

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/323543173>

Mouvement et dynamique des filaments et des anneaux tourbillons de faible épaisseur

Thesis · November 1997

CITATIONS

3

READS

73

1 author:



Daniel Margerit

12 PUBLICATIONS 105 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

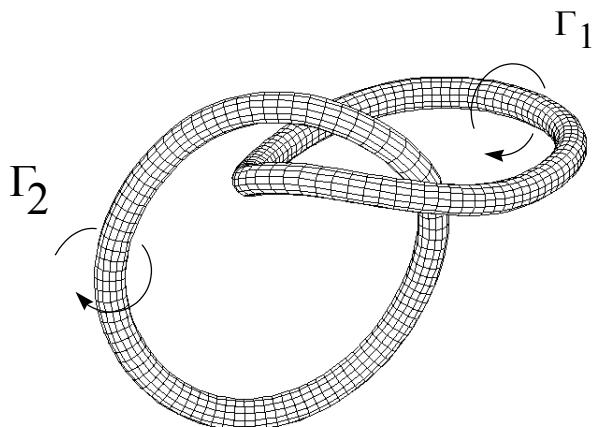
Laboratoire d'Energétique
et de Mécanique
Théorique et Appliquée

THESE
présentée à
l'Institut National Polytechnique de Lorraine
par

Daniel MARGERIT
(Ingénieur ENSEM)

pour l'obtention du grade de
DOCTEUR de L'I.N.P.L.
spécialité : Mécanique et Energétique

***MOUVEMENT ET DYNAMIQUE DES
FILAMENTS ET DES ANNEAUX
TOURBILLONS DE FAIBLE EPATISSEUR***



soutenue publiquement le 6 novembre 1997 devant la commission d'examen :

O. SERO-GUILLAUME Président
R. KLEIN Rapporteur
A. VERGA Rapporteur
M. ROSSI Examinateur
J-P. BRANCHER Examinateur

(Directeur de recherche, LEMTA-CNRS, Nancy)
(Professeur. Dr-Ing., BUGH Wuppertal, Germany)
(Chargé de recherche, IRPHE-CNRS, Marseille)
(Chargé de recherche, LMM-CNRS, Jussieu, Paris)
(Professeur, ENSEM-INPL, Nancy)

Dynamique et mouvement des filaments et des anneaux tourbillons de faible épaisseur

Résumé :

Un *filament tourbillon* est un cas particulier d'écoulement rotationnel, pour lequel la vorticité se trouve uniquement autour d'une courbe tridimensionnel, dite *fibre centrale* du filament. Calculer l'écoulement, c'est déterminer l'évolution de cette zone de vorticité, dite *filament tourbillon*, c'est à dire trouver le mouvement de la fibre centrale. Cette thèse reprend la démarche de Callegari et Ting pour obtenir l'équation d'évolution de la fibre centrale d'un anneau tourbillon en la complétant avec divers remarques et commentaires et en donnant des ordres supérieurs du développement. Nous mettons en valeur le développement des intégrales singulières de Biot et Savart à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Puis, les résultats obtenus sont utilisés pour justifier des méthodes de coupure et pour les généraliser au cas visqueux et avec vitesse axiale. Nous complétons les résultats de Widnall et Sullivan sur l'étude linéaire d'un anneau circulaire perturbé en donnant la période d'oscillation des différents modes et en comparant ces résultats avec une simulation numérique de l'équation d'évolution. Enfin, nous étudions les oscillations d'un filament droit et la stabilité de filaments parallèles contrarotatifs.

Mots clés :

filament tourbillon, anneau tourbillon, vorticité, mécanique des fluides
développement asymptotiques, intégrales singulières
coupure, mouvement, stabilité

Dynamics and motion of slender vortex filaments and rings

Abstract :

A vortex filament is a particular rotationnel flow in which the vorticity is located only around a three dimensional curve called *central line* of the filament. Solving the flow means finding the evolution of this vorticity region, called *vortex filament*, that is to say finding the motion of the central line. This dissertation proceed as Callegari and Ting to obtain this equation of motion in adding some remarks and comments and in giving higher order terms of the expansion. We point out the importance of singular Biot and Savart integral expansions performed with matched asymptotic expansions. Then, these results are used to justify cut-off methods and to generalise them to the case with viscosity and axial velocity. We complete Widnall and Sullivan's linear study of a perturbed circular vortex ring in giving the oscillation period of the different modes and in comparing these results with a numerical simulation of the equation of motion . Finally, we study the oscillations of a straight vortex filament and the stability of parallel counter-rotating vortex filaments.

Key words :

vortex filament, vortex ring, vorticity, fluid mechanics
asymptotic expansions, singular integrals
cut-off, motion, stability

AVANT PROPOS

Ce mémoire a été réalisé au sein du Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, sous la direction de Monsieur J-P. BRANCHER. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance, pour m'avoir fait connaître les travaux du professeur Ting, pour sa grande expérience de la recherche en hydrodynamique et magnétohydrodynamique, pour avoir su m'encourager dans mon travail tout en me laissant l'opportunité de faire les investigations scientifiques qui pouvaient me sembler prometteuses et pour les contacts et les échanges qu'il m'a permis d'avoir avec des chercheurs extérieurs au laboratoire.

Je remercie Monsieur R. KLEIN Professeur à l'université de Bergische en Allemagne, ainsi que Monsieur A. VERGA Chargé de recherche à l'IRPHE, pour m'avoir fait l'honneur de rapporter* sur ce travail. Qu'ils sachent que je leur en suis extrêmement reconnaissant.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur M. ROSSI Chargé de recherche au LMM, ainsi qu'à Monsieur O. SERO-GUILLAUME Directeur de recherche au LEMTA, pour avoir bien voulu participer au jury et pour s'être intéressé à mon travail.

Mes remerciements s'adressent également à toutes les personnes qui par leurs discussions fructueuses ont contribué quelque part au contenu scientifique de ce document. Je pense entre autres à Messieurs H.K. MOFFATT, S. LE DIZES, P. BRANCHER, A. CHEIKHI, K. LOUESLATI, N.M. NOURI, B. ZAFARMAND.

J'ai bien sûr une pensée particulière pour mon frère J. MARGERIT qui a su me remonter le moral à de nombreuses reprises et enrichir ce mémoire par le regard qu'il a pu avoir sur mon travail.

Je tiens à remercier aussi tous les membres du laboratoire qui ont su faire en sorte, par leur gentillesse et leur amitié ; que la période de cette thèse me reste comme un souvenir agréable, convivial et chaleureux, avec une pensée particulière pour M-H. ZOBERMAN.

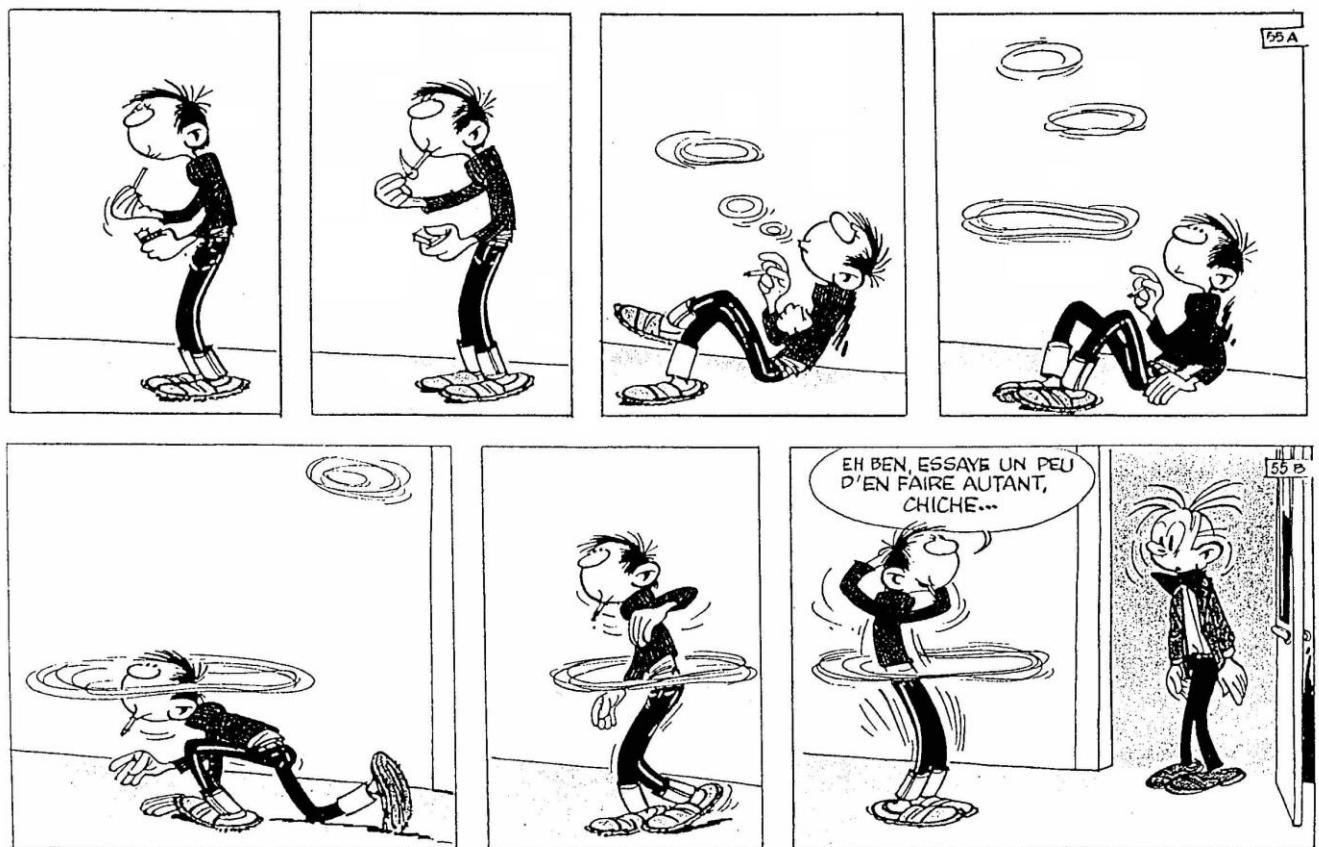
Enfin, je remercie mes parents, mes frères et mes amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé.

* Remarque : suite à la soutenance, les commentaires des rapporteurs ont été pris en compte en améliorant la mise en page, les notations, la présentation générale du manuscrit ainsi qu'en étoffant un peu le texte.

*'chacun de nous
est reparti
dans le tourbillon
de la vie...'*

Jeanne Moreau

A mes parents
A mes frères
A mes amis



(Gaston , Texte et dessin : André Franquin)

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
Bibliographie de l'introduction	18

I DESCRIPTION ET MÉTHODE DE RÉSOLUTION D'UN FILAMENT TOURBILLON 21

I.1. Définition d'un filament de faible épaisseur	21
I.2. Repérage de la fibre centrale et coordonnées locales	23
I.2.1. Repérage de la fibre centrale	23
I.2.2. Coordonnées locales	23
I.2.3. Métrique associée aux coordonnées locales	24
I.3. Les champs et les grandeurs associées	26
I.4. La formule de Biot et Savart	27
I.5. Conservation de la masse, équations de Navier-Stokes et du tourbillon	28
I.6. Le filet tourbillon et la nécessité d'une épaisseur d'un filament	29
I.6.1. Le filet tourbillon droit	29
I.6.2. Le filament tourbillon droit	31
I.6.3. Le filet tourbillon courbe	35
I.7. Echelles de longueur et adimensionalisation	37
I.8. Les limites asymptotiques et développements	39
I.9. Devenir des développements dans d'autres adimensionalisations	41
I.9.1. Adimensionalisation avec δ_0 et Γ_0	41
I.9.2. Adimensionalisation avec $M = \varepsilon \bar{M}$	42
I.9.3. Adimensionalisation avec \bar{M}	42
I.10. Les équations du problème intérieur	43
I.10.1. Les équations aux dérivées partielles intérieures	43
I.10.2. Les conditions aux limites de ces équations en l'infini	44
I.10.3. Les conditions aux limites en zéro et la définition de la fibre centrale	44
I.11. La résolution des équations intérieures	47
I.11.1. La dynamique principale	47
I.11.2. Les restrictions possibles et la situation générale	48
I.11.3. La résolution sur un temps normal et l'équation de la fibre centrale	50
I.12. Utilisation du calcul formel	51
I.13. Les différents types de filaments tourbillons	53
I.13.1. Les diverses formes de filaments tourbillons	53
I.13.2. Les diverses structures de filaments	54
I.14. Conclusion	55
I.15. Bibliographie du chapitre I	56

II DÉVELOPPEMENTS DU CHAMP DE VITESSE INDUIT PAR UN ANNEAU TOURBILLON	57
II.1. Le développement intérieur du champ de vorticité	58
II.2. Le développement extérieur du champ de vorticité	58
II.3. Le développement extérieur du champ de vitesse	59
II.4. La limite près du filament du développement extérieur du champ de vitesse	61
II.5. Le développement intérieur du champ de vitesse	65
II.6. La limite loin du filament du développement intérieur du champ de vitesse	69
II.7. Généralisation des résultats	73
II.8. Conclusion	75
II.9. Bibliographie du chapitre II	76
III ÉVOLUTION D'UN ANNEAU TOURBILLON A STRUCTURE NORMALE SIMPLE	77
III.1. Équations écrites sur les coordonnées locales	77
III.2. Définition de la fibre centrale	78
III.3. Forme des développements intérieurs	79
III.4. Les équations à l'ordre 0	80
III.5. Le raccord à l'ordre ε^{-1} et les conditions aux limites en l'infini de l'ordre zéro	82
III.6. Les équations à l'ordre 1	83
III.6.1. Partie axisymétrique des équations à l'ordre 1 et équations de compatibilité à l'ordre 1	83
III.6.2. Partie non axisymétrique des équations	84
III.6.3. Le raccord à l'ordre 1 et les conditions aux limites en l'infini de l'ordre 1	86
III.6.4. La résolution des équations à l'ordre 1	88
III.6.5. La limite en l'infini de $\Psi^{(1)}_{11}$	89
III.7. L'équation d'évolution du filament à l'ordre 0 et la partie non axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1	92
III.7.1. Détermination de l'équation de la fibre centrale	92
III.7.2. La partie non axisymétrique du champ à l'ordre 1	94
III.7.3. Autre détermination de l'équation de la fibre centrale	97
III.8. Les équations à l'ordre 2 et les équations pour l'ordre principal du champ de vitesse	99
III.8.1. Equations de compatibilité à l'ordre 2 et équations pour la partie axisymétrique du champ des vitesses à l'ordre 0	99
III.8.2. Partie non axisymétrique des équations	104
III.8.3. Le raccord à l'ordre ε^1 et les conditions aux limites en l'infini de l'ordre deux	106
III.8.4. Résolution des équations à l'ordre 2	109
III.8.5. Limite en l'infini de $\Psi^{(2)}_{12}$ et $\Psi^{(2)}_{11}$	110
III.9. L'équation d'évolution du filament à l'ordre 1 et la partie non axisymétrique du champ à l'ordre 2	112
III.9.1. Détermination de l'équation de la fibre centrale	112
III.9.2. La partie non axisymétrique du champ des vitesses à l'ordre 2	116

III.10. Les équations pour la partie axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1	117
III.11. La résolution des équations du champ de vitesse principal	119
III.11.1. La solution non visqueuse	119
III.11.2. La solution visqueuse et l'équation de diffusion bidimensionnelle	120
III.11.3. Représentation sous forme de série de la solution visqueuse	121
III.11.4. Simplification de cette représentation en série	124
III.11.5. Lien entre le développement en série de cette solution visqueuse et la solution non visqueuse	126
III.11.6. Expressions de $C_v(t)$ et $C_w(t)$ à partir du développement en série de la solution	126
III.11.7. Expressions de $C_v(t)$ et $C_w(t)$ pour un anneau non visqueux	127
III.11.8. Expression de la solution visqueuse sous la forme d'une intégrale de Green	128
III.11.9. Lien entre la forme intégrale de cette solution visqueuse et la solution non visqueuse	129
III.12. La solution à l'ordre principal et sa représentation pour un anneau similaire	131
III.12.1. Le système à l'ordre principal pour un anneau similaire	131
III.12.2. L'évolution d'un anneau similaire elliptique	133
III.12.3. La représentation des champs pour un anneau similaire	133
III.13 Les termes logarithmiques	139
III.14. Une évolution qui sort du domaine de validité du modèle ?	141
III.15. Interaction du plusieurs filaments et filament dans un écoulement potentiel	142
III.15.1. Interaction de plusieurs filaments	142
III.15.2. Filament dans un écoulement potentiel	144
III.15.3. Filament dans un écoulement de rotationnel	145
III.16. Conclusion	146
III.17. Bibliographie du chapitre III	147
IV LES MÉTHODES DE COUPURE ET LEUR JUSTIFICATION	149
IV.1. Les différentes méthodes de coupure	149
IV.2. L'équation d'évolution de Callegari et Ting	151
IV.3. Justification des méthodes de coupure	152
IV.3.1. Développement des méthodes de coupure	152
IV.3.2. Comparaisons du développement avec l'équation de Callegari et Ting	152
IV.3.3. Autres groupements équivalents et lien entre les longueurs de coupure	154
IV.3.4. Justification particulière de la méthode de Burgers	155
IV.4. Discussion bibliographique et autres équations des filaments de la littérature	156
IV.5. Conclusion	160
IV.6. Bibliographie du chapitre IV	160
V VITESSE ET OSCILLATIONS D'UN ANNEAU CIRCULAIRE PERTURBÉ	163
V.1. Vitesse d'un anneau tourbillon circulaire	163
V.2. Description et équation d'évolution d'un anneau circulaire perturbé	166
V.2.1. Description de la fibre centrale de l'anneau tourbillon perturbé	166
V.2.2. Équation de la fibre centrale écrite sous la forme d'une méthode de coupure	167
V.2.3. Équation de la fibre centrale écrite à l'aide de l'équation de Callegari et Ting	168
V.2.4. Discussion sur les équations d'évolution de la fibre centrale	168
V.3. Étude numérique des oscillations d'un anneau circulaire perturbé	170
V.3.1. Le cas non visqueux	170
V.3.2. Le cas visqueux	172

V.4. Étude analytique linéaire des oscillations d'un anneau circulaire perturbé	172
V.4.1. Les équations des amplitudes de la perturbation	172
V.4.2. Le cas non visqueux	180
V.4.2.1. Les modes instables	181
V.4.2.2. Les modes stables	183
V.4.3. Le cas visqueux	185
V.4.4. Le champ de vitesse d'un anneau circulaire perturbé	186
V.4.4.1. Le développement extérieur du champ de vitesse	186
V.4.4.2. Le développement intérieur du champ de vitesse	187
V.5. Comparaison entre les simulations numériques et l'étude analytique linéaire	189
V.5.1. Le cas non visqueux	189
V.5.2. Le cas visqueux	190
V.5. Conclusion	191
V.6. Bibliographie du chapitre V	192
 VI LE FILAMENT NON FERMÉ	193
VI.1. Champ de vitesse induit par un filament tourbillon non fermé	194
VI.1.1. Le développement extérieur du champ de vitesse	194
VI.1.2. La limite près du filament du développement extérieur champ de vitesse	195
VI.1.3. Le développement intérieur du champ de vitesse	197
VI.1.4. Généralisation des résultats	198
VI.2. Évolution d'un filament tourbillon à structure normale simple	198
VI.3. Le régime de Klein et Majda	199
VI.3.1. Simplification de l'équation d'évolution	200
VI.3.2. L'équation de la fonction filament	201
VI.3.3. Les différentes dégénérescences de l'équation de la fonction filament	202
VI.3.4. Zoom sur le filament de Klein et Majda	203
VI.3.5. Discussion des différents régimes pour l'équation de la fonction fibre	204
VI.3.6. Un temps court logarithmique ?	206
VI.4. Les méthodes de coupure	207
VI.5. Le cas bidimensionnel	207
VI.6. Le filament droit étiré	209
VI.7. Oscillation d'un filament droit	211
VI.7.1. L'équation de la perturbation	211
VI.7.2. Etude des modes solutions	213
VI.8. Stabilité de deux filaments tourbillons parallèles contrarotatifs	216
VI.9. Conclusion	222
VI.10. Bibliographie du chapitre VI	222
 CONCLUSION	223
Bibliographie de la conclusion	234

ANNEXES	237
A.1. Obtention des équations sur les coordonnées locales	237
A.2. Les développements extérieurs des champs de vorticité et de vitesse	243
A.3. Calcul d'intégrales singulières et limite près du filament du développement extérieur de la vitesse	247
A.4. L'équation de conservation de la masse et de Navier Stokes aux différents ordres	255
A.5. Les équations de la vorticité et le rotationnel de la vitesse aux différents ordres	262
A.6. Détermination de $\Psi_{11}^{\infty(1)}(\bar{r})$	267
A.7. Détermination de $C(t)$	273
A.8. Le raccord sur une zone intermédiaire	277
A.9. Les expressions de $H_{nj}^{(2)}$, de $\Psi_{12}^{(2)}$ et $\Psi_{11}^{(2)}$	280
A.10. Partie axisymétrique des équations à l'ordre 3	284
A.11. Partie axisymétrique et indépendante de s des équations à l'ordre 3	291
A.12. Description des algorithmes des programmes de calcul formel	295
A.13. Expressions de $C_v(t)$ et $C_w(t)$	303
A.14. Deux expressions de $F(m)$	319
A.15. Description du schéma numérique et du code fortran	322
A.16. Simplification de l'équation d'évolution pour le filament de Klein et Majda	328
A.17. L'hélicité d'un ou de plusieurs anneaux	331
A.18. Bibliographie complémentaire	338

RAPPORTS

- R.1. Autorisation de soutenance de thèse**
- R.2. Rapport de Rupert Klein**
- R.3. Rapport d'Alberto Verga**
- R.4. Rapport de soutenance**
- R.5. Admission au grade de Docteur**
- R.6. Prix de thèse INPL**
- R.7. Résumé/Abstract**

NOMENCLATURE

Variables :

t	temps
\vec{x}	point de l'espace
$\vec{v}(\vec{x}, t)$	champ de vitesse
$\vec{\omega}(\vec{x}, t)$	champ de vorticité
$p(\vec{x}, t)$	champ de pression
ν	viscosité cinématique
Γ	circulation
m_0	débit axial à l'instant initial
\mathcal{C}	fibre centrale
$\vec{X} = \vec{X}(s, t)$	représentation paramétrique de la fibre centrale
$S(t)$	longueur de l'anneau
δ	épaisseur du filament
δ_0	épaisseur initiale du filament
φ	potentiel de l'écoulement
R_e	nombre de Reynolds
L	grande longueur caractéristique
$l = \delta_0$	petite longueur caractéristique
ε	rapport de δ_0 sur L
$(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$	Base de Frenet
K	courbure
T	torsion
σ	coefficient d'abscisse non curviligne
(x_1, x_2, x_3)	coordonnées cartésiennes
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$	base cartésienne
(r, φ, s)	coordonnées curvilignes locales
(r, Θ, s)	coordonnées curvilignes locales orthogonales
$(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$	vecteurs de base des coordonnées locales
a	paramétrage de longueur d'arc
\vec{V}	vitesse relative
u, v, w	vitesse radiale, orthoradiale, axiale
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	composantes radiale, orthoradiale, axiale de la vorticité

Ψ	fonction de courant
C^*, C, C_v, C_w	contributions internes à l'équation d'évolution de la fibre centrale
$\tilde{\mathbf{A}}(s, t)$	contribution globale à l'équation d'évolution de la fibre centrale
$\tilde{\mathbf{Q}}_2(s, t)$	contribution de l'écoulement potentiel à l'équation d'évolution de la fibre centrale
s_c	longueur de coupure
l_c	longueur d'arc de coupure
R_0	Rayon d'un anneau circulaire
θ	angle des coordonnées cylindriques d'un anneau circulaire
$\vec{\mathbf{i}}_r, \vec{\mathbf{i}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_3$	vecteurs de base des coordonnées cylindriques
\tilde{V}	paramètre de structure d'un anneau tourbillon
T	période d'oscillations

Notations :

f_x	$\partial f / \partial x$
\dot{f}	$\partial f / \partial t$
f_0	$f(t = 0)$
\bar{x}	grandeur dilatée ou réduite à l'aide de ε
\bullet	produit scalaire
\wedge	produit vectorielle
f^{out}	développement extérieur
f^{inn}	développement intérieur
f_c	partie axisymétrique de f
$f^{(i)}$	ième terme du développement de f
f_{1j}, f_{2j}	termes en $\cos(j\varphi)$ et $\sin(j\varphi)$ du développement de Fourier de f

INTRODUCTION

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à l'étude du mouvement des filaments et des anneaux tourbillons de faible épaisseur. Dans cette introduction, après avoir rappelé quelques notions sur le champ de vorticité et son utilisation, nous introduisons la notion de filaments et d'anneaux tourbillons, puis leur réalisation expérimentale et dans des phénomènes naturels. Nous précisons alors l'intérêt de leur étude et faisons un tour d'horizon des résultats de la littérature à leur sujet tout en nous proposant d'en apporter des supplémentaires. Nous serons alors prêt à présenter le travail qui a été réalisé dans cette thèse, que l'on décrira chapitre par chapitre.

