$  en fonction de  $x$  et de  $t$  :

$$(9) \quad v_i(x, t) = \frac{\partial F_i}{\partial n_5}(x, t, t)$$

à condition de n'avoir fait porter la dérivation que sur la 5ème variable  $n_5$  de la fonction de 5 variables  $F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ .

De même, l'accélération de la particule M à l'instant t est donnée par ses composantes:

$$(10) \quad Y_i(x, t) = \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial t^2}(x, t, t)$$

Exemple 1 : dans le cas de l'exercice 1,  $v_1(x, t) = -kx_1$  et  $\gamma_1 = k^2 x_1$

Définition 4 : Les lignes de courants sont définies à un instant t fixé. Ce sont à cet instant, les lignes du champ des vitesses, c'est-à-dire les lignes qui en chacun de leurs points ont une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point.

Ces lignes sont les intégrales du système différentiel :

$$(11) \quad \frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}$$

dans lequel t est fixé et joue le rôle d'un paramètre.

Remarque 1 : Il ne faut pas confondre trajectoires et lignes de courant. Les premières sont les lieux des particules quand le temps varie, la définition de la vitesse montre qu'elles sont solutions du système différentiel.

$$(12) \quad \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

qui malgré sa ressemblance avec (11) en est fondamentalement différent car ici t est une variable.

Définition 5 : Le mouvement est dit stationnaire si le champ des vitesses  $V(x, t)$  ne dépend pas explicitement du temps t. (Comme dans l'exemple ci-dessus).

Dans ce cas, les lignes de courant sont les mêmes à tout instant et sont confondues avec les trajectoires ; on peut aussi montrer, quoique ce soit moins évident, qu'elles sont aussi confondues avec les lignes d'émission.

#### 4 - Description Lagrangienne.

On peut simplifier la description cinématique précédente en utilisant pour repérer les différentes particules de S, leurs positions dans une configuration particulière, par exemple  $S_0$  (c'est-à-dire la configuration à l'instant t = 0).

On a alors :

$$x = \phi(a, 0, t) = \phi(a, t)$$

Les  $a_i$  sont les coordonnées dans  $\mathcal{Q}$  de la particule M à l'instant  $t = 0$  ;  $\phi$  ne dépend plus que des 4 variables  $a_1, a_2, a_3, t$  appelées variables de Lagranges.

Mais  $\phi$  n'a plus les propriétés de base (1) (2) (3) en effet

$$(14) \quad \underline{x} = \underline{\phi}(a, t) \text{ et } \underline{a} = \underline{F}(\underline{x}, t, 0) = \underline{\psi}(\underline{x}, t); \quad \phi \neq \psi$$

La vitesse et l'accélération s'obtiennent par simple dérivation :

$$(15) \quad v_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(a, t); \quad \gamma_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}(a, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

La description Lagrangienne est déterminée par les seules fonctions  $\phi_i(a, t)$  qui constituent les inconnues de Lagrange. La seule condition imposée à la fonction vectorielle  $\phi(a, t)$  est d'admettre une fonction réciproque  $\psi(x, t)$ .

On peut remonter aux fonctions  $\underline{F}_i$  à partir d'une description Lagrangienne, en effet :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(a, t), \quad \underline{x} = \underline{\phi}(a, T) \text{ soit } a = \underline{\psi}(\underline{x}, T)$$

d'où

$$(16) \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{\psi}(\underline{x}, T), t) = \underline{F}(\underline{x}, T, t)$$

Remarque 2 : il existe d'autres représentations de Lagrange moins naturelles mais plus maniables dans certains cas.

### 5 - Description Eulerienne.

Les variables d'Euler sont  $x_1, x_2, x_3, t$  ; les trois premières représentant les coordonnées de la position  $M_t$  de la particule M à l'instant  $t$ .

Les inconnues d'Euler sont les composantes  $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$  de la vitesse de la particule M à l'instant  $t$ .

Pour justifier cette définition, il faut montrer que la connaissance des  $v_i$  permet de remonter aux fonctions  $\underline{F}_i$  en effet :

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{x}, T, t)$$

n'est autre que la solution supposée unique du système différentiel

$$(17) \quad \frac{dx_i}{dt} = v_i(x, t) \text{ avec la condition } x(T) = x$$

- L'accélération s'écrit conformément à (15)

$$\gamma_i(x, t) = \frac{d}{dt} v_i \left[ (\phi(x, t), t) \right] = \frac{d}{dt} v_i(x, t) \quad \begin{array}{l} \text{dérivée d'une fonction composite} \\ \hookrightarrow (x = \phi(x, t)) \end{array} \quad \text{soit}$$

$$\gamma_i(x, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x, t) \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$(18) \quad \gamma_i(x, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t}(x, t) + v_{i,j}(x, t) v_j(x, t)$$

Exercice 2 : Montrer que la forme vectorielle de (18) est

$$(19) \quad \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Ce calcul de l'accélération nous conduit à introduire la notion de dérivée particulière. Considérons une fonction  $f(x, t)$  où  $x$  repère la position dans  $\mathbb{R}$  à l'instant  $t$  d'une particule M que l'on suit dans son mouvement ;  $x$  "coordonnées" d'Euler de M dépend de  $t$ , posons donc :

$$g(t) = f(x, t)$$

Définition 6 : On appelle dérivée particulière de  $f$  à l'instant  $t$ , la dérivée de  $g$  à ce même instant ;  $f(x, t)$  et donc  $g(t)$  pouvant être une quantité scalaire vectorielle ou tensorielle d'ordre supérieure.

Ainsi, pour une fonction scalaire :

$$(20) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + f'_{,i} v_i,$$

et pour une fonction vectorielle :

$$(21) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + x_{i,j} v_j.$$

La forme vectorielle de (21) n'étant pas aussi simple que dans le cas de l'accélération.

## CHAPITRE II : LOIS DE CONSERVATION - GENERALITES -

- APPLICATION A LA CONSERVATION DE LA MASSE -

## 1 - Introduction.

Nous allons constater au cours de ce chapitre et des suivants que les grandes lois de la physique classique :

Principe d'invariabilité de la masse (cf. mécanique générale n° 221)

Principe fondamental de la dynamique (cf. mécanique générale p. 39)

Théorème de l'énergie (cf. mécanique analytique p. 64),  
 sont d'un même type général que l'on appelle " loi de conservation " c'est ce type  
 de loi que nous nous proposons d'analyser ici.

Définition 7 : Une loi de conservation est le bilan d'une quantité notée  $u$  à laquelle on s'intéresse (masse, quantité de mouvement, énergie, ....) et qui s'applique à tout domaine  $\mathcal{D}$  (connexe), strictement intérieur au système  $S$  étudié, et que l'on suit dans son mouvement.

Une telle loi peut s'énoncer grossièrement :

" Ce que l'on fournit à  $\mathcal{P}$  sert d'une part à compenser les pertes à travers la frontière  $\mathcal{D}$  et d'autre part à faire varier la quantité  $u$  relative à  $\mathcal{F}$  lorsque l'on suit  $\mathcal{P}$  dans son mouvement ".

Ce bilan peut se traduire par une relation du type suivant :

*D* est supposé ici tridimensionnel

$\frac{d}{dt}$  désigne la dérivée partculaire (cf. chapitre précédent p. 6)

$\alpha$ ,  $A, a$  représentent trois grandeurs associées dans l'énoncé de la loi.

Dans la relation (22) elles sont supposées vectorielles mais elles peuvent aussi bien être scalaires ou tensorielles.

$\rho$  est la densité volumique de la quantité  $U$  à laquelle on s'intéresse ; c'est une fonction des variables Eulériennes :  $x, t$  soit  $\rho(x, t)$ .

$A$  est un taux de densité volumique de ce qui est fourni par l'extérieur et qui est en général une donnée du problème quoique dépendant aussi de  $x$  et de  $t$  :  $A(x,t)$ .

Enfin  $\alpha$  est un taux de densité surfacique de ce qui est perdu à travers la frontière de  $\Sigma$  :  $\alpha$  est une fonction d'une part de  $x$  et  $t$  d'autre part du vecteur unitaire  $\vec{n}$  de la normale extérieure à  $\Sigma$  au point considéré  $C$ , ainsi nous écrirons  $\alpha(x,t,\vec{n})$ .

Remarque 3 : Sur le plan dimensionnel, on doit avoir :

$$\dim(\dot{\epsilon}) = \dim(\mathcal{U} L^{-3})$$

$$\dim(\alpha) = \dim(\mathcal{U} L^{-2} T^{-1})$$

$$\dim(A) = \dim(\mathcal{U} L^{-3} T^{-1})$$

L'objet du présent chapitre est de dégager les implications générales d'une loi de conservation (paragraphe 4) mais il faudra au préalable établir quelques résultats relatifs au calcul des dérivées particulières (paragraphe 2) et donner des propriétés mathématiques fondamentales (paragraphe 3). Une première application sera donnée (paragraphe 5) avec la loi de conservation (ou principe d'invariabilité) de la masse. Les études respectives de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie seront faites dans les chapitres suivants.

## 2 - Dérivées particulières.

La notion de dérivée particulière a déjà été introduite et précisée dans le cas de simples fonctions scalaires ou vectorielles (cf. p. 6) nous nous intéresserons ici à la dérivation de diverses sortes d'intégrale dont le domaine d'intégration évolue avec le temps.

La méthode à mettre en œuvre est claire :

a) Ecrire la quantité que l'on veut dériver en variables de Lagrange

b) Opérer la dérivation particulière qui se réduit à une dérivation partielle.

c) Exprimer le résultat en variable d'Euler.

### 2.1. Intégrales de volume.

Proposition 1 • Soit  $K$  la fonction définie par l'intégrale de volume.

$$K(t) = \int_D C(x,t) dv$$

9

l'intégrale étant prise sur un domaine borné connexe  $\mathcal{D}$  que l'on suit dans son mouvement, C une fonction continue et dérivable à valeurs scalaires, la dérivée particulaire est donnée par :

$$(23) \quad \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} C \, dv = \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{CV}) \right] dv \\ = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial C}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{CV} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Démonstration.

Soit  $\mathcal{D}_0$  le domaine occupé par  $\mathcal{D}$  à l'instant 0 ainsi

$$I = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}} C(x, t) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}_0} C[\phi(a, t), t] J da_1 da_2 da_3$$

$$= \iiint_{\mathcal{D}_0} \frac{d}{dt} (C J) da_1 da_2 da_3 \quad \text{en posant } C[\phi(a, t), t] = \tilde{C}(a, t)$$

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \det \mathbb{F} \quad \text{en posant } \mathbb{F} = \overset{\rightarrow}{x_{i,\alpha}} e_i \times \overset{\rightarrow}{e_\alpha} \quad (1)$$

$$J = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{dF_{i\alpha}}{dt} F_{j\beta} F_{k\gamma}$$

$$\text{or } F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} \implies \frac{dF_{i\alpha}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial v_i}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_\alpha} = v_{i,1} F_{1\alpha}$$

(1) D'une façon générale, on affectera d'indices latins les quantités relatives aux variables d'Euler et d'indices grecs les quantités relatives aux variables de Lagrange, de telle sorte que :

$$x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} \quad \text{sans ambiguïté}$$

$$\text{donc } \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{1\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} v_{i,1} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} \det A^{\frac{1}{2}} v_{i,1}$$

$$= \delta_{il} v_{i,1} \quad J = \mathbf{j} \cdot \vec{v}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \left( \frac{dC}{dt} + C \operatorname{div} \vec{V} \right) J \, da_1 \, da_2 \, da_3 \\ &= \iiint_D \left( \frac{dC}{dt} + C \operatorname{div} \vec{V} \right) dx_1 \, dx_2 \, dx_3, \end{aligned}$$

$$\text{et comme } \frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} C$$

$$I = \iiint_D \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{C} \vec{V}) \right] dv \quad \text{c.q.f.d.}$$

Le passage à l'intégrale de surface se fait évidemment par le théorème de Stokes. ~~à l'OSTROGRADSKY~~

Remarques 4 :

i) Si  $C = 1$  dans (20),  $K$  s'identifie au volume  $V(\mathcal{D})$  du domaine  $\mathcal{D}$  occupé par le système  $S$  à l'instant  $t$ ; et :

$$(24) \quad \frac{d}{dt} V(\mathcal{D}) = \iiint_D \operatorname{div} \vec{V} \, dv$$

Ainsi  $\operatorname{div} \vec{V}$  est appelé taux de dilatation volumique du milieu en mouvement, au point  $x$  et à l'instant  $t$ .

ii) L'extension de la proposition 1 aux intégrales de volume portant sur des fonctions à valeurs vectorielles se fait sans difficulté en projetant sur des axes fixes et en appliquant (23) à chaque composante.

## 2.2. Flux d'un vecteur à travers une surface.

Pour ne pas alourdir inutilement ce chapitre, nous ne donnerons pas la démonstration de la proposition suivante qui fait appel à des notions de calcul différentiel extérieur.

Proposition 2 : soit  $\phi$ , le flux défini par l'intégrale

$$(25) \quad \underline{\phi(t)} = \int_{\Sigma} \vec{B}(\underline{x}, t) \cdot \vec{n}(\underline{x}) \, d\sigma$$

où  $\vec{B}(\underline{x}, t)$  est un champ de vecteur;  $\Sigma$  une portion de surface connexe que l'on suit dans son mouvement; la dérivée particulière de ce flux est donnée par la relation

$$(26) \quad \frac{d\phi}{dt} = \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{div} \vec{B} + \operatorname{rot} (\vec{B} \wedge \vec{V}) \right] \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

$$= \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{div} \vec{B} \right) \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_{\partial\Sigma} (\vec{B}, \vec{V}, \vec{\tau}) \, ds$$

où  $\vec{\tau}$  est le vecteur unitaire de la tangente orientée au contour  $\partial\Sigma$  de  $\Sigma$ .

## 2.3. Circulation d'un vecteur le long d'un arc de courbe.

Proposition 3 : Soit  $\Gamma$  la circulation définie par l'intégrale

$$\Gamma(t) = \int_L \vec{A}(\underline{x}, t) \cdot \vec{\tau}(\underline{x}) \, ds$$

où  $\vec{A}(\underline{x}, t)$  est un champ de vecteur et  $L$  un arc de courbe que l'on suit dans son mouvement; la dérivée particulière de cette circulation s'écrit :

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \int_L \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} (\vec{A} \cdot \vec{V}) + \operatorname{rot} \vec{A} \wedge \vec{V} \right] \cdot \vec{\tau} \, ds \\ &= \int_L \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{A} \wedge \vec{V} \right] \cdot \vec{\tau} \, ds + \left[ (\vec{A} \cdot \vec{V}) \right]_P^Q \end{aligned}$$

P et O étant les extrémités de L.

Démonstration.

$$\Gamma = \int_L A_i dx_i = \int_{L_0} \bar{A}_i F_{i\alpha} da_\alpha$$

$L_0$  étant la position de L dans l'espace de Lagrange c'est-à-dire à  $t = 0$  et  
 $\bar{A}_i(x, t) = A_i(x, t)$  d'où

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{L_0} \left( \frac{d\bar{A}_i}{dt} F_{i\alpha} + \bar{A}_i v_{i,1} F_{1\alpha} \right) da_\alpha \quad \text{suivant le calcul déjà effectué au paragraphe 2.1.}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{L_0} \left( \frac{d\bar{A}_i}{dt} + \bar{A}_i v_{1,i} \right) F_{i\alpha} da_\alpha = \int_L \left( \frac{dA_i}{dt} + A_i v_{1,i} \right) dx_i$$

$$\frac{dA_i}{dt} + A_i v_{1,i} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + A_{i,1} v_1 + (A_1 v_1)_{,i} - A_{1,i} v_1$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial t} + (A_1 v_1)_{,i} + v_1 A_{j,m} (\delta_{ji} \delta_{m1} - \delta_{j1} \delta_{mi})$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial t} + (A_1 v_1)_{,i} + \epsilon_{kjm} \epsilon_{kil} v_1 A_{j,m}$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial t} + (A_1 v_1)_{,i} + \epsilon_{ikl} \epsilon_{kmj} A_{j,m} v_1$$

d'où le résultat (24) annoncé.

#### 2.4. Généralisation - Dérivation suivant un champ de vitesse arbitraire.

Nous avons suivi jusqu'ici l'évolution de grandeurs attachées à certaines parties d'un système que l'on suit dans son mouvement ; il peut être intéressant parfois de suivre l'évolution de ces grandeurs en des points ou sur des variétés ayant un mouvement propre défini par un champ de vitesse  $\vec{v}(x, t)$  différent du champ  $\vec{V}(x, t)$  ; le cas se présente notamment lorsqu'on étudie la propagation d'ondes ou le mouvement d'un obstacle au sein d'un milieu continu.