On s'intéresse aux écoulements *rotationnels* laminaires incompressibles à grand nombre de Reynolds pour lesquels les équations du champ de vitesse sont :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \vec{v} = -\operatorname{grad} \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2)$$

où \vec{v} est la vitesse, t le temps, p la pression et ρ la masse volumique.

Ces écoulements sont décrits à l'aide du *champ de vorticité* :

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot}(\vec{v})$$

Généralement, le pourcentage de l'écoulement occupé par la vorticité est faible : on dit que la vorticité est *concentrée* dans l'écoulement. La vorticité vérifie l'*équation du tourbillon* :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \vec{\omega} = \vec{\omega} \operatorname{grad} \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega} \quad (3)$$

Si l'on connaît le champ de vorticité, on peut en déduire le champ de vitesse par la relation suivante :

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\text{grad}} \varphi(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\omega}' \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dx' \quad (4)$$

qui décompose le champ de vitesse en une *vitesse potentielle* :

$$\vec{v}_{\text{Back}} = \vec{\text{grad}} \varphi(\vec{x})$$

appelée également *vitesse de background* et une *vitesse induite* par le champ de vorticité :

$$\vec{v}_{\text{Biot}} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\omega}' \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dx'$$

qui est la relation de Biot et Savart. Cette équation est l'inversion des deux relations linéaires :

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

$$\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{v})$$

Elle provient donc uniquement de la cinématique. L'ensemble des relations (3), (4) et de l'équation du potentiel :

$$\Delta \varphi = 0, \quad (5)$$

muni des conditions aux limites et des conditions initiales, forme un système équivalent à (1) et (2). Il est intéressant de décrire l'écoulement à l'aide du champ de vorticité. Si le champ de vorticité concentré et l'écoulement potentiel sont connus, alors à l'aide de la relation (4), on connaît le champ de vitesse en tout point de l'écoulement. Si l'on connaît l'écoulement potentiel, les équations d'évolution (3), (4) sont à intégrer sur le domaine de vorticité qui est petit par rapport au domaine occupé par tout l'écoulement. Comme on est à très grand nombre de Reynolds, la viscosité est petite et l'équation (5) se comporte au première ordre comme l'équation :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad } \vec{\omega} = \vec{\omega} \text{ grad } \vec{v} \quad (6)$$

Le champ de vorticité subit donc les mêmes déformations que le domaine fluide : on dit que la vorticité est *gelée* dans le fluide. A ce phénomène se rajoute une diffusion lente du champ de vorticité qui est due au terme visqueux $\nu \Delta \vec{\omega}$ dans l'équation (3). Le terme $\vec{\omega} \text{ grad } \vec{v}$ qui n'existe que pour les écoulements tridimensionnels est le *terme d'étirement* de la vorticité ou terme de *stretching*.

Lorsque l'on s'intéresse à un écoulement, deux études apparaissent. La première (Figure 1) est la détermination du champ de vitesse induit par un champ de vorticité connu au temps t ou initialement. La seconde est la détermination de l'évolution d'un champ de vorticité donné initialement. Cette seconde étude nécessite de faire la première étude à tout temps de l'évolution que l'on détermine (Figure 2).

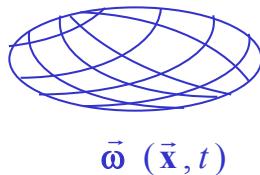


Figure 1 : Recherche de la vitesse induite $\vec{v}(\vec{x}, t)$ par $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$

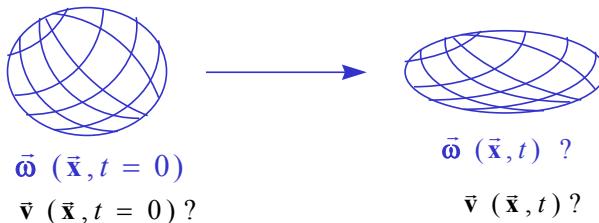
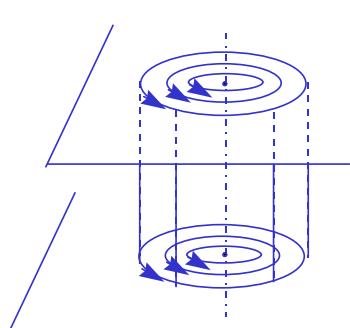
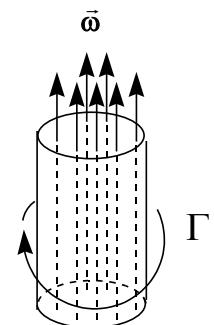


Figure 2 : Recherche de l'évolution de la vorticité $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ et de $\vec{v}(\vec{x}, t)$

Une *tornade* est un exemple bien connu de répartition de vorticité. C'est un écoulement axisymétrique qui est en rotation autour d'un axe (Figure 3 a). La seule composante non nulle de la vorticité est celle parallèle à l'axe de la tornade et la seule composante non nulle de la vitesse est celle qui est orthoradiale.



a) Lignes de courant



b) Lignes de vorticité

Figure 3 : Schéma d'une tornade

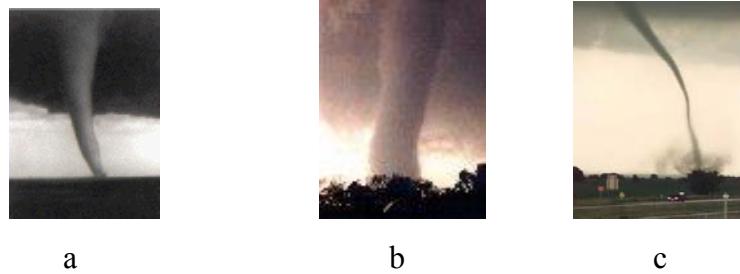


Figure 4 : Photographies de tornades

On peut également représenter les lignes de vorticité qui sont les lignes tangentes au champ de vorticité et qui sont ici des droites (Figure 3 b). L'intensité de la tornade est mesurée à l'aide de la circulation Γ qui est la circulation de la vitesse sur une ligne encerclant la tornade et qui correspond également au flux de la vorticité à travers une surface perpendiculaire à la tornade. Par conservation du flux de vorticité ($\text{div } \vec{\omega} = 0$), cette circulation est la même tout le long de la tornade. Par application du théorème de Kelvin (fluides non visqueux), elle ne dépend pas non plus du temps. Si r est la distance à l'axe de la tornade et δ son épaisseur, il existe une solution exacte aux équations d'Euler d'un fluide parfait qui est le tourbillon de Rankine (Figure 5) :

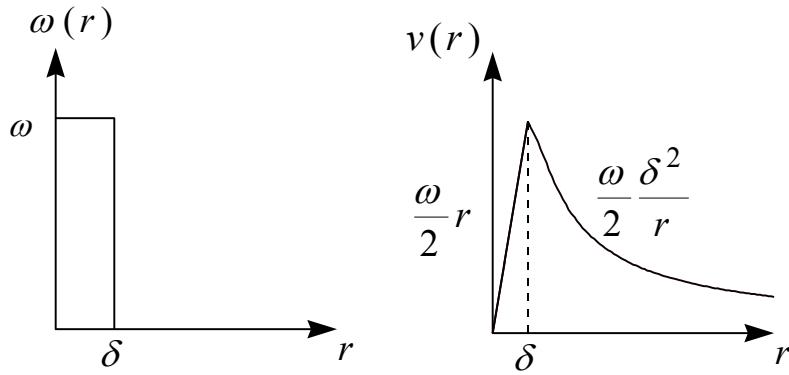


Figure 5 : Vorticité d'un tourbillon de Rankine et vitesse induite

La vitesse induite par la zone de vorticité uniforme est déterminée en égalant le flux de la vorticité avec la circulation de la vitesse, mais peut aussi être obtenu à l'aide de la loi de Biot et Savart bidimensionnel :

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\text{grad}} \varphi(\vec{x}) + \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\vec{\omega}' \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} dx' \quad (7)$$

Il existe une solution exacte aux équations de Navier-Stokes d'un fluide visqueux qui est le tourbillon de Burgers (Figure 6) :

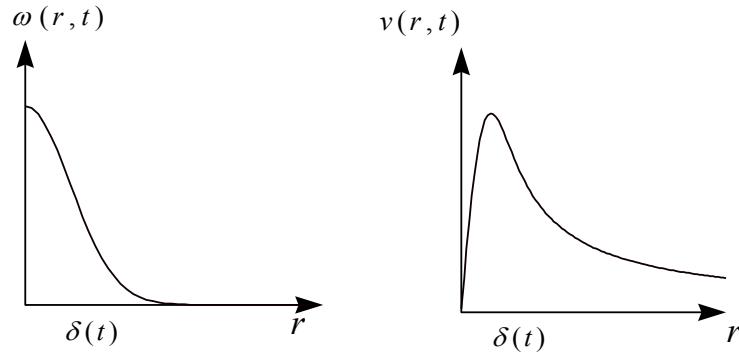


Figure 6 : Vorticité d'un tourbillon de Burgers et vitesse induite

La vorticité peut être concentré autour d'une courbe, dite *fibre centrale*, qui n'est pas forcément droite comme pour une tornade. On a alors *un filament tourbillon* et, si la courbe est fermée, on a un *anneau tourbillon* (Figure 7) :

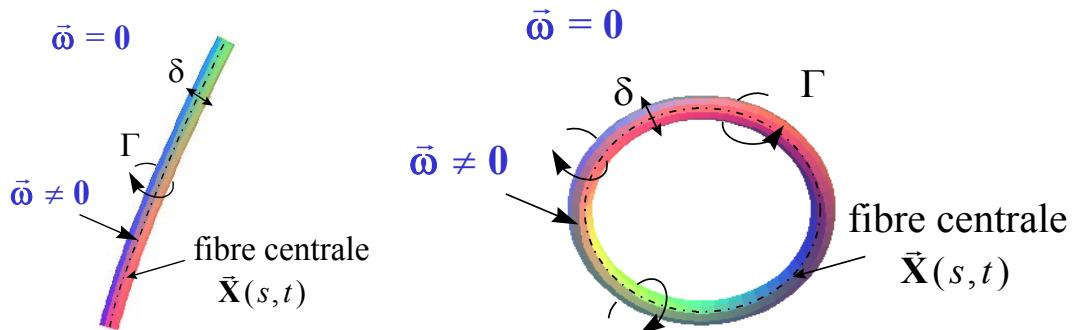


Figure 7 : Filament et anneau tourbillon

Cette courbe est décrite paramétriquement à l'aide d'une fonction $\vec{X} = \vec{X}(s, t)$, qui donne un point de la courbe en fonction d'un paramètre s et du temps t . Remarquons qu'un filament tourbillon ne peut pas s'arrêter brutalement au milieu du fluide à cause de la conservation de la circulation : soit il est fermé, soit il s'arrête sur une paroi solide. L'épaisseur δ sera prise petite ce qui permet d'avoir une approche analytique et ce qui est justifié par le fait que la vorticité est généralement concentrée dans les écoulements. Pour une viscosité faible, si la vorticité est concentrée autour d'une fibre centrale, elle le reste tant que le temps n'est pas trop grand. Cependant, cette fibre centrale ne reste pas sur place ; elle se déplace. *Notre but est alors de déterminer le mouvement du filament tourbillon, c'est à dire le déplacement de sa fibre centrale, ainsi que la stabilité de ce mouvement.* Comme la vorticité est quasiment gelée dans le fluide, un point de la fibre centrale se déplace avec la vitesse du fluide. On peut

décomposer cette vitesse en différentes contributions : l'écoulement potentiel, la vitesse induite par le filament tourbillon, la vitesse induite par les autres filaments tourbillons (on parle alors d'interaction des filaments).

Un anneau tourbillon peut être créé par différents procédés³. On met de la fumée dans une boîte percée d'un trou sur une face et possédant une membrane sur la face opposée. On expulse alors la fumée en un jet de courte durée en percutant la membrane. Le jet s'enroule en un anneau de fumée par frottements visqueux sur la paroi du trou. L'anneau se déplace alors sous l'effet de son induction propre. C'est comme cela que les fumeurs arrivent de créer des anneaux de fumée par expulsion de la fumée qui est dans leur bouche. Le même procédé peut être utilisé pour les liquides.

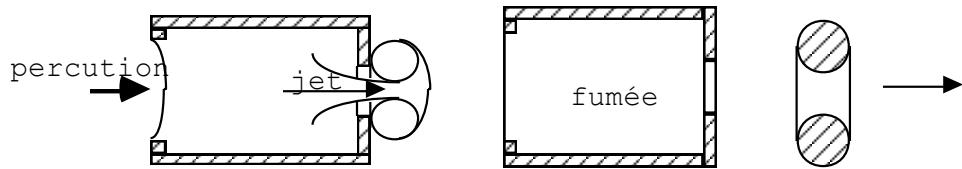


Figure 8 Crédit à l'aide d'une boîte de Tait (vue en coupe)

Il est à noter que si n'y a pas de force de volume rotationnelle, la vorticité ne peut être créée que dans un fluide visqueux à une paroi solide ou une interface de deux liquides.

Un anneau tourbillon peut aussi être créé par explosion d'une bulle. Par exemple, le PH3 d'une bulle réagit avec l'air pour former du P2O5 qui est expulsé dans l'air et forme un anneau (Figure 9).

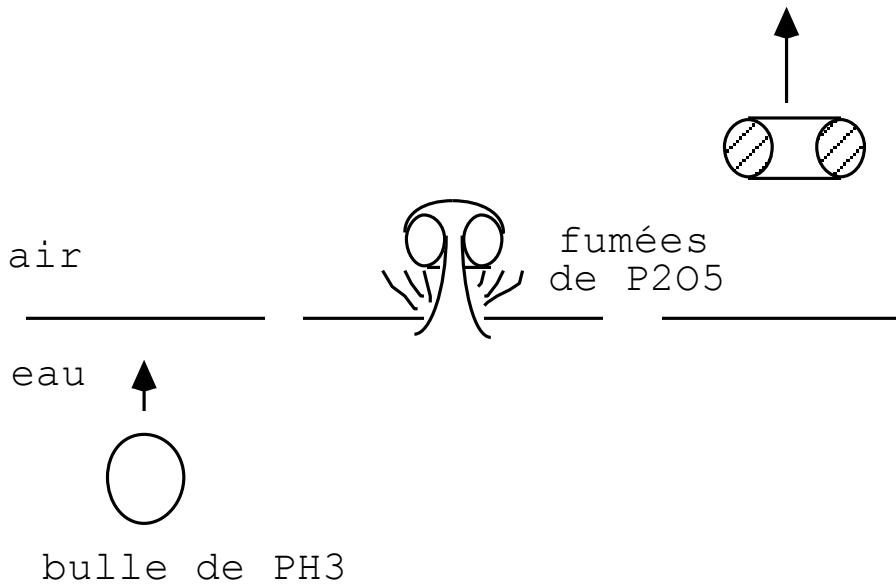


Figure 9 Crédit à l'aide d'une bulle (vue en coupe)

Le déplacement d'un disque dans un liquide permet aussi de créer un anneau (Figure 10).

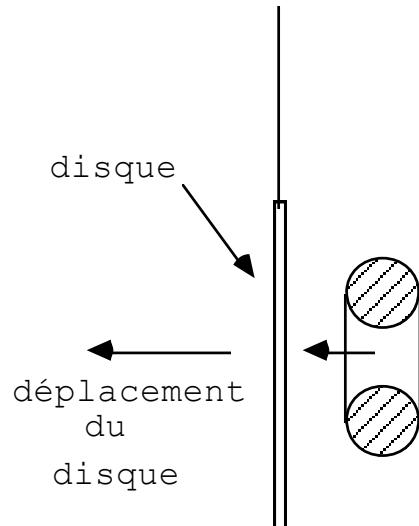


Figure 10 Crédit à la NASA pour la partie physique de ce schéma

C'est le même phénomène que l'on constate si on déplace une cuillère dans un bol de lait puis qu'on la retire rapidement verticalement. Il faut que la moitié de la partie incurvée de la cuillère soit sous la surface libre du lait. A la surface, on voit deux tourbillons qui se déplacent en translation tout en restant à la même distance l'un de l'autre.

Si on laisse tomber une goutte colorée de liquide, elle s'enroule en un anneau coloré lorsqu'elle arrive dans l'eau (Figure 11). Cette expérience peut être facilement réalisée à l'aide d'une cartouche d'encre et d'un lavabo rempli d'eau. On crée alors facilement un anneau en décrochant une goutte très près de la surface.

Dans bon nombre de phénomènes naturels, le champ de vorticité est confiné : dépressions atmosphériques, tornades, tourbillons de vidange, tache rouge de Jupiter,... Le confinement de la vorticité semble plutôt être la règle que l'exception. Des anneaux tourbillons sont créés de façon naturelle dans certaines situations : éjection d'anneaux au-dessus d'un volcan, lors de certaines protubérances solaires, au fut d'un canon³⁸ lors d'un tir, dans le champignon d'une bombe atomique, dans le cœur d'un humain et on a même vu des dauphins créer des bulles tourbillons toriques et s'amuser avec^{35,48}.

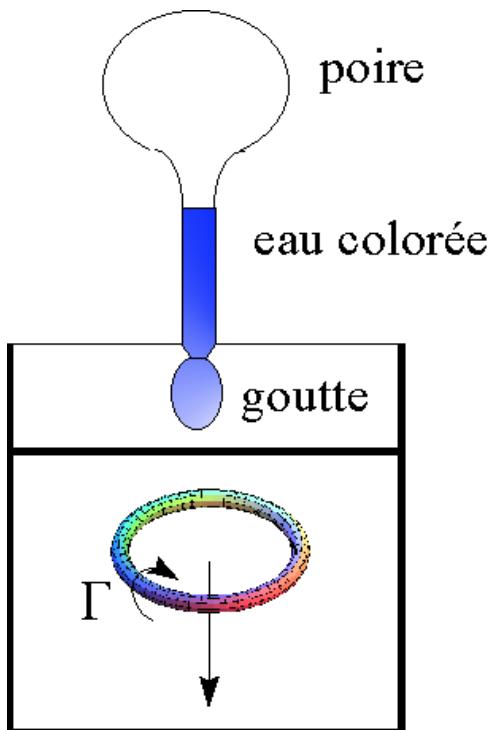


Figure 11 Crédit d'un anneau par chute d'une goutte.



Figure 12 : Bulle torique faite par un dauphin

On rencontre également des filaments tourbillons dans l'Hélium superfluide⁴³, dans des supraconducteurs⁷ et dans les plasmas⁹. Les instabilités de Kelvin-Helmholtz d'une nappe tourbillon donnent naissance à des filaments tourbillons et ces instabilités pour un jet de liquide aboutissent à la formation d'une rangée d'anneaux tourbillons⁵.

Les tourbillons d'apex dans le sillage d'un avion sont des exemples de filaments tourbillon.

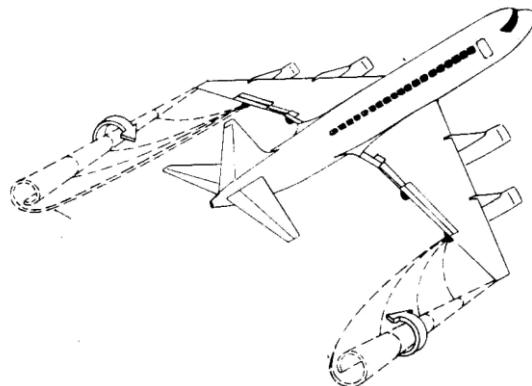


Figure 13 : Tourbillons d'apex derrière un avion

C'est leur persistance dans le temps qui limite la fréquence d'atterrissement des avions dans un aéroport : si un avion suit de trop près un autre, il peut être déstabilisé par ces tourbillons et c'est ce qui a déjà abouti à des catastrophes aériennes. La stabilité (Annexe 18) et la déstructuration des filaments tourbillons (par exemple par éclatement tourbillonnaire²⁷ : Figure 14 et Annexe 18) ont été beaucoup étudiées.

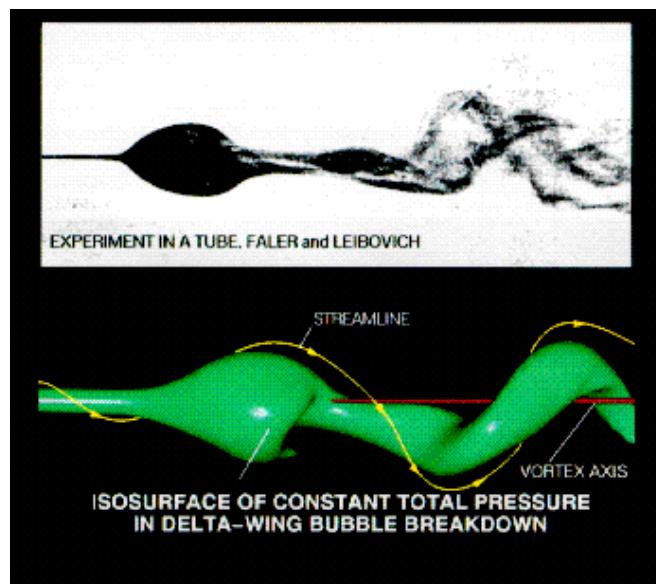


Figure 14 Eclatement tourbillonnaire de type bulle.

Comparaison entre expérience et numérique (Visbal⁴⁷)

Bon nombre de questions restent cependant ouvertes sur ces éclatements tourbillonnaires et pourraient apporter des améliorations à certains procédés industriels.

Les anneaux tourbillons sont un moyen de déplacer rapidement une certaine quantité de gaz. Cette utilisation avait été imaginée dans le passé pour rejeter très haut dans l'atmosphère les fumées qui s'échappent des cheminées d'usine. Ce procédé est bien sûr rejeté de nos jours puisque l'on sait que les capacités de notre atmosphère terrestre d'absorber les pollutions humaines sont loin d'être infinis. Cette faculté de transport a été remise au goût du jour par la marine américaine (Naval Air Warfare Centre- Weapon Division- Point Mugu, CA) qui propose plusieurs utilisations des anneaux tourbillons :

- extinction de feux difficiles d'accès par envoi d'anneaux tourbillons de dioxyde de carbone
- utilisation d'un canon à anneaux tourbillons pour transporter des gouttes de produit médical en tirant dans la bouche d'un patient
- réalisation d'armes non mortelles sous forme de pistolet à anneaux tourbillons chimiques pour mettre hors de nuire l'ennemi
- Ils envisagent même que la police puisse utiliser un pistolet à anneaux tourbillons lors de chasse poursuite avec un véhicule (Figure 14): les gaz contenus dans l'anneau diminueraient fortement les capacités du moteur du véhicule poursuivi en perturbant l'air frais qu'utilise la combustion de celui-ci.

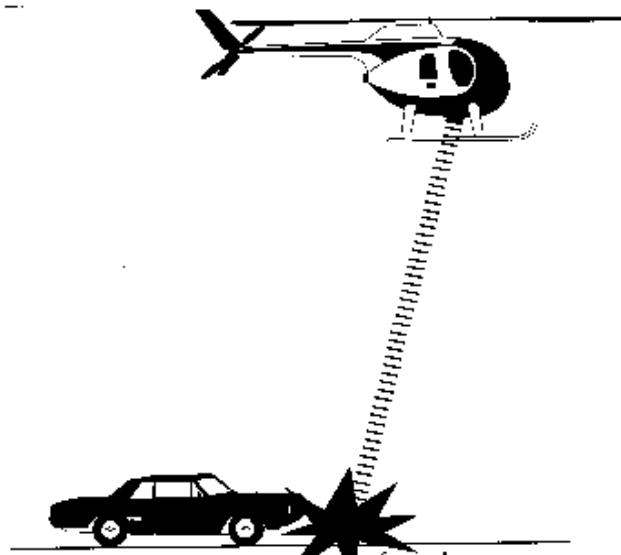


Figure 14 Etouffement du moteur par projection de dioxyde de carbone
dans l'air frais qu'utilise le moteur

L'étude des filaments et des anneaux tourbillons est au cœur de la mécanique des fluides. Des simulations numériques directes⁴² (Figure 15) de la turbulence mettent en évidence l'existence de bon nombre de filaments tourbillons. Ainsi, la résolution de la turbulence (difficile entreprise qui n'a encore pas été atteinte par les scientifiques) nécessite de prendre en compte ces objets^{33,34,36,46}. Cette perspective justifie le regain d'intérêt récent sur l'étude des filaments tourbillons, car même si les premières études remontent à Helmholtz¹⁸, notre connaissance de ceux-ci est encore imparfaite.

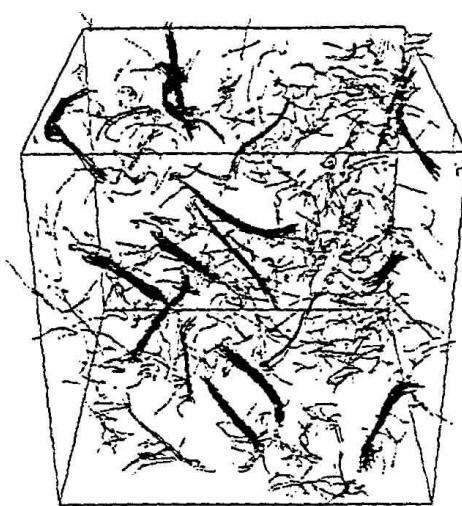


Figure 15: Lignes de vorticité d'une turbulence homogène par DNS
(She et al. 1991)

Parmi les différentes méthodes numériques de la mécanique des fluides, il existe celles qui utilisent des filaments tourbillons et qui s'appellent ‘*les méthodes des éléments tourbillons*’^{16,28}. Le champ de vorticité est alors discréteisé (Figure 16) en un grand nombre de filaments tourbillons de faible épaisseur et le mouvement de la zone de vorticité est déterminé en faisant évoluer chacun des filaments dans son champ propre, dans celui induit par les autres filaments et dans l’écoulement potentiel.

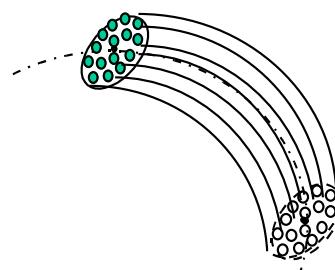


Figure 16: Méthode des éléments tourbillons

Le point tourbillon n'existe pas en trois dimensions : la vorticité ne peut être infiniment concentrée que sur des courbes : *filets tourbillons*, ou sur des surfaces : *nappes tourbillons*⁴. La mise au point de ces méthodes se sert de notre connaissance du mouvement des filaments tourbillons et donc l'amélioration de notre savoir sur ceux-ci a des retombées sur l'avancée de ces méthodes numériques. Afin d'illustrer ces méthodes, un exemple d'utilisation est donné sur la figure 17, où est simulée l'évolution d'une zone de vitesse axiale sur un filament tourbillon d'intensité Γ et de rayon R en fonction du temps t . Sur la figure, on a représenté les lignes de vorticité. Ces lignes sont assimilées à de petits filaments tourbillons et on détermine l'évolution de l'ensemble en déterminant l'évolution de toutes ces lignes de vorticité.

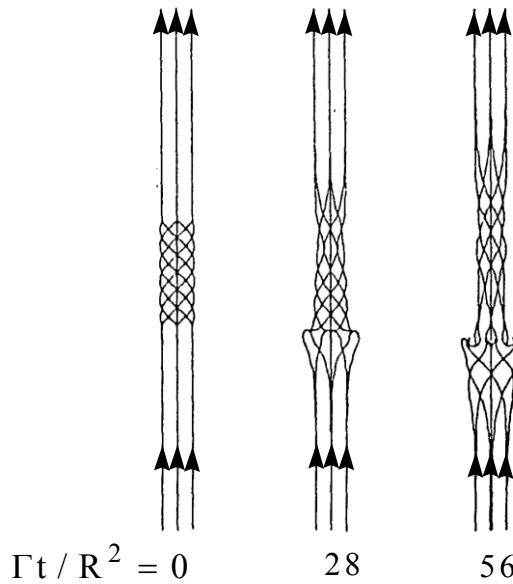


Figure 17 : Simulation numérique d'un éclatement tourbillonnaire par élément de vorticité²⁸. Les lignes de vorticité sont représentées à différents temps.

Des résolutions numériques de la turbulence en deux dimensions sont effectuées en déplaçant bon nombre de molécules élémentaires qui sont des tourbillons⁸. La diffusion visqueuse est obtenue en rajoutant une perturbation aléatoire dans le déplacement de ces tourbillons. Ces résolutions n'ont pas d'équivalent en trois dimensions, où différentes difficultés de taille apparaissent. D'abord, il existe un phénomène d'étirement dans l'équation de la vorticité qui n'existe pas dans les problèmes plans, puis, il n'y a pas de solution élémentaire au problème d'une distribution de Dirac ponctuelle donc pas de particule de vorticité de l'espace^{4,40}. La répartition de vorticité la plus simple est le *filet tourbillon* (vorticité infiniment concentrée sur une courbe, dite aussi *courbe tourbillon*), mais en tout point de courbure non nulle, la vitesse de cette courbe est infinie (il y a une singularité

logarithmique) ce qui nécessite que cette vorticité n'est pas infiniment concentrée, c'est à dire que cette zone de vorticité a obligatoirement une petite épaisseur.

La *vitesse* V d'un anneau tourbillon *circulaire*, d'intensité Γ , de rayon R , et d'épaisseur de corps δ , a d'abord été donnée sans preuve par Kelvin²¹:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\ln \frac{8}{\varepsilon} - \frac{1}{4} \right) \text{ où } \varepsilon = \delta / R \quad (8)$$

puis a été prouvée et généralisée par différents auteurs^{10,11,19,20,25,26,39}. Tous ont utilisé des coordonnées cylindriques, la fonction de courant de Stokes Ψ et ont trouvé le développement de Ψ selon ε en utilisant sa dépendance vis-à-vis du champ de vorticité à l'aide de la relation de Biot et Savart sur la fonction de courant Ψ . Ils considèrent un écoulement stationnaire dans un référentiel se déplaçant en translation à la vitesse $V(\varepsilon)$, que l'on recherche.

Des équation d'évolution de la fibre centrale \mathcal{C} d'un filament tourbillon *non circulaire* et de faible épaisseur (Figure 7) ont été données par Thomson⁴⁴, Levy et Forsdyke³², Hama¹⁷, Leonard²⁸. Ce sont différentes méthodes ad hoc appelées '*méthodes de coupure (cut-off en anglais)*' qui sont des méthodes de type éléments tourbillons. Dans toutes ces méthodes, la singularité dans l'intégrale de Biot et Savart d'un filet tourbillon est évitée en modifiant son expression à l'aide d'un petit paramètre l_c , appelé *la longueur de coupure*. Par exemple, Hama¹⁷ pose :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{[0,S(t)] \setminus [s-l_c, s+l_c]} \frac{\vec{\tau}(s',t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}(s,t) - \vec{\mathbf{X}}(s',t))}{|\vec{\mathbf{X}}(s,t) - \vec{\mathbf{X}}(s',t)|^3} ds' \quad (9)$$

où $\vec{\tau}$ est le vecteur tangent à la fibre centrale \mathcal{C} de longueur $S(t)$ décrite par $\vec{\mathbf{X}}(s,t)$; $\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t)$ est la vitesse du point $\vec{\mathbf{X}}(s,t)$ de \mathcal{C} et l_c est la longueur de coupure. La longueur l_c est prise égale à l'épaisseur δ du tourbillon ($l_c = \delta$). Le fait que le tourbillon est de faible épaisseur est donc utilisé et la structure interne de l'anneau est complètement prise en compte dans cette longueur de coupure l_c . Arms et Hama¹ ont simplifié cette expression en ne retenant simplement que l'ordre principal logarithmique qui donne une contribution au mouvement de l'anneau tourbillon lorsque l_c est infiniment petit. On obtient ce que ces auteurs ont appelés l'équation de '*l'approximation de l'induction locale*':

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) = -\frac{\Gamma}{4\pi} (\ln \varepsilon) K(s,t) \vec{\mathbf{b}}(s,t) \quad (10)$$

où K est la *courbure* locale de \mathcal{C} , $\vec{\mathbf{b}}$ la *binormale* sur \mathcal{C} et ε est l'*épaisseur* δ du filament que l'on a réduit par rapport à un rayon de courbure caractéristique.

L'équation d'évolution de la fibre centrale d'un anneau tourbillon *non circulaire* et de faible épaisseur (Figure 7) a également été dérivée des équations d'Euler ou de Navier-Stokes en utilisant un *développement asymptotique raccordé* avec l'épaisseur de l'anneau comme petit paramètre par différents auteurs^{2,6,13,23,24,37,45,50}. Toutes ces études se complètent les unes et les autres et l'article de Callegari et Ting⁶ nous semble être le plus complet et le plus précis. Ces études résolvent la singularité logarithmique en considérant que l'on a une couche limite sur la fibre centrale de l'anneau. En effet, comme l'épaisseur de l'anneau est faible, c'est un petit paramètre et il apparaît un *problème intérieur* pour une distance de l'anneau tourbillon de l'ordre de l'épaisseur de l'anneau et un *problème extérieur* pour une distance de l'ordre du rayon de courbure de l'anneau. En se servant de la petite épaisseur de l'anneau, les équations de Navier Stokes se simplifient dans la couche limite. On obtient des équations du même type que les équations de couche limite de Prandlt qui ici donnent l'équation d'évolution pour la fibre centrale de l'anneau. La petite épaisseur du filament qui est un gène pour une résolution numérique des équations de Navier Stokes puisqu'elle provoque des matrices mal conditionnées, est un atout qui est mis à profit pour obtenir cette équation. L'équation suivante d'évolution de la fibre centrale⁶ $\vec{\mathbf{X}}(s,t)$ est alors obtenue :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) = \vec{\mathbf{Q}}^*(s,t) + \frac{K(s,t)}{4\pi} \left[-\ln \varepsilon + \ln(S(t)) - 1 + C_v(t) + C_w(t) \right] \vec{\mathbf{b}}(s,t) \quad (11a)$$

avec

$$\vec{\mathbf{Q}}^*(s,t) = \vec{\mathbf{A}}(s,t) - [\vec{\mathbf{A}}(s,t) \bullet \vec{\tau}(s,t)] \vec{\tau}(s,t) \quad (11b)$$

$$\vec{\mathbf{A}}(s,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma(s+s',t) \begin{bmatrix} -\frac{\vec{\tau}(s+s',t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}(s+s',t) - \vec{\mathbf{X}}(s,t))}{|\vec{\mathbf{X}}(s+s',t) - \vec{\mathbf{X}}(s,t)|^3} \\ -\frac{K(s,t)}{2} \frac{\vec{\mathbf{b}}(s,t)}{|\lambda(s,s',t)|} \end{bmatrix} ds' \quad (11c)$$

$$\lambda(s,s',t) = \int_s^{s+s'} \sigma(s^*,t) ds^* \quad (11d)$$

où $\vec{\mathbf{b}}$ est le vecteur binormal de la fibre centrale \mathcal{C} , $\sigma(s,t) = |\vec{\mathbf{X}}_s|$ et K est la courbure.

Dans cette expression, $C_v(t)$ et $C_w(t)$ sont des fonctions connues pourvu que le champ de vitesse initial soit donné. Ce sont des *paramètres internes*, qui montrent le *couplage* entre le mouvement de la fibre centrale et l'évolution de la structure interne de l'anneau. Comme la structure de l'anneau apparaît uniquement dans le groupement :

$$[-\ln \varepsilon - 1 + C_v(t) + C_w(t)], \quad (11e)$$

par une mesure de la vitesse d'évolution de la fibre centrale du filament, on ne peut pas déterminer son épaisseur si l'on ne connaît pas les valeurs de $C_v(t)$ et $C_w(t)$ pour ce

filament. La vitesse $\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(s,t)$ en un point du filament se décompose en une *contribution globale* (ou non locale) $\tilde{\mathbf{Q}}^*(s,t)$ et une *contribution locale* proportionnelle à la courbure K et dirigée selon la binormal $\tilde{\mathbf{b}}(s,t)$ en ce point. La contribution globale fait intervenir la forme de la fibre centrale alors que la contribution locale fait intervenir la structure interne du filament.

Une nouvelle dérivation de cette équation, en utilisant le développement intérieur de l'intégrale de Biot et Savart, a été réalisée par Klein et Knio²² et a été initialement accomplie d'une façon similaire par Levi-Civita²⁹⁻³¹, au début du siècle, mais uniquement jusqu'à l'ordre principal logarithmique. Ces articles en italien ont été oubliés pendant une longue période et ont été redécouverts par Germano¹⁵ en 1983.

On préfère ces études asymptotiques aux méthodes de coupure. En effet, pour prendre en compte la structure interne de l'anneau, ces méthodes font intervenir la longueur de coupure qui est un paramètre arbitraire et ces méthodes ne découlent pas des équations de Navier Stokes.

Malgré la littérature abondante au sujet de l'étude du mouvement des anneaux tourbillons, il a été possible d'apporter des éléments supplémentaires à la détermination de l'équation d'évolution de leur fibre centrale qui vont être maintenant annoncés. Ce mémoire redonne également toute la démarche d'obtention de cette équation.

Dans *le premier chapitre*, nous introduisons une définition des filaments et des anneaux tourbillons de faible épaisseur ainsi que les coordonnées, les équations, les échelles et les régions asymptotiques associées. Nous étudions le filet tourbillon droit puis courbe comme introduction au problème de couche limite tridimensionnelle. On constate qu'il faut savoir calculer le développement de l'intégrale singulière de Biot et Savart, ce qui est l'objet de notre deuxième chapitre. On a essayé de décrire assez succinctement la méthode de résolution de cette couche limite tridimensionnelle, en insistant plus sur la démarche, les étapes clefs de son

déroulement et les résultats, que sur les équations et le grand nombre de calculs qui sont sous-jacents. Ceci nous permet de donner une description des différents types de structures de filament en allant de la plus générale à la plus simple, grâce à quoi on peut bien préciser les hypothèses qui sont faites suivant les études. Une attention particulière a été apportée aux longueurs caractéristiques d'adimensionnalisation qui ont été choisies afin de faire le lien entre cette étude et d'autres études de la littérature. Le lien immédiat entre ces études peut être masqué par des notations différentes et surtout par des choix différents des longueurs caractéristiques et des formes de développement asymptotiques associés. On étudie un anneau tourbillon avec une vitesse axiale, que l'on pourrait appeler un *jet tourbillon* courbe fermé. Celui-ci est essentiellement caractérisé par quatre paramètres, qui sont : sa circulation, son épaisseur, son débit axial et sa viscosité, ou en variables adimensionnelles : son épaisseur réduite, son débit axial réduit (nombre de Swirl) et son nombre de Reynolds. On précise les différences et les liens entre cette étude et l'étude d'un doublet, d'une source ou d'un jet concentrés sur une courbe (répartitions linéaires).

Dans *le deuxième chapitre*, nous nous intéressons aux champs de vorticité et de vitesse d'un anneau tourbillon de faible épaisseur. Notre but est d'obtenir le développement *extérieur* et *intérieur* du champ de vitesse induit par le champ de vorticité connu d'un anneau tourbillon de faible épaisseur. Nous effectuons pour cela des développements de l'intégrale de Biot et Savart. On donne les deux premiers ordres du développement *extérieur*. L'ordre principal est bien connu mais pas le premier. Nous donnons également le *développement* de ces deux ordres *près de l'anneau*, qu'on obtient en utilisant la méthode de développement asymptotique raccordé des intégrales singulières telle qu'elle est exposée dans François¹². Si la partie singulière du développement près de l'anneau de l'ordre principal de la vitesse est bien connue, l'ordre un et les ordres supérieurs ne sont pas donnés habituellement. L'expression la plus complète de ce développement près de l'anneau a été donnée par Fukumoto et Miyazaki¹³. Par ailleurs, la plupart des auteurs^{2,41} ne dérivent pas ce développement près de l'anneau en utilisant la méthode systématique des développements asymptotiques raccordés des intégrales singulières. Seuls quelques rares auteurs^{14,22,23} l'ont utilisée. On donne alors le développement *intérieur* de l'intégrale de Biot et Savart afin de généraliser des résultats connus^{22,30,31}. Nous obtenons ainsi le champ de vitesse au voisinage et dans l'anneau tourbillon et généralisons certains résultats de la littérature^{22,30,31}. Enfin, nous montrons que ce champ intérieur de vitesse se raccorde bien avec le champ extérieur de vitesse.

Dans le *troisième chapitre*, nous dérivons l'équation d'évolution d'un anneau tourbillon à l'aide du développement asymptotique raccordé décrit succinctement au chapitre I. On utilise aussi les résultats des développements de l'intégrale de Biot et Savart obtenus au chapitre II. Nous reprenons ici toute la démarche de Callegari et Ting⁶ en la complétant avec divers commentaires, avec des dessins de champ de vitesse et avec des ordres supérieurs dans le développement. Afin de comprendre l'utilité et la porté de cette équation d'évolution, qui est le résultat de bien des labeurs de calcul, on présente des simulations numériques de celle-ci.

Dans le *quatrième chapitre*, on justifie diverses méthodes de coupure en comparant leur développement par rapport à la longueur de coupure avec l'équation d'évolution d'un anneau tourbillon obtenue par Callegari et Ting⁶. Cette justification est valable pour un anneau visqueux avec une vitesse axiale. Pour faire le développement, on utilise la méthode de développement asymptotique raccordé des intégrales singulières.

Dans le *cinquième chapitre*, les simulations numériques de l'équation d'évolution d'un filament tourbillon sont comparées à l'étude de stabilité linéaire d'un anneau tourbillon circulaire. L'étude linéaire de Widnall et Sullivan⁵⁰ est généralisée au cas d'un anneau visqueux avec vitesse axiale. Nous donnons des résultats pour les modes stables oscillants alors que Widnall et Sullivan⁵⁰ ont donné des résultats pour les modes instables. Cette comparaison apporte une vérification de notre code numérique d'évolution d'anneaux tourbillons.

Le *sixième chapitre* donne, pour un filament ouvert, les résultats analogues aux chapitres II, III, IV, V. Nous y discutons alors du régime des filaments ultra-fins²³, des oscillations d'un filament droit et de l'instabilité de deux tourbillons parallèles contrarotatifs.

En conclusion, l'ensemble des résultats obtenus est résumé et différentes perspectives d'études sont envisagées.

Bibliographie de l'introduction

1. ARMS,R.J. et HAMA,F.R. 1965 Localised-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring, *Phys. Fluids* **8** (4), 553-559
2. BATCHELOR,G.K. 1967 Introduction to fluid dynamics, *Cambridge University Press*, 509-511
3. BOUASSE, H. 1931 Tourbillons (Forces acoustiques,Circulations diverses) Tome 1, Paris,Librairie Delagrave
4. BOUSQUET, J. 1990 Méthode des singularités. Cepadues-Editions
5. BRANCHER P., Chomaz J.M. ,Huerre P. 1994 Direct numerical simulations of round jets : Vortex induction and side jets, *Phys. Fluids* **6** (5), 1768-1774
6. CALLEGARI,A.J. et TING,L. 1978 Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1), 148-175
7. CHAPMAN, S.J. 1995 A mean-field model of superconducting vortices in three dimensions, *SIAM J. APPL. MATH.* **55**, 5, pp. 1259-1274
8. CHORIN, A.J. 1994 *Vorticity and turbulence*,Springer
9. CHUI, A.Y.K. , MOFFATT, H.K. 1995 The energy and helicity of knotted magnetic flux tubes, *Proc. R. Soc. London A* **451**, 609-629
10. DYSON,F.W. 1893 The potential of an anchor ring, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser.A* **184**, 43-95,1041-1106
11. FRAENKEL,L.E. 1970 On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid, *Proc. Roy. Soc. London. A* **316**, 29-62
12. FRANCOIS,C. 1981 Les méthodes de perturbation en mécanique. ENSTA. Paris, 98-104
13. FUKUMOTO,Y. et MIYAZAKI,T. 1991 Three dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity, *J. Fluid Mech.* **222**, 369-416
14. GENOUX,P. et CHAHINE,L. 1983 Equilibre statique et dynamique d'un tore de vapeur tourbillonnaire, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* **2** (5), 829-857
15. GERMANO,M. 1983 On the rediscovery of the Da Rios intrinsic equations describing the evolution of a filament vortex, *Alti VVII Congresso Nazional AIDAA* .**1**, 163-170
16. GUSTAFSON, K.E., SETHIAN, J.A. 1991 Vortex methods and vortex motion *SIAM*
17. HAMA,F.R. 1962 Progressive deformation of a curved vortex filament by its own induction, *Phys. Fluids* **5**, 1156-1162
18. HELMHOLTZ, H. 1858 Über Integrale der Hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen, translated by P.G. Tait in Phil. Mag. 33,pp.485,1867
19. HICKS,W.M. 1884 On the steady motion and the small vibrations of a hollow vortex, *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 161-195
20. HICKS,W.M. 1885 Researches on the theory of vortex rings-Part II, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **176**, 725-780
21. KELVIN 1867 The translatory velocity of a circular vortex ring, *Philos. Mag.* **33**, 511-512

22. KLEIN,R. et KNIO,O.M. 1995 Asymptotic vorticity structure and numerical simulation of slender vortex filaments, *J. Fluid Mech.***284**, 257-321
23. KLEIN,R. et MAJDA,A.J. 1991 Self-stretching of a perturbed vortex filament I: the asymptotic equation for derivations from a straight line, *Physica D* **49**, 323-352
24. KLEIN,R. et TING,L. 1992 Vortex filaments with axial core structure variation, *Appl.Math.Lett.* **5**, 99-103
25. LAMB,H. 1906 Hydrodynamics., 3rd edition *New York, Dover*, 227
26. LAMB,H. 1932 Hydrodynamics., Sixth edition *New York, Dover*, 239-241
27. LEIBOVICH, S. 1978 The structure of vortex breakdown, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **10**,pp.234
28. LEONARD, A. 1985 Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements, *Ann.Rev.Fluid Mech.* **17**,pp.523
29. LEVI-CIVITA,T. 1908 Sull' attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa, *Rend. R. Acc. Lincei* **17**, 3-15
30. LEVI-CIVITA,T. 1908 Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile, *Rend. R.Acc. Lincei* **17**, 413-426, 535-551
31. LEVI-CIVITA,T. 1932 Attrazione newtoniana dei tubi sottili vorticiti filiformi, *Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa. Zanichelli,Bologna*, 1-33
32. LEVY,H. et FORSDYKE,A.G. 1928 The steady motion and stability of a helical vortex, *Proc. R. Soc. London. A* **120** , 670-690
33. LUNDGREN, T.S. 1982 Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, *Phys.Fluids*,**25**,(12) pp.2193-2203
34. LUNDGREN, T.S., ASHURST, W.T. 1989 Area-varying waves on curved vortex tubes with application to vortex breakdown, *J. Fluid Mech.* **200**,pp. 283-307
35. MARTEN,K., SHARIFF, K., PSARAKOS, S., WHITE, D. : 1996 Ring Bubbles of Dolphins, *scientific American, August*
36. MOFFATT, H.K., KIDA, S., OHKITANI, K. 1994 Stretched vortices-the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics, *J.Fluid Mech.* **259**,pp.241-264
37. MOORE,D.W. et SAFFMAN,P.G. 1972 The motion of a vortex filament with axial flow, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **1226** (272), 403-429
38. SADRON, C. 1933 Etat actuel des recherches expérimentales sur les anneaux de tourbillons dans les gaz, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air,N.22
39. SAFFMAN,P.G. 1970 The velocity of viscous vortex rings, *Studies Appl. Math.* **49**, 371-380
40. SAFFMAN, P.G., MEIRON, D.I. 1986 Difficulties with three-dimensional weak solutions for inviscid incompressible flows,*Phys.Fluids*,**29**,pp.2373-2375
41. SAFFMAN,P.G. 1992 Vortex dynamics, *Cambridge University Press.*, 33-38, 208-215
42. SHE, Z.S., JACKSON, E. ,ORSZAG, S.A. 1991 Structure and dynamics of homogeneous turbulence : model and simulations, *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* **464**, pp. 101-124
43. SHWARTZ, K.W. 1988 Three-dimensional vortex dynamics in superfluid H4:Homogeneous superfluid turbulence,*Phys.Rev.B***38**,pp.2398-2417