$\delta$ 

Désignons par  $\frac{\delta}{\delta t}$ , la dérivation par rapport au temps, obtenue lorsque l'on suit un point ou une variété dans le mouvement propre défini par  $\vec{W}$ . Le calcul mathématique est le même, il suffit de remplacer  $\frac{d}{dt}$  et  $\vec{V}$  par  $\frac{\delta}{\delta t}$  et  $\vec{W}$ .

Par exemple :

$$(28) \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{W} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \quad \text{et}$$

$$f = f(x, t)$$

$$(29) \quad \frac{\delta}{\delta t} \int_D C dv = \int_D \frac{\partial C}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \vec{C} \vec{W} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Soit  $\vec{v}_r = \vec{V} - \vec{W}$  la vitesse relative du milieu par rapport au mouvement propre défini par  $\vec{W}$  alors on a :

$$(30) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\delta f}{\delta t} + \vec{v}_r \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \quad \text{et}$$

$$(31) \quad \frac{d}{dt} \int_D C dv = \frac{\delta}{\delta t} \int_D C dv + \int_{\partial D} C \vec{v}_r \cdot \vec{n} d\sigma$$

## 2.5. Cas où les fonctions sont seulement continûment dérivables par morceaux.

Raisonnons pour fixer les idées dans le cas d'une intégrale triple. La relation (20) a été établie en supposant  $C(x, t)$  et  $\vec{V}(x, t)$  continûment dérivable ; supposons les dérivable par morceaux seulement.

Soit donc  $D$  partagé en deux domaines  $D_1$  et  $D_2$  par une surface  $\Sigma$  de telle sorte que  $C(x, t)$  et  $\vec{V}(x, t)$  soient continûment dérivable dans  $D_1$  et  $D_2$  mais à travers  $\Sigma$ , ces fonctions et leurs dérivées présentent des discontinuités.

Soit  $\vec{N}(P)$  le vecteur unité normal à  $\Sigma$  en  $P$ , orienté vers l'intérieur de  $D_2$ .

$[f(P)]$  désigne alors le saut subi par la grandeur  $f$  lorsque l'on traverse en  $P$  dans le sens défini par  $\vec{N}$  ou encore :

14

$\left[ f(P) \right] = f(P_2) - f(P_1)$ ,  $P_2$  et  $P_1$  désignant respectivement le point  $P$  considéré soit comme limite de points de  $\mathcal{D}_2$  soit comme limite de points de  $\mathcal{D}_1$ .

Désignons enfin par  $W(P, t)$  la vitesse d'un point  $P$  astreint à rester sur la surface de discontinuité  $\Sigma$  quand le temps varie (surface qui peut d'ailleurs s'interpréter comme une onde). En fait, on le verra, seule la composante normale  $w = W \cdot \vec{n}$  interviendra.

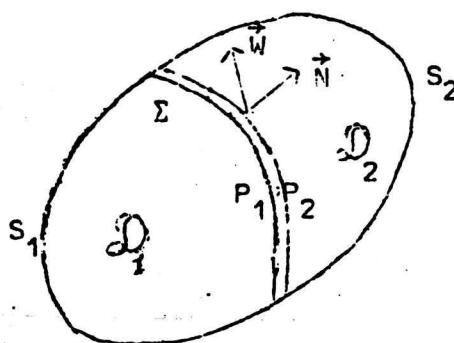
Ainsi :

$$\int_{\mathcal{D}} C dv = \int_{\mathcal{D}_1} C dv + \int_{\mathcal{D}_2} C dv$$

Lorsque le temps varie, on est conduit à considérer que  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ont chacun un mouvement propre défini par le mouvement de leurs frontières :

$$\partial \mathcal{D}_1 = S_1 + \Sigma \quad \text{et} \quad \partial \mathcal{D}_2 = S_2 + \Sigma$$

Figure 2



Puisque l'on suit  $\mathcal{D}$  dans son mouvement, le mouvement de  $S_1$  et  $S_2$  est défini par  $V$ ; celui de  $\Sigma$  par  $W$ .

Si on désigne  $\frac{\delta(1)}{\delta t}$  et  $\frac{\delta(2)}{\delta t}$  respectivement les dérivations par rapport au temps associé aux mouvements propres de  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} C dv = \frac{\delta^{(1)}}{\delta t} \int_{\mathcal{D}_1} C dv + \frac{\delta^{(2)}}{\delta t} \int_{\mathcal{D}_2} C dv$$

chacun des termes du second membre pouvant s'évaluer par application de (29)

$$\frac{\delta^{(1)}}{\delta t} \int_{\mathcal{D}_1} C dv = \int_{\mathcal{D}_1} \frac{\partial C}{\partial t} dv + \int_{S_1} C \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma} C(P_1, t) w d\sigma \quad (29)$$

$$\frac{\delta^{(2)}}{\delta t} \int_{\mathcal{D}_2} C dv = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} dv + \int_{S_2} \vec{CV} \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\Sigma} C(P_2, t) w d\sigma \right]$$

d'où

$$(32) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} C dv = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}} C \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\Sigma} [C] w d\sigma \right]$$

mais si l'on désigne par  $\vec{U}$  la vitesse relative du milieu par rapport à  $\Sigma$  on a :

$$\frac{\delta^{(1)}}{\delta t} \int_{\mathcal{D}_1} C dv = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\vec{CV}) \right] dv - \int_{\Sigma} C(P_1, t) \vec{U}(P_1, t) \cdot \vec{N}(P) d\sigma$$

$$\frac{\delta^{(2)}}{\delta t} \int_{\mathcal{D}_2} C dv = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\vec{CV}) \right] dv + \int_{\Sigma} C(P_2, t) \vec{U}(P_2, t) \cdot \vec{N}(P) d\sigma$$

soit en posant  $u = \vec{U} \cdot \vec{N}$ .

$$(33) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} C dv = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\vec{CV}) \right] dv + \int_{\Sigma} [C u] d\sigma$$

Nous pouvons énoncer :

Proposition 4 : Dans le cas où le volume  $\mathcal{D}$  comprend une surface de discontinuité  $\Sigma$ , les résultats (23) doivent être remplacés par les relations (33) et (32) dans lesquelles  $w$  et  $u$  désignent respectivement les composantes normales à  $\Sigma$  de la vitesse d'un point de  $\Sigma$  et de la vitesse relative du milieu par rapport à  $\Sigma$ .

### 3 - Résultats mathématiques fondamentaux en mécanique des milieux continus.

#### 3.1. Lemme fondamental ou théorème de l'intégrale nulle.

Donnons d'abord une définition préliminaire commode.

Définition 8 : Une famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles ouverts  $\mathcal{D}$  d'un domaine  $\mathcal{D}$  est dite dense dans  $\mathcal{D}$  si, pour tout point  $M$  intérieur à  $\mathcal{D}$  et pour tout voisinage  $V$  de  $M$ , il existe au moins un ensemble  $\mathcal{D}$  de la famille qui soit intérieur à  $V$  ou encore si :  $\forall M \in \mathcal{D}$  et  $\forall V$ , voisinage de  $M$ ,  $\exists \mathcal{D} \in \mathcal{F}$  t.q.  $\mathcal{D} \subset V$ .

Exemples :

a) Si  $\mathcal{D}$  est un domaine tridimensionnel de  $\epsilon$ , l'ensemble de toutes les boules ouvertes intérieures à  $\mathcal{D}$  est une famille dense dans  $\mathcal{D}$ ; il en est de même de tous les cubes dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées.

b) Si  $\mathcal{D}$  est un arc de courbe défini par une abscisse curviligne  $s \in ]a, b[$ , l'ensemble des arcs définis par  $s_1 < s < s_2$  où  $a < s_1 < s_2 < b$  et où  $s_1$  et  $s_2$  sont des rationnels, constitue une famille dense dans  $\mathcal{D}$ .

c) Dans tous les cas l'ensemble de tous les ouverts constitue une famille dense dans  $\mathcal{D}$ .

On peut alors énoncer :

Lemme fondamental ou théorème 1 (de l'intégrale nulle).

Soit  $\varphi(M)$  une fonction définie et continue dans le domaine  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{F}$  une famille dense dans  $\mathcal{D}$ . Si pour tout  $D$  de  $\mathcal{F}$  l'intégrale de  $\varphi$  dans  $D$  est nulle, alors la fonction  $\varphi$  est identiquement nulle dans  $\mathcal{D}$ .

Par intégrale, il faut entendre intégrale de volume (resp. de surface ou curviligne), si  $\mathcal{D}$  est un domaine volumique (resp. surfacique ou linéaire). La démonstration est simple dans tous les cas. Supposons  $\mathcal{D}$  tridimensionnel pour fixer les idées.

Supposons que  $\int_D \varphi dv = 0 \quad \forall D \in \mathcal{F}$  famille dense dans  $\mathcal{D}$  et que  $\exists M_0 \in \mathcal{D}$  avec  $\varphi(M_0) \neq 0$ , par exemple  $\varphi(M_0) > 0$ .

En vertu de la continuité de  $\varphi$ , on peut trouver un voisinage  $V$  de  $M_0$  tel que  $\varphi(M) > \frac{1}{2} \varphi(M_0) \quad \forall M \in V$ . Soit alors  $D \in \mathcal{F}$  tel que  $D \subset V$

$$\int_D \varphi dv > \frac{1}{2} \int_D \varphi(M_0) dv = \frac{1}{2} \varphi(M_0) \text{ vol. } D$$

(lire volume de  $D$ ) ; ceci est contraire à l'hypothèse.

### 3.2. Applications du théorème de Stokes aux transformations d'intégrales.

Il y a un théorème puissant en mathématiques appelé "théorème de Stokes" dont l'énoncé et la démonstration font appel à des notions de calcul différentiel extérieur mais dont certaines conséquences sont supposées acquises en propédergiques et classes de préparation ; il s'agit des formules de Riemann et d'Ostrogradski que nous avons déjà utilisées dans ce cours et dont nous nous contenterons de rappeler les énoncés. Nous donnerons ensuite une généralisation de la formule d'Ostrogradski moins connue, désignée souvent sous le nom de théorème de la divergence et dont les applications en mécanique des milieux continus sont fréquentes.

#### Proposition 5 ou Formule de Riemann :

La circulation d'un champ de vecteur  $\vec{X}$  continûment dérivable, le long d'une courbe fermée. C est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface "régulière"  $\Omega$  limitée par cette courbe.

(34)

$$\int_C \vec{X} \cdot \vec{\tau} \, ds = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Le mot "régulière" implique "continûment différentiable par morceaux".

Les orientations de  $\vec{\tau}$  vecteur unitaire de la tangente à  $C$  et de  $\vec{n}$  vecteur unitaire de la normale à  $\Omega$  doivent être telles qu'un observateur situé le long de  $\vec{n}$ , le sens des pieds à la tête coïncident avec le sens de  $\vec{n}$  voit  $\vec{\tau}$  dans le sens trigonométrique.

#### Proposition 6 ou Formule d'Ostrogradski :

Le flux d'un champ de vecteur continûment dérivable à travers une surface "régulière"  $\Sigma$  fermée est égale à l'intégrale triple de sa divergence dans le domaine  $\Omega$  limité par  $\Sigma$ .

$$(35) \quad \iint_{\Sigma} \vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dv$$

Le vecteur  $\vec{n}$  unitaire est ici orienté vers l'extérieur du domaine  $\Omega$ .

C'est cette proposition que nous allons appliquer dans l'énoncé suivant :

### Théorème 3 (Théorème de la divergence)

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{E}^3$  à frontière régulière  $\partial\Omega = \Sigma$

Soit  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la normale à  $\Sigma$  (orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ )

Soit enfin  $t_{ijk\dots q}$  une composante d'un champ de tenseur d'ordre quelconque, continulement dérivable dans  $\Omega$  et continu sur  $\bar{\Omega}$  alors :

$$(36) \quad \iiint_{\Omega} t_{ijk\dots q,r} dv = \iint_{\partial\Omega} t_{ijk\dots q} n_r d\sigma$$

Démonstration : Il existe une démonstration directe mais on peut aussi la déduire de la formule d'Ostrogradski.

En effet, soit  $\vec{X}$  le vecteur de  $\mathbb{E}^3$  dont seule la  $n^{\text{ième}}$  composante n'est pas nulle ( $X_r = t_{ijk\dots q}$ ) : la proposition 6 entraîne alors :

$$\iiint_{\Omega} t_{ijk\dots q,r} dv = \iint_{\partial\Omega} t_{ijk\dots q} n_r d\sigma \quad \text{c.q.f.d.}$$

### Remarques 5 :

- i) Formellement, appliquer (36) revient à remplacer l'intégrale de volume de la dérivée partielle en  $r$  d'une quantité scalaire  $\phi$  par l'intégrale, sur la frontière du domaine volumique, du produit de la quantité  $\phi$  par  $n_r$  ( $r^{\text{ième}}$  composante de la normale extérieure unitaire).

ii) Pour obtenir effectivement un théorème de divergence il faut prendre  $q = r$  dans (36) et somme sur l'indice ainsi répété d'où

$$\iiint_{\Omega} t_{ijk\dots\dots r,r} dv = \iint_{\partial\Omega} t_{ijk\dots\dots r} n_r d\sigma$$

ce qui s'écrit si l'on suppose que  $\bar{\pi}$  est un tenseur d'ordre p.

$$(37) \quad \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{\pi}^{(p)} dv = \iint_{\partial\Omega} \bar{\pi}^{(p)} \vec{n} d\sigma$$

iii) Le théorème de la divergence est encore valable dans le cas plan.

Soit en effet  $\Sigma$  un domaine plan et  $ox_3$  perpendiculaire à  $\Sigma$ , les fonctions en causes sont supposées ne dépendre que de  $x_1$  et  $x_2$ . Appliquons alors (36) au cylindre  $\Omega$  de section droite  $\Sigma$  et de hauteur unité

$$\iiint_{\Omega} t_{ijk\dots\dots q,r} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\Sigma} t_{ijk\dots\dots q,r} dx_1 dx_2$$

(les indices ici ne décrivent que l'ensemble {1,2})

et

$$= \iint_{\partial\Omega} t_{ijk\dots\dots q} n_r d\sigma = \int_{\partial\Sigma} t_{ijkq} n_r ds + \iint_{\partial\Omega_0} t_{ijk\dots\dots q} n_r d\sigma + \iint_{\partial\Omega_1} t_{ijk\dots\dots q} n_r d\sigma$$

$\partial\Omega_0$  et  $\partial\Omega_1$  étant les deux bases du cylindre, dans ces deux dernières intégrales  $\vec{n} = \pm \vec{e}_3$  et donc  $n_r$  pour  $r = 1,2$  est nul d'où le résultat annoncé.

Exemples 2 : Applications du théorème de la divergence.

$$(38) \quad \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi dv = \iint_{\partial\Omega} \varphi \vec{n} d\sigma$$

en effet

$$\iiint_{\Omega} \varphi_i dv = \iint_{\partial\Omega} \varphi n_i d\sigma$$

$$(39) \quad \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{U} dv = \iint_{\partial\Omega} \vec{n} \wedge \vec{U} d\sigma$$

en effet

$$\iiint_{\Omega} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} dv = \iint_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} u_k n_j d\sigma$$

$$(40) \iint_{\Sigma} (\vec{e}_3 \cdot \overrightarrow{\text{rot } \vec{U}}) d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{U} \cdot \vec{\tau} ds$$

car

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \epsilon_{ijk} u_{k,j} \delta_{ij} d\sigma &= \int_{\partial\Sigma} \epsilon_{ijk} u_k n_j \delta_{ij} ds \\ &= \int_{\partial\Sigma} (\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}_3) ds \\ &= \int_{\partial\Sigma} (\vec{e}_3 \wedge \vec{n}) \cdot \vec{u} ds = \int_{\partial\Sigma} \vec{U} \cdot \vec{\tau} ds \end{aligned}$$

Première identité de Green.

$$(41) \boxed{\iiint_{\Omega} \varphi \Delta \psi dv = \iint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad } \varphi} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \psi} dv}$$

$$\begin{aligned} \text{car } \iiint_{\Omega} \varphi \psi_{,ii} dv &= \iiint_{\Omega} \left[ (\varphi \psi_{,i})_{,i} - \varphi_{,i} \psi_{,i} \right] dv = \\ &= \iint_{\partial\Omega} \varphi \psi_{,i} n_i d\sigma - \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad } \varphi} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \psi} dv \end{aligned}$$

Or par définition : *derrière normale de  $\Psi$*

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad } \psi} \cdot \vec{n} = \psi_{,i} n_i}$$

Deuxième identité de Green (dérivant immédiatement de la première).

$$(42) \boxed{\iiint_{\Omega} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dv = \iint_{\partial\Omega} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma}$$

4 - Implications générales d'une loi de conservation.