44. THOMSON,J.J. 1882 On the vibration of a vortex ring and the action upon each other of two vortices in a perfect fluid, *Phil. Trans.*, 493-521
45. TING,L. et TUNG,C. 1965 Motion and decay of a vortex in a non-uniform Stream, *The Physics of Fluids* **8** (6), 1039-1051
46. TSINOBER,A . : Is concentrated vorticity that important ?, *Euromech colloquium 364, Dynamics and Statistics of Concentrated Vortices in Turbulent Flows, Carry-le-Rouet, France, 24-27 June (to appear in a special issue of European Journal) 1997*
47. VISBAL, M.R. : 1994 Onset of Vortex Breakdown Above a Pitching Delta Wing," AIAA ;J., Vol 32 N°8 pp. 1568-1575
48. VPRO PRODUCTION : 1996 Het Beeld van de dolfijn (The dolphin's image) film -*The Netherlands, VPRO*
49. WIDNALL,S.E. et BLISS,D.B. et ZALAY,A. 1971 Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington*, 305-338
50. WIDNALL,S.E. et SULLIVAN,J.P. 1973 On the stability of vortex rings, *Proc. R. Soc. London A* **332**, 335-353

Chapitre I

DESCRIPTION ET MÉTHODE DE RÉSOLUTION D'UN FILAMENT TOURBILLON

Dans ce chapitre, nous donnons la définition d'un filament tourbillon de faible épaisseur et présentons différentes notions qui y sont rattachées : fibre centrale, coordonnées locales, échelles, limites asymptotiques. Nous cherchons à déterminer le déplacement d'un point tourbillon et d'un filet tourbillon courbe. On montre qu'il est nécessaire qu'un filament courbe ait une épaisseur pour que sa vitesse soit finie. Il faut tenir compte de cette épaisseur pour obtenir le mouvement d'un filament tourbillon et donc résoudre un problème de couche limite tridimensionnelle autour d'une courbe. On constate alors qu'il faut savoir calculer des développements dans l'intégrale singulière de Biot et Savart, ce qui sera l'objet de notre chapitre II. La méthode de résolution de cette couche limite est présentée dans ce chapitre, mais sera effectuée complètement au chapitre III. A la fin de ce chapitre, on présente différents types de formes et de structures de filament tourbillon.

I.1. Définition d'un filament de faible épaisseur

Un *filament tourbillon de faible épaisseur* de corps est un champ de vorticité $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ qui est concentré dans le voisinage d'*épaisseur* δ d'une courbe tridimensionnelle \mathcal{C} , appelée la *fibre centrale* ou *ligne centrale*. L'épaisseur δ définit l'*épaisseur du filament tourbillon en ordre de grandeur*. Cette courbe \mathcal{C} est décrite paramétriquement à l'aide d'une fonction $\vec{X} = \vec{X}(s, t)$, qui donne un point de la courbe en fonction d'un paramètre s et du temps t . La

géométrie du voisinage où la vorticité est concentrée est un ‘*tore non circulaire*’ T_δ si la fibre centrale est fermée ou un *cylindre non rectiligne* si la fibre centrale est ouverte. La circulation Γ de la vitesse du fluide autour d'une section du tore est *l'intensité du tourbillon*.

Le filament tourbillon est à *vorticité d'extension finie* si le support des fonctions qui la définissent est à support compact. Il est à *vorticité décroissante exponentiellement* si les fonctions qui la définissent sont à décroissance rapide. Pour un fluide non visqueux, un filament initialement à vorticité d'extension finie reste à vorticité d'extension finie, mais on peut cependant travailler aussi avec des filaments à vorticité décroissant exponentiellement. Pour un fluide visqueux, même si initialement le filament est à *vorticité d'extension finie*, il devient instantanément à *vorticité décroissante exponentiellement*.

La figure 1.1 représente un filament à *vorticité d'extension finie* dans un voisinage T_δ d'une courbe \mathcal{C} .

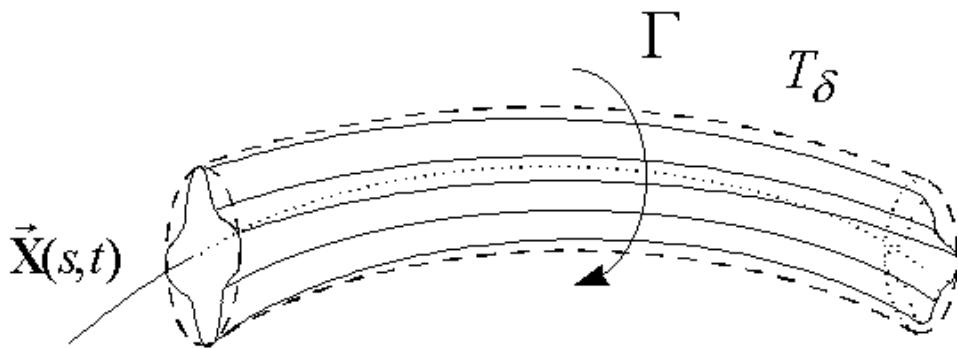


Figure 1.1 : Description d'un morceau de filament tourbillon et du voisinage de sa ligne centrale

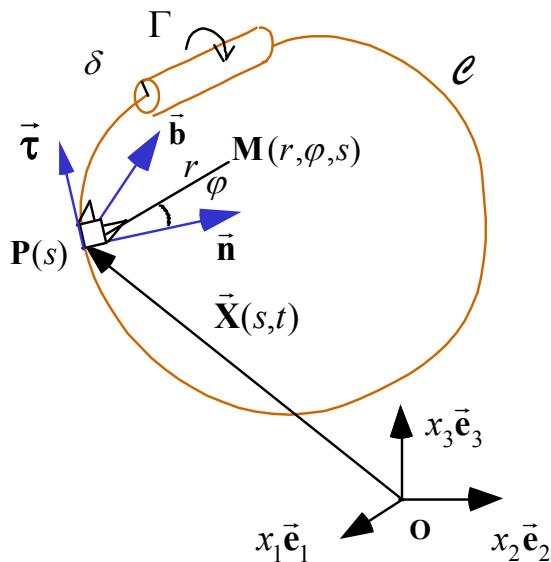


Figure 1.2 : La courbe centrale et les coordonnées locales d'un anneau tourbillon.

I.2. Repérage de la fibre centrale et coordonnées locales

Si la fibre centrale du filament est fermée, on parle *d'un anneau tourbillon* de longueur S , sinon il s'agit d'un *filament tourbillon infini*.

I.2.1. Repérage de la fibre centrale

La fibre centrale est repérée à l'aide d'une représentation paramétrique : $\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}(s, t)$, qui donne un point de la courbe en fonction d'un paramètre s et du temps t (Figure 1.2). En chaque point de cette courbe, nous définissons le repère de Frenet $(\vec{\mathbf{t}}, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{b}})$ avec respectivement les vecteurs tangent, normal et binormal. Les formules de Frénet sont :

$$\begin{aligned}\sigma(s, t) &= |\vec{\mathbf{X}}_s| \\ \vec{\mathbf{X}}_s &= \sigma \vec{\mathbf{t}} & \vec{\mathbf{t}}_s &= \sigma K \vec{\mathbf{n}} \\ \vec{\mathbf{n}}_s &= \sigma(T \vec{\mathbf{b}} - K \vec{\mathbf{t}}) & \vec{\mathbf{b}}_s &= -\sigma T \vec{\mathbf{n}}\end{aligned}\quad (1.1)$$

où $| |$ est la norme usuelle de \mathbf{R}^3 , T la *torsion* locale de \mathcal{C} et K la *courbure* locale de \mathcal{C} . Ici, comme dans toute la suite, la différentiation $\partial f / \partial x$ d'une fonction f par rapport à sa variable x est notée f_x . Nous utilisons également **la notation** \dot{f} au lieu de f_t si t est le temps. On a $\varphi \in [0, 2\pi[$ et nous choisissons $s \in [-\pi, +\pi[$ pour un anneau tourbillon et $s \in]-\infty, +\infty[$ pour un filament infini. Si $\sigma_s = 0$, le paramètre s est appelé *une longueur d'arc* et est noté a au lieu de s .

I.2.2. Coordonnées locales

Nous introduisons un *système de coordonnées locales* valable uniquement au voisinage de la fibre centrale du filament. C'est celui utilisé par Callegari et Ting² en 1978. Si un point \mathbf{M} voisin de la courbe (figure 1.2) est projeté orthogonalement en $\mathbf{P}(s)$ sur \mathcal{C} , alors $\overrightarrow{\mathbf{PM}}$ est dans le plan $(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{b}})$ formé par la normale et la binormale. Ainsi nous utilisons les coordonnées polaires (r, φ) dans ce plan et les vecteurs polaires unitaires $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\theta})$:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}} &= \vec{\mathbf{r}}(\varphi, s, t) = \vec{\mathbf{n}}(s, t) \cos \varphi + \vec{\mathbf{b}}(s, t) \sin \varphi \\ \vec{\theta} &= \vec{\theta}(\varphi, s, t) = -\vec{\mathbf{n}}(s, t) \sin \varphi + \vec{\mathbf{b}}(s, t) \cos \varphi\end{aligned}\quad (1.2)$$

De cette façon, nous définissons les coordonnées $\mathbf{M}(r, \varphi, s)$ et la base curviligne $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$. La transformation entre les coordonnées $\mathbf{M}(x_1, x_2, x_3)$ et les coordonnées $\mathbf{M}(r, \varphi, s)$ satisfait :

$$\vec{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \vec{\mathbf{X}}(s, t) + r\vec{\mathbf{r}}(\varphi, s, t) \quad (1.3)$$

avec

$$\vec{\mathbf{x}} = x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3\vec{\mathbf{e}}_3,$$

où $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ est une base Cartésienne.

I.2.3. Métrique associée aux coordonnées locales

On cherche le tenseur métrique g_{ij} associé à nos coordonnées. Pour cela, on différentie la formule (1.3) :

$$\begin{aligned} d\vec{\mathbf{x}} &= d(\vec{\mathbf{X}}(s, t) + r\vec{\mathbf{r}}(\varphi, s, t)) \\ &= d\vec{\mathbf{X}}(s, t) + \vec{\mathbf{r}}dr + r\vec{\mathbf{r}} \\ &= \vec{\mathbf{X}}_s ds + \vec{\mathbf{r}}dr \\ &\quad + r(\vec{\mathbf{n}}_s \cos(\varphi) + \vec{\mathbf{b}}_s \sin(\varphi))ds \\ &\quad + r(-\vec{\mathbf{n}} \sin(\varphi) + \vec{\mathbf{b}} \cos(\varphi))d\varphi \\ &= \sigma\vec{\mathbf{r}}ds + \vec{\mathbf{r}}dr \\ &\quad + r(\sigma(T\vec{\mathbf{b}} - K\vec{\tau}) \cos(\varphi) - \sigma T\vec{\mathbf{n}} \sin(\varphi))ds \\ &\quad + r(-\vec{\mathbf{n}} \sin(\varphi) + \vec{\mathbf{b}} \cos(\varphi))d\varphi \end{aligned}$$

que l'on réécrit :

$$d\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{r}}dr + \vec{\theta}r(d\varphi + T\sigma ds) + \vec{\tau}(\sigma - \sigma rK \cos(\varphi))ds$$

Nous posons

$$h_3 = \sigma[1 - rK \cos(\varphi)]$$

et alors

$$d\vec{\mathbf{x}} = dr\vec{\mathbf{E}}_1 + d\varphi\vec{\mathbf{E}}_2 + ds\vec{\mathbf{E}}_3$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_1 &= \vec{\mathbf{r}} \\ \vec{\mathbf{E}}_2 &= r\vec{\theta} \\ \vec{\mathbf{E}}_3 &= r\sigma T\vec{\theta} + h_3\vec{\tau} \end{aligned}$$

Il vient les produits scalaires suivants :

$$\vec{\mathbf{E}}_1 \bullet \vec{\mathbf{E}}_2 = 0$$

$$\vec{\mathbf{E}}_1 \bullet \vec{\mathbf{E}}_3 = 0$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 \bullet \vec{\mathbf{E}}_3 = r\sigma T \neq 0$$

Les coordonnées (r, φ, s) ne sont donc pas orthogonales. Nous obtenons des coordonnées orthogonales (r, Θ, s) en définissant Θ par :

$$\Theta = \varphi - \Theta_0(s, t)$$

avec

$$d\Theta_0 = -\sigma T(s, t) ds.$$

Nous avons alors :

$$d\vec{x} = \vec{r} dr + \vec{\theta} rd\Theta + \vec{\tau} h_3 ds$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{r} \\ \vec{E}_2 &= r\vec{\theta} \\ \vec{E}_3 &= h_3 \vec{\tau}\end{aligned}$$

Soit :

$$g_{ij} = \vec{E}_i \bullet \vec{E}_j,$$

le tenseur métrique. Alors :

$$g_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$g_1 = g_{11} = 1$$

$$g_2 = g_{22} = r^2$$

$$g_3 = g_{33} = h_3^2$$

Les coordonnées orthonormées (Λ_i) naturellement associées aux $(\lambda_i) = (r, \Theta, s)$ sont définies par :

$$d\Lambda_i = \sqrt{g_{ii}} d\lambda_i.$$

D'où :

$$d\Lambda_1 = dr$$

$$d\Lambda_2 = rd\Theta$$

$$d\Lambda_3 = h_3 ds$$

Les vecteurs de base de la base naturelle (Λ_i) sont $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$. Tant que $0 < r < 1/K$, l'expression $1 - Kr \cos(\varphi)$ ne peut pas s'annuler. Si $r > 1/K$ la transformation des coordonnées n'est plus bijective. Nous emploierons donc ces coordonnées curvilignes dans la suite seulement pour des points près de la fibre centrale.

Avec ces coordonnées orthogonales et un formulaire, nous obtenons facilement l'expression des opérateurs. Par exemple le gradient de pression s'écrit :

$$\text{grad}(p) = \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Theta}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial s} \right) \text{ sur } (\vec{r}, \vec{\Theta}, \vec{\tau}).$$

Le passage par les coordonnées orthogonales n'est qu'une étape qui nous permet d'utiliser les formulaires qui généralement sont donnés en coordonnées orthogonales. Il est alors facile de revenir aux coordonnées (r, φ, s) à l'aide du changement de variable pour passer de Θ à φ .

La seule dérivée partielle qui change est $\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{\Theta \text{ fixé}}$:

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{\Theta \text{ fixé}} = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{\varphi \text{ fixé}} - \sigma T \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Comme le problème va dépendre d'un petit paramètre ε , alors $\Theta_0 = \Theta_0(s, t, \varepsilon)$ dépend de ε et on voit qu'il vaut mieux travailler avec les variables (r, φ, s) pour lesquelles $\cos(n\varphi)$ (n entier) est inchangé, plutôt qu'avec les variables (r, Θ, s) pour lesquelles $\cos(n\varphi)$ (n entier) devient $\cos[n(\Theta + \Theta_0(s, t, \varepsilon))]$ qui doit être développé selon ε . Il vient alors, par exemple :

$$\text{grad}(p) = \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial p}{\partial s} - \sigma T \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) \right) \text{ sur } (\vec{r}, \vec{\Theta}, \vec{\tau}).$$

Dans ce manuscrit, nous utiliserons l'angle φ des coordonnées naturelles non orthogonales, qui est plus adéquat que l'angle Θ des coordonnées non orthogonales associées qu'ont utilisés Callegari et Ting².

I.3. Les champs et les grandeurs associées

Les champs sont décomposés sur les vecteurs de base. Ainsi, la vorticité s'écrit :

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \omega_1(\vec{x}, t) \vec{r} + \omega_2(\vec{x}, t) \vec{\Theta} + \omega_3(\vec{x}, t) \vec{\tau} \quad (1.4)$$

La vitesse du fluide $\vec{v}(\vec{x}, t)$ est la vitesse de la fibre $\dot{\vec{X}}$ ajoutée à une vitesse relative \vec{V} :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \dot{\vec{X}}(s, t) + \vec{V}(\vec{x}, t) \quad (1.5)$$

Cette vitesse relative en projection devient :

$$\vec{V} = u\vec{r} + v\vec{\theta} + w\vec{\tau} \quad (1.6)$$

où l'on appelle :

$u\vec{r}$: la vitesse radiale

$v\vec{\theta}$: la vitesse orthoradiale (ou circonférentielle)

$w\vec{\tau}$: la vitesse axiale.

La circulation Γ est définie par : $\Gamma = \int_0^{2\pi} vrd\varphi$, le débit axial M par :

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} wrdrd\varphi, \text{ et le débit linéique radial par : } M_r = \int_0^{2\pi} urd\varphi.$$

On cherche à déterminer l'évolution $\vec{X}(s,t)$ de la fibre centrale connaissant la forme initiale $\vec{X}_0(s) = \vec{X}(s, t=0)$ de celle-ci.

I.4. La formule de Biot et Savart

Le champ de vitesse $\vec{v}_{\text{Biot}}(\vec{x},t)$ induit par le champ de vorticité $\vec{\omega}(\vec{x},t)$ à chaque temps t est donné par l'intégrale de Biot et Savart :

$$\vec{v}_{\text{Biot}}(\vec{x},t,\varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\omega}(\vec{x}',t) \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' \quad (1.7)$$

qui peut être écrite avec les coordonnées locales près de \mathcal{C} :

$$\boxed{\vec{v}_{\text{Biot}}(r,\varphi,s,t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\omega}(r',\varphi',s',t) \wedge [(\vec{X}(s,t) + r\vec{r}(\varphi,s,t)) - (\vec{X}(s',t) + r'\vec{r}')]}{|(\vec{X}(s,t) + r\vec{r}(\varphi,s,t)) - (\vec{X}(s',t) + r'\vec{r}')|^3} h'_3 r' dr' d\varphi' ds'} \quad (1.8)$$

où $h'_3 = \sigma(s',t) (1 - K(s',t)r' \cos(\varphi'))$.

Nous pouvons ajouter un champ de *vitesse potentiel* (ou vitesse de Background) $\vec{v}_{\text{Back}}(\vec{x},t)$ à ce champ :

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \vec{v}_{\text{Biot}}(\vec{x},t) + \vec{v}_{\text{Back}}(\vec{x},t) \quad (1.9)$$

La vitesse $\vec{v}_{\text{Biot}}(\vec{x},t)$ est nulle à l'infini et $\vec{v}_{\text{Back}}(\vec{x},t)$ permet de satisfaire les conditions aux limites au bord du domaine si le domaine est borné.

I.5. Conservation de la masse, équations de Navier-Stokes et du tourbillon

L'équation de la conservation de la masse et les équations de Navier-Stokes sont écrites sur les coordonnées curvilignes locales (Annexe A.1.) :

$$(urh_3)_r + (h_3v)_\varphi + rw_s - \sigma Tr w_\varphi + r \vec{X}_s \bullet \vec{\tau} = 0 \quad (1.10)$$

$$\vec{a} = -grad p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{h_3} \left(\frac{1}{h_3} \vec{X}_s \right)_s \quad (1.11a)$$

avec

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial \hat{\vec{V}}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} + u \dot{\vec{r}} + v \dot{\vec{\theta}} + w \dot{\vec{\tau}} + \ddot{\vec{X}} + (\vec{V} - r \vec{r}_t) \bullet grad \vec{V} + \frac{\dot{\vec{X}}_s}{h_3} (w - r \dot{\vec{r}} \bullet \vec{\tau}) \quad (1.11b)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{\vec{V}}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} = \frac{\partial u}{\partial t} \vec{r} + \frac{\partial v}{\partial t} \vec{\theta} + \frac{\partial w}{\partial t} \vec{\tau} \quad (1.11c)$$

A l'aide d'un formulaire sur les expressions des opérateurs dans des coordonnées orthogonales quelconques, on trouve les expressions des opérateurs $grad p$, $grad \vec{V}$ et $\Delta \vec{V}$ sur les coordonnées curvilignes.

De la même façon,

$$div \vec{\omega} = 0 \quad (1.12a)$$

conduit à :

$$(w_1 rh_3)_r + (h_3 w_2)_\varphi + r \omega_{3s} - \sigma Tr \omega_{3\varphi} = 0 \quad (1.12b)$$

et l'équation de la vorticité s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \hat{\vec{\omega}}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} + \omega_1 \dot{\vec{r}} + \omega_2 \dot{\vec{\theta}} + \omega_3 \dot{\vec{\tau}} + (\vec{v} - \vec{X} - r \vec{r}) \bullet grad \vec{\omega} - \vec{\omega} \bullet grad \vec{v} = \nu \Delta \vec{\omega} \quad (1.13)$$

La relation entre la vorticité et la vitesse :

$$\vec{\omega} = rot \vec{v} \quad (1.14a)$$

devient :

$$\vec{\omega} = rot \vec{V} + \frac{\vec{\tau}}{h_3} \wedge \vec{X}_s \quad (1.14b)$$

Nous faisons le choix de travailler avec la vitesse relative \vec{V} plutôt qu'avec \vec{v} et avec

l'équation de Navier Stokes plutôt qu'avec l'équation de la vorticité.

I.6. Le filet tourbillon et la nécessité d'une épaisseur d'un filament

Dans ce paragraphe, on montre qu'il est nécessaire que le filament ait une épaisseur pour que sa vitesse de déplacement soit finie. Ce déplacement ne dépend pas uniquement de la géométrie de la fibre centrale, il est couplé avec la forme et l'évolution des champs dans la petite épaisseur du filament. Cette zone est donc une couche limite sur une courbe.

I.6.1. Le filet tourbillon droit

Le filament tourbillon le plus simple est *le filet tourbillon droit* pour lequel le champ de vorticité est infiniment concentré sur une droite (Figure 1.3). Son expression est $\vec{\omega} = \Gamma \delta \vec{\tau}$ où $\delta \vec{\tau}$ est la distribution de Dirac concentrée et tangente à la droite. On utilise des coordonnées cylindriques (r, φ, s) associées à cette droite, où (r, φ) sont les coordonnées polaires dans un plan perpendiculaire à la droite et s une abscisse sur la droite. Ici, $\vec{\tau}$ est le vecteur tangent à la droite et $(\vec{r}, \vec{\theta})$ les vecteurs polaires.

Ce filet tourbillon est placé dans un écoulement potentiel $\vec{v}_{\text{Back}}(\vec{x})$ indépendant de s et on veut déterminer son évolution. Reste t'il droit ? Se déplace t'il ? Le problème est donc bidimensionnel. Dans un plan, il correspond au mouvement d'un point tourbillon en O dont on repère la position à l'aide d'un vecteur $\vec{X}(t)$.