Nous supposons que la loi de conservation (22) c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_i dv + \int_{\partial\Omega} \alpha_i d\sigma = \int_{\Omega} A_i dv$$

est valable pour tout domaine  $\mathcal{D}$  strictement intérieur au système étudié  $S$  et nous nous proposons d'en dégager quelques conséquences. Sauf mention contraire, nous supposons que  $\vec{V}(x, t)$ , champ de vitesse de  $S$  et  $\vec{\alpha}(x, t)$ ,  $\vec{A}(x, t)$ ,  $\vec{\alpha}(x, t, n)$  sont des fonctions continûment dérивables de leurs arguments.

#### 4.1. Loi des actions mutuelles de surface.

Proposition 7 : La grandeur  $\vec{\alpha}(x, t, \vec{n})$  est une fonction impaire en  $\vec{n}$  soit

$$(43) \quad \vec{\alpha}(x, t, \vec{n}) = -\vec{\alpha}(x, t, -\vec{n})$$

En effet :

Soient  $P$  et  $\vec{N}$  un point et une direction pour lesquels on veut montrer (43).

Soient  $\Pi$  le plan passant par  $P$  et normal à  $\vec{N}$ .

Soient  $\mathcal{D}$  domaine quelconque contenant  $P$ ;  $\Sigma = \mathcal{D} \cap \Pi$ ,  $\Pi$  partage  $\mathcal{D}$  en  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de telle sorte que  $\vec{N}$  est normal à  $\Sigma$  orienté vers  $\mathcal{D}_2$ .

En utilisant les notations de la figure 2, p.14, on applique (22) successivement à  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}$  on obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_1} \vec{f}_i dv + \int_{S_1} \vec{\alpha}_i(\vec{n}) d\sigma + \int_{\Sigma} \vec{\alpha}_i(\vec{N}) d\sigma = \int_{\mathcal{D}_1} A_i dv$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_2} \vec{f}_i dv + \int_{S_2} \vec{\alpha}_i(\vec{n}) d\sigma + \int_{\Sigma} \vec{\alpha}_i(-\vec{N}) d\sigma = \int_{\mathcal{D}_2} A_i dv$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \vec{f}_i dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{\alpha}_i(\vec{n}) d\sigma = \int_{\mathcal{D}} A_i dv$$

Soit en ajoutant membre à membre les deux premières égalités et en retranchant la dernière

$$\int_{\Sigma} \vec{\alpha}_i(\vec{N}) + \vec{\alpha}_i(-\vec{N}) d\sigma = 0$$

Mais l'ensemble des  $\Sigma$  constitue une famille dense dans  $S \cap \Pi$  d'où le résultat (43), valable en tout point  $P$  de  $S$ .

#### 4.2. Équations aux dérivées partielles associées à une loi de conservation.

Soient  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  les vecteurs unitaires du repère cartésien utilisé. Posons

$$(44) \quad \underline{\alpha_i(x, t, \vec{e}_j)} = a_{ij}(x, t),$$

et appliquons (22) à un parallélépipède rectangle  $S$  d'arêtes parallèles aux axes de coordonnées en notant qu'alors :

$$(45) \quad \int_{\partial S} \alpha_i d\sigma = \int_S a_{ij} n_j dv$$

ce qui d'après le théorème de la divergence peut s'écrire :

$$\int_{\partial S} \alpha_i d\sigma = \int_S a_{ij,j} dv$$

alors

$$\frac{d}{dt} \int_S \alpha_i dv + \int_S a_{ij,j} dv = \int_S A_i dv$$

et en appliquant (23)

$$\int_S \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i v_j)_{,j} + a_{ij,j} - A_i \right\} dv = 0$$

Cette égalité a lieu pour tous les parallélépipèdes intérieurs à  $S$ , ceux-ci constituant une famille dense dans  $S$  d'où le résultat suivant :

Proposition 8 : Pour la loi de conservation (22), les fonctions  $\alpha_i$ ,  $A_i$  et  $a_{ij}$  vérifient en tout point de  $S$  en lequel elles sont continûment dérивables, l'équation aux dérivées partielles.

(46)

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i v_j)_{,j} + a_{ij,j} = A_i$$

Corollaire : La loi de conservation (22) implique que pour tout domaine  $D$  intérieur à  $S$

$$(47) \quad \int_{\partial D} \{ \alpha_i - a_{ij} n_j \} d\sigma = 0$$

dém: on intègre sur  $D$  et on remonte les résultats

Réciproquement si (46) est satisfaite en tout point de  $S$  et (47) pour tout domaine  $\mathcal{D}$  intérieur à  $S$ , on peut écrire la loi de conservation (22) pour tout  $\mathcal{D}$ .

Le résultat est immédiat en écrivant (22) tenant compte de (23) et (46).

#### 4.3. Tenseur densité de flux.

Nous allons étudier  $\vec{\alpha}$  comme fonction de  $\vec{n}$  et reconnaître ainsi la nature des  $a_{ij}$ ; étendons pour cela la définition de  $\alpha$  pour tout vecteur non unitaire en posant :

$$(48) \quad \vec{\alpha}(\underline{x}, t, \lambda \vec{n}) = \lambda \vec{\alpha}(\underline{x}, t, \vec{n})$$

ce qui est compatible avec (43) alors on peut énoncer.

Proposition 9 : La fonction  $\vec{\alpha}(\underline{x}, t, \vec{u})$ , où  $\vec{u}$  est un vecteur quelconque, est linéaire en  $\vec{u}$  et définit donc à tout instant  $t$  et en tout point de  $S$  un tenseur  $\alpha$  appelé densité de flux associé à la loi de conservation (22) par l'application  $\vec{u} \mapsto \vec{\alpha}(\vec{u})$ . Dans le repère des  $x_i$  ce tenseur est représenté par la matrice  $a_{ij}$ ; autrement dit

$$(49) \quad \alpha_i(\underline{x}, t, \vec{u}) = a_{ij}(\underline{x}, t) u_j$$

On démontre ce résultat en appliquant le corollaire (8) à un tétraèdre triangulaire  $T$  dont la face hypothétique  $T$  est contenue dans le plan  $\Pi$  passant par  $P$  et normal à  $\vec{N} = (\vec{u}/|\vec{u}|)$  ( $P$  étant le point quelconque de coordonnées  $\underline{x}$  en lequel on veut prouver le résultat). On obtient alors

$$\int_T (\alpha_i - a_{ij} N_j) d\sigma = 0$$

et comme les triangles  $T$  sont denses dans  $S \cap \Pi$ , on obtient le résultat annoncé compte tenu de (48).

Etant donné que (49) entraîne évidemment (47), on peut généraliser le corollaire

(8)

et conclure le paragraphe par

Proposition 10 : si les fonctions  $\vec{v}_i(\underline{x}, t)$ ,  $A_i(\underline{x}, t)$ ,  $a_{ij}(\underline{x}, t)$  continûment dérivables (1) dans un domaine  $\mathcal{D}_0$  vérifient les équations (46) et si le vecteur  $\vec{\alpha}$  est défini par (49), alors la loi de conservation (22) est identiquement satisfaite pour tout domaine  $\mathcal{D}$  intérieur à  $\mathcal{D}_0$ .

(1) Le résultat reste acquis si la donnée  $A_i$  est simplement continue dans  $\mathcal{D}_0$ .

4.4. Equations aux discontinuités et forme intégrale générale d'une loi de conservation.

Supposons maintenant que le champ des vitesses  $\vec{V}$  et les grandeurs impliquées dans l'énoncé de la loi de conservation sont seulement continûment dérivable par morceaux. En utilisant les notations et la méthode du paragraphe 2.5., on obtient le résultat suivant :

Proposition 11 : La loi de conservation (22) implique que en tout point d'une éventuelle surface de discontinuité  $\Sigma$  inclue dans  $\mathcal{D}$ .

$$(50) \quad \left[ \partial_t u + \vec{\alpha}(\vec{N}) \right] = 0$$

$u$  étant (rappelons-le) la composante normale de la vitesse du milieu relativement à la surface de discontinuité et  $N$  le vecteur normal unité à  $\Sigma$  au point considéré :

$$u = (\vec{V} - \vec{W}) \cdot \vec{N} = \vec{U} \cdot \vec{N}$$

Par ailleurs, si l'on suppose que le domaine  $\mathcal{D}$  est animé d'un mouvement propre distinct du mouvement du milieu, on peut écrire la loi de conservation (22) sous une forme plus générale en appliquant la formule (31)

$$(51) \quad \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \partial_t A_i dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \alpha'_i d\sigma = \int_{\mathcal{D}} A_i dv$$

en posant

$$(52) \quad \alpha'_{ij} = \partial_t u_j + a_{ij}; \quad \alpha'_i(\vec{k}) = a'_{ij} k_j \quad \text{et} \quad \vec{U} = \vec{V} - \vec{W}$$

La relation (50) qui s'écrit alors  $\left[ \alpha'_i(N) \right] = 0$  traduit donc le fait que le vecteur  $\vec{\alpha}'(N)$  qui caractérise les échanges surfaciques à travers la surface de discontinuité  $\Sigma$  ne subit aucune discontinuité à travers cette surface qui se propage à la vitesse  $\vec{W}$ .

4.5. Conditions aux limites naturelles associées à une loi de conservation.

Nous avons jusqu'ici appliquée la loi de conservation à des domaines  $\mathcal{D}$  strictement intérieurs au système  $S$ ; considérons maintenant un domaine  $\mathcal{D}$  ayant un morceau de frontière  $\Sigma$  commun avec la frontière de  $S$ .

Supposons pour simplifier  $S$  connexe et  $\partial S$  continûment dérivable par morceaux.

Admettons l'existence d'une action extérieure surfacique schématisée à tout instant  $t$  par un champ de vecteur  $\vec{\alpha}^*(P,t)$  défini et continu par morceaux sur  $\partial S$ , alors par un procédé de passage à la limite de (22) justifié par la continuité des fonctions en jeux, On montre que sur tout morceau  $\Sigma$  de  $\partial S$  sur lequel la normale  $\vec{n}$  et la fonction  $\vec{\alpha}^*(P,t)$  sont continues

$$\int_{\Sigma} \{ \alpha_i(n) - \alpha_i^* \} d\sigma = 0$$

ce qui, grâce au lemme fondamental implique

(53)

$$\vec{\alpha}(P,t,\vec{n}) = \vec{\alpha}^*(P,t) \text{ soit } a_{ij}(P,t) n_j = \alpha_i^*(P,t)$$

ce qui est la condition aux limites naturellement associée à la loi de conservation.

### Remarques 6 :

- i) La condition (53) est une condition aux limites nécessaire qui peut très bien n'être pas suffisante par exemple pour un fluide visqueux.
- ii) On a raisonné pour fixer les idées sur une équation de conservation liant des grandeurs vectorielles mais tous les résultats s'étendent, moyennant adaptations, aux autres cas possibles ; par exemple si  $\vec{c}$  et  $A$  sont scalaires,  $\vec{a}$  est un vecteur défini par  $\vec{\alpha}(x,t,u) = a_i(x,t)u_i$ . D'une façon générale si  $\vec{c}$  et  $A$  sont des tenseurs d'ordre  $p$ ,  $a$  est un tenseur d'ordre  $p+1$ .

### 5 - Application à la conservation de la masse.

Nous avons évoqué au début du chapitre III de cinétique le principe d'invariabilité de la masse retenu par la mécanique classique et qui peut s'énoncer ainsi

Principe 1 (Conservation de la masse) : La masse d'une partie d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante quand le temps varie.

Cette loi se traduit donc par l'égalité très simple

$$(54) \quad \frac{d}{dt} \int_D \rho dv = 0$$

où  $D$  est un domaine arbitraire du système  $S$  supposé tridimensionnel,  $\rho(x,t)$  est la masse volumique.

Si l'on rapproche cette relation de l'expression générale d'une loi de conservation (22) on voit que où est le scalaire  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $A$  sont nuls. La forme intégrale générale de cette loi peut alors s'écrire d'après (51) et (52) : 26

$$(55) \quad \frac{\delta}{\delta t} \int_D \rho dv = - \int_{\partial D} \rho u \cdot \vec{n} \quad u = \vec{U} \cdot \vec{n}$$

$D$  étant supposé animé ici d'un mouvement propre.

Nous sommes en mesure, grâce à l'étude générale précédente, de tirer rapidement les conséquences de (54).

### 5.1. Équation de continuité.

En un point de continuité, l'équation aux dérivées partielles associée à (54) s'écrit d'après (46)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0$$

que l'on peut encore écrire sous les formes intrinsèques

$$(56) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

ou encore

$$(57) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0$$

### 5.2. Dérivée particulière des intégrales prises par rapport à une distribution de masse.

Nous avons déjà annoncé et utilisé dans le cours de mécanique générale (cf. (48) p.32, (56) p.33 et (57) p.34) la propriété de dérivation particulière des intégrales prises par rapport à une distribution de masse à savoir

$$\text{si } F(t) = \int_{\gamma'(t)} \phi(x, t) du \quad \lambda = \rho dv$$

alors

$$(58) \quad \frac{dF}{dt} = \int_{\gamma(t)} \frac{d\phi}{dt} du$$

24

Nous pouvons maintenant la démontrer dans le cas d'une intégrale de volume ; soit en effet

$$F(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \phi(x,t) \rho(x,t) dv$$

d'après (23)

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left[ \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \rho \vec{v}) \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi \right] \rho dv + \int_{\mathcal{V}(t)} \phi \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{d\phi}{dt} \rho dv \quad \text{si l'on tient compte de (20) et (56) c.q.i.d.} \end{aligned}$$

Remarque 7 : Dans le cas d'une distribution surfacique de masse :

$$(59) \quad F(t) = \int_{\mathcal{S}(t)} \phi(\underline{x},t) \rho(\underline{x},t) d\sigma \equiv \int_{\mathcal{S}(t)} \phi(\underline{x},t) \rho(\underline{x},t) \vec{n} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Il faut au préalable écrire l'équation de continuité correspondante à savoir

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}(t)} \rho d\sigma \equiv \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}(t)} \rho \vec{n} \cdot \vec{n} d\sigma, \text{ ce qui compte tenu de (26) conduit à}$$

$$(60) \quad \int_{\mathcal{S}(t)} \left[ \frac{\partial \rho \vec{n}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{div}(\rho \vec{n}) + \operatorname{rot}(\rho \vec{n} \wedge \vec{v}) \right] d\sigma = 0$$

On montre alors (58) aisément, en appliquant (26) à (59) compte tenu de (60).

Une méthode analogue serait à utiliser pour une distribution linéique de masse.

### 5.3. Surfaces de contact et ondes de choc.

La loi de discontinuité associée à la conservation de la masse s'écrit d'après

(50)

$$(61) \quad [\rho \vec{u}] = 0$$

ce qui s'écrit :

Proposition 12 : Le débit massique surfacique  $\rho u = m$  est continu à travers une surface de discontinuité  $\Sigma$ .

Il convient alors de distinguer deux cas :

a) Surfaces de contact :

Si sur  $\Sigma$ ,  $m = 0$ , on a nécessairement puisque  $\rho > 0$ .

$$(62) \quad u^+ = u^- = 0$$

Aucun débit ne traverse donc  $\Sigma$  et, de part et d'autre de  $\Sigma$ , la vitesse relative du milieu par rapport à  $\Sigma$  est tangentielle. On dit que  $\Sigma$  est une surface de contact ou encore une surface de glissement.

Exemples 3 : La surface séparant deux liquides non miscibles en mouvement, la surface de séparation d'une masse d'eau en contact avec l'atmosphère constituent en général des surfaces de contact.

b) Ondes de choc.

Si  $m \neq 0$ ,  $u^+$  et  $u^-$  sont  $\neq 0$ ; le milieu traverse effectivement la surface de discontinuité  $\Sigma$ ; on dit que  $\Sigma$  est une onde de choc.

Exemples 4 :

- Soit un gaz au repos dans un tube limité à l'une de ces extrémités par un piston. Lorsqu'on enfonce le piston, la surface qui sépare le gaz en mouvement du gaz encore au repos est une onde de choc.

- Une explosion dans un milieu y produit une onde de choc.
- Le vol de croisière d'un avion supersonique produit à son passage des ondes de choc.

#### 5.4. Conditions aux frontières.

Le fait que  $\alpha = 0$  dans la loi de conservation de la masse implique qu'il n'y a aucun débit massique surfacique en tout point d'une paroi  . Autrement dit, la composante normale de la vitesse relative du milieu par rapport à la paroi est nulle.

### 5.5. Milieu incompressible.

Définition 9 : Un milieu est dit incompressible si, quelles que soient les conditions qui lui sont imposées où les actions exercées sur lui, le taux de dilatation volumique est nul en chaque point ou à tout instant, ce qui d'après (24) se traduit par

$$(63) \quad \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

Mais alors (57) implique

$$(64) \quad \frac{dp}{dt} = 0$$

C'est-à-dire que la masse volumique en un point reste constante lorsqu'on suit ce point dans son mouvement.

Remarque 8 : Il se peut que  $\rho$  ne soit pas constant dans tout le milieu, par exemple dans le cas d'un mélange non homogène de deux fluides, mais si à un instant donné  $\rho$  prend la même valeur  $\rho_0$  dans tout le milieu alors  $\rho = \rho_0$  en tout point et à tout instant.

On suppose donc, sauf mention contraire, que  $\rho = \text{constante}$  lorsqu'on parle de milieu incompressible. Dans ces conditions, les équations

$$(65) \quad \rho(x,t) = \rho_0 \text{ et } \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

traduisent à la fois l'incompressibilité et l'équation de continuité dans le milieu incompressible.

### CHAPITRE III : CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

#### TENSEUR DES CONTRAINTES

##### 1 - Objet du chapitre.

Nous allons maintenant expliciter le principe fondamental de la mécanique classique (cf. polycopié I p. 39) pour un milieu continu déformable. A cet effet, nous supposerons que, sauf mention contraire, le repère  $\mathcal{R}$  dans lequel est observé le mouvement est galiléen et nous appliquerons le principe fondamental à une partie  $\mathcal{D}$  arbitraire du système  $S$  étudié.

Soient donc  $(\vec{\omega})_{\mathcal{D}}$  et  $(\vec{F}_e)_{\mathcal{D}}$  respectivement le torseur dynamique de  $\mathcal{D}$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  (cf. poly I p. 33) et le torseur des efforts extérieurs appliqués à  $\mathcal{D}$  (cf. poly I p. 37). Nous avons :

$$(\vec{\omega})_{\mathcal{D}} = \vec{F}_e \xrightarrow[\text{torseur}]{\mathcal{D}}$$

Ce qui, compte tenu de la définition du torseur cinétique  $(\vec{\omega})_0$  (cf. poly I p. 33), de la propriété (58) ci-dessus, et du fait que, si  $O$  est l'origine du repère  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{v}(O/\mathcal{R}) = 0$ , s'écrit :

$$(66) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \vec{v}(M,t) d\mu = \vec{F}_e (\mathcal{F}_e \rightarrow \mathcal{D})$$

$$(67) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \vec{\omega}_M \wedge \vec{v}(M,t) d\mu = \vec{\omega}_0 (\mathcal{F}_e \rightarrow \mathcal{D})$$

Reste à être capable de définir les efforts extérieurs appliqués à  $\mathcal{D}$ .

Ceux-ci sont de deux sortes :

i) Les efforts exercés sur  $\mathcal{D}$  par les systèmes extérieurs à  $S$ .

ii) Les efforts exercés sur  $\mathcal{D}$  par les parties de  $S$  extérieures à  $\mathcal{D}$ .

Conformément à la terminologie usuelle, ces derniers sont dits efforts intérieurs à  $S$  alors que les premiers sont des efforts extérieurs à  $S$ .

Avant d'expliciter davantage, formulons quelques hypothèses :

i)  $S$  et  $\mathcal{D}$  sont supposés occuper des domaines volumiques de  $\mathbb{E}^3$  (ceci est conforme à la réalité de tout système).

ii) La distribution des masses dans  $S$  à chaque instant  $t$  est définie par une masse volumique  $\rho(x,t)$ .

iii) Les efforts extérieurs exercés sur  $\mathcal{D}$  par l'extérieur de  $S$  sont représentés à chaque instant par une distribution volumique de forces  $\vec{f}(x, t)$ .

IV) Enfin, et c'est là l'hypothèse fondamentale sur laquelle reposent tous les développements ultérieurs, nous admettrons que les efforts intérieurs à  $S$  :

. Traduisent des actions locales de contact.

. Sont représentées en chaque point  $M$  de  $\partial\mathcal{D}$  et à chaque instant  $t$  par une densité surfacique de force  $\vec{T}$  ne dépendant à cet instant que de  $M$  et du vecteur unitaire normal en  $M$  à  $\partial\mathcal{D}$ , soit  $\vec{n}$  (orienté sauf mention contraire vers l'extérieur de  $\mathcal{D}$ ). Nous désignons donc par  $\vec{T}(M, t, \vec{n})$  ou  $\vec{T}(x, t, \vec{n})$  la valeur en  $M$  et à l'instant  $t$  de  $\vec{T}$ .

Remarque 9 :

Ainsi, si  $\mathcal{D}'$  est un sous domaine de  $S$  distinct de  $\mathcal{D}$  mais ayant avec  $\mathcal{D}$  un point commun  $M$  et un plan tangent commun en  $M$ ; on utilisera en  $M$  le même vecteur  $\vec{T}$  pour décrire les efforts exercés sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  respectivement par leur complémentaire dans  $S$ , ainsi  $T$  ne dépend que de la forme locale de  $\partial\mathcal{D}$  en  $M$  et ce au premier ordre (direction du plan tangent). Il ne serait pas absurde à priori de supposer que  $\vec{T}$  puisse dépendre aussi de la forme locale au second ordre (rayons de courbure par exemple); nous nous en tiendrons cependant à l'hypothèse très simple énoncée  $\vec{T}(M, \vec{n})$  est appelé le vecteur contrainte en  $M$  pour la direction  $\vec{n}$ .

Avec les définitions posées (66) et (67) s'écrivent :

$$(68) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \, d\sigma + \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \, dv$$

$$(69) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \vec{n}_M \wedge \rho \vec{v} \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{n}_M \wedge \vec{T} \, d\sigma + \int_{\mathcal{D}} \vec{n}_M \wedge \vec{f} \, dv$$

Les hypothèses faites, en particulier celles portant sur  $\vec{T}$ , montrent que (68) et (69) sont des lois de conservation; on dit qu'elles expriment la conservation de la quantité de mouvement car  $(\mathcal{D})$  est souvent encore appelé "torseur de la quantité de mouvement".

L'objet de ce chapitre est d'appliquer à (68) et (69) la théorie générale exposée au chapitre II et de dégager la signification physique des notions et des résultats auxquels elle conduit. Une attention particulière est portée au tenseur des contraintes que nous allons définir et qui, en fait, caractérise les efforts intérieurs en tout point  $M$  du système.

2 - Application de la théorie générale.

2.1. Définition du tenseur des contraintes.

Si l'on écrit (68) en composantes, on obtient

$$(70) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho v_i dv - \int_{\partial \mathcal{D}} T_i d\sigma = \int_{\mathcal{D}} f_i dv$$

et l'on peut appliquer les résultats du chapitre II en posant

$$(71) \quad \hat{\mathcal{T}}_i = \rho v_i, \quad \alpha_i = -T_i \quad \text{et} \quad A_i = f_i$$

La proposition 9 p.23 montre en particulier l'existence d'un tenseur  $\Sigma$  de composantes  $\sigma_{ij}$  (les  $\sigma_{ij}$  étant dans  $S$  des fonctions continues par morceaux de  $x$  et de  $t$ ) tel que en tout point de continuité, on ait :

$$(72) \quad T_i(x, t, \vec{n}) = \sigma_{ij}(x, t) n_j$$

Ce tenseur est appelé tenseur des contraintes.

Si on connaît à un instant  $t$  le champ des tenseurs des contraintes, on peut déterminer très simplement les vecteurs contraintes en tout point de la frontière d'un volume  $\mathcal{D}$  intérieur à  $S$ , c'est à dire décrire complètement les efforts exercés sur  $\mathcal{D}$  par les éléments de  $\partial S$  extérieur à  $\mathcal{D}$ .

2.2. Equations du mouvement.

La proposition 8 et la formule (46) p.22 montrent qu'en tout point de  $S$  où les  $v_i$  et  $\sigma_{ij}$  sont continûment dérивables on a :

$$(73) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + (\rho v_i v_j)_{,j} = \sigma_{ij,j} + f_i$$

ce qui se développe comme suit :

$$v_i \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_j)_{,j} \right] + \rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \right] = \sigma_{ij,j} + f_i$$

et donne, compte tenu de l'équation de continuité (56) p. 26. Les relations appelées "Equations du mouvement" :

$$(74) \quad \rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \right] = \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \gamma_i = \sigma_{ij,j} + f_i$$

dont la forme intrinsèque est, grâce à (19) p. 6

$$(75) \quad \rho \left[ \frac{\vec{\partial} v}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad } v^2} + (\text{rot } \vec{v}) \vec{\Lambda} \vec{v} \right] = \text{div } \vec{\Sigma} + \vec{f}$$

Dans le cas d'un système S en équilibre dans le repère  $\mathcal{R}$  on obtient les équations d'équilibre

$$(76) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 && \text{c.a.d.} \\ \text{div } \vec{\Sigma} + \vec{f} &= 0 \end{aligned}$$

### 2.3. Symétrie du tenseur des contraintes.

Exploitons de même l'équation de conservation (69) qui s'écrit en composantes :

$$\frac{d}{dt} \int_D \epsilon_{ijk} x_j v_k \rho dv = \int_D \epsilon_{ijk} x_j T_k d\sigma + \int_D \epsilon_{ijk} x_j f_k dv,$$

compte-tenu de (72), la proposition 9 p.23 n'apporte rien de nouveau car :

$$\epsilon_{ijk} x_j T_k = \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l$$

et nous savons déjà que les composantes  $M_{il} = \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}$  représentent (après double contraction sur les composantes d'un tenseur du 6ème ordre) les composantes d'un tenseur du second ordre.

La proposition 8 et la formule (46) p.22 conduisent à :

$$\epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho x_j v_k) + (x_j v_k)_l,1 - (x_j \sigma_{kl})_l,1 - x_j f_k \right] = 0$$

soit :

$$\epsilon_{ijk} \left[ x_j \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + (\rho v_k v_i)_{,1} - \sigma_{kl,1} - f_k \right] + \rho v_j v_k + \rho x_{j,1} v_k v_1 - x_{j,1} \sigma_{kl} \right] = 0$$

qui se réduit à :

$$(77) \quad \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$$

grâce à la relation (73) et on fait que  $x_{j,1} = \delta_{j1}$  car alors l'équation devient

$$\epsilon_{ijk} (2\rho v_j v_k - \sigma_{kj}) = 0$$

et c'est la symétrie du produit  $v_j v_k$  qui conduit enfin à 77 (cf. calcul tensoriel p. 20). Mais par application de la même proposition nous obtenons de (77)

(78)

$$\boxed{\sigma_{kj} = \sigma_{jk}}$$

Remarque 10 : Supposons que l'on modifie l'hypothèse iii) p.31 en estimant que, pour bien représenter les efforts à distance sur  $\Sigma$  il faille ajouter à  $\vec{r}$  une densité volumique de couples  $\vec{\Gamma}$  (cf. polycopié I p.38), on trouverait au lieu de (77) :

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \Gamma_i = 0$$

ce qui entraînerait la non symétrie du tenseur des contraintes.

Dans ce cours, nous nous contenterons de la théorie simplifiée décrite précédemment qui est la plus classique et est suffisante pour le développement de la plupart des problèmes pratiques.

#### 2.4. Équations aux discontinuités.

Si nous appliquons maintenant la proposition 11 à l'équation (68) ; on obtient directement en tout point  $M$  d'une surface de discontinuité ( $\Sigma$ )

(79)

$$\boxed{[\![ \rho u \vec{v} ]\!] = [\![ \vec{T}(\vec{N}) ]\!]}$$

où, rappelons le  $\vec{N}$  est le vecteur unitaire normal à ( $\Sigma$ ) en  $M$  et  $u$  la composante normale de la vitesse relative du milieu par rapport à ( $\Sigma$ ).

35

Notons que l'application de la même proposition à (69) n'apporte rien de nouveau. L'équation (79) traduit donc toute information donnée par la conservation de la quantité de mouvement dans le cas d'une surface de discontinuité.

Si nous reprenons les deux cas introduits au paragraphe II. 5.3. p.25 on a :

a) Pour une surface de contact, compte tenu de (62), la continuité du vecteur contrainte  $\vec{T}(\vec{N})$  à la traverse de  $(\Sigma)$

$$(80) \quad \boxed{\boxed{\vec{T}(\vec{N})}} = 0$$

b) Dans le cas d'une onde de choc, où  $m$ , débit massique à travers  $(\Sigma)$  est continu à travers la surface de telle sorte que (79) se réduit à

$$(81) \quad m \boxed{\boxed{\vec{U}}} = \boxed{\boxed{\vec{T}(\vec{N})}}$$

où  $\vec{U}$  désigne la vitesse relative du milieu par rapport à  $(\Sigma)$  :  $\vec{U} = \vec{V} - \vec{W}$ , si  $\vec{W}$  est la vitesse du point M considéré comme appartenant à  $(\Sigma)$ . On peut donc énoncer "à travers un choc, la discontinuité du vecteur contrainte pour la direction normale est proportionnelle à la discontinuité de la vitesse relative, le facteur multiplicatif étant le débit massique  $m$ ".

## 2.5. Condition aux frontières.

Les considérations développées en II. 4.5. montrent que la théorie qui vient d'être exposée n'est valable que si les efforts exercés sur S sont bien définis d'une part par les forces volumiques  $\vec{f}$  déjà introduites et qui représentent des forces à distance et d'autre part par des forces de contact surfaciques définies à un instant  $t$  fixé par une densité surfacique  $\vec{F}$  en tout point P de  $\partial S$ . La condition aux frontières naturellement associées à la conservation de la quantité de mouvement s'écrit simplement d'après (53) p.25

$$(82) \quad \boxed{\vec{T}(P, \vec{n}) = \vec{F}(P)}$$

où  $\vec{n}$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\partial S$  en P orienté vers l'extérieur de S. Ceci s'écrit encore en composantes

$$(83) \quad \boxed{\sigma_{ij} n_j = F_i}$$

Si sur une partie de  $\partial S$ ,  $F_i = 0$  on dit que cette partie est libre.

Remarque 11 :

Notons que si les  $f_i$  sont en général des forces données, il n'en n'est pas nécessairement de même des  $F_i$ . Considérons par exemple une pièce cylindrique encastrée par une de ses bases. On peut supposer la pièce pesante, on a alors  $f = -\rho g \vec{e}_3$  ( $\vec{e}_3$  étant le vecteur unitaire de la verticale ascendante et  $g$  l'accélération de la pesanteur). La surface latérale peut être supposée libre :  $\vec{F} = 0$  sur cette face et par suite  $F$  est connu. Sur la base non encastrée, on peut supposer que l'on exerce certains efforts connus schématisés par une densité surfacique donnée  $F$  ; ainsi l'égalité (83) fournit sur toute la partie de la surface extérieur de la pièce qui n'est pas encastrée, des conditions auxquelles doit satisfaire le tenseur des contraintes (inconnu au départ). Par contre, les efforts d'encaissement (exercés en général par un massif supposé rigide sur la face plane encastrée de la pièce) sont inconnus. Lorsqu'on aura déterminé complètement le comportement mécanique de la pièce (en écrivant par exemple des conditions relatives à la vitesse :  $V = 0$  sur la face encastrée), et en particulier le tenseur des contraintes, l'égalité (83) permettra de calculer ces efforts, c'est-à-dire les réactions du massif sur la pièce. La connaissance de ces réactions est en général très importante car ce sont elles qui permettent de déterminer si l'encaissement peut résister aux efforts extérieurs donnés exercés sur la pièce.

2.7. Théorème des quantités de mouvement.

Ce théorème est une explication du résultat de mécanique générale qui a servi du point de départ à ce chapitre à savoir :

$$(84) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\rho \vec{v}}{\mathcal{D}} \right] = \left[ \tau \right]_{\partial \mathcal{D}} + \left[ \frac{f}{\mathcal{D}} \right]_{\partial \mathcal{D}}$$

qui est l'égalité entre torseurs traduite par (68) (69).

Mais on peut écrire

$$(85) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\rho \vec{v}}{\mathcal{D}} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho \vec{v}}{\mathcal{D}} \right] + \left[ \rho \vec{v} \vec{V} \cdot \vec{n} \right]_{\partial \mathcal{D}} ;$$

en effet ceci est vrai pour les résultantes des torseurs d'après (23) p.9 mais ceci l'est encore pour les moments si l'on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{v}) = \overrightarrow{OM} \wedge \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}).$$

Le théorème de la quantité de mouvement se traduit donc par l'égalité qui résulte de (84) et (85) :

$$(86) \quad \left[ \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} \right]_{\mathcal{D}} + \left[ (\rho \vec{v} \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}) \right]_{\partial\mathcal{D}} = :[\mathbf{T}]_{\partial\mathcal{D}} + [\mathbf{f}]_{\mathcal{D}}$$

Ce théorème est spécialement intéressant pour déterminer le torseur des efforts exercés par un milieu sur certaines parois solides.

Exemple 5 : Considérons un fluide entourant un solide fixe  $B$  et remplissant tout l'espace extérieur à  $B$  (cf. fig. 3) et supposons le mouvement du fluide stationnaire c'est-à-dire tel que toutes les dérivées partielles par rapport à  $t$  des quantités caractérisant les propriétés du fluide en mouvement soient nulles.