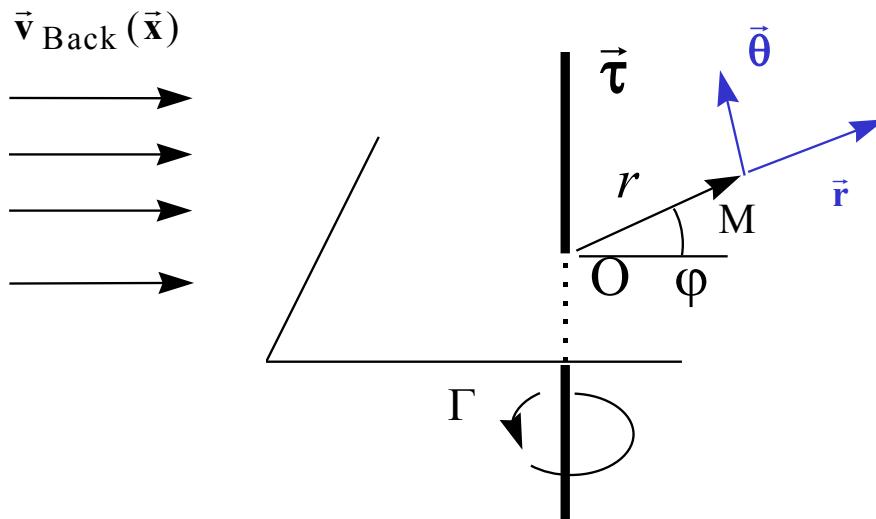


Figure 1.3 : Le filet tourbillon droit dans un écoulement potentiel

Le champ de vitesse induit par ce filet est axisymétrique. Son expression est :

$$\vec{v}_{\text{Biot}} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{\theta} \quad (1.15)$$

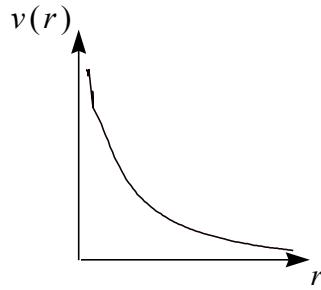


Figure 1.4 : Profil de vitesse orthoradiale

Si le fluide est parfait, la vorticité est gelée dans le fluide et le point tourbillon se déplace avec la vitesse :

$$\overset{\bullet}{\vec{X}} = \vec{v}(\vec{X}) = \vec{v}_{\text{Back}}(\vec{X}) + \vec{v}_{\text{Biot}}(\vec{X})$$

Bien que $\vec{v}_{\text{Biot}}(\vec{X})$ soit infini sa partie axisymétrique est nulle et on fait alors l'hypothèse⁸ que ce terme n'a pas de contribution, si bien que :

$$\boxed{\overset{\bullet}{\vec{X}} = \vec{v}_{\text{Back}}(\vec{X})} \quad (1.16)$$

On considère deux points tourbillons de circulation opposée Γ et distants l'un de l'autre d'une longueur L , dans un domaine infini sans écoulement potentiel (Figure 1.5). En appliquant la même démarche que précédemment, on trouve que l'ensemble des deux

tourbillons se déplace sans se déformer à une vitesse $v(A) = v(B) = \frac{\Gamma}{2\pi L}$.

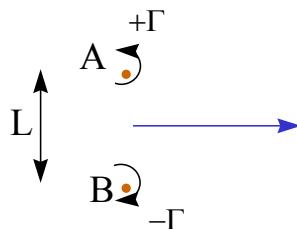


Figure 1.5 : Deux points tourbillons contrarotatifs

La même démarche peut être appliquée pour le mouvement de n points tourbillons d'un fluide parfait qui forment alors un système Hamiltonien.

I.6.2. Le filament tourbillon droit

Si l'on considère que le filet tourbillon précédent a une petite épaisseur, c'est un *filament tourbillon droit*. Il a nécessairement une épaisseur lorsqu'il existe de la diffusion visqueuse. Celui-ci est placé dans un écoulement potentiel $\vec{v}_{\text{Back}}(\vec{x}, t)$. Le problème est donc bidimensionnel. Dans un plan, il correspond au mouvement d'une ‘tache’ tourbillon (vortex patched) qui est concentrée autour d'un point, appelé *point central*, qui est repéré par le vecteur \vec{X} .

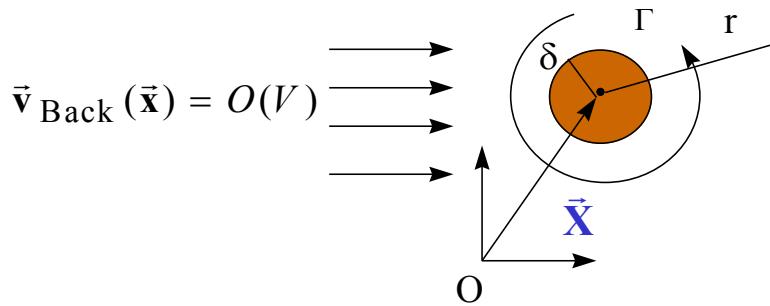


Figure 1.6 : Le filament tourbillon droit dans un écoulement potentiel

Il y a deux longueurs caractéristiques dans ce problème : une petite longueur l de l'ordre de l'épaisseur δ du filament et une grande longueur $L = \Gamma / V$ liée à l'écoulement potentiel, où V est l'ordre de l'intensité de la vitesse. Le rapport de ces deux longueurs caractéristiques vérifie la relation : $\frac{l}{L} \ll 1$, ce qui permet de définir un petit paramètre ε par

$\varepsilon = \frac{l}{L}$. La longueur l est prise égale à l'épaisseur δ_0 initiale du filament. L'épaisseur δ n'est définie qu'en ordre de grandeur pour l'instant et ne sera définie qu'au moment opportun lorsque l'on aura choisi un profil particulier du champ de vorticité. Le petit paramètre ε est donc *l'épaisseur initiale réduite* du filament tourbillon. Nous définissons alors l'épaisseur réduite $\bar{\delta}$ du filament par $\bar{\delta} = \frac{\delta}{\varepsilon L}$. Il vient alors obligatoirement : $\bar{\delta}_0 = 1$.

Le nombre de Reynolds R_e est défini par $R_e = \frac{\Gamma(t=0)}{\nu} = \frac{\Gamma_0}{\nu}$ où ν est la viscosité cinématique du fluide. Définissons le nombre α tel que $R_e^{-1/2} = \alpha \varepsilon$. On se placera soit dans le cas $\alpha = O(1)$, soit dans le cas du fluide parfait : $\alpha = 0$. L'échelle de longueur liée à la viscosité est donc soit de l'ordre de grandeur de l'épaisseur, soit nulle.

Utilisons L et $\Gamma(t=0)$ comme grandeurs caractéristiques d'adimensionalisation. Il existe deux limites asymptotiques significatives dans ce problème. D'abord, on a un *problème extérieur*, défini par la *limite extérieure* : $\varepsilon \rightarrow 0$ à r fixé, qui décrit la situation loin du point central : on voit alors un filet tourbillon comme dans le paragraphe précédent. Puis, on a un *problème intérieur*, défini par une *limite intérieure* : $\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ fixé, qui décrit la situation près de celui-ci : on voit une tache de vorticité. On est donc en présence d'une couche limite autour du point central et on utilise la méthode des Développements Asymptotique Raccordés pour la décrire.

Remarquons qu'il existe deux vitesses caractéristiques : $\frac{\Gamma}{L}$ et $\frac{\Gamma}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Gamma}{\bar{L}}$; deux temps caractéristiques : $\frac{L^2}{\Gamma}$ et $\frac{\delta^2}{\Gamma} = \varepsilon^2 \frac{L^2 \bar{\delta}^2}{\Gamma}$. On définit ainsi le temps dilaté $\bar{t} = \frac{t}{\varepsilon^2}$.

En utilisant la définition de la circulation autour du point central, nous voyons facilement que, près de celui-ci (pour $r = O(\varepsilon)$), la vitesse du fluide est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ et la vorticité de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Pour $r = O(\varepsilon)$, on a les développements suivants :

$$\vec{\omega}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, t, \bar{t}) + \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{\omega}^{\text{inn}(1)} + \varepsilon^1 \vec{\omega}^{\text{inn}(2)} + \varepsilon^2 \vec{\omega}^{\text{inn}(3)} + \dots \quad (1.17)$$

$$\vec{V}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{V}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, t, \bar{t}) + \vec{V}^{\text{inn}(1)} + \varepsilon^1 \vec{V}^{\text{inn}(2)} + \dots \quad (1.18)$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} u^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} u^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, t, \bar{t}) + u^{\text{inn}(1)} + \dots \\ v^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} v^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, t, \bar{t}) + v^{\text{inn}(1)} + \dots \\ w^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} w^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, t, \bar{t}) + w^{\text{inn}(1)} + \dots \end{aligned} \quad (1.19)$$

où la vitesse a été décomposée selon : $\vec{v} = \vec{X} + \vec{V}$.

Pour $r = O(1)$, on a les développements suivants :

$$\vec{\omega}^{\text{out}} = 0 \quad (1.20)$$

$$\vec{v}^{\text{out}} = \vec{v}^{\text{out}(0)}(\bar{r}, \varphi, t, \bar{t}) + \varepsilon^1 \vec{v}^{\text{out}(1)} + \dots \quad (1.21)$$

Les variations temporelles rapides \bar{t} ne sont presque pas vues sur une échelle temporelle t liée à L^2 / Γ , car elles sont de nature périodique.

Le point centrale est une inconnue du problème. Il dépend de ε et a un développement de la forme :

$$\vec{\mathbf{X}}(t, \varepsilon) = \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(t) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{X}}^{(1)}(t) + \dots \quad (1.22)$$

On recherche une équation d'évolution pour $\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(t)$ connaissant sa position initiale $\vec{\mathbf{X}}_0^{(0)}$, c'est à dire une relation du type :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}} = f(\vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}}). \quad (1.23)$$

Ici, le champ de vitesse intérieur $\vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}}$ peut intervenir dans cette équation d'évolution. Le champ de vitesse initiale du filament est donné par le champ de vitesse relatif initial

$\vec{\mathbf{V}}_0^{\text{inn}} = \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}}(t=0)$ et la vitesse initiale $\dot{\vec{\mathbf{X}}}_0^{(0)}$ de la fibre centrale. Il peut aussi être donné par le champ de vorticité initial $\vec{\omega}_0^{\text{inn}} = \vec{\omega}^{\text{inn}}(t=0)$ et l'écoulement potentiel. La vitesse initiale de la particule, qui a la même position que le point central, ainsi que celle de tous les autres points, est alors déterminée par l'application de la loi de Biot et Savart.

Le point central n'a été défini que comme *un point autour duquel la vorticité est concentrée*, cependant tout point de la zone de vorticité concentrée satisfait cette condition. Il faut donc préciser la définition de celui-ci, si on veut pouvoir déterminer une équation

d'évolution : $\dot{\vec{\mathbf{X}}} = f(\vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}})$. Il peut être défini comme *le point matériel qui initialement est en $\vec{\mathbf{X}}_0^{(0)}$* , mais on peut alors avoir une vitesse $\dot{\vec{\mathbf{X}}}$ de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$: il suffit de prendre le cas d'un disque de vorticité et d'une position initiale $\vec{\mathbf{X}}_0^{(0)}$ qui ne serait pas au centre du disque. Cette vitesse en $\frac{1}{\varepsilon}$ nécessite alors un développement à échelles multiples temporelles de la forme :

$$\vec{\mathbf{X}}(t, \varepsilon) = \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(t, t/\varepsilon) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{X}}^{(1)}(t, t/\varepsilon) + \dots$$

On préfère définir ce point central comme *le centre de vorticité de la tache tourbillon*. A priori ce point est matériel (on a donc $\vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}} = 0$ en $\bar{r} = 0$) et son évolution peut être décrite par un développement de la forme :

$$\vec{X}(t, \varepsilon) = \vec{X}^{(0)}(t) + \varepsilon^1 \vec{X}^{(1)}(t) + \dots$$

Comme le point central est matériel, lorsque sa position initiale et le champ initial de vorticité sont choisis, la vitesse initiale de celui-ci ne peut pas être choisie, car sa vitesse est alors déterminée. Le fait d'avoir le terme $\overset{\bullet}{\vec{X}}^{(0)}$ dans l'équation de Navier Stokes ne doit surtout pas faire penser qu'il faudra se donner \vec{X}_0 et $\dot{\vec{X}}_0$: par exemple, ce terme $\overset{\bullet}{\vec{X}}^{(0)}$ n'apparaît pas dans l'équation de Navier Stokes écrite sur les coordonnées locales avec la vitesse \vec{v} (Annexe A.1.).

L'équation d'évolution du point central découle de la règle de raccord asymptotique et s'écrit⁹ :

$$\overset{\bullet}{\vec{X}}^{(0)} = \vec{v}_{\text{Back}}(\vec{X}^{(0)}) \quad (1.24)$$

à l'ordre principal, dans le cas d'un ordre principal $\vec{V}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, t, \bar{t}) = \vec{V}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, t)$ axisymétrique et ne dépendant que du temps t . On retrouve donc le résultat qui avait été précédemment intuité.

Dans la vitesse $\overset{\bullet}{\vec{X}}^{(0)}$, il y a toute la partie de la vitesse $\vec{v} = \overset{\bullet}{\vec{X}}^{(0)} + \vec{V}$ qui dépend du temps t et ne dépend pas de \bar{r} . Cette propriété pourrait être utilisée (ainsi que l'ont fait implicitement Ting et Tung⁹) pour définir le point central $\vec{X}(t)$, qui serait alors matériel, mais ce procédé a le défaut de définir les développements avant de définir le problème, au lieu de définir le problème et de trouver les développements solutions.

Dans le cas visqueux, on définit précisément l'épaisseur δ du filament qui évolue selon la relation :

$$\bar{\delta} = \delta / \varepsilon = 1 + \sqrt{4\Gamma\alpha^2 t} \quad (1.25)$$

et le profil de vitesse relative est donné sur la figure 1.7. La partie en pointillés est l'écoulement extérieur singulier en 0, et on voit que le fait de tenir en compte la couche limite permet d'annuler la vitesse en zéro.

La situation plus générale $\vec{V}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, t, \bar{t})$ a été étudiée par Ting et Tung⁹. Dans cet article, on peut regretter de n'avoir pas une définition intrinsèque du point central $\vec{X}(t)$. Lors

du raccord asymptotique, dans la vitesse $\dot{\vec{X}}$, il y a toute la partie de la vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{X}} + \vec{V}$ qui dépend du temps et ne dépend pas de \bar{r} et c'est ce qui définit le point central.

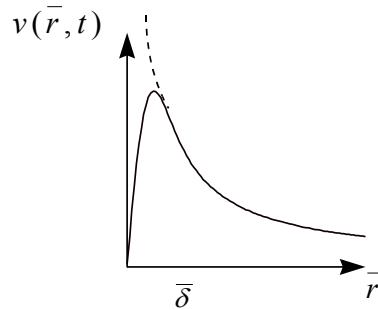


Figure 1.7 : Vitesse orthoradiale intérieure

Le résultat de ce paragraphe : $\dot{\vec{X}}^{(0)} = \vec{v}_{\text{Back}}(\vec{X}^{(0)})$ est le même que celui qui avait été obtenu au paragraphe précédent. Cette approche n'était donc pas forcément nécessaire, car elle n'apporte pas de résultat nouveau, cependant elle permet de justifier le résultat que l'on avait intuité et donne un éclairage intéressant dans lequel la singularité en zéro est éliminée. Il n'y a pas de couplage ici entre l'évolution du point central et la structure interne : \vec{V}^{inn} .

I.6.3. Le filet tourbillon courbe

Le filament tourbillon le plus simple après *le filet tourbillon droit* est *le filet tourbillon courbe* pour lequel le champ de vorticité est infiniment concentré sur une courbe (Figure 1.8). Son expression est $\vec{\omega} = \Gamma \delta_C \vec{\tau}$ où $\delta_C \vec{\tau}$ est la distribution de Dirac concentrée et tangente à la courbe. On utilise des coordonnées curvilignes (r, φ, s) associées à cette courbe (Figure 1.9), où (r, φ) sont les coordonnées polaires dans un plan perpendiculaire à la courbe et s une abscisse sur la courbe. Ici, $\vec{\tau}$ est le vecteur tangent à la courbe et $(\vec{r}, \vec{\theta})$ les vecteurs polaires.

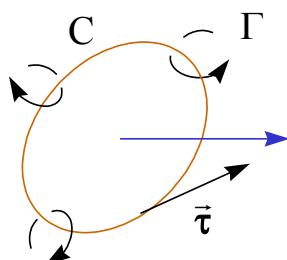


Figure 1.8: Le filet tourbillon courbe

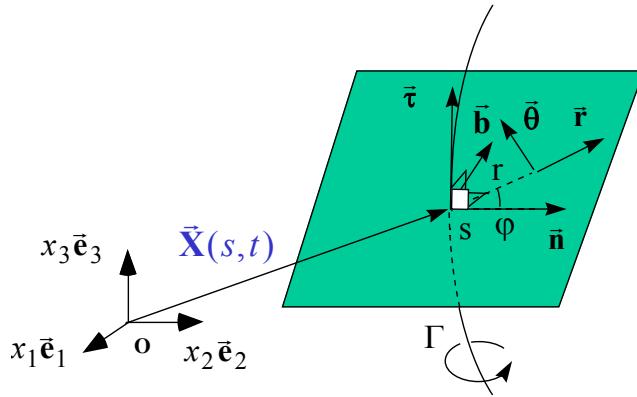


Figure 1.9 : Les coordonnées associées à la courbe

Ce filet tourbillon est placé dans un écoulement potentiel $\vec{v}_{\text{Back}}(\vec{x})$ et on veut déterminer son évolution. Comment se déforme t'il et se déplace t'il ?

Le champ de vitesse induit par ce filet est :

$$\vec{v}_{\text{Biot}}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{\vec{\tau}(s') \wedge (\vec{x} - \vec{X}(s'))}{|\vec{x} - \vec{X}(s')|^3} ds'. \quad (1.26)$$

Si le fluide est parfait, comme la vorticité est gelée dans le fluide, le filet tourbillon se déplace avec la vitesse

$$\dot{\vec{X}} = \vec{v}(\vec{X}) = \vec{v}_{\text{Back}}(\vec{X}) + \vec{v}_{\text{Biot}}(\vec{X}) \quad (1.27)$$

On voit que si on pose $\vec{x} = \vec{X}(s)$ dans l'intégral précédente, on a un problème lorsque $s' = s$, car alors le dénominateur de l'intégrant s'annule. Il y a donc une singularité et on se propose de déterminer le développement de \vec{v}_{Biot} lorsque r tend vers zéro, c'est à dire :

$$\vec{v}_{\text{Biot}}(r \rightarrow 0, \varphi, s) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{\vec{\tau}(s') \wedge ((\vec{X}(s) + r\vec{r}(s, \varphi)) - \vec{X}(s'))}{|(\vec{X}(s) + r\vec{r}(s, \varphi)) - \vec{X}(s')|^3} ds'$$

Cette intégrale est une intégrale singulière par rapport au petit paramètre r . Il est important de savoir calculer de telles intégrales pour résoudre notre problème. Afin de trouver le développement de cette intégrale, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés des intégrales singulières comme elle est présentée par François⁵ ou Bender et Orszag¹. Cette méthode sera précisée au chapitre II ou elle sera appliquée pour obtenir le développement de l'intégrale précédente ainsi que d'autres développements intéressants de l'intégrale de Biot et Savart. Le résultat est le suivant :

$$\vec{v}_{\text{Biot}}(r \rightarrow 0, s) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{\theta} + \frac{\Gamma}{2\pi} K \ln \frac{1}{r} \vec{b} + \frac{K}{4\pi} \cos \varphi \vec{\theta} + O(1) \quad (1.28)$$

où K est la courbure en un point du filet tourbillon. Lorsque la courbure est nulle, on retrouve le filet droit du paragraphe 1.6.1 dont la singularité en $\frac{1}{r}$ ne pose pas de problème et a été largement commentée au paragraphe 1.6.2. Le terme $\frac{K}{4\pi} \cos \varphi \vec{\theta}$ a pour partie axisymétrique $\frac{K}{8\pi} \vec{b}$ et la partie singulière non axisymétrique peut être négligée, car elle ne doit pas contribuer au déplacement du filet. Le terme $\frac{\Gamma}{2\pi} K \ln \frac{1}{r} \vec{b}$ est problématique, car il veut dire que le filet tourbillon courbe se déplace avec une vitesse infinie. Celui-ci n'existe donc pas dans la nature où il a nécessairement une épaisseur δ . Remarquons que de toute façon, il a nécessairement une épaisseur lorsqu'il existe de la diffusion visqueuse. On est donc en présence d'une couche limite autour d'une courbe de l'espace et on utilise la méthode des Développements Asymptotique Raccordés pour la décrire et la résoudre. Le mouvement d'un filament tourbillon courbe ne peut donc pas être décrit aussi facilement que celui d'un filament droit.

Pour qu'un filament courbe ait une vitesse fini, il faut qu'il ait une épaisseur non nulle. Il faut fondamentalement résoudre un problème de couche limite pour trouver son mouvement, qui dépend de ce qu'il se passe dans l'épaisseur très fine du filament.

Le filament tourbillon courbe de faible épaisseur est donc présenté dans les paragraphes qui suivent avec son développement extérieur et intérieur ainsi que le schéma de résolution de ce problème de couche limite.

I.7. Echelles de longueur et adimensionalisation

Le problème que l'on étudie est un problème d'évolution. Il est donc déterminé par les propriétés physiques du fluide, qui ici se résument en la viscosité, et par une condition initiale : géométrie de la fibre centrale, forme du champ de vorticité initial et forme de l'écoulement potentiel. La partie tangentielle de la vorticité a un ordre de grandeur qui peut être caractérisé par la circulation $\Gamma(t=0)$.

Il y a deux longueurs caractéristiques dans ce problème : une petite longueur l de l'ordre de l'épaisseur δ du filament (qui a été définie en ordre de grandeur au paragraphe I.1) et une grande longueur L de l'ordre de toutes les autres échelles de longueurs : le rayon de courbure, la longueur de l'anneau,... Le rapport de ces deux longueurs caractéristiques vérifie la relation : $\frac{l}{L} \ll 1$, ce qui permet de définir un petit paramètre ε par $\varepsilon = \frac{l}{L}$.

Les longueurs caractéristiques l et L ne sont définies ici qu'en ordre de grandeur. En reprenant la terminologie de Darrozes et Monavon³, on les appelle des longueurs caractéristiques *en blanc*. Leur définition exacte n'est pas nécessaire pour résoudre le problème et ne sera précisée qu'au moment opportun. La longueur L ne sera définie que lorsque l'on aura choisi une géométrie particulière de la fibre centrale. Par exemple, si on étudie un filament circulaire, L pourra être le rayon ou le diamètre du cercle. La longueur l est prise égale à l'épaisseur δ_0 initiale du filament. L'épaisseur δ n'est définie qu'en ordre de grandeur pour l'instant et ne sera définie qu'au moment opportun lorsque l'on aura choisi un profil particulier du champ de vorticité. Le petit paramètre ε est donc *l'épaisseur initiale réduite* du filament tourbillon. Nous définissons alors l'épaisseur réduite $\bar{\delta}$ du filament par $\bar{\delta} = \frac{\delta}{\varepsilon L}$. Il vient alors obligatoirement : $\bar{\delta}_0 = 1$.

L'écoulement potentiel : $\vec{v}_{\text{Back}}(\vec{x}, t)$, s'il existe, est pris de l'ordre de $\Gamma(t=0) / L$. Il n'introduit donc pas de nouvelle échelle de longueur.

Le nombre de Reynolds R_e est défini par $R_e = \frac{\Gamma(t=0)}{\nu} = \frac{\Gamma_0}{\nu}$ où ν est la viscosité cinématique du fluide. Définissons le nombre α tel que $R_e^{-1/2} = \alpha \varepsilon$. On se place soit dans le cas $\alpha = O(1)$, soit dans le cas du fluide parfait : $\alpha = 0$. L'échelle de longueur liée à la viscosité est donc soit de l'ordre de grandeur de l'épaisseur, soit nulle.