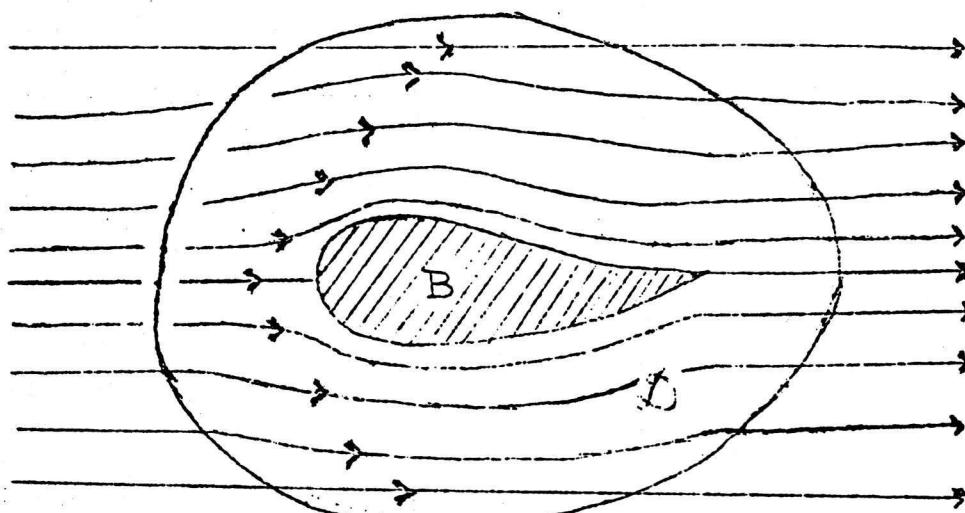


Fig. 3

Prenons pour  $\mathcal{D}$  le volume fluide limité par  $\partial B$  et par une surface quelconque  $\Sigma$  entourant le profil  $B$ . D'après III.2.5., le torseur des actions du fluide sur  $B$ , soit  $[\mathbf{f}]$ , qui est l'opposé du torseur des actions exercées par  $B$  sur le fluide au contact de  $B$ , s'écrit :

$$[\mathbf{f}] = - [\mathbf{T}]_{\partial B}$$

Par ailleurs, le mouvement du fluide étant stationnaire et le solide  $B$  fixe, on a sur  $\partial B$  d'après II.5.4.

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$$

(86) conduit alors à :

38

$$(87) \quad [f] = [f]_B + [T]_{\Sigma} - \rho \vec{v} (\vec{v}, \vec{n}) \mathbb{I}_{\Sigma} - \boxed{\dots} - [\epsilon v (\vec{v}, \vec{n})]_{\Sigma} = 0$$

Au second membre  $[f]$  est connu : il suffit donc de connaître les vitesses et les contraintes sur une surface  $\Sigma$  quelconque entourant  $B$  pour calculer l'action du fluide sur le solide  $B$ .

### 3 - Propriétés locales du tenseur des contraintes.

Nous nous proposons ici d'étudier le tenseur des contraintes en un point déterminé de  $S$ . Sans restreindre la généralité, nous pouvons prendre ce point comme origine de  $\vec{n}$  à l'instant considéré. Nous noterons simplement  $\vec{T}(n)$  le vecteur contraint pour la direction  $\vec{n}$  pour ce point et à cet instant.

Il s'agit pour l'essentiel d'appliquer les notions générales très classiques sur les tenseurs cartésiens symétriques du second ordre et de les compléter par quelques notions utiles dans l'étude des contraintes. On pourra donc se reporter, si nécessaire, aux développements correspondants du cours de calcul tensoriel (Module M<sub>11</sub> ou C<sub>1</sub> de la maîtrise de mécanique).

#### 3.1. Contrainte normale. Contrainte de cisaillement. Quadrique des contraintes.

Définition 12 : On appelle contrainte normale en un point pour la direction  $n$  le scalaire

(88)

$$T_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(n) = n_i \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij} n_i n_j$$

scalaire ?

$T_n$  apparaît alors comme la valeur de la forme quadratique.

$$(89) \quad Q(\vec{x}) = \mathcal{G}(\vec{x}, \vec{x}) = \sigma_{ij} x_i x_j$$

associée au tenseur  $\Sigma$ , (cf. calcul tensoriel II.4. p.10) pour le vecteur unitaire  $\vec{n}$ . On peut donc écrire :

(90)

$$T_n = Q(n)$$

ce qui donne une interprétation simple de la forme quadratique attachée au tenseur des contraintes.

C'est dit que le milieu subit (au point considéré) pour la direction  $\vec{n}$  une tension ou une compression selon que  $T_n$  est positif ou négatif.

Définition 11 : On appelle contrainte tangentielle dite encore contrainte de cisaillement ou plus simplement cisaillement ou scission, le vecteur :

(91)

$$\vec{T}_t(\vec{n}) = \vec{T}(\vec{n}) - \vec{n} \cdot T_n \vec{n}$$

vecteur ?

il appartient au plan normal à  $\vec{n}$  qui contient l'élément d'aire sur lequel s'exerce la contrainte  $\vec{T}$ .

Il est intéressant parfois d'avoir une représentation géométrique des vecteurs contraintes  $T$  quand  $\vec{n}$  varie d'où la définition :

Définition 12 : On appelle quadrique des contraintes en un point du milieu considéré la surface définie par :

(92)

$$\sigma_{ij} x_i x_j = \pm 1$$

(Le point considéré du milieu étant fixé et pris comme origine, les  $\sigma_{ij}$  sont des constantes et les  $x_i$  ne désignent plus les coordonnées d'Euler mais seulement les variables d'espace descriptives de la surface).

Soit  $P$  un point d'une telle quadrique, si l'on pose  $\vec{OP} = \lambda \vec{n}$ , on a

$$\lambda^2 Q(\vec{n}) = \pm 1 \text{ et donc d'après (90)}$$

$$\lambda^2 T_n = \pm 1 \text{ soit } \lambda = \pm |T_n|^{-1/2}$$

Si bien que la longueur  $\vec{OP}$  lorsque  $P$  décrit la quadrique est directement liée à la valeur de la contrainte normale au point considéré.

Si  $T_n$  a un signe constant quand  $P$  (ou  $\vec{n}$ ) varie, il existe une seule quadrique des contraintes au point considéré, il existe une seule quadrique des contraintes qui est alors une ellipsoïde. Si  $T_n$  est susceptible de changer de signe lorsque  $\vec{n}$  varie en un même point, alors (92) décrit alors l'ensemble de deux hyperboloides conjugués.

Exercice 3 : Montrer que  $\vec{T}(\vec{n})$  est normal au plan tangent à la surface passant par  $P$  et que  $|T| = (\lambda h)^{-1}$  si  $h$  est la distance de  $O$  à ce plan tangent.

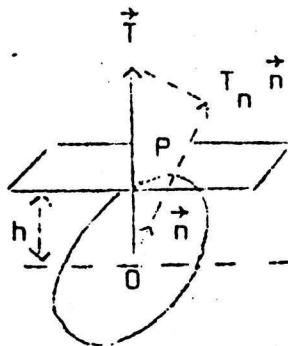


Fig. 4

## 3.2. Forme bilinéaire attachée au tenseur des contraintes. Relation de symétrie

Changement d'axes.

Si  $\mathcal{F}(x, y)$  désigne la forme bilinéaire associée à  $\Sigma$  en un point fixé (cf. calcul tensoriel p.10) alors la symétrie de  $\sigma_{ij}$  (cf. (78)) implique :

$$(93) \quad \mathcal{F}(\vec{n}, \vec{n}') = \mathcal{F}(\vec{n}', \vec{n}) = \vec{n} \cdot \vec{T}(\vec{n}) = \vec{n} \cdot \vec{T}(\vec{n}')$$

(équivalence algébrique)

Ainsi en un même point la projection du vecteur  $\vec{T}(\vec{n})$  sur  $\vec{n}'$  est égale à la projection de  $\vec{T}(\vec{n}')$  sur  $\vec{n}$ .

On sait que par ailleurs (cf. calcul tensoriel p.10) que :

$$(94) \quad \sigma_{ij} = \mathcal{F}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

cette relation va nous permettre d'opérer très simplement les changements de coordonnées pour  $\Sigma$ .

Soient en effet  $\vec{e}'_p$  les vecteurs unitaires d'un nouveau repère tels que :

$$\vec{e}'_p = P_{ip} \vec{e}_i, \quad \text{on a alors :}$$

$$\sigma'_{pq} = \mathcal{F}(\vec{e}'_p, \vec{e}'_q) = P_{ip} P_{jq} \mathcal{F}(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = P_{ip} P_{jq} \sigma_{ij}$$

## 3.3. Directions principales. Contraintes normales principales.

On sait (cf. clacul tensoriel p.23), grâce à la symétrie de  $\Sigma$  qu'il existe en chaque point du milieu matériel au moins un repère dit repère principal du tenseur des contraintes dans lequel la matrice représentant ce tenscuer est diagonale.

41

Les valeurs propres de  $\Sigma$  formant alors la diagonale sont appelées contraintes normales principales car pour les directions principales et seulement elles, la contrainte tangentielle est nulle.

$$\vec{r}(\vec{e}_i) = \sigma_i \vec{e}_i \quad (\vec{e}_i \text{ base principale})$$

### 3.4. Invariants scalaires du tenseur des contraintes.

Nous désignerons par :

$$(95) \quad \Sigma_1 = \sigma_{ii}, \quad \Sigma_{II} = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij}), \quad \Sigma_{III} = \det(\sigma_{ij})$$

les trois invariants élémentaires attachés au tenseur  $\Sigma$  (cf. calcul tensoriel p. 21) et nous découvrirons leur utilité au fur et à mesure de notre étude.

### 3.5. Déviateur des contraintes.

$$(96) \quad 3s = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \Sigma_I$$

Le tenseur sphérique associé au tenseur des contraintes  $\Sigma$  est donc :

$$(97) \quad \underline{\Sigma}^S = s \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{cf. calcul tensoriel p. 26})$$

et le déviateur des contraintes est

$$(98) \quad \underline{\Sigma}^D = \underline{\Sigma} - \underline{\Sigma}^S = (\sigma_{ij} - s \delta_{ij}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$\Sigma$  et  $\underline{\Sigma}^D$  ont mêmes directions principales et les valeurs propres de  $\underline{\Sigma}^D$  sont définies par :

$$(99) \quad s_i = \sigma_i - s$$

### 3.6. Cercles de Mohr.

Les quadriques des contraintes nous ont fourni une représentation géométrique complète du tenseur des contraintes ; les cercles de Mohr en donnent une image incomplète mais souvent très maniable.

Désignons par  $\vec{n}$  un vecteur unitaire de composantes  $n_i$  dans le repère principal du tenseur des contraintes au point O considéré, alors d'après (90)

$$(100) \quad T_n(\vec{n}) = \sigma_1 n_i^2 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Par ailleurs si  $T_t$  est le module de la contrainte tangentielle pour la direction  $\vec{n}$  alors :

$$(101) \quad T_t^2 + T_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

Posons nous le problème suivant :

Le tenseur contraintes en  $\Omega$  étant supposé connu, soit  $T_n$  et  $T_t$  deux nombres arbitraires avec  $T_t \geq 0$ . Existe-t-il une direction  $\vec{n}$  telle que les valeurs respectives en  $\Omega$  de la contrainte normale et du module de la contrainte tangentielle pour cette direction soient  $T_n$  et  $T_t$ ? La réponse est la suivante :

Il en sera ainsi si et seulement si on peut résoudre le système linéaire en  $n_1^2$ ,  $n_2^2$ ,  $n_3^2$  constitué par (100) (101) et

$$(102) \quad 1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 ,$$

les valeurs trouvées étant positives ou nulles.

Soient donc  $a$ ,  $b$ ,  $c$  trois constantes, arbitraires pour le moment, multiplions respectivement (101) (100) et (102) par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , si nous ajoutons les 3 relations obtenues en posant

$$f(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c, \text{ il vient}$$

$$(103) \quad f(\sigma_1) n_1^2 + f(\sigma_2) n_2^2 + f(\sigma_3) n_3^2 = f(T_n) + a T_t^2$$

Supposons d'abord  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  alors pour calculer  $n_1^2$ , il suffit de choisir pour  $f(\xi)$  le polynôme  $(\xi - \sigma_2)(\xi - \sigma_3)$  c'est-à-dire  $a = 1$ ,  $b = -(\sigma_2 + \sigma_3)$ ,  $c = \sigma_2 \sigma_3$  alors

$$(104) \quad n_1^2 = \frac{T_t^2 + (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

et l'on trouve pour  $n_2^2$  et  $n_3^2$  des expressions analogues obtenues en permutant 1.2.3 Reste à vérifier si les valeurs ainsi trouvées sont bien positives ou nulles. Pour fixer les idées, supposons :

$$(105) \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 ;$$

les inégalités suivantes doivent alors être satisfaites :

$$T_t^2 + (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) \geq 0$$

$$T_t^2 + (T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) \leq 0$$

$$T_t^2 + (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) \geq 0$$

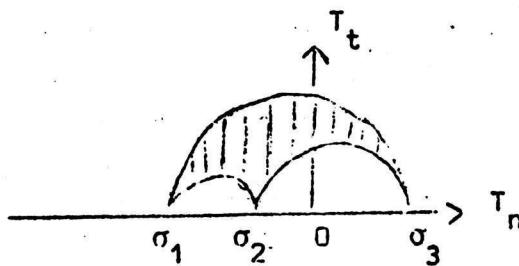


Fig. 5

Ces inégalités s'interprètent aisément dans le demi plan ( $T_n, T_t \geq 0$ ) : le point de coordonnées ( $T_n, T_t$ ) doit se trouver dans la région hachurée limitée par trois cercles appelés cercles de Mohr (cf. Fig. 5). Ces cercles admettant l'axe des  $T_n$  comme diamètre sont deux à deux tangents ; les abscisses de leurs points d'intersection avec l'axe des  $T_n$  sont précisément les valeurs des contraintes normales principales.

Si  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ , l'égalité (103) écrite pour  $f(\xi) = (\xi - \sigma_1)(\xi - \sigma_3)$  montre que le problème n'est possible que si

$$T_t^2 + (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_3) = 0,$$

le point figuratif dans le demi plan ( $T_n, T_t \geq 0$ ) doit donc être sur le cercle défini par cette équation.

Enfin si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = s$ , le problème n'admet de solution que si  $T_n = s$  et  $T_t = 0$ . Tension sphérique <sup>solides</sup> ~~solides~~ contrainte constante & direction ~~arbitraire~~.

### 3.7. Maximum de la contrainte tangentielle.

L'étude précédente est spécialement utile pour déterminer la valeur maximale de la contrainte tangentielle qui est la plus dangereuse pour les structures. Si  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$  alors

$$\text{Sup } |T_t| = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2},$$

La contrainte normale étant alors

$$T_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Cette valeur ( $T_n$ ,  $T_t$ ) étant atteinte pour les directions définies d'après (104) et les relations analogues en  $n_2^2$  et  $n_3^2$

$$(106) \quad n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad n_2^2 = 0$$

Ces directions sont celles des bissectrices de l'angle  $ox_1, ox_3$  formé par les deux directions principales correspondant à la plus grande et la plus petite des valeurs propres de  $\vec{\Omega}$  en 0.

Rémarque 12 : L'ordre des valeurs propres  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  n'est pas nécessairement le même en tous les points d'un même corps. La contrainte tangentielle maximum est alors donné par la formule plus générale.

(107)

$$\sup_{\substack{x \in S \\ n}} |\vec{T}_t| = \sup_{x \in S} \max_{(i,j) \subset \{1,2,3\}} \frac{|\sigma_i(x) - \sigma_j(x)|}{2}$$

### 3 - Exemples Remarquables.

#### 3.1. Tenseur des contraintes sphérique (Compression ou tension uniforme).

(cf. figure 6. a).

C'est le cas où, au point considéré le déviateur est nul : les propriétés suivantes caractérisent ce cas particulier :

- Le vecteur  $\vec{T}(M, \vec{n})$  est colinéaire à  $\vec{n}$ .
- La quadrique des contraintes est une sphère.
- Les contraintes normales principales sont égales

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = s$$

3.2. Tenseur des contraintes uniaxial (traction simple ou compression simple dans une direction) (cf. fig. 6. b).

Par définition le tenseur est uniaxial dans la direction des  $x_1$  si, au point considéré, toutes les composantes  $\sigma_{ij}$  sont nulles à l'exception de  $\sigma_{11}$ .

. Si  $\sigma_{11} > 0$   $\Sigma$  est un tenseur de traction simple

. Si  $\sigma_{11} < 0$   $\Sigma$  est un tenseur de compression simple.

On vérifie immédiatement que  $\vec{T}(n)$  est colinéaire à l'axe des  $x_1$  et que si  $\vec{n} \cdot \vec{e}_1 = 0$  alors  $\vec{T}(n) = 0$ .

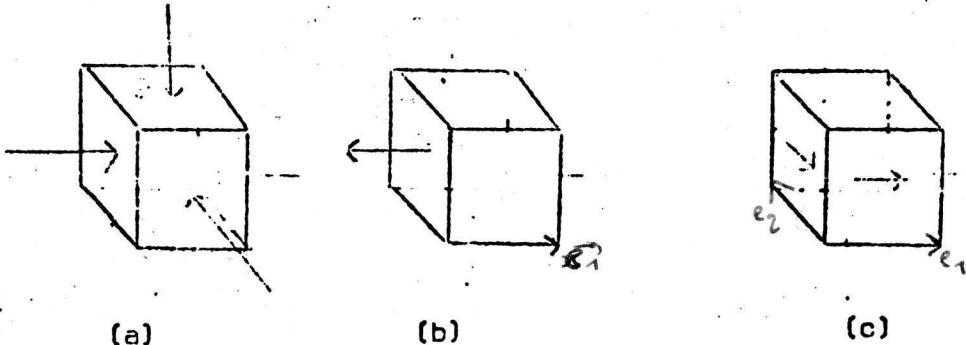


Fig. 6

Proposition : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tenseur des contraintes  $\Sigma$  soit uniaxial dans une direction et que ses deux derniers invariants élémentaires  $\Sigma_{II}$  et  $\Sigma_{III}$  soient nuls.

En effet dans un repère orthonormé admettant cette direction pour l'un des axes, la matrice image du tenseur est diagonale avec un seul terme non nul ; le polynôme caractéristique ayant deux racines nulles (cf. calcul tensoriel p. 21) est donc réduit à

$$-\sigma^2 (\sigma - \Sigma_1) = 0 \quad \text{d'où} \quad \Sigma_2 = 0 = \Sigma_3$$

3.3. Tenseur de cisaillement simple dans deux directions orthogonales.

Le tenseur  $\Sigma$  est un tenseur de cisaillement simple dans les directions  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  si tous les  $\sigma_{ij}$  sont nuls à l'exception de  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  (fig. 6. c).

Si  $\vec{n}$  est colinéaire à  $\vec{e}_3$ , on a donc  $\vec{T}(n) = 0$ .

Proposition 14 : Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Sigma$  soit un tenseur de cisaillement simple dans deux directions orthogonales et que son premier et son troisième invariant élémentaire soient nuls.

En effet dans un repère admettant le plan de cisaillement comme plan de coordonnées, tous les termes de la diagonale de la matrice image sont nulles ainsi que son déterminant ; le polynôme caractéristique se réduit donc à

$$-(\sigma^3 + \sum_{II} \sigma) = 0$$

et admet pour racines 0 et  $\pm \sqrt{\sum_{II}}$ .

Réciproquement si cette condition est satisfaite on montre aisément qu'il existe un repère tel que la matrice image soit de la forme  $\sigma_{ij} = 0$ , sauf  $\sigma_{1p} = \sigma_{p1}$  pour  $p \neq 1$ ,  $p$  et 1 fixés. Ce repère est obtenu à partir du repère principal pour une rotation de  $\pm \frac{\pi}{4}$  autour de l'axe  $ox_k$  ;  $k \neq p, k \neq 1$ .

#### 3.4. Tenseur des contraintes planes.

Le tenseur  $\Sigma$  est un tenseur de contraintes planes dans le plan  $x_3 = 0$ , si :

$$(108) \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (= \sigma_{11} = \sigma_{22} \text{ car } \sigma_{33} = \sigma_{22} !)$$

Si  $\vec{n}$  est colinéaire à  $\vec{e}_3$  alors  $\vec{T}(n) = 0$  et tout vecteur contrainte est parallèle au plan  $x_3 = 0$ .

Proposition 15: Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Sigma$  soit un tenseur de contraintes planes et que son déterminant  $\Sigma_{III}$  soit nul.

En effet dans un repère admettant le plan de contrainte comme plan de coordonnées, il est clair puisque 1 ligne (et une colonne) est nulle que le déterminant l'est. Inversement si  $\Sigma_{III} = 0$ , le polynôme caractéristique est réduit à

$$-\sigma (\sigma^2 - \sum_I \sigma + \sum_{II}) = 0$$

ce qui montre que l'une au moins des contraintes normales principales est nulle, soit  $\sigma_1$  et sous la forme diagonale le tenseur satisfait donc

$$\sigma_{11} = \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 \quad \text{c.q.f.d.}$$

#### 3.5. Combinations linéaire de tenseur des contraintes.

Vu le caractère linéaire de la transformation  $n \rightarrow \vec{T}(M, n)$ , on peut, étant donné deux tenseurs de contraintes en  $M$ , considérer le tenseur des contraintes obtenu par superposition ou plus généralement par combinaison linéaire.

Ainsi le tenseur  $\Sigma$  peut toujours être considéré comme le résultat de la ~~la~~ superposition de trois tractions ou compressions simples dans les directions principales.

Le cisaillement simple dans les directions  $ox_1$  et  $ox_2$  peut être considéré comme la superposition d'une traction dans la direction  $ox'_1$ , et d'une compression d'intensité opposée dans la direction  $ox'_2$ ,  $ox'_1$  et  $ox'_2$  étant dirigés suivant les bissectrices de  $(ox_1, ox_2)$ .

-----

## CHAPITRE IV : DEFORMATION - VITESSE DE DEFORMATION.

### 1 - Objet du chapitre.

. Pour obtenir l'ensemble des équations et des conditions qui permettent de décrire et de prévoir l'évolution d'un système en mouvement, il faut compléter l'information donnée par les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement avec :

D'une part, la loi de conservation de l'énergie que nous étudierons au chapitre suivant.

D'autre part des lois explicitant le comportement des différents milieux, lesquelles seront évoquées à la fin de ce cours et reprises en détail dans les enseignements respectifs de mécanique des fluides et des solides.

Pour parler de lois de comportement, il faut cependant au préalable avoir fini toutes les notions de bases nécessaires :

L'introduction du tenseur des contraintes nous a déjà permis d'écrire, grâce aux deux premières lois de conservation, certaines relations existant entre les efforts extérieurs appliqués à un système S et les contraintes intérieures qui en résultent (cf. (74) ou (76) et (83)).

A leur tour ces contraintes intérieures provoquent des déplacements, à priori différents pour chaque particule, ce qui engendre une déformation du système S. C'est donc à la manière de caractériser la déformation d'un milieu continu, que nous nous intéresserons dans le présent chapitre.

Dans le paragraphe 2, nous mettrons en évidence les notions mathématiques caractérisant les allongements, dilatations, rotations à l'ordre infinitesimal. Cela nous permettra de définir au paragraphe 3 le tenseur des déformations pour lequel nous donnerons entr'autre une expression linéarisée dans le cas des petites perturbations. Le tenseur des taux de déformations introduit au paragraphe 5 sera nous le justifions, un bon outil pour caractériser la déformation de certains milieux et en particulier des fluides. Enfin, un rappel de calcul tensoriel, joint à ces nouvelles notions, nous montrera l'utilité des équations de comptabilité en mécanique des milieux continus et nous donnera une méthode pratique d'intégration pour déterminer les déplacements ou les vitesses à partir respectivement du tenseur des déformations linéarisées ou de celui des taux de déformation.

### 2 - Transformation linéaire tangente.

#### 2.1. Introduction.

On dira que l'on peut décrire la déformation d'un milieu continu en  $M_0$  entre les instants 0 et t si, étant donnés deux vecteurs infinitésimaux quelconques

$\vec{dM}_0$  et  $\vec{\delta M}_0$  d'origine  $M_0$ , à l'instant  $t_0$ , on peut calculer les longueurs ( $dM_i$ ) et  $\vec{dM}_t$  et l'angle ( $dM_t$ ,  $\delta M_t$ ) des vecteurs correspondants à l'instant  $t$ . (En fait les vecteurs  $dM_0$  et  $\delta M_0$  se sont déformés entre les instant 0 et  $t$  et l'on assimile leur déformée respective à un nouveau vecteur infinitesimal).

Reprendons donc la description lagrangienne p. 4 :

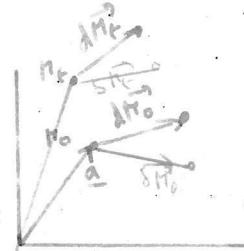
$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{a}, 0, t) = \underline{\phi}(\underline{a}, t)$$

et posons, comme à la page 9

$$(109) \quad F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} = \phi_{i,\alpha}$$

On a alors :

$$(110) \quad dx_i = F_{i\alpha} da_\alpha ;$$



La matrice Jacobienne  $F$  est l'image dans le repère choisi, de l'application linéaire tangente qui au vecteur infinitesimal  $\vec{dM}_0$  de composantes  $da_\alpha$  associe le vecteur.

$$(111) \quad \vec{dM}_t = \underline{F}(\underline{a}, t) \vec{dM}_0 \quad \text{de composantes } dx_i. \Rightarrow F(a, 0) = 1$$

Cette application, définie en chaque point, est donc représentée par un champ de tenseur  $\underline{F}$  appelés tenseur gradient de la déformation en un point.  $t$  étant impposé fixe, nous nous débarasserons de l'indice  $t$  pour alléger les notations : nous avons alors :

$$(112) \quad \vec{dM} \cdot \vec{\delta M} = dx_i \delta x_i = F_{i\alpha} da_\alpha F_{i\beta} \delta a_\beta ,$$

soit en posant :

$$(113) \quad C_{\alpha\beta} = F_{i\alpha} F_{i\beta} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}$$

$(\underline{F}^T = \text{transposée de } \underline{F})$ ; cf. calcul tensoriel p. 2

$$(114) \quad \vec{dM} \cdot \vec{\delta M} = C_{\alpha\beta} da_\alpha \delta a_\beta = d^n \underline{C} \vec{dM}$$

2.2. Calcul de l'allongement relatif de  $|\vec{dM}|$  entre les instants 0 et t.

Posons

$$(115) \quad \left[ \begin{array}{l} ds^o = |\vec{dM}^o| \quad \text{et} \quad \vec{n}^o = \frac{\vec{dM}^o}{|\vec{dM}^o|}, \\ ds = |\vec{dM}| \quad \text{et} \quad \vec{n} = \frac{\vec{dM}}{|\vec{dM}|} \end{array} \right]$$

et supposons  $\vec{dM}^o = \vec{dM}$ ; alors nous obtenons à partir de (114)

$$(ds)^2 = C_{\alpha\beta} n^\alpha_\alpha n^\beta_\beta (ds^o)^2$$

$F$  est non dégénéré ( $\det F \neq 0$ ) puisque  $F$  admet une fonction réciproque (cf p 5)

$C$  est donc symétrique, non dégénéré et positif (cf. calcul tensoriel p. 27, lemme 1) ainsi

$$(116) \quad \left( \frac{ds}{ds^o} \right)^2 = C(\vec{n}^o) = \lambda^2(\vec{n}^o)$$

en désignant par  $C$  la forme quadratique associée à  $C$  et en posant :

$$(117) \quad \lambda(\vec{n}^o) = +\sqrt{C(\vec{n}^o)} = \sqrt{C_{\alpha\beta} n^\alpha_\alpha n^\beta_\beta},$$

$\lambda(\vec{n}^o)$  est la dilatation en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}^o$  et

$$(118) \quad \delta(\vec{n}^o) = \lambda(\vec{n}^o) - 1 = \frac{ds - ds^o}{ds^o}$$

est l'allongement unitaire en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}^o$ .

$\bar{C}(a)$  est appelé le tenseur des dilatations en  $a$ .

2.3. Calcul de l'angle  $(\vec{dM}, \vec{dM})$  connaissant  $\theta_0 = (\vec{dM}_0, \vec{dM}_0)$ .

$$(119) \quad \vec{dM} \cdot \vec{dM} = \cos \theta_0 |\vec{dM}| |\vec{dM}| \quad \text{d'où}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{dM} \cdot \vec{\delta M}}{|\vec{dM}| |\vec{\delta M}|} = \frac{c_{\alpha\beta} da_\alpha \delta a_\beta}{ds ds} = \frac{c_{\alpha\beta} n^\alpha_\alpha v^\beta_\beta}{ds ds} \delta s^\circ$$

en posant  $\delta s = |\vec{\delta M}|$ ,  $\delta s^\circ = |\vec{\delta M}_0|$ ,  $\vec{v}^\circ = \frac{\vec{\delta M}_0}{|\vec{\delta M}_0|}$  et  $\vec{v} = \frac{\vec{\delta M}}{|\vec{\delta M}|}$  ; ainsi

$$(120) \quad \cos \theta = \frac{c_{\alpha\beta} n^\alpha_\alpha v^\beta_\beta}{\lambda(\vec{n}^\circ) \lambda(\vec{v}^\circ)} = \frac{\mathcal{C}(\vec{n}^\circ, \vec{v}^\circ)}{\lambda(\vec{n}^\circ) \lambda(\vec{v}^\circ)}$$

$\mathcal{C}(\vec{n}^\circ, \vec{v}^\circ)$  étant la forme bilinéaire associée à  $\mathbb{C} : \mathcal{C}(\vec{n}, \vec{v}) = \vec{n}^\circ \cdot \vec{v}^\circ$

### Remarques 13 :

i) Nous avons vu que  $\lambda(\vec{n}^\circ)$  représente la dilatation en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}^\circ$ , si le corps se déplace sans se déformer alors :  $\lambda(\vec{n}) = 1$   $\forall \vec{n}$  ; ceci s'écrit encore :

$$c_{\alpha\beta} n^\alpha_\alpha n^\beta_\beta = 1 \quad \forall \vec{n} \text{ c'est-à-dire}$$

$$c_{\alpha\beta} n^\alpha_\alpha n^\beta_\beta = \delta_{\alpha\beta} n^\alpha_\alpha n^\beta_\beta \quad \forall \vec{n}$$

soit

$$(c_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) n^\alpha_\alpha n^\beta_\beta = 0 \quad \forall \vec{n}$$

$$\text{d'où finalement } \mathbb{C} = 1$$

$\mathbb{C}$  caractérise donc bien la dilatation.

ii) Si l'on écrit à partir de (120)

$$(121) \quad \frac{\pi}{2} - \theta = \text{Arc sin} \frac{c_{\alpha\beta} n^\alpha_\alpha v^\beta_\beta}{\lambda(\vec{n}^\circ) \lambda(\vec{v}^\circ)}$$

on voit que le premier membre de (121) représente, si  $\vec{n}^\circ$  et  $\vec{v}^\circ$  sont orthogonaux, la variation de l'angle formé par ces deux directions, orthogonales dans leurs positions de référence ( $t=0$ ) lorsqu'on les considère à l'instant  $t$ . Ainsi :

$\frac{\pi}{2} - \theta$  caractérise le glissement des deux directions orthogonales  $\vec{n}^\circ, \vec{v}^\circ$ .

On posera en général :

$$\gamma(\vec{n}^\circ, \vec{v}^\circ) = \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \sin \frac{c_{\alpha\beta} n^\circ_\alpha v^\circ_\beta}{\lambda(\vec{n}^\circ) \lambda(\vec{v}^\circ)}$$

et  $\gamma(\vec{n}^\circ, \vec{v}^\circ)$  sera appelé glissement moyen de ces deux directions en  $M_0$ . On aura ainsi par exemple si les  $\vec{k}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont les vecteurs unitaires du repère choisi

$$\gamma(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \sin \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}} \sqrt{c_{22}}}$$

$$\text{soit } \sin 2\gamma = \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}} \sqrt{c_{22}}}$$

$\epsilon$  caractérise donc encore le glissement.

### 3 - Tenseur des déformations.

#### 3.1. Définition.

La remarque 13 i) nous incite à poser

$$(122) \quad x_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (c_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \text{ soit encore } \underline{x} = \frac{1}{2} (\underline{c} - \underline{\delta})$$

ce qui entraîne en particulier.

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + 2 x_{\alpha\beta} n^\circ_\alpha v^\circ_\beta}{\lambda(\vec{n}^\circ) \lambda(\vec{v}^\circ)}$$

(casel (p))

Si le tenseur  $\underline{x}$  (a) de composantes  $x_{\alpha\beta}$  dans le repère  $R$  est nul, alors

i) d'une part, les allongements unitaires en  $M_0$  sont nuls dans n'importe quelle direction puisque  $\tilde{\ell}(a) = \tilde{\ell}$  implique  $ds = ds^\circ$  et  $\lambda(\vec{n}^\circ) = 1 \quad \forall \vec{n}^\circ$ .

ii) d'autre part  $\cos \theta = \cos \theta_0$  ce qui, par raison de continuité, implique  $\theta = \theta_0$ .

Il n'y a donc aucune de déformation en a et pour cette raison  $\underline{x}$  est appelé tenseur des déformations.

Remarque 14 :  $\mathfrak{X}$  dérive d'une description de Lagrange, ses composantes sont d'ailleurs exprimées à l'aide d'indices grecs ; pour la distinguer d'autres tenseurs des déformations que l'on aurait pu introduire, on l'appelle quelquefois tenseur des déformations de Lagrange ou de Green.