Le nombre de Swirl S_w est défini par :

$$S_w = \frac{\Gamma(t=0)\delta_0}{M(t=0)} = \frac{\Gamma_0\delta_0}{M_0}.$$

On utilise L et $\Gamma(t=0)$ comme grandeurs caractéristiques d'adimensionalisation et on introduit les variables sans dimensions suivantes :

$$r^* = r / L \quad \vec{X}^* = \vec{X} / L \quad \sigma^* = \sigma / L \quad K^* = LK \quad T^* = LT \quad S^* = S / L \quad \delta^* = \delta / L$$

où \vec{X} décrit la courbe \mathcal{C} et \vec{X}^* la courbe \mathcal{C}^* et :

$$t^* = \frac{t}{L^2 / \Gamma} \quad \vec{\mathbf{v}}^* = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\Gamma / L} \quad \vec{\boldsymbol{\omega}}^* = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}}}{\Gamma / L^2} \quad p^* = \frac{p}{\rho(\Gamma / L)^2}$$

où $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sont respectivement le champ de vitesse et de vorticité. Dans la suite, nous ne noterons plus les étoiles. La distance radiale, l'abscisse et le temps de référence sont ici : r , s et t .

I.8. Les limites asymptotiques et développements

Il existe deux limites asymptotiques significatives dans ce problème d'anneau tourbillon. D'abord, il y a un *problème extérieur*, défini par la *limite extérieure* : $\varepsilon \rightarrow 0$ à r fixé, qui décrit la situation loin de la fibre centrale. Puis, il y a un *problème intérieur*, défini par une *limite intérieure* : $\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ fixé, qui décrit la situation près de la ligne centrale.

Par développement intérieur $\vec{\mathbf{f}}^{\text{inn}}(\vec{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ d'un champ de vecteurs $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}, \varepsilon)$, nous entendons le développement de $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ fixé et par développement extérieur $\vec{\mathbf{f}}^{\text{out}}(\vec{\mathbf{x}}, \varepsilon)$, le développement de $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ à r fixé.

Remarquons qu'il existe deux longueurs caractéristiques : L et $\delta = \varepsilon \bar{L}$; deux vitesses caractéristiques : $\frac{\Gamma}{L}$ et $\frac{\Gamma}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Gamma}{\bar{L}}$; deux temps caractéristiques : $\frac{L^2}{\Gamma}$ et $\frac{\delta^2}{\Gamma} = \varepsilon^2 \frac{L^2 \bar{L}^2}{\Gamma}$. On définit ainsi l'abscisse dilatée $\bar{s} = \frac{s}{\varepsilon}$ et le temps dilaté $\bar{t} = \frac{t}{\varepsilon^2}$.

Par notre adimensionnalisation et la définition de la circulation autour de \mathcal{C} , lorsque $r = O(\varepsilon)$, la vitesse du fluide près de l'anneau tourbillon est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ et la vorticité de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Pour $r = O(\varepsilon)$, on a les développements suivants :

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\boldsymbol{\omega}}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{\boldsymbol{\omega}}^{\text{inn}(1)} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{\text{inn}(2)} + \varepsilon^1 \vec{\boldsymbol{\omega}}^{\text{inn}(3)} + \dots \quad (1.29)$$

$$\vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}(1)} + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}(2)} + \dots \quad (1.30)$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned}
u^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} u^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + u^{\text{inn}(1)} + \dots \\
v^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} v^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + v^{\text{inn}(1)} + \dots \\
w^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} w^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + w^{\text{inn}(1)} + \dots
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Pour $r = O(1)$, on a les développements suivants :

$$\vec{\omega}^{\text{out}} = 0 \tag{1.32}$$

$$\boxed{\vec{v}^{\text{out}} = \vec{v}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \varepsilon^1 \vec{v}^{\text{out}(1)} + \dots} \tag{1.33}$$

Les variations temporelles rapides \bar{t} et les petites ‘rugosités’ spatiales \bar{s} ne sont presque pas vues sur une échelle spatiale s liée à L et une échelle temporelle t liée à L^2 / Γ , car elles sont de nature périodiques.

Il vient alors les développements adimensionnels suivants :

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \Gamma^{(0)} + \varepsilon \Gamma^{(1)} + \varepsilon^2 \Gamma^{(2)} + \dots \\
M &= \varepsilon M^{(0)} + \varepsilon^2 M^{(1)} + \dots \\
M_r &= M_r^{(0)} + \varepsilon M_r^{(1)} + \varepsilon^2 M_r^{(2)} + \dots
\end{aligned}$$

Le cas $M_r^{(0)} \neq 0$ correspond à une production de fluide dans l'anneau tourbillon. Si l'on observe à une échelle L et sur un temps réduit t , on voit une répartition linéique de source d'intensité $M_r^{(0)}$. Cela ne correspond pas à notre étude qui sera toujours effectuée à $M_r^{(0)} = 0$, car en tout point du fluide on vérifie exactement $\text{div}\vec{v} = 0$ et il n'y a pas de production volumique de matière. Toujours à cette même échelle, les développements précédents permettent de voir un jet concentré et un doublet dont les intensités sont de l'ordre de ε . A partir des grandeurs adimensionnelles, le nombre de Swirl S_w devient :

$$S_w = \frac{\varepsilon}{M_0}$$

et on a $S_w = O(1)$ si $\Gamma_0^{(0)} \neq 0$ et $M_0^{(0)} \neq 0$.

La fibre centrale est une inconnue du problème. Elle dépend de ε et a un développement de la forme :

$$\boxed{\bar{\mathbf{X}}(s, t, \varepsilon) = \bar{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \bar{\mathbf{X}}^{(1)}(s, t) + \dots} \tag{1.34}$$

On recherche une équation d'évolution pour $\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)$ connaissant sa forme initiale $\vec{\mathbf{X}}_0^{(0)}(s)$ et les ordres supérieurs, c'est à dire une relation du type :

$$\boxed{\dot{\vec{\mathbf{X}}} = f(\vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}})}$$
 (1.35)

Ici, le champ de vitesse intérieur intervient dans l'équation, car l'épaisseur du filament et la structure interne $\vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}}$ doivent être prises en compte dans la détermination de cette évolution. Le champ de vitesse initiale du filament est donné par le champ de vitesse relatif initial $\vec{\mathbf{V}}_0^{\text{inn}} = \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}}(t=0)$ et la vitesse initiale $\dot{\vec{\mathbf{X}}}_0^{(0)}$ de la fibre centrale. Il peut aussi être donné par le champ de vorticité initial $\vec{\omega}_0^{\text{inn}} = \vec{\omega}^{\text{inn}}(t=0)$ et l'écoulement potentiel. La vitesse initiale des particules, qui ont la même position que la fibre centrale, ainsi que celle de tous les autres points, est alors déterminée par l'application de la loi de Biot et Savart.

I.9. Devenir des développements dans d'autres adimensionalisations

Il est intéressant de voir ce que deviennent les développements précédent si l'on prend d'autres grandeurs que L et Γ_0 pour l'adimensionnaliser. En effet :

Les personnes qui étudient les tourbillons⁶ ou les jets tournants⁷ ne prennent pas systématiquement les grandeurs précédentes pour adimensionnaliser et il est plus facile de comparer ce qu'ils étudient avec ce que l'on fait ici, si on donne ce que deviennent nos développements dans leur système d'adimensionalisation.

I.9.1. Adimensionalisation avec δ_0 et Γ_0

Il est intéressant de regarder ce que l'on aurait obtenu, si on avait pris δ_0 et Γ_0 comme grandeurs d'adimensionalisation plutôt que L et Γ_0 . Soient : $\vec{\omega}, \vec{\mathbf{v}}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{M}$ les grandeurs adimensionnelles trouvées. Elles vérifient :

$$\vec{\omega} = \varepsilon^2 \vec{\omega}, \quad \vec{\mathbf{v}} = \varepsilon \vec{\mathbf{v}}, \quad \bar{u} = \varepsilon u, \quad \bar{v} = \varepsilon v, \quad \bar{w} = \varepsilon w, \quad \bar{M} = M / \varepsilon.$$

Toutes ces quantités sont de l'ordre de 1. Pour $r = O(\varepsilon)$, on a les développements suivants :

$$\vec{\omega}^{\text{inn}} = \vec{\omega}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \varepsilon^1 \vec{\omega}^{\text{inn}(1)} + \varepsilon^2 \vec{\omega}^{\text{inn}(2)} + \varepsilon^3 \vec{\omega}^{\text{inn}(3)} + \dots$$

$$\vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}} = \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}(1)} + \varepsilon^2 \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}(2)} + \dots$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned}\bar{u}^{\text{inn}} &= u^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \varepsilon^1 u^{\text{inn}(1)} + \dots \\ \bar{v}^{\text{inn}} &= v^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \varepsilon^1 v^{\text{inn}(1)} + \dots \\ \bar{w}^{\text{inn}} &= w^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \varepsilon^1 w^{\text{inn}(1)} + \dots\end{aligned}$$

Pour $r = O(1)$, on a les développements suivants :

$$\vec{\omega}^{\text{out}} = 0$$

$$\vec{v}^{\text{out}} = \varepsilon^1 \vec{v}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \varepsilon^2 \vec{v}^{\text{out}(1)} + \dots$$

Il vient donc les développements adimensionnels suivants :

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \varepsilon \Gamma^{(1)} + \varepsilon^2 \Gamma^{(2)} + \dots$$

$$\bar{M} = M^{(0)} + \varepsilon^1 M^{(1)} + \dots$$

A partir des nouvelles grandeurs adimensionnelles, le nombre de Swirl S_w devient :

$$S_w = \frac{1}{\bar{M}_0}$$

et $S_w = O(1)$ si $\Gamma_0^{(0)} \neq 0$ et $M_0^{(0)} \neq 0$.

Cette adimensionalisation correspond à avoir fait un zoom dans toutes les directions de l'espace et également sur le temps : la distance radiale, l'abscisse et le temps de référence sont ici : \bar{r} , \bar{s} et \bar{t} . On remarque alors qu'à cette échelle, on a un écoulement qui est de l'ordre de 1. C'est *un jet tourbillon* de circulation Γ et de débit axial $\bar{M} = O(1)$.

Si $M_0^{(0)} = 0$, on a $S_w = O(\varepsilon)$. On peut donc décrire des nombres de swirl de l'ordre de 1 : $S_w = O(1)$ (jet tourbillon) ou très inférieur à 1 : $S_w \ll 1$ (tourbillon), en prenant Γ comme grandeur caractéristique d'adimensionalisation.

I.9.2. Adimensionalisation avec $M = \varepsilon \bar{M}$

Le temps et la vitesse de référence pour une adimensionalisation avec L et M sont : $\varepsilon S_w t$ et $\vec{v} / (S_w \varepsilon)$ (d'où un débit de l'ordre de 1 et une circulation de l'ordre de $1/\varepsilon$), alors qu'ils sont : $S_w \bar{t}$ et \vec{v} / S_w avec δ_0 et M .

I.9.3. Adimensionalisation avec \bar{M}

Le temps et la vitesse de référence pour une adimensionalisation avec L et \bar{M} sont : $S_w t$ et \vec{v} / S_w (d'où un débit de l'ordre de ε et une circulation de l'ordre de 1).

Le cas : $S_w = O(1)$ (jet tourbillon), peut donc aussi être décrit en prenant le débit axial dimensionnel \bar{M} comme grandeur d'adimensionalisation.

Le cas $S_w \gg 1$ (jet) nécessite un développement qui commence par S_w / ε dans une adimensionalisation avec Γ , alors que dans la présente adimensionalisation, il commence en $1/\varepsilon$ comme dans le cas $S_w = O(1)$ ou $S_w \ll O(1)$.

I.10. Les équations du problème intérieur

I.10.1. Les équations aux dérivées partielles intérieures

Comme le champ de vitesse intérieur \vec{V}^{inn} intervient dans l'équation d'évolution de la fibre centrale que l'on cherche, il faut écrire les équations aux dérivées partielles associées à ce champ. Pour cela, on remplace le développement asymptotique de \vec{V}^{inn} dans les équations de Navier-Stokes (1.11), ainsi que dans l'équation de conservation de la masse (1.10), écrites sur les coordonnées curvilignes locales. On obtient quatre équations pour chaque ordre du développement : une qui provient de la conservation de la masse et trois qui sont les projections de l'équation de Navier Stokes sur $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$. Ces quatre équations sont les équations à l'ordre i . L'ordre 0 est aussi appelé *l'ordre principal*.

Comme les différentes composantes de la vitesses $\vec{V} = u\vec{r} + v\vec{\theta} + w\vec{\tau}$ sont périodiques par rapport à l'angle φ , on peut les *décomposer en série de Fourier*. Par exemple :

$$v^{(i)} = v_c^{(i)} + \sum_n \cos(n\varphi)v_{n1}^{(i)} + \sum_n \sin(n\varphi)v_{n2}^{(i)} \quad (1.36)$$

où $v_c^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(i)} d\varphi$ est la partie axisymétrique de $v^{(i)}$ et le couple $(v_{n1}^{(i)}, v_{n2}^{(i)})$ ne dépend

pas de φ .

Lorsque l'on remplace ces séries dans les équations aux dérivées partielles précédentes à l'ordre i et que l'on identifie terme par terme, *on obtient un système d'équations aux dérivées partielles constitué à partir de la partie axisymétrique des équations à l'ordre i , des parties en $\cos(n\varphi)$ et des parties en $\sin(n\varphi)$* .

A ces équations aux dérivées partielles, il faut rajouter des conditions aux limites.

I.10.2. Les conditions aux limites de ces équations en l'infini

La condition en l'infini, provient de la loi de raccord asymptotique :

$$\dot{\vec{X}} + \vec{V}^{\text{inn}}(\bar{r} \rightarrow \infty) = \vec{v}^{\text{out}}(r \rightarrow 0) \quad (1.37)$$

d'où on tire :

$$\boxed{\vec{V}^{\text{inn}}(\bar{r} \rightarrow \infty) = -\dot{\vec{X}} + \vec{v}^{\text{out}}(r \rightarrow 0)}. \quad (1.38)$$

Pour obtenir la condition aux limites $\vec{V}^{\text{inn}}(\bar{r} \rightarrow \infty)$, on doit donc trouver le développement extérieur :

$$\vec{v}^{\text{out}} = \vec{v}^{\text{out}(0)} + \varepsilon \vec{v}^{\text{out}(1)} + \dots$$

à partir de la loi de Biot et Savart, puis faire le développement selon r de ses différents ordres, et enfin faire le changement de variable : $r = \varepsilon \bar{r}$. Les développements selon r donnent des intégrales singulières à développer. Ils ont été effectués en partie au paragraphe 1.6.3 et sont faits complètement au chapitre II.

I.10.3. Les conditions aux limites en zéro et la définition de la fibre centrale

La condition en zéro provient de :

$$\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r} = 0) = \dot{\vec{X}} + \vec{V}^{\text{inn}}(\bar{r} = 0) \quad (1.39)$$

d'où on tire :

$$\vec{V}^{\text{inn}}(\bar{r} = 0) = -\dot{\vec{X}} + \vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r} = 0).$$

On a le même problème de définition de la fibre centrale que l'on avait eu pour la définition du point central d'un filament droit. La fibre centrale n'a été définie que comme *une courbe autour de laquelle la vorticité est concentrée*, cependant toute courbe de la zone de vorticité concentrée satisfait cette condition. Ce sont toutes des courbes distantes les unes des autres d'une distance ε . On ne peut pas les distinguer si on se place à une échelle d'observation liée à la grande échelle L et à cette échelle, l'une quelconque de ces courbes permet de positionner la vorticité concentrée. N'importe laquelle de ces courbes permet de suivre la singularité dans son mouvement et de faire une dilatation de cette zone afin de l'analyser en se servant des coordonnées curvilignes locales associées. Cette singularité est une ‘courbe libre’ (l’analogue d’une surface libre pour une variété de dimension 2). Le fait de prendre des coordonnées locales permet de ramener le domaine d’étude à un domaine

fixe (c'est à dire dont la frontière est indépendante de ε) borné par $r=0$ et l'infini. Il est important ici que le domaine soit fixe, car la structure des champs près de cette courbe a une influence sur sa vitesse de déplacement. Cependant, il faut préciser la définition de la fibre centrale, si on veut pouvoir déterminer une équation d'évolution $\dot{\vec{X}} = f(\vec{X}, \vec{V}^{\text{inn}})$ et préciser notre condition aux limites en zéro.

Si la courbe est définie comme un lieu géométrique, il faut encore préciser son paramétrage s . Un changement de paramétrage sur la fibre de s en \tilde{s} , modifie le champ de vitesse axiale relatif w qui devient \tilde{w} avec :

$$\tilde{w} = w + \dot{\vec{X}}(s, t) \bullet \vec{\tau} - \dot{\vec{X}}(\tilde{s}, t) \bullet \vec{\tau}.$$

Un paramétrage s intéressant est celui qui vérifie : $\dot{\vec{X}}(s, t) \bullet \vec{\tau} = 0$.

La fibre centrale peut être définie comme : *la courbe matérielle qui initialement est en $\vec{X}_0^{(0)}$, mais on peut alors avoir une vitesse $\dot{\vec{X}}$ de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ qui nécessite un développement à échelles multiples temporelles de la forme :*

$$\vec{X}(s, t, \varepsilon) = \vec{X}^{(0)}(s, t, t/\varepsilon) + \varepsilon^1 \vec{X}^{(1)}(s, t, t/\varepsilon) + \dots$$

On préfère la définition suivante de cette fibre centrale :

La fibre centrale est la courbe dont le paramétrage vérifie $\dot{\vec{X}}(s, t) \bullet \vec{\tau} = 0$ et qui se trouve au centre de vorticité de toutes les sections du filament orthogonales à cette courbe.

Cette courbe satisfait :

$$\dot{\vec{X}}(s, t) - (\dot{\vec{X}}(s, t) \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = \vec{v}(r=0) - (\vec{v}(r=0) \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau}$$

(c'est à dire $\vec{V}^{\text{inn}} - (\vec{V}^{\text{inn}} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = 0$ en $\bar{r} = 0$) et son évolution est décrite par un développement de la forme :

$$\vec{X}(s, t, \varepsilon) = \vec{X}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \vec{X}^{(1)}(s, t) + \dots$$

On préfère cette définition à celle qu'ont utilisée implicitement Callegari et Ting²:

la fibre centrale est la courbe matérielle telle que toute la partie de la vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{X}} + \vec{V}$ qui dépend du temps t et ne dépend pas de \bar{r} est dans la vitesse $\dot{\vec{X}}$.

Comme le seul but de la fibre centrale est d'être située dans la zone de vorticité afin de repérer la position de celle-ci à une échelle L , sa définition doit être telle que sa description asymptotique soit la plus simple. Si la définition de la fibre était telle qu'il faille introduire des variations périodiques spatiales en $\bar{s} = s / \varepsilon$ et temporelles en $\bar{t} = t / \varepsilon^2$:

$$\vec{\mathbf{X}}(s, t, \varepsilon) = \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t, \bar{s}, \bar{t}, t / \varepsilon) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{X}}^{(1)}(s, t, \bar{s}, \bar{t}, t / \varepsilon) + \dots,$$

alors on peut toujours décrire ce qu'il se passe avec une fibre plus simple dont le développement est :

$$\vec{\mathbf{X}}(s, t, \varepsilon) = \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{X}}^{(1)}(s, t) + \dots$$

qui serait par exemple la moyenne spatiale et temporelle de la fibre plus compliquée précédente.

Notons $\vec{\mathbf{X}}_0(s) \equiv \vec{\mathbf{X}}(s, t = 0, \varepsilon)$ la courbe centrale initiale. Nous choisissons une abscisse curviligne s sur cette courbe $\vec{\mathbf{X}}_0$. Pour un anneau tourbillon, nous avons $\sigma_0 = \sigma(s, t = 0) = S_0 / (2\pi)$ où $S_0 = S(t = 0)$. Pour cette ligne centrale initiale, nous définissons une *longueur d'arc* $a \in [0, S_0]$ définie par $a = \frac{S_0}{2\pi}s$. Avec ce paramètre, les calculs et les formules vont être plus simples, car $\sigma_0(a) = 1$ et $\vec{\mathbf{X}}_{0a} = \vec{\tau}$. Pour décrire l'évolution de la fibre centrale, il ne faut pas utiliser une longueur d'arc. Même si on a une longueur d'arc initialement, elle ne le reste pas généralement au temps t .

Si nous utilisions une longueur d'arc a , nous aurions un espace des coordonnées dépendant de ε :

$$r \in [0, \infty[, \quad \varphi \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad a \in [0, S(t, \varepsilon)],$$

alors que si nous utilisons un paramètre général s tel que : $\sigma(s)_s \neq 0$ et $s \in [-\pi, +\pi[$ nous avons l'espace indépendant de ε :

$$r \in [0, \infty[, \quad \varphi \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad s \in [-\pi, +\pi[$$

Nous suggérons d'utiliser un espace des coordonnées indépendant du paramètre asymptotique afin que les développements asymptotiques soient corrects.

Vis-à-vis de notre définition de la fibre centrale, la condition aux limites en zéro de nos équations aux dérivées partielles est

$\vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}} - (\vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = 0 \text{ en } \bar{r} = 0.$

(1.40)

Nous possédons désormais *un système d'équations aux dérivées partielles avec ces conditions aux limites*. Il nous reste donc à le résoudre et voir d'où va provenir l'équation d'évolution de la fibre centrale.

I.11. La résolution des équations intérieures

I.11.1. La dynamique principale

Si on n'utilise que le temps t , appelé *temps normal*, dans le développement intérieur du champ de vitesse :

$$\bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^1} \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}) + \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(1)} + \varepsilon^1 \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(2)} + \dots$$

et pas de temps dilaté $\bar{t} = t / \varepsilon^2$, appelé *temps court*; alors parmi les équations aux dérivées partielles axisymétriques, il apparaît des équations qui ne dépendent pas du temps t et qui sont appelées *équations de compatibilité*.

Si les conditions initiales vérifient ces équations, elles sont vérifiées à tout temps et on trouve une solution au problème. Sinon, on a une difficulté pour résoudre notre problème, qui est défini par sa condition initiale. Deux comportements possibles sont candidats. Soit on est en présence d'une couche limite initiale qui peut être résolue par une méthode de Développement Asymptotique Raccordé sur le temps. Au temps court, on a un développement de la forme :

$$\bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^1} \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, \bar{t}, \bar{s}) + \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(1)} + \varepsilon^1 \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(2)} + \dots$$

qui doit se raccorder asymptotiquement avec un développement de la forme :

$$\bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^1} \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}) + \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(1)} + \varepsilon^1 \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(2)} + \dots$$

Selon ce schéma, il y a une relaxation rapide vers une solution construite sur un temps normal. Dans le deuxième cas, on est en présence d'une oscillation rapide qui peut être résolue par une Méthode d'Echelles Multiples. A tout temps, on a un développement de la forme :

$$\bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^1} \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{t}, \bar{s}) + \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(1)} + \varepsilon^1 \bar{\mathbf{V}}^{\text{inn}(2)} + \dots$$

où la dépendance avec le temps \bar{t} est oscillatoire. La forme du développement à échelles multiples englobe celle du développement asymptotique raccordé mais la physique qu'elle contient est différente.

Dans les deux cas, si on regarde ce qu'il se passe à une échelle de temps t , en moyennant les petites échelles \bar{t} , on trouve une évolution qui ne dépend que de t et que l'on nomme la *dynamique principale* (ou *centrale*) du problème.

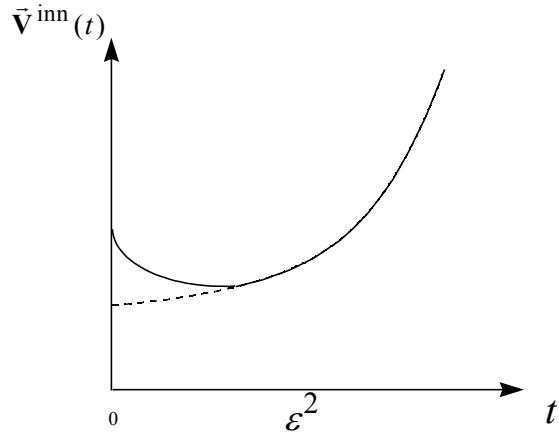


Figure 1.10 Couche limite initiale.