### 3.2. Directions principales de déformation.

Les tenseurs  $C(a)$  et  $\mathfrak{X}(a)$  sont symétriques donc possèdent un repère principal orthonormé et trois valeurs propres réelles (cf. calcul tensoriel p. 23). Il est immédiat de voir que les directions principales sont les mêmes pour les deux tenseurs, on les appelle directions principales de déformation en  $a$ .

Soit donc  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  les vecteurs unitaires d'un repère principal de déformation en  $a$ . Les valeurs propres correspondantes de  $\mathfrak{C}(a)$  sont  $\lambda^2(\vec{e}_1), \lambda^2(\vec{e}_2), \lambda^2(\vec{e}_3)$ . En effet : ceci est un résultat général sur les tenseurs, soit  $\vec{u}$  un vecteur propre unitaire pour le tenseur  $\mathfrak{C}$  et  $\rho$  la valeur propre correspondante alors :

$$\vec{u}^\top \mathfrak{C} \vec{u} = \vec{u}^\top \rho \vec{u} = \rho = Q(\vec{u}), \text{ valeur en } \vec{u} \text{ de la forme quadratique associée à } \mathfrak{C}.$$

Ici, d'après (116), on a bien  $\lambda^2(\vec{e}_i) = C(\vec{e}_i) = \text{valeur propre de } \mathfrak{C} \text{ associée à la direction principale } \vec{e}_i$  d'où la

Définition 15 :  $\lambda(\vec{e}_1), \lambda(\vec{e}_2), \lambda(\vec{e}_3)$  sont appelées dilatations principales en  $M_a$ , ce sont les longueurs respectives des vecteurs  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$  transformés de  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  dans la déformation entre les instants 0 et  $t$ .

Si nous choisissons encore  $\vec{d}_{M_0} = \vec{e}_i$  et  $\vec{d}_{M_t} = \vec{e}_j$  ( $i \neq j$ ) dans (120), nous trouvons :

$$\cos \theta = \frac{\lambda^2(\vec{e}_j) \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i}{\lambda(\vec{e}_i) \lambda(\vec{e}_j)} = 0 \quad \text{puisque } \vec{e}_i, \vec{e}_j \text{ sont orthogonaux}$$

ce qui montre que le repère  $(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3)$  est encore un repère orthogonal.

Les valeurs propres de  $\mathfrak{X}$  en  $M_a$  sont :

$$(123) \quad x_i = \frac{1}{2} (\lambda^2(\vec{e}_i) - 1),$$

et d'après (116)

$$(124) \quad \frac{(ds)^2 - (ds^0)^2}{(ds^0)^2} = 2x_i \quad \text{dans la direction } \vec{e}_i$$

Si  $x_i > 0$  on a donc une dilatation en  $M_a$  pour la direction  $\vec{e}_i$ , et si  $x_i < 0$  on a une contraction en  $M_a$  pour la direction  $\vec{e}_i$ .

3.3. Expression du tenseur des déformations en fonction du déplacement et linéarisation.

Si l'on introduit le vecteur déplacement  $\vec{U}(M_0)$  de la particule qui était en  $M_0$  à l'instant  $t = 0$ , on a

$$(125) \quad u_i = x_i - a_\alpha \delta_{\alpha i} ;$$

ainsi :

$$F_{i\beta} = x_{i,\beta} = u_{i,\beta} + a_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha i} = u_{i,\beta} + \delta_{i\beta} \quad (\text{car } a_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha\beta})$$

et

$$C_{\alpha\beta} = F_{i\alpha} F_{i\beta} = (u_{i,\alpha} + \delta_{i\alpha})(u_{i,\beta} + \delta_{i\beta}) = \delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta}$$

d'où finalement

$$(126) \quad \boxed{x_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta}]}$$

Le tenseur des déformations s'exprime donc de façon non linéaire par rapport aux dérivées Lagrangiennes du déplacement.

Cependant, dans de nombreux cas de mécanique des solides, les déplacements  $\vec{U}$  varient très lentement lorsqu'on passe d'un point  $M_0$  à un autre ; dans ce cas, les  $u_{i,\alpha}$  sont petits et l'on peut négliger dans (126) les termes quadratiques ; on obtient alors le tenseur des déformations linéarisé.

$$(127) \quad \boxed{x_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}]}$$

utilisé en particulier en élasticité classique.

Si l'on désigne de façon générale par  $\overset{\rightarrow}{\mathcal{E}}(U)$  l'opérateur différentiel, partie symétrique du tenseur grad  $U$  (cf. calcul tensoriel p. 30), on a

$$x_{\alpha\beta} = \overset{\rightarrow}{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}(U)$$

4 - Tenseur des vitesses (ou taux) de déformation.

Il existe des milieux à mémoire infiniment courte qui oublient en quelque sorte l'histoire qu'ils ont subie dans le passé pour ne retenir que la déformation entraînée par le se produire ; les fluides par exemple appartiennent à cette catégorie et comme les déplacements de leur particule ne pourront être considérés comme variant lentement, on aura avantage dans ce cas à caractériser la déformation par la variation instantanée du produit scalaire  $\vec{dM} \cdot \vec{\delta M}$  ; étudions donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{dM} \cdot \vec{\delta M}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{dM} \right) \cdot \vec{\delta M} + \vec{dM} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{\delta M} \right).$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{dM} \right)_i = \frac{\partial}{\partial t} dx_i = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} da_\alpha \right] = \frac{\partial v_i}{\partial a_\alpha} da_\alpha = dv_i$$

ainsi  $\frac{\partial}{\partial t} (\vec{dM} \cdot \vec{\delta M}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \delta x_i + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx_i \delta x_j$

$$= \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx_j \delta x_i = 2 \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx_j \delta x_i$$

Si bien que le tenseur  $\epsilon(\vec{v})$  qui caractérise la vitesse des déformations est appelé tenseur des vitesses (ou taux) de déformation ; ceci se justifie d'autant plus que  $\epsilon(\vec{v}) = 0$  correspond (nous l'avons vu en calcul tensoriel p.32) au champ de vitesse d'un solide indéformable. Les composantes de ce tenseur des taux de déformations sont données par

(128)

$$\epsilon_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

5 - Détermination des champs de déplacement ou de vitesse.

5.1. Relation de compatibilité.

Nous avons vu en calcul tensoriel (p.34) une condition nécessaire et suffisante pour que 6 fonctions scalaires  $D_{ij}$ , telles que  $D_{ij} = D_{ji}$ , soient les composantes de la partie paire d'un tenseur grad  $\vec{x}$ , c'est-à-dire pour qu'il existe au moins un champ de vecteur  $\vec{X}$  tel que

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (x_{i,j} + x_{j,i})$$

cette condition s'exprime de façon pratique par 6 relations scalaires

$$(129) \quad \Delta D_{ij} + D_{11,ij} - D_{ii,1j} + D_{j1,li} = 0$$

appelées relations de compatibilité.

Ces relations en mécanique des milieux continus nous assureront donc l'<sup>existence</sup> d'un champ de déplacement  $\vec{U}$  ou d'un champ de vitesse  $\vec{V}$  à partir des données respectives d'un champ de tenseur possible de déformation  $\vec{\epsilon}$  ou de taux de déformation  $\vec{\xi}$ .

Il n'y aura pas unicité mais  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  pourront être déterminés à un champ de moment arbitraire près ; ce champ de moment nous importera peu pour l'étude des déformations pures car pour l'intégration de  $\epsilon_{\alpha\beta}$  il correspondra à un champ de déplacement de solide indéformable (cf. paragraphe 3.1. p.52) et pour celle de  $\epsilon_{ij}$  à un champ de vitesse de solide (cf. paragraphe 4 ci-dessus).

### 5.2. Méthode pratique d'intégration pour $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ .

Supposons donc donnés 6 fonctions  $\epsilon_{ij}$  telles que  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$  et vérifiant les relations de compatibilité, le champ de vecteurs correspondant, déplacement ou vitesse est obtenu ainsi

$$u_{1,1} = \epsilon_{11} \Rightarrow u_1(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} \epsilon_{11}(\xi, x_2, x_3) d\xi + \varphi_1(x_2, x_3)$$

$$u_{2,2} = \epsilon_{22} \Rightarrow u_2(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_2} \epsilon_{22}(x_1, \xi, x_3) d\xi + \varphi_2(x_3, x_1)$$

$$u_{3,3} = \epsilon_{33} \Rightarrow u_3(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_3} \epsilon_{33}(x_1, x_2, \xi) d\xi + \varphi_3(x_1, x_2)$$

$$u_{1,2} + u_{2,1} = 2\epsilon_{12} \Rightarrow \varphi_{1,2}(x_2, x_3) + \varphi_{2,1}(x_3, x_1) = F_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$u_{2,3} + u_{3,2} = 2\epsilon_{23} \Rightarrow \varphi_{2,3}(x_1, x_3) + \varphi_{3,2}(x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$u_{3,1} + u_{1,3} = 2\epsilon_{13} \Rightarrow \varphi_{3,1}(x_1, x_2) + \varphi_{1,3}(x_2, x_3) = F_2(x_1, x_2, x_3)$$

les  $F_1, F_2, F_3$  étant connus.

L'astuce consiste alors à chercher un vecteur aussi simple que possible  $\vec{n}_i(x_j, x_k)$ ,  $i \neq j \neq k$  tel que si l'on pose :

$$g_1(x_2, x_3) = \varphi_1(x_2, x_3) + n_1(x_2, x_3)$$

$$g_2(x_3, x_1) = \varphi_2(x_3, x_1) + n_2(x_1, x_3)$$

$$g_3(x_1, x_2) = \varphi_3(x_1, x_2) + n_3(x_1, x_2)$$

alors

$$g_{i,j} + g_{j,i} = 0$$

Nous savons alors que  $\vec{g}$  est un champ de moment [cf. calcul tensoriel p.32] et comme, nous l'avons vu, la solution générale  $u$  ne peut être connue qu'à un champ de moment près, il n'est pas nécessaire d'expliciter  $\vec{g}$ . Ainsi :

$$u_1(\underline{x}) = \int_0^{x_1} \varepsilon_{11}(\xi, x_2, x_3) d\xi - n_1(x_2, x_3) + g_1(x_2, x_3)$$

$$u_2(\underline{x}) = \int_0^{x_2} \varepsilon_{22}(x_1, \xi, x_3) d\xi - n_2(x_3, x_1) + g_2(x_3, x_1)$$

$$u_3(\underline{x}) = \int_0^{x_3} \varepsilon_{33}(x_1, x_2, \xi) d\xi - n_3(x_1, x_2) + g_3(x_1, x_2)$$

Si des conditions aux limites sont données, il suffit alors de se rappeler que la forme générale d'un champ de moment est

$$\vec{g}(\underline{x}) = \vec{g}(0) + \vec{\Omega} \wedge \underline{x}_j \vec{k}_i = (g_i + \varepsilon_{ijk} \Omega_j \underline{x}_k) \vec{k}_i$$

les  $g_i$  et  $\Omega_i$  étant des constantes.

## CHAPITRE V : PUISSEANCE DES EFFORTS INTERIEURS. CONSERVATION DE L'ENERGIE.

### 1 - Objet du chapitre.

Il s'agit maintenant d'exprimer la troisième loi de conservation qui s'applique à un milieu continu en mouvement : "la conservation de l'énergie". Pour formuler et exploiter cette loi, il est nécessaire au préalable de définir la puissance et le travail des efforts intérieurs, tel sera l'objet du paragraphe suivant. Le troisième paragraphe sera consacré à la loi de conservation de l'énergie : encore faudra-t-il commencer par introduire des notions nouvelles comme l'énergie interne ou la chaleur reçue par une partie du système. Une fois la loi énoncée, il sera aisé grâce à l'étude du chapitre II d'en dégager les principales conséquences.

### 2 - Puissance des efforts intérieurs et théorème de l'énergie cinétique.

Il va être assez naturel d'évaluer la puissance développée par les efforts intérieurs comme la différence entre la puissance des quantités d'accélération et la puissance des efforts extérieurs de telle sorte que pour un solide rigide on retrouve bien que cette puissance des efforts intérieurs est nulle ; ainsi :

$$(129) \quad P_{(i)} = \int_S \rho \vec{y} \cdot \vec{v} dv - \int_S \vec{f} \cdot \vec{v} dv - \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{v} d\sigma$$

Nous allons transformer le second membre de cette relation de façon à l'exprimer réellement en fonction des contraintes intérieures.

Compte tenu des équations du mouvement (74) et des conditions aux limites (83) on obtient :

$$P_{(i)} = \int_S \sigma_{ij,j} v_i dv - \int_{\partial S} \sigma_{ij} v_i n_j d\sigma$$

Si nous supposons  $\sigma_{ij}$  et  $v_i$  continûment dérивables dans  $S$ , on peut appliquer à l'intégrale de surface le théorème de la divergence (cf. p. 18), dans ce cas on a alors :

$$P_{(i)} = \int_S \sigma_{ij,j} v_i dv - \int_S (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dv$$

$$= - \int_S \sigma_{ij} v_{i,j} dv$$

Mais en vertu de la symétrie des quantités  $\sigma_{ij}$ , on a encore

$$\sigma_{ij} v_{i,j} = \sigma_{ij} \frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2} = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \vec{v}$$

où  $\epsilon_{ij} \vec{v}$  désignent les composantes du tenseur des taux de déformation introduit au chapitre précédent (cf. p. 55) ; en effet, la partie anti-symétrique de  $v_{i,j} - v_{j,i}$  donne une contribution nulle (cf. calcul tensoriel p. 31), à savoir  $\frac{v_{i,j} - v_{j,i}}{2}$  dans le produit par  $\sigma_{ij}$  ainsi

(130)

$$\mathcal{P}_{(i)} = - \int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \vec{v} dv$$

sera par définition la puissance des efforts intérieurs dans une partie  $\Omega$  de  $S$  dans le cas où le champ de contrainte  $\Sigma$  et le champ de vitesse  $V$  sont supposés continûment dérivable dans  $\Omega$ .

Dans le cas où les  $\sigma_{ij}$  et  $v_i$  sont continûment dérivable par morceaux seulement, on décompose le domaine en  $p$  sous domaines dans lesquels les quantités sont continûment dérivable et les techniques habituelles (cf. p. 13) conduisent alors à

(131)

$$\mathcal{P}_{(i)} = - \int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \vec{v} dv + \sum_1 \left[ \int_{\Sigma_1} T_i(\vec{N}) v_i \right] ds$$

les  $\Sigma_1$  désignent les surfaces de discontinuité séparant les différents sous-domaines, et  $\left[ \cdot \right]$  les sauts à travers ces surfaces des quantités concernées.

Le théorème de l'énergie cinétique s'obtient en notant que grâce à la propriété de dérivation particulière d'une intégrale prise par rapport à une distribution de masse (cf. p. 26)

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dv = \int_S \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \rho dv = \frac{1}{2dt} \int_S \rho v^2 dv$$

d'où, compte tenu de (129), l'expression du théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dT(S)}{dt} = P_{(e)} + P_{(i)} \quad \text{où } T(S) = \int_S \frac{1}{2} \rho v^2 dv \text{ est l'énergie cinétique}$$

(130)

$P_{(e)}$  et  $P_{(i)}$  désignant les puissances des efforts extérieurs et intérieurs

$$P_{(e)} = \int_S \vec{f} \cdot \vec{v} dv + \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{v} dv$$

$$P_{(i)} = - \int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij} (\vec{v}) dv$$

### 3 - Conservation de l'énergie.

#### 3.1. Enoncé.

La troisième loi de conservation de la mécanique des milieux continus exprime la conservation de l'énergie et constitue le premier principe de la thermodynamique qui s'énonce ainsi :

Premier principe : A chaque instant, la dérivée partielle de l'énergie  $\mathcal{E}$  d'un système est la somme de la puissance des efforts exercés sur le système  $P_{(e)}$  et du taux de chaleur reçue par le système  $Q$ .

Cet énoncé est valable pour toute partie  $D$  d'un système  $S$  et nécessite quelques précisions et définitions.

Energie : par définition, l'énergie  $\mathcal{E}$  est la somme de l'énergie cinétique  $T$  et de l'énergie interne  $E$  ; celle-ci pouvant être définie par une énergie interne spécifique (ou massique)  $e(x,t)$ .

Ainsi pour une partie  $D$  de  $S$  nous avons

$$(131) \quad \mathcal{E}(D) = T(D) + E(D) = \int_D \rho(e + \frac{v^2}{2}) dv$$

Taux de chaleur reçue : par analogie avec les hypothèses faites pour les efforts extérieurs, il est normal de supposer que la chaleur reçue par un système est due à des effets de transfert à travers la frontière - c'est la chaleur reçue par conduction - et éventuellement à des actions à distance. Ainsi pour une partie  $D$  de  $S$

$$(132) \quad Q(D) = \int_{\partial D} q d\sigma + \int_D r dv ;$$

où  $q$  est une densité surfacique de taux de chaleur reçue (par conduction à travers  $\partial\Omega$ ) supposé dépendre de  $x, t$  et  $\vec{n}$  vecteur unité de la normale extérieure à  $\partial\Omega$  :  $q(x, t, \vec{n})$ .

$r$  est une densité volumique définissant un taux de chaleur fourni à  $\Omega$  par des systèmes extérieurs à  $S$  (rayonnement, réactions chimiques). Nous supposerons souvent  $r = 0$  mais en général  $r$  dépendra de  $x$  et  $t = r(x, t)$ .

Si  $Q = 0$ , on dit que l'évolution du milieu est *adiabatique*.

La loi de conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$(133) \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P}_{(e)} + \dot{Q}$$

ou, plus explicitement :

$$(134) \quad \frac{d}{dt} \int \rho (e + \frac{v^2}{2}) dv = \int_{\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{V} + r) dv + \int_{\partial\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{V} + q) d\sigma$$

Il s'agit bien d'une loi de conservation de type (22) si l'on pose :

$$(135) \quad \mathcal{C}_e = \rho (e + \frac{v^2}{2})$$

$$\alpha = -(\vec{T} \cdot \vec{V} + q) = -(V_i \sigma_{ij} n_j + q)$$

$$A = \vec{f} \cdot \vec{V} + r$$

### 3.2. Vecteur courant de chaleur.

La quantité  $\alpha$  dépend de  $\vec{n}$  ; la proposition 9 p. 23, compte tenu de la remarque 6 p. 25, nous indique qu'en fait elle est une fonction linéaire des composantes  $n_i$  par suite il en est de même de  $q$  et l'on peut poser

$$q(x, t, \vec{n}) = \underline{-q_i(x, t) n_i}$$

$\vec{q}(x, t)$  est appelé : vecteur courant de chaleur.

### 3.3. Équation aux dérivées partielles.

L'équation (46) prend ici la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho (e + \frac{v^2}{2}) + (\rho V_1 (e + \frac{v^2}{2}) - V_j \sigma_{ij} + q_i)_{,i} = f_1 V_1 + r$$

En fait on peut simplifier cette relation en tenant compte du théorème de l'énergie cinétique ; soustrayons en effet (130) de (133), il vient compte tenu de (131)

$$\frac{dE}{dt} = Q - \oint_{\Gamma} \quad (i)$$

qui, après transformation de l'intégrale de surface de (134) en intégrale de volume et application du lemme fondamental ; conduit à

$$(136) \quad \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} v_{i,j} - q_{i,i} + r = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} (\vec{v}) - q_{i,i} + r$$

### 3.4. Equation aux discontinuités.

En tout point d'une surface de discontinuité  $\Sigma$  on a, par application de (50)

$$(137) \quad \left[ \rho u \left( e + \frac{v^2}{2} \right) - T_i v_i + q_i N_i \right] = 0$$

On peut remarquer une fois de plus que seule intervient la vitesse relative  $v$  du milieu par rapport à  $\Sigma$ . En effet,  $\rho u = m$  étant continu à travers  $\Sigma$  (cf. proposition 12 p. 28) on peut sortir  $m$  du signe  $\llbracket \quad \rrbracket$  et écrire :

$$m \llbracket v \rrbracket = m \llbracket v_i v_i \rrbracket = m \llbracket u_i u_i \rrbracket + 2 m w_i \llbracket v_i \rrbracket$$

si  $\vec{w}$  désigne la vitesse de la surface de discontinuité. De plus d'après (81)

$$\llbracket T_i v_i \rrbracket = \llbracket T_i u_i \rrbracket + \llbracket T_i w_i \rrbracket = \llbracket T_i u_i \rrbracket + w_i \llbracket T_i \rrbracket = \llbracket T_i v_i \rrbracket + m w_i \llbracket v_i \rrbracket$$

après substitution dans (137), on obtient

$$\left[ \rho u \left( e + \frac{v^2}{2} \right) - T_i u_i + q_i N_i \right] = 0$$

et en particulier si l'évolution est adiabatique  $T_i = T$

$$m \llbracket e + \frac{v^2}{2} \rrbracket - \llbracket T_i u_i \rrbracket = 0$$

Si de plus  $m = 0$  (surface de contact cf. p. 35)  $T$  est continu et  $\vec{U}$  est tangentiel (cf. p. 28) ; il en résulte, puisque  $\llbracket T_i u_i \rrbracket = 0$ , que nécessairement la contrainte est orthogonale à la discontinuité de  $U$ .

### 3.5. Conditions aux frontières associées.

Pour appliquer les développements du paragraphe II.4.5. p. 24, on est conduit à admettre une transmission de chaleur fournie par l'extérieur à travers la frontière  $\partial S$ , définie par un taux de quantité de chaleur surfacique  $\bar{w}$  qui est selon les cas une quantité connue ou inconnue.

Dans le cas particulier d'une surface libre  $F_i = \sigma_{ij} n_j = 0$  et par suite (53) p. 25 montre que sur cette surface

$$q = - q_i n_i = \bar{w}$$

Si la frontière  $\partial S$  est une paroi et si  $U$  désigne la vitesse relative du milieu par rapport à la paroi, on doit écrire sur  $\partial S$

$$q = - q_i n_i = \bar{w} - F_i U_i$$

car la condition (53) conduit à

$$q + V_i T_i = \bar{w} + F_i W_i$$


---

## CHAPITRE VI : LOIS DE COMPORTEMENT

### 1 - Objet du chapitre.

Les équations (56), (74) et (136) qui traduisent les lois de conservation de la masse, quantité de mouvement, énergie, constituent au total cinq relations scalaires pour quatorze fonctions inconnues qui sont

i) les six composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes

ii) les trois composantes de la vitesse  $v_i$  (ou du déplacement)

iii) la densité  $\rho$ , l'énergie interne  $e$ , les composantes  $q_i$  du vecteur courant (ou flux) de chaleur.

D'un point de vue mathématique il est bien improbable que 5 équations puissent déterminer 14 fonctions inconnues.

D'un point de vue physique les lois énoncées sont valables pour un quelconque milieu continu, liquide, solide, gazeux. Si ces équations suffisaient à déterminer le mouvement du milieu, cela impliquerait que, soumis à des efforts identiques, des milieux continus liquides ou solides subiraient les mêmes mouvements, ce qui est trivialement faux.

Il en résulte donc que les lois de conservation, dont le caractère est universel, sont insuffisantes pour étudier les mouvements des milieux continus. On doit les compléter par des lois dites de comportement spécifiques de chaque type de milieu.

On aura ainsi les lois de comportement des milieux élastiques, des fluides visqueux ou non, des matériaux plastiques, viscoélastiques, etc .... .

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques unes de ces lois qui ont pour but d'exprimer les efforts intérieurs, c'est-à-dire le tenseur des contraintes, en fonction de la grandeur mathématique la mieux adaptée pour décrire la déformation du milieu concerné.

Ne pouvant étudier en détail, faute de temps, les principes généraux auxquels doivent satisfaire les énoncés des lois de comportement nous nous contenterons de les évoquer brièvement dans le paragraphe suivant dans lequel seront aussi données quelques définitions générales.

2 - Principes généraux et définitions utiles pour l'énoncé des lois de comportement.

Le mouvement de  $S$  est décrit dans un référentiel  $R$  muni d'un repère cartésien orthonormé.

Soient  $x = \phi(a, t)$  et  $y = \phi(b, t)$  les positions à l'instant  $t$  des particules qui étaient en  $a$  et  $b$  à l'instant origine.

Soit  $\Sigma(a, t)$  la matrice, image dans le repère choisi du tenseur des contraintes au point  $x$  à l'instant  $t$ .

2.1. Dépendance du passé ou principe de Causalité.

Le tenseur des contraintes  $\Sigma(a, t)$  est parfaitement déterminé dès que l'on connaît le mouvement du système jusqu'à l'instant  $t$ , du moins si le milieu n'est soumis à aucune liaison interne

$$(138) \quad \Sigma(a, t) = \int_{\substack{\tau \leq t \\ b \in S}} \{a, t, \phi(b, \tau)\}$$

2.2. Principe de localisation spatiale.

Seul le mouvement des particules voisines de  $a$  influe sur le tenseur  $\Sigma(a, t)$ . Ceci, compte tenu de (138) s'exprime par :

$$(139) \quad \Sigma(a, t) = \int_{\substack{\tau \leq t \\ b \in \mathcal{V}(a) \cap S}} \{a, t, \phi(b, \tau)\}$$

$\mathcal{V}(a)$  désignant un voisinage de  $a$ .

2.3. Principe d'indifférence matérielle.

La fonctionnelle  $\int$  est indépendante du référentiel ; en particulier, elle ne dépend pas explicitement du temps

$$\Sigma(a, t) = \int_{\substack{\tau \leq t \\ b \in \mathcal{V}(a) \cap S}} \{a, \phi(b, \tau)\}$$

## 2.4. Définition d'un milieu homogène.

Le milieu étudié est dit homogène si la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  ne dépend pas explicitement de  $a$ .

$$\Sigma(a, t) = \mathcal{F} \{\phi(b, \tau)\}$$

$$\tau \leq t$$

$$b \in \mathcal{B}(a) \cap S$$

## 2.5. Définition d'un milieu isotrope.

Le référentiel  $R$  étant donné, si l'on effectue un changement de repère, la fonctionnelle  $\mathcal{L}$  permettant d'exprimer  $\Sigma$  change de forme.

On dira donc que le milieu est isotrope si la fonctionnelle exprimant  $\Sigma$  est indépendante du changement de repère.

### 3 - Exemples de lois de comportement.

#### 3.1. Elasticité linéaire.

On y découvre les effets de déformation des variations de température.

La relation contrainte déformation est supposée linéaire et s'écrit donc à l'aide d'un tenseur du 4ème ordre dépendant en général de la particule considérée

$$(140) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{(u)} \quad \text{tenseur de defo. linéaire.}$$

Les composantes du tenseur  $a_{ijkl}$  ou nombre de  $3^4 = 81$  sont appelés coefficients d'élasticité  $a_{ijkl}$  et satisfont les relations suivantes :

$$(141) \quad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk}$$

grâce à la symétrie des tenseurs  $\{\sigma_{ij}\}$  et  $\{\epsilon_{ij}\}$

$$(142) \quad a_{ijkl} = a_{khij}$$

(143)  $\exists \alpha$  constante positive telle que

$$a_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq \alpha \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad \forall \{\epsilon_{ij}\}$$

$\hookrightarrow$   $\text{Gesamt} > \text{Eigent.}$

dues à des considérations énergétiques.

(143) implique l'inversibilité de (140) d'où :

$$(144) \quad \epsilon_{ij}^{(u)} = A_{ijkh} \sigma_{kh}$$

où les coefficients  $A_{ijkh}$  satisfont (141) (142) et une inégalité du type (143) pour laquelle on peut choisir la même constante  $\lambda$ .

Les relations (140) et (144) étant linéaires par rapport aux  $\frac{\partial u_i}{\partial a_j}$ , il est légitime si les déplacements  $u_i$  sont petits de linéariser aussi les équations du mouvement autour de la configuration initiale, scit :

$$(145) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_j} + f_i$$

$\rho_0$  représentant la densité dans l'état non déformé.

La densité après déformation est donnée par :

$$(146) \quad \boxed{\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = - \operatorname{div} u}$$

relation obtenue par linéarisation de l'équation de continuité.

On remarque que, les déplacements étant petits, l'équation du mouvement porte sur le domaine occupé par le corps élastique dans son état non déformé. De même les conditions aux limites seront appliquées aux points du milieu non déformé.

Il y a seulement 10 fonctions inconnues à déterminer :  $\sigma_{ij}$ ,  $v_i$  et  $\rho$ , et nous avons 10 relations à notre disposition données par (140) (145) et (146) sans utiliser la loi de conservation de l'énergie (136).

Dans le cas où le milieu est homogène, les coefficients  $a_{ijkh}$  sont constants.

Les relations de symétrie (141) (142) diminuent déjà considérablement le nombre des  $a_{ijkh}$  et si le milieu est isotrope ils ne dépendent plus que de deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$  : grâce au théorème des fonctions isotropes (cf. calcul tensoriel : cours p.42 et exercice n° 14) (140) s'écrit alors

$$(147) \quad \boxed{\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{11}^{(u)} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^{(u)}}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé et la loi de comportement (147) est celle de l'élasticité dite classique particulièrement bien adaptée pour l'étude des pièces métalliques au moins tant que les contraintes ne sont pas trop grandes.

On note que :

$$\sigma_{11} = (3\lambda + 2\mu) \epsilon_{11}(u)$$

et  $K = 3\lambda + 2\mu$  est appelé module de rigidité à la compression.

Les relations (148) peuvent s'inverser en

(148)

$$\boxed{\epsilon_{ij}(u) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} \delta_{ij}}$$

ou

(149)

$$E = \frac{3K\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

sont appelés respectivement module d'Young et coefficient de Poisson.

### 3.2. Thermique.

C'est le domaine complémentaire de l'élasticité linéaire ; on ne s'intéresse ni aux déformations ni aux contraintes mais seulement au champ de température en négligeant les contraintes thermiques.

La loi de comportement retenue est alors la loi de Fourier

(150)

$$q_i = -K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}$$

$\theta$  désigne ici la température et  $\{K_{ij}\}$  un tenseur de conduction de chaleur.

Si le matériau est isotrope :

$$K_{ij} = k \delta_{ij} \quad \text{avec } k > 0 ;$$

la loi (150) devient alors :

(151)

$$q_i = -k \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

Si on suppose de plus que l'énergie interne du matériau est donnée par

$$(152) \quad e = C \theta,$$

avec  $C$  constante dans la plage de variation de  $\theta$ . (la représentation (152) n'est évidemment valable que si  $\theta$  ne subit pas de trop grandes variations)

L'équation de l'énergie (136) s'écrit alors :

$$(153) \quad \rho_0 C \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) = r$$

et nous suffit théoriquement à déterminer la seule inconnue qui nous intéresse à savoir la température  $\theta$ , (153) est appelée "équation de la chaleur ou de la diffusion".

### 3.3. Fluides proprement dit.

C'est un milieu dont la loi de comportement est de la forme :

$$(154) \quad \Sigma = K(\xi)$$

où  $K$  est une fonction du tenseur  $\xi$  des taux de déformation ; ce milieu est donc à mémoire infiniment courte.

Le principe d'indifférence matérielle implique que  $K$ , dont les valeurs prises sont des tenseurs du second ordre symétrique, soit une fonction isotrope (cf. calcul tensoriel p. 41).

La relation (154) a donc nécessairement la forme :

$$(155) \quad \Sigma = K_0(\xi_I, \xi_{II}, \xi_{III})^1 + K_1(\xi_I, \xi_{II}, \xi_{III})\xi + K_2(\xi_I, \xi_{II}, \xi_{III})\xi^2$$

$\xi_I, \xi_{II}, \xi_{III}$  étant les invariants élémentaires de  $\xi$  et  $K_1, K_2, K_3$  des fonctions à valeurs scalaires de ces invariants.

Un fluide est dit classique si dans tout repère, les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes sont des fonctions linéaires affines des composantes  $\epsilon_{ij}$  du tenseur des taux de déformations.

On dit qu'un tel fluide est parfait si le tenseur des contraintes est indépendant des taux de déformations. (155) montre alors que nécessairement le tenseur des contraintes est sphérique ; on peut l'écrire

$$(156) \quad \Sigma = -p \mathbb{1} \quad \text{soit} \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$$

où  $p$  est la pression du fluide.

par analogie avec (156)

$$(157) \quad \Sigma = - p \delta_{ij} + \underline{\Pi} \text{ soit } \sigma_{ij} = - p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$\underline{\Pi}$  (de composantes  $\tau_{ij}$ ) étant appelé le tenseur des contraintes visqueuses.

La linéarité de  $K$  impose que :

$$(158) \quad \tau_{ij} = \lambda \epsilon_{11} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

Si le fluide est incompressible ;  $\text{div } \vec{v} = \epsilon_{11}^{(V)} = 0$  ; la loi de comportement s'écrit enfin :

$$(159) \quad \sigma_{ij} = - p \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

#### 4. Conclusion :

Les exemples de lois de comportement donnés ci-dessus ont été choisis parmi les plus classiques mais nous aurons l'occasion au cours d'enseignements ultérieurs d'en rencontrer de plus élaborés : les matériaux plastiques dont la caractéristique est de posséder un "seuil de contraintes" (au delà duquel son comportement change). Les milieux viscoélastiques (c'est-à-dire avec mémoire). Les fluides non newtoniens (le sang par exemple) les matériaux composites, etc...

La science qui s'intéresse à l'élaboration des lois de comportement est appelée la rhéologie et son objet est loin d'être épuisé mais l'ingénieur contemporain est appelé de plus en plus à faire appel à ses résultats car dans de nombreux problèmes la résistance des matériaux, l'hydrologie et l'aérodynamique ne suffisent plus.

( F I N )