La dynamique principale est en pointillés

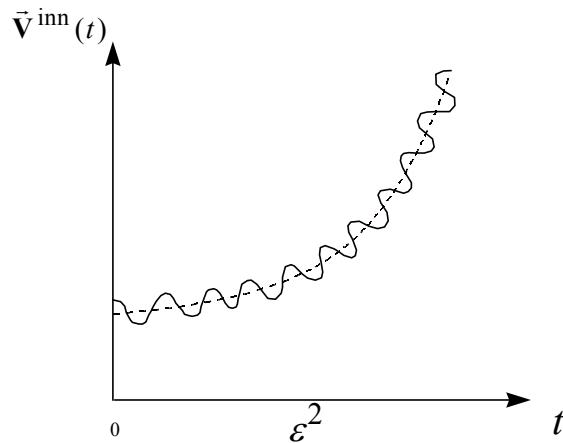


Figure 1.10 Evolution oscillante.

La dynamique principale est en pointillés

Le comportement que l'on pense se produire est le comportement oscillant, comme on va le voir dans le paragraphe suivant.

I.11.2. Les restrictions possibles et la situation générale

Lorsque l'on se restreint à des champs qui ont une dépendance spatiale de la forme $\bar{\mathbf{f}}^{\text{inn(j)}}(\bar{r}, \varphi, s = \varepsilon \bar{s}, t = \varepsilon^2 \bar{t})$, si l'on observe à une échelle δ_0 , on étudie un jet tourbillon quasi infini sur des temps longs avec des variations axiales faibles (l'abscisse et le temps de

référence étant ici : \bar{s} et \bar{t}) et si l'on observe à une échelle L , on étudie un filet tourbillon sans tenir compte des variations temporelles rapides ni des petites variations axiales faibles (l'abscisse et le temps de référence étant ici : s et t). C'est ce cas qui est généralement étudié lorsque l'on s'intéresse au déplacement de la fibre centrale du filament et qui sera détaillé au chapitre III.

A l'inverse, lorsque l'on se restreint à des champs qui ont une dépendance spatiale de la forme $\bar{\mathbf{f}}^{\text{inn(j)}}(\bar{r}, \varphi, \bar{s} = s/\varepsilon, \bar{t}/\varepsilon^2)$, si l'on observe à une échelle δ_0 , on étudie un jet tourbillon quasi infini sans tenir compte des variations temporelles lentes ni des grandes variations axiales (l'abscisse et le temps de référence étant ici : \bar{s} et \bar{t}) et si l'on observe à une échelle L , on étudie un filet tourbillon sur des temps courts avec des variations axiales petites et sans grandes variations spatiales (l'abscisse et le temps de référence étant ici : s et t). C'est ce cas qui est étudié lorsque l'on s'intéresse aux ondes sur les filaments⁶, à l'étude des ondes courtes¹¹ et de leur stabilité et au phénomène de l'éclatement tourbillonnaire⁷.

Lorsque l'on ne se restreint pas à l'un des deux cas précédents, les définitions de ce chapitre offrent une description très générale d'un filament tourbillon. Celle-ci est le cadre d'une uniformisation des différentes études particulières qui sont faites dans la littérature. Elle offre un modèle général, au lieu d'avoir des situations particulières avec leur notation propre et leur adimensionalisation propre dont il est difficile de voir le rapport des une avec les autres.

Dans le cas général, si nous voulons prendre en compte le déplacement du filament et des petites oscillations de longueur d'onde d'ordre εL , il faut utiliser le développement à échelles multiples, ce qui n'a jamais été fait pour un filament courbe. C'est à partir de l'étude des deux cas restrictifs précédents qu'on intuite que dans le cas général, les ondes rapides de Kelvin se déplacent le long de la fibre centrale à une vitesse très grande faisant intervenir le temps t/ε^2 et se superposent au déplacement de la fibre centrale sur un temps t . Si nous nous plaçons sur un temps d'observation qui est de l'ordre de t (dit temps normal), ces oscillations rapides ne sont pas vues en moyenne et c'est ce déplacement moyen qui est obtenu en utilisant les développements sur un temps normal.

I.11.3. La résolution sur un temps normal et l'équation de la fibre centrale

Lorsque l'on étudie le problème sur un temps normal, les équations axisymétriques nous donnent des équations de compatibilité que l'on suppose vérifiées initialement. Elles nous donnent également les équations d'évolution temporelles de la partie axisymétrique des champs.

Le système des équations est enchevêtré : l'ordre i des champs n'est pas obtenu à partir de l'ordre i des équations. Les équations d'évolution de la partie axisymétrique à l'ordre 0 proviennent des équations à l'ordre 2, alors que la partie non axisymétrique de l'ordre 1 provient des équations à l'ordre 1. C'est un comportement habituel des problèmes de perturbation de type échelles multiples lorsque l'on ne prend en compte que l'échelle de la dynamique principale.

La partie en $\cos(n\varphi)$ et en $\sin(n\varphi)$ des équations sont des équations qui ne dépendent pas du temps et qui donnent la partie en $\cos(n\varphi)$ et en $\sin(n\varphi)$ des champs à un certain ordre en fonction des ordres d'avant.

Ces équations, pour $n \neq 1$ se servent des conditions en l'infini et en zéro que l'on connaît pour être résolues. *Les équations pour $n=1$ n'ont besoin que de la condition en zéro pour être résolues*. On peut alors déterminer le comportement de ces solutions en l'infini. On peut l'égaliser à la condition en l'infini que l'on avait trouvée en utilisant la règle de raccord asymptotique. Cette limite que l'on avait obtenue n'était en fait pas connue, car elle fait apparaître la vitesse $\dot{\bar{X}}$ qui est la vitesse que l'on cherche. Remarquons que c'est la seule condition qui fait intervenir $\dot{\bar{X}}$.

C'est cette égalisation entre la limite en l'infini de la solution de l'équation aux dérivées partielles dues à la partie en $\cos(\varphi)$ et en $\sin(\varphi)$ des équations et sa condition aux limites en l'infini, obtenue par la règle de raccord asymptotique, qui donne l'équation d'évolution de la fibre centrale.

Somme toute, on obtient alors l'équation de la fibre centrale et des équations pour la partie axisymétrique, et en $\cos(n\varphi)$ et en $\sin(n\varphi)$ des champs. Ce système d'équations est complet et on a exploité toutes les équations et les conditions aux limites du problème pour l'obtenir.

I.12. Utilisation du calcul formel

Un calculateur formel est un logiciel qui travaille sur des expressions algébriques, dont il stocke la structure et les termes en mémoire sous la forme d'une arborescence. On peut donc entrer des expressions algébriques, les visualiser et les modifier.

Lors de la résolution d'un problème de couche limite, on possède un petit paramètre de développement ε et les ordres de toutes les grandeurs du problème sont reliés à ce petit paramètre. La résolution procède alors en deux étapes. Dans une première étape, on choisit la forme des développements pour le problème intérieur et extérieur. Puis, il faut déterminer la forme des dilatations à prendre pour le problème intérieur et les échelles des différents termes des développements. Pour les trouver, on s'aide de plusieurs règles : principe de moindre dégénérescence, apparition des échelles lors du raccord asymptotique,... mais la méthode n'est pas systématique et doit être modulée suivant le problème.

Dans une deuxième étape, on remplace ces développements dans les équations, on effectue le développement en série de Taylor selon ε de certaines fonctions du problème, puis on regroupe des diverses puissances de ε pour pouvoir identifier ordre par ordre et obtenir les équations du problème aux différents ordres. Cette étape de résolution est systématique et est fastidieuse à faire à la main, car il faut faire bon nombre de calculs longs et systématiques sans faire d'erreur. Il est donc avantageux de la programmer à l'aide d'un logiciel de calcul formel, qui dans notre cas est le logiciel Maple. Il sait faire des calculs systématiques de ce type sans faire d'erreur d'inattention. Il est très rapide et peut travailler 24 heures sur 24.

Cependant, le logiciel de calcul formel est un être inerte non pensant qui ne fait que ce qu'on lui dit et qui n'a pas notre faculté de savoir qu'une expression est plus simple qu'une autre. Il faut donc lui indiquer comment simplifier une expression, si on ne veut pas une explosion combinatoire, c'est à dire une expression qui occupe toute la mémoire de l'ordinateur. Avec son aide, on peut obtenir des ordres supérieurs qui auraient nécessité parfois une vie de calculs. L'expression de ces ordres n'est pas forcément très grande, car même si on passe parfois par des résultats intermédiaires de calcul qui s'écrivent sur plusieurs pages et nécessitent bon nombre de calculs, le résultat final peut parfois se simplifier en une expression courte. Cependant, même si le résultat final est une expression très longue, on peut se servir de l'informatique pour l'exploiter. Par exemple, on peut reprendre cette fonction à l'aide d'un langage de programmation compilable, qui va nous tracer rapidement le graphe de la fonction.

Les calculs sont effectués par le logiciel comme à la main, si ce n'est que la procédure de simplification est un peu différente. Il faut savoir faire avancer le calcul dans la direction que l'on veut, ce qui n'est pas évident au début, car il y a des choses que l'on fait de façon évidente sans y penser sur le papier et qui sont plus difficiles à faire à l'aide du logiciel qui va avoir besoin d'une instruction. Par exemple, si on veut prendre un terme d'une expression qui est sur notre feuille de papier, on le voit et on le recopie, alors qu'à l'aide du logiciel, il faut savoir récupérer ce terme dans l'expression dont la structure et les termes sont stockés d'une certaine façon en mémoire de l'ordinateur. Un deuxième exemple de difficulté est l'utilisation formelle du produit vectoriel et du produit scalaire de vecteurs. On veut pouvoir développer $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c})$ et obtenir $\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$ comme on le fait à la main sans passer par les coordonnées des vecteurs. Cependant, le logiciel Maple dans sa version actuelle ne connaît que le produit vectoriel de deux vecteurs définis par leurs coordonnées. Il est alors nécessaire de se définir des procédures en langage élémentaire Maple pour créer des opérateurs formelles de ce type et les propriétés associées et enfin arriver à faire ce que l'on fait facilement à la main. Un troisième exemple de difficulté est la transformation de $\int a(s) \wedge g(r,s) dr$ en $a(s) \wedge \int g(r,s) dr$ et vis versa. C'est trivial à faire à la main et c'est plus difficile à faire avec le logiciel. Ces quelques difficultés qui montrent qu'il peut être difficile de faire en calcul formel certaines choses que l'on fait facilement à la main si le logiciel n'a pas la procédure qu'il faut, n'enlève rien au fait que le logiciel a d'autres atouts qui permettent de faire rapidement des calculs qui nous prendraient un temps énorme si on les faisait à la main.

Remarquons que parfois, on peut se permettre de faire plus de calculs que ce que l'on ferait à la main, sachant que l'on va arriver au même résultat et que le calculateur est rapide.

Lorsque la deuxième partie de la résolution d'un problème de couche limite est programmée en langage formel, si on change les développements de départ parce que l'on s'était trompé dans les échelles ou parce qu'on les généralise, on obtient presque instantanément les nouveaux résultats. Une fois que les résultats de la résolution asymptotique sont obtenus par la machine, on peut continuer à utiliser le logiciel formel pour résoudre les équations que l'on a obtenues, car les facultés du logiciel : calcul d'intégrales, résolution d'équations différentielles,... sont également intéressantes.

Si la première étape de calcul d'un problème de couche limite, qui est la détermination des différentes échelles du problème, pouvait être également systématisée quitte à trouver un

algorithme qui demande un grand nombre de calculs, on pourrait alors avoir une résolution complète des problèmes de couche limite par le calculateur formel qui déroulerait systématiquement tous les calculs. Cependant à l'heure actuelle, seule la deuxième étape de la résolution est systématique même si des chercheurs⁴ cherchent à rendre également la première.

Pour notre part, nous avons utilisé le calcul formel pour la deuxième étape de la résolution du problème de couche limite, lors du calcul asymptotique du problème intérieur et pour le calcul des intégrales singulières.

On utilise donc le logiciel de calcul formel comme une aide au calcul analytique à chaque fois que celui-ci peut nous faire gagner du temps par rapport au calcul à la main.

I.13. Les différents types de filaments tourbillons

I.13.1. Les diverses formes de filaments tourbillons

Si le filament tourbillon est fermé, nous parlerons d'anneaux tourbillon et nous distinguerons en allant du simple au général :

- i) L'anneau de forme circulaire
- ii) L'anneau circulaire perturbé
- iii) L'anneau curviligne (fibre centrale fermée de forme quelconque)

Si le filament tourbillon est ouvert, nous parlerons d'un filament tourbillon infini et nous distinguerons en allant du simple au général :

- i) Le filament rectiligne
- ii) Le filament rectiligne perturbé
- iii) Le filament en hélice
- iv) Le filament en hélice perturbé
- v) Le filament curviligne (fibre centrale ouverte de forme quelconque)

I.13.2. Les diverses structures de filaments

La structure du filament la plus générale est définie par son champ de vorticité, qui a la forme suivante :

$$\vec{\omega}(\bar{r}, \varphi, s, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{\omega}^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \vec{\omega}^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) + \dots$$

Nous décomposons l'ordre principal sur la base curviligne :

$$\vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = \omega_1^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) \hat{\mathbf{r}} + \omega_2^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \omega_3^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{s}, \bar{t}) \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

Dans tout le manuscrit, à tous les ordres, le filament a toujours une structure indépendante de \bar{s} , c'est à dire sans ondes courtes et à l'ordre principal, le filament a toujours une structure axisymétrique pour laquelle :

$$\begin{aligned} \omega_1^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{t}) &= \omega_1^{(0)}(\bar{r}, s, t, \bar{t}) \\ \omega_2^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{t}) &= \omega_2^{(0)}(\bar{r}, s, t, \bar{t}) \\ \omega_3^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t, \bar{t}) &= \omega_3^{(0)}(\bar{r}, s, t, \bar{t}) \end{aligned}$$

La structure est visqueuse si $\alpha \neq 0$ et non visqueuse si $\alpha = 0$.

Nous distinguons les différentes structures suivantes en allant de la plus générale à la plus simple :

- i) La *structure à deux échelles de temps* : celle-ci dépend du temps normal t et du temps dilaté t/ε^2 .
- ii) La *structure normale* : pour celle-ci, l'ordre principal vérifie les équations de compatibilité et ne dépend que du temps normal t .
- iii) La *structure normale simple* : pour celle-ci, l'ordre principal est indépendante de l'abscisse s à l'ordre principal, ce qui permet de satisfaire les équations de compatibilité.

Nous distinguons alors :

- a) La structure *uniforme* pour laquelle : $\omega_i^{(0)}(\bar{r}, t) = \omega_i^{(0)}(t)$
(type Rankine)
- b) La structure *similaire* : pour laquelle $\omega_i^{(0)}(\bar{r}, t)$ a une forme Gaussienne (type Burgers)

I.14. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une description générale des filaments tourbillons de faible épaisseur, après avoir montré qu'il est nécessaire que ceux-ci aient une épaisseur non nulle, si on veut qu'ils aient une vitesse de déplacement finie. Le problème à résoudre est donc un problème de couche limite tridimensionnelle autour d'une courbe. Nous avons également donné le schéma de la résolution de ce problème de couche limite, qui sera faite au *chapitre III* pour un filament à structure normal simple, c'est à dire qui ne dépende pas d'un temps dilaté t/ε^2 , qui n'a pas de petites longueurs d'onde et qui a un premier ordre axisymétrique et indépendant de l'abscisse s . Lors de cette présentation, il est apparu qu'il faut savoir calculer *au préalable* des développements dans les intégrales de Biot et Savart. Ceci est effectué dans le *prochain chapitre* pour filament tourbillon qui n'a pas de petites longueurs d'ondes.

I.15. Bibliographie du chapitre I

1. BENDER,C.M. et ORSZAG,S.A. 1978 Advanced mathematical methods for scientists and engineers, *McGraw-Hill, New York*, 341-349
2. CALLEGARI,A.J. et TING,L. 1978 Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1), 148-175
3. DARROZES, J.S. et MONAVON,A. : 1988, Analyse Phénoménologique des Ecoulements ou Comment traiter un problème de mécanique des fluides avant de résoudre les équations, *polycopier de cours de l'ENSTA*.
4. FEUILLEBOIS,F et LASEK,A : 1977 Computer aided application of the Principle of Least Degeneracy, *Jour. Of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) Vol 28,6, pp.1141-1146*
5. FRANCOIS,C. 1981 Les méthodes de perturbation en mécanique. ENSTA. Paris, 98-104
6. KELVIN 1880 Vibration of a columnar vortex, *Philos. Mag.* **10**, 152-165
7. LEIBOVICH,S. et S.N. BROWN,S.N. et PATEL,Y. : 1986 Bending waves on inviscid columnar vortices, *J. Fluid Mech.* **173**, pp. 595-624
8. MUDRY,M : 1982 La théorie générale des nappes et filaments tourbillonnaires et ses applications à l'aérodynamique instationnaire, *Thèse de doctorat d'état , Paris 6*
9. TING,L. et TUNG,C. 1965 Motion and decay of a vortex in a non-uniform Stream, *The Physics of Fluids* **8** (6), 1039-1051
10. TING,L. : Studies in the motion and decay of vortices, *1970 Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington*
11. WIDNALL,S.E. et TSAI,C.Y: 1977 The Instability of the Thin Vortex Ring of Constant Vorticity, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 287,pp. 273-3*

Chapitre II

DÉVELOPPEMENTS DU CHAMP DE VITESSE INDUIT PAR UN ANNEAU TOURBILLON

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les développements de la loi de Biot et Savart que l'on a besoin de faire donner parfois des intégrales singulières par rapport à un petit paramètre. Dans ce chapitre, nous cherchons les développements intérieurs et extérieurs du champ de vorticité d'un anneau tourbillon, ainsi que du champ de vitesse *induit*. Nous déterminons également le comportement du développement extérieur du champ de vitesse près du filament, ainsi que le comportement du développement intérieur du champ de vitesse loin du filament.

On s'intéresse à un filament tourbillon à vorticité *décroissante* exponentiellement ou à vorticité d'extension finie. On suppose qu'il n'y a pas de petites longueurs d'ondes sur ce filament. A part dans le paragraphe II.7, tous les champs de ce chapitre sont donnés pour la configuration initiale à $t=0$ et **on omet systématiquement de mettre l'indice 0 qui doit le signaler**. On étudie un filament tourbillon avec une fibre centrale $\vec{X}(a)$ et un champ initial de

vorticité $\vec{\omega}$ donné de la forme $\vec{\omega} = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a)$, où a est le paramètre sur la fibre centrale. On note a le paramètre de la fibre centrale plutôt que s pour indiquer que ce paramètre est une longueur d'arc. Le champ de vitesse *induit* par l'anneau tourbillon est noté \vec{v} au lieu de \vec{v}_{Biot} .

On donne la forme des développements dans ce cadre général, ainsi que leurs simplifications pour un filament dont l'ordre principal est axisymétrique et est indépendant de l'abscisse.

II.1. Le développement intérieur du champ de vorticité

Le développement intérieur ($\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ fixé) du champ de vorticité

$\frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a)$ est trivialement :

$$\vec{\omega}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a) \quad (2.1)$$

Pour ce champ de vorticité, l'équation (1.12) :

$$\text{div}(\vec{\omega}) = 0$$

s'écrit à l'ordre 0 et 1 (Annexe A.5) :

$$(\omega_1 \bar{r})_{\bar{r}} + (\omega_2)_{\varphi} = 0 \quad (2.2a)$$

$$[-\omega_1 \bar{r}^2 K(a) \cos \varphi]_{\bar{r}} + [-\omega_2 \bar{r} K(a) \cos \varphi]_{\varphi} + \bar{r}(\omega_3_a - T(a) \omega_3_{\varphi}) = 0 \quad (2.2b)$$

où $T(a)$ est la torsion locale de la fibre centrale \mathcal{C} . Après avoir substitué l'équation (2.2a) dans (2.2b), on obtient que le champ de vorticité intérieur (2.1) vérifie les deux équations suivantes :

$$(\omega_1 \bar{r})_{\bar{r}} + (\omega_2)_{\varphi} = 0 \quad (2.3a)$$

$$-K(a)[\omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi] + \omega_3_a - T(a) \omega_3_{\varphi} = 0 \quad (2.3b)$$

La première équation (2.3a) montre le lien qu'il existe entre la vorticité radiale ω_1 et la vorticité orthoradiale ω_2 . La seconde équation (2.3b) donne la contrainte que doit vérifier la vorticité axiale ω_3 du moment que la vorticité radiale ω_1 et la vorticité orthoradiale ω_2 vérifiant (2.3a) ont été choisies.

II.2. Le développement extérieur du champ de vorticité

Le développement extérieur ($\varepsilon \rightarrow 0$ à r fixé) du champ de vorticité $\frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{(0)}(\frac{r}{\varepsilon}, \varphi, a)$

est nul partout sauf sur la courbe \mathcal{C} où il est infini. Ce champ limite extérieur n'est pas une fonction mais une distribution au sens mathématique. Définissons alors la distribution $\mathbf{T}_{\vec{\omega}}$ canoniquement associée au champ de vorticité $\vec{\omega}$ par :

$$\langle \mathbf{T}_{\vec{\omega}}, \phi \rangle = \iiint \frac{\vec{\omega}^{(0)}(\frac{r}{\varepsilon}, \varphi, a)}{\varepsilon^2} \phi(r, \varphi, a) r h_3 dr d\varphi da \quad (2.4)$$

où ϕ est une fonction test régulière. On trouve le développement extérieur cherché en développant $\mathbf{T}_{\vec{\omega}}$ lorsque ε tend vers zéro.

En remplaçant le champ de vorticité (2.1) dans la formule (2.4) et en développant, on démontre (Annexe A.2.) que le développement extérieur du champ de vorticité est :

$$\mathbf{T}_{\vec{\omega}}^{\text{out}} = \delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau} + O(\varepsilon) \quad (2.5)$$

où $\delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}$ est la distribution de Dirac sur \mathcal{C} définie par

$$\langle \delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}, \phi \rangle = \int_{\mathcal{C}} \phi(r, \varphi, a) \vec{\tau}(a) da \quad (2.6)$$

A l'ordre principal, on a donc démontré que le développement extérieur $\vec{\omega}^{\text{out}}$ du champ de vorticité correspond exactement à la distribution de Dirac $\delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}$ sur \mathcal{C} .

Le développement extérieur du champ de vorticité est singulier, car le développement intérieur de ce développement extérieur n'est pas le développement intérieur du champ de vorticité. Au contraire, *le développement intérieur du champ de vorticité est régulier*, car le développement extérieur de ce développement intérieur est le développement extérieur du champ de vorticité.

II.3. Le développement extérieur \vec{v}^{out} du champ de vitesse

Lorsque l'on fait apparaître l'épaisseur réduite ε , les formules (1.7) et (1.8) du champ de vitesse s'écrivent :

$$\vec{v}(\vec{x}, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\omega}^{(0)}(\vec{r}', \varphi', a') \wedge [\vec{x} - (\vec{X}(a') + \varepsilon \vec{r}' \vec{r}')] h_3' \vec{r}' d\vec{r}' d\varphi' da'}{\left| \vec{x} - (\vec{X}(a') + \varepsilon \vec{r}' \vec{r}') \right|^3} \quad (2.7a)$$

$$\vec{v}(r, \varphi, a, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\omega}^{(0)}(\vec{r}', \varphi', a') \wedge [(\vec{X}(a) + r \vec{r}(a, \varphi)) - (\vec{X}(a') + \varepsilon \vec{r}' \vec{r}')] h_3' \vec{r}' d\vec{r}' d\varphi' da'}{\left| (\vec{X}(a) + r \vec{r}(a, \varphi)) - (\vec{X}(a') + \varepsilon \vec{r}' \vec{r}') \right|^3} \quad (2.7b)$$

En remplaçant le champ de vorticité (2.1) dans la relation de Biot et Savart (2.7) et en développant, on démontre (Annexe A.2.) que le développement extérieur ($\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{\mathbf{x}}$ fixé) du champ de vitesse $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ est :

$$\bar{\mathbf{v}}^{\text{out}}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}(a') \wedge (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a'))}{\varepsilon | \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a') |^3} da' + O(\varepsilon). \quad (2.8a)$$

On peut l'écrire également :

$$\bar{\mathbf{v}}^{\text{out}}(r, \varphi, a, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}(a') \wedge ((\bar{\mathbf{X}}(a) + r\bar{\mathbf{r}}(a, \varphi)) - \bar{\mathbf{X}}(a'))}{\varepsilon | (\bar{\mathbf{X}}(a) + r\bar{\mathbf{r}}(a, \varphi)) - \bar{\mathbf{X}}(a') |^3} da' + O(\varepsilon), \quad (2.8b)$$

car ici le changement de coordonnées $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{X}}(a) + r\bar{\mathbf{r}}(\varphi, a)$ est indépendant de ε .

A l'ordre principal, on a démontré que le développement extérieur du champ de vitesse induit par le champ de vorticité correspond à la vitesse induite par une distribution de Dirac $\delta_\varepsilon \bar{\boldsymbol{\tau}}$ concentrée sur la fibre centrale. C'est un filet tourbillon.

Plus généralement, le développement extérieur du champ de vitesse s'écrit jusqu'à l'ordre 2 :

$$\boxed{\bar{\mathbf{v}}^{\text{out}}(r, \varphi, a, \varepsilon) = \bar{\mathbf{v}}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, a) + \varepsilon \bar{\mathbf{v}}^{\text{out}(1)}(r, \varphi, a) + O(\varepsilon^2)} \quad (2.9)$$

et en procédant comme pour l'ordre 0, mais en cherchant un ordre de plus, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^{\text{out}(1)}(r, \varphi, a) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)'} \wedge (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a'))}{| \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a') |^3} r^2 K(a') \cos \varphi' dr' d\varphi' da' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{(\bar{\mathbf{r}}' \wedge \bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)'})}{| \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a') |^3} r^2 dr' d\varphi' da' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iiint 3 \frac{[\bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)'} \wedge (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a'))] (\bar{\mathbf{r}}' \bullet (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a')))}{| \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a') |^5} r^2 dr' d\varphi' da' \end{aligned}} \quad (2.10)$$

avec : $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{X}}(a) + r\bar{\mathbf{r}}(\varphi, a)$.

Cet ordre n'avait jamais été donné et il est intéressant de remarquer qu'il est non nul, de façon à ne pas l'oublier si l'on veut faire un raccord asymptotique avec la zone intérieure à un ordre

où cette expression intervient. Alors que l'ordre principal (2.8b) du développement extérieur du champ de vitesse est indépendant de la structure $\vec{\omega}^{(0)}$ du champ de vorticité, l'ordre 1 donné par (2.10) en dépend.

II.4. La limite près du filament du développement extérieur \vec{v}^{out} du champ de vitesse

Nous cherchons le développement de l'ordre principal $\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a)$ de la vitesse extérieure pour r voisin de zéro. Si nous posons brutalement $r = 0$ dans l'expression (2.8) de $\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a)$, une singularité apparaît lorsque $a' = a$.

L'expression (2.8) de $\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a)$ est donc une intégrale singulière par rapport au petit paramètre r . Afin de trouver le développement de cette intégrale, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés des intégrales singulières présentée par François³ ou Bender et Orszag¹.

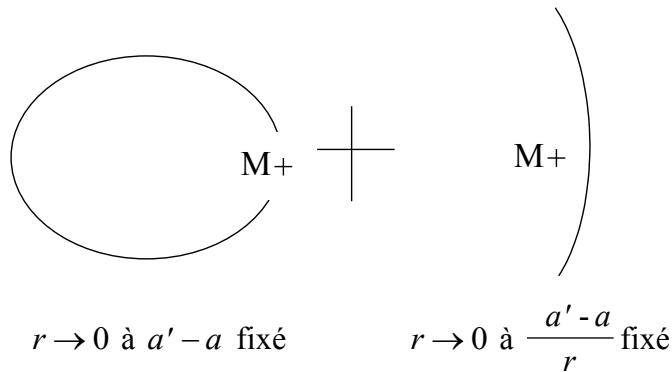


Figure 2.1 : Schéma de la méthode de développement de

l'intégrale singulière (2.8) de $\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a)$.

Cette méthode n'est pas souvent utilisée dans les articles qui traitent des filaments tourbillons, alors qu'elle est systématique et qu'elle permet de trouver le résultat du développement sans ambiguïté. Son principe est de séparer l'intégrale en deux parties (Figure 2.1) : en dehors d'un voisinage du point $\mathbf{M}(r, \varphi, a)$, nous développons l'intégrant par rapport à r à $a' - a$ fixé et nous intégrons selon a' , tandis que dans un voisinage de \mathbf{M} nous

développons l'intégrant par rapport à r à $\frac{a' - a}{r}$ fixé puis nous intégrons selon a' . Le développement recherché est alors la somme des deux développements obtenus.

Par cette méthode, on obtient (Annexe A.3.) le développement suivant de $\vec{v}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, a)$ pour r voisin de zéro :

$$\begin{aligned} \vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, a) = & \frac{1}{2\pi r} \vec{\theta} + \frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{r} - 1 \right] \vec{b} + \frac{K}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta} \\ & + \vec{A} \\ & + \frac{3}{16} \frac{K^2}{\pi} r \left\{ \begin{array}{l} \left(\vec{r} \sin 2\varphi + \vec{\theta} \cos 2\varphi \right) \left[\ln \frac{S}{r} - \frac{4}{3} \right] + \frac{1}{2} \vec{\theta} \cos 2\varphi \\ + \frac{1}{18} \vec{\theta} + \frac{4}{3} (\vec{B} - 3\vec{C} - \frac{4}{S^2} \vec{\theta}) \end{array} \right\} \\ & + \frac{1}{4\pi} r (K_a \sin \varphi - K_T \cos \varphi) \left[\ln \frac{S}{r} - 1 \right] \vec{\tau} \\ & + O(r^2 \ln r) \end{aligned} \quad (2.11a)$$

avec :

$$\vec{A}(a) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-S/2}^{+S/2} \frac{\vec{\tau}(a + a') \wedge (\vec{X}(a) - \vec{X}(a + a'))}{|\vec{X}(a) - \vec{X}(a + a')|^3} da' - \frac{K(a) \vec{b}(a)}{2|a'|} \right] \quad (2.11b)$$

$$\vec{B}(\varphi, a) = \vec{r}(\varphi, a) \wedge \left[\begin{array}{l} - \frac{\vec{\tau}(a + a')}{|\vec{X}(a) - \vec{X}(a + a')|^3} \\ + \frac{1}{|a'|^3} (\vec{\tau}(a) + K(a) \vec{n}(a)) a' + \left(\begin{array}{l} K_a(a) \vec{n}(a) \\ + K(a) T(a) \vec{b}(a) \\ - \frac{3}{4} K^2(a) \vec{\tau}(a) \end{array} \right) \frac{a'^2}{2} \end{array} \right] da' \quad (2.11c)$$

$$\vec{C}(\varphi, a) = \int_{-S/2}^{+S/2} \left[\begin{array}{l} \frac{\vec{r}(\varphi, a) \bullet (\vec{X}(a + a') - \vec{X}(a))}{|\vec{X}(a + a') - \vec{X}(a)|^5} [\vec{\tau}(a + a') \wedge (\vec{X}(a + a') - \vec{X}(a))] \\ + \frac{K^2(a)}{4} \frac{\vec{b}(a) \cos \varphi}{|a'|} \end{array} \right] da' \quad (2.11d)$$

Le calcul de ce développement est long et fastidieux (Annexe A.3). Ainsi que le mentionne le paragraphe I.12., on l'a effectué également à l'aide d'un calculateur formel

(annexe A.12), ce qui permet *de vérifier les calculs* préalablement faits à la main et d'obtenir rapidement les ordres supérieurs $O(r^2 \ln r)$ et $O(r^2)$, si on les désire.

Dans l'expression (2.11a), on retrouve la partie singulière (1.28) :

$$\frac{1}{2\pi r} \vec{\theta} + \frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{r} - 1 \right] \vec{b} + \frac{K}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta},$$

que l'on a déjà commentée dans le chapitre I. En plus de cette partie singulière, (2.11a) donne l'ordre 1, l'ordre $r \ln r$ et l'ordre r . On trouve trois contributions intégrales globales \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} , qui se rajoutent aux contributions locales. Nous pouvons comparer cette expression avec celle de Fukumoto et Miyazaki⁴ (page 373) et celle de Callegari et Ting² (page 173). C'est la même, si ce n'est qu'ici les expressions des termes intégraux globaux : \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} sont données. En outre, ici le résultat (2.11) a été obtenu par la méthode des développements raccordés des intégrales singulières et a été vérifié à l'aide d'un calculateur formel.

Il est intéressant de remarquer que l'expression (2.11b) peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{\vec{A}(a) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\begin{array}{l} \left(\frac{1}{4\pi} \int_l^{+S/2} \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a'))}{|\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a')|^3} da' \right) \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-S/2}^{-l} \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a'))}{|\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a')|^3} da' \\ - \frac{1}{4\pi} \frac{K(a)\vec{b}(a)}{2} 2 \ln \left(\frac{S/2}{l} \right) \end{array} \right)}, \quad (2.12)$$

car les intégrales de cette expression ressemblent à l'expression (9) de l'introduction. Cette formule sera utilisée au chapitre IV pour justifier les méthodes de coupure.

Le développement près du filament de l'ordre 1 du champ de vitesse extérieur $\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a)$ est de la forme suivante :

$$\boxed{\vec{v}^{\text{out}}(r \rightarrow 0, \varphi, a) = \frac{\vec{I}_1}{r^2} + \frac{\vec{I}_2}{r} + \vec{I}_3 \ln r + \vec{E}_1(a) + \vec{I}_4(\varphi, a)} \quad (2.13)$$

Pour un jet tourbillon avec un champ de vorticité $\vec{\omega}^{(0)} = \omega_2(\bar{r})\vec{\theta} + \omega_3(\bar{r})\vec{\tau}$, qui ne dépend que de la coordonnée radiale et qui n'a pas de composante radiale, les expressions simplifiées de $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3, \vec{I}_4, \vec{E}_1(a)$ sont les suivantes :

$$\vec{\mathbf{I}}_1 = \frac{m}{\pi} \vec{\tau} \quad (2.14a)$$

$$\vec{\mathbf{I}}_2 = \frac{1}{2\pi} Km \cos \varphi \vec{\tau} \quad (2.14b)$$

$$\vec{\mathbf{I}}_3 = m \begin{bmatrix} -\frac{1}{4\pi} (KT \sin \varphi + 3K_a \cos \varphi) \vec{\mathbf{r}} \\ -\frac{1}{4\pi} (KT \cos \varphi - 3K_a \sin \varphi) \vec{\theta} \\ (\frac{1}{8\pi} K^2 - \frac{1}{4\pi} T^2) \vec{\tau} \end{bmatrix} \quad (2.14c)$$

$$\vec{\mathbf{I}}_4 = \frac{m}{4\pi} \begin{bmatrix} \left(\left[-\frac{5}{6} + \ln S \right] KT \sin \varphi + \left[-3 - \frac{5}{6} + 3 \ln S \right] K_a \cos \varphi \right) \vec{\mathbf{r}} \\ + \left(\left[-\frac{5}{6} + \ln S \right] KT \cos \varphi + \left[4 - \frac{1}{6} - 3 \ln S \right] K_a \sin \varphi \right) \vec{\theta} \\ + \left(\left[-\frac{1}{2} \ln(2) + \frac{5}{16} - \frac{8}{S^2} + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \right] K^2 + \left[\ln(2) - \frac{3}{2} \right] T^2 \right) \vec{\tau} \end{bmatrix} \quad (2.14d)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_1(a) = \frac{m}{4\pi} \int_{-S/2}^{S/2} \begin{bmatrix} \frac{K(a+a') \vec{\mathbf{b}}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)) + 2\vec{\tau}(a+a')}{|\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)|^3} \\ + 3 \frac{[\vec{\mathbf{n}}(a+a') \bullet (\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a))] (\vec{\mathbf{b}}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)))}{|\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)|^3} \\ - 3 \frac{[\vec{\mathbf{b}}(a+a') \bullet (\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a))] (\vec{\mathbf{n}}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)))}{|\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)|^3} \\ + \left(-2 \frac{1}{|a'|^3} + \frac{K(a)^2}{4|a'|} - \frac{T(a)^2}{2|a'|} \right) \vec{\tau}(a) - \frac{K(a)T(a)}{2|a'|} \vec{\mathbf{b}}(a) - \frac{3}{2} \frac{K_a(a)}{|a'|} \vec{\mathbf{n}}(a) \end{bmatrix} da' \quad (2.14e)$$

où $m = \pi \int_0^\infty \omega_2 r^2 dr$ est le débit axial. Il est en facteur dans toutes ces expressions.

II.5. Le développement intérieur \vec{v}^{inn} du champ de vitesse

Lorsque l'on fait le changement de variables $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ dans la relation (2.7b),

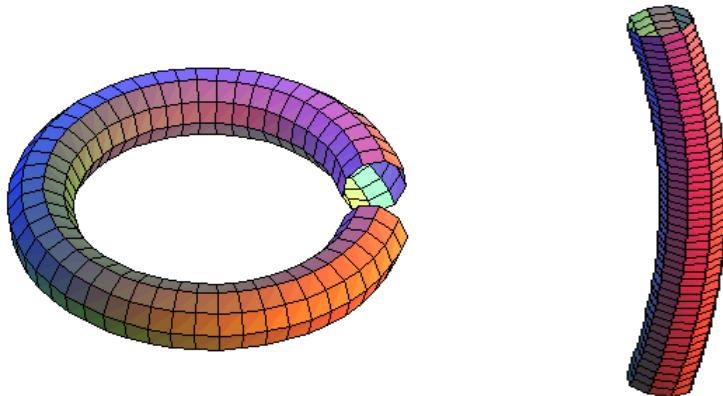
l'expression du champ de vitesse devient :

$$\vec{v}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a') \wedge \left[(\vec{X}(a) + \varepsilon \bar{r} \vec{r}) - (\vec{X}(a') + \varepsilon \bar{r}' \vec{r}') \right]}{\left| (\vec{X}(a) + \varepsilon \bar{r} \vec{r}) - (\vec{X}(a') + \varepsilon \bar{r}' \vec{r}') \right|^3} h_3' \bar{r}' dr' d\varphi' da' \quad (2.15)$$

Nous cherchons le développement intérieur ($\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ fixé) du champ de vitesse

$\vec{v}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon)$ au point $\mathbf{M}(\bar{r}, \varphi, a)$. Si nous imposons brutalement $\varepsilon = 0$ dans cette expression, une singularité apparaît alors lorsque $a' = a$ de façon similaire à ce qui s'est passé au paragraphe précédent.

L'expression (2.15) de $\vec{v}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon)$ est donc une intégrale singulière par rapport au petit paramètre ε . Afin de trouver le développement de cette intégrale, nous utilisons encore la méthode des développements asymptotiques raccordés des intégrales singulières.



$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ à } a' - a \text{ fixé} \qquad \qquad \qquad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ à } \frac{a' - a}{\varepsilon} \text{ fixé}$$

Figure 2.2 : Schéma de la méthode de développement de l'intégrale singulière (2.15) de $\vec{v}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon)$.

Le principe de cette méthode consiste à séparer l'intégrale en deux parties (Figure 2.2): en dehors d'un voisinage du point $\mathbf{M}(\bar{r}, \varphi, a)$, nous développons l'intégrant par rapport à ε à $a' - a$ fixé et nous intégrons selon a' , tandis que dans un voisinage de \mathbf{M} nous développons

l'intégrant par rapport à ε à $\frac{a' - a}{\varepsilon}$ fixé et nous intégrons selon a' . Le développement recherché est alors la somme des deux développements obtenus.

Par cette méthode, on obtient le développement intérieur suivant du champ de vitesse

$\vec{v}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon) = & \frac{-1}{2\pi\varepsilon} \iint \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge \frac{(-\bar{r}' \bar{\mathbf{r}}(\varphi, a) + \bar{r}' \bar{\mathbf{r}}(\varphi', a)) \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi'}{k^2} \\ & + \frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{\varepsilon} - 1 \right] \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{A}} \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint \left[\vec{\omega}_a^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge \vec{\tau}(a) + \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge \frac{K(a)}{2} \vec{\mathbf{n}}(a) \right] \ln \frac{1}{k^2} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge [\bar{r}' \bar{\mathbf{r}}(\varphi', a) - \bar{r} \bar{\mathbf{r}}(\varphi, a)]}{k^2} \left[-K(a) \bar{r}' \cos(\varphi') \right] \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \quad (2.16) \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge [T(a) \bar{r}' \bar{r}' \sin(\varphi - \varphi') \vec{\tau}(a)]}{k^2} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge [\bar{r}' \bar{\mathbf{r}}(\varphi', a) - \bar{r} \bar{\mathbf{r}}(\varphi, a)]}{k^2} \left(\frac{K(a)}{2} \right) \left[\bar{r}' \cos \varphi' + \bar{r} \cos \varphi \right] \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\ & + O(\varepsilon \ln \varepsilon) \end{aligned}}$$

où $k^2 = \bar{r}^2 + \bar{r}'^2 - 2\bar{r}\bar{r}' \cos(\varphi - \varphi')$.

Pour obtenir ce résultat, nous n'avons pas eu à choisir les échelles du développement intérieur du champ de vitesse.

Cette formule donne le développement intérieur du champ de vitesse à proximité et dans l'anneau tourbillon jusqu'à l'ordre $\varepsilon \ln \varepsilon$. Elle démontre que les échelles asymptotiques de ce développement sont : $\frac{1}{\varepsilon}, 1, \ln \varepsilon, \varepsilon, \dots$

L'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$ correspond à l'ordre principal de la vitesse orthoradiale et de la vitesse axiale près de l'anneau. Comme le terme d'ordre $\ln \varepsilon$ est indépendant de la coordonnée radiale, il

participe à la vitesse de la fibre centrale de l'anneau. L'échelle logarithmique est parfois mise avec l'échelle d'ordre 1 dans les développements de façon abusive. C'est le cas des expressions (1.30) et (1.31) dans lesquelles le terme d'ordre $\ln \varepsilon$ a été traitée comme une terme d'ordre 1. Une discussion plus complète sur cette échelle est faite aux paragraphes III.13 et VI.3.6.

Le calcul de ce développement est encore plus long et fastidieux que celui du paragraphe II.4. En effet, l'intégrale (2.15) à développer ressemble à l'intégrale (2.8) en plus compliquée. Ainsi que le mentionne le paragraphe I.12., on a effectué également ce calcul à l'aide d'un calculateur formel (annexe A.12), ce qui permet *de vérifier les calculs* préalablement faits à la main et d'obtenir rapidement les ordres supérieurs $O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ et $O(\varepsilon^2)$, si on les désire.

Pour un tourbillon avec un champ de vorticité qui a seulement une composante selon la tangente, le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ de (2.16) est la formule de Biot et Savart en deux dimensions. Tous les termes qui apparaissent dans (2.16) sont des termes locaux sauf le terme $\vec{\mathbf{A}}$ qui est le même terme intégral global que dans le développement (2.11a) de $\vec{\mathbf{v}}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, a)$ pour r voisin de zéro .

Les termes d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\ln \varepsilon$ ont été trouvés initialement par Levi-Civita⁶⁻⁷. Lorsque $\bar{r} = 0$, nous obtenons la vitesse de la fibre centrale et nous retrouvons le résultat de Klein et Knio⁵ :

$$\begin{aligned}
 & \vec{\mathbf{v}}^{\text{inn}}(\bar{r} = 0, \varphi, a, \varepsilon) = \\
 & \frac{-1}{2\pi\varepsilon} \iint \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge \vec{\mathbf{r}}(\varphi', a) d\bar{r}' d\varphi' \\
 & + \frac{K(a)}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{\varepsilon} - 1 \right] \vec{\mathbf{b}}(a) + \vec{\mathbf{A}}(a) \\
 & - \frac{1}{4\pi} \iint \left[\vec{\omega}_a^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge \vec{\tau}(a) + \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge \frac{K(a)}{2} \vec{\mathbf{n}}(a) \right] \ln \frac{1}{\bar{r}^2} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\
 & + \frac{1}{2\pi} \iint \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', \varphi', a) \wedge \vec{\mathbf{r}}(\varphi', a) \frac{K(a)}{2} \cos(\varphi') \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\
 & + O(\varepsilon \ln \varepsilon)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pour un jet tourbillon avec un champ de vorticité $\vec{\omega}^{(0)} = \omega_2(\bar{r})\vec{\theta} + \omega_3(\bar{r})\vec{\tau}$, qui ne dépend que de la coordonnée radiale et qui n'a pas de composante radiale, (2.17) se simplifie en :

$$\begin{aligned}\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r} = 0, \varphi, a, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \vec{v}^{\text{inn}(0)}(\bar{r} = 0, \varphi, a) \\ &+ \ln \varepsilon \vec{v}^{\text{inn}(01)}(\bar{r} = 0, \varphi, a) + \vec{v}^{\text{inn}(1)}(\bar{r} = 0, \varphi, a) \\ &+ \varepsilon \ln \varepsilon \vec{v}^{\text{inn}(12)}(\bar{r} = 0, \varphi, a) + \varepsilon \vec{v}^{\text{inn}(2)}(\bar{r} = 0, \varphi, a) \\ &+ O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)\end{aligned}\quad (2.18)$$

avec :

$$\vec{v}^{\text{inn}(0)}(\bar{r} = 0, \varphi, a) = \vec{\tau}(a) \int_0^\infty \omega_2(\bar{r}) d\bar{r} \quad (2.19a)$$

$$\vec{v}^{\text{inn}(01)}(\bar{r} = 0, \varphi, a) = -\frac{1}{4\pi} K(a) \vec{\mathbf{b}}(a) \quad (2.19b)$$

$$\vec{v}^{\text{inn}(1)}(\bar{r} = 0, \varphi, a) = \vec{\mathbf{A}}(a) - \frac{1}{4\pi} \left(\begin{array}{l} 1 - \ln S \\ + 2\pi \int_0^\infty \bar{r} \ln \bar{r} \omega_3(\bar{r}) d\bar{r} \\ - \pi \int_0^\infty \bar{r} \omega_3(\bar{r}) d\bar{r} \end{array} \right) K(a) \vec{\mathbf{b}}(a) \quad (2.19c)$$

$$\vec{v}^{\text{inn}(12)}(\bar{r} = 0, \varphi, a) = -\frac{m}{4\pi} \left(\begin{array}{l} [3K_a \cos \varphi + TK \sin \varphi] \vec{\mathbf{r}} \\ + [-3K_a \sin \varphi + TK \cos \varphi] \vec{\theta} \\ + \left[-\frac{1}{2} K^2 + T^2 \right] \vec{\tau} \end{array} \right) \quad (2.19d)$$

$$\vec{v}^{\text{inn}(2)}(\bar{r}=0, \varphi, a) = \tilde{\tilde{E}}_1(a) - \frac{m}{4\pi} \begin{pmatrix} \left[3\frac{m_1}{m} + 3 - \frac{1}{6} - 3\ln S \right] K_a \cos \varphi \\ + \left[\frac{m_1}{m} - \frac{1}{6} - \ln S \right] TK \sin \varphi \\ \left[-3\frac{m_1}{m} + 3 - \frac{1}{6} - 3\ln S \right] K_a \sin \varphi \\ + \left[\frac{m_1}{m} - \frac{1}{6} - \ln S \right] TK \cos \varphi \\ + \left(-\frac{1}{2}K^2 + T^2 \left[\frac{m_1}{m} - \ln S \right] \right) \vec{\tau} \\ + \left(+\frac{5}{12}K^2 + T^2 + \frac{8}{S^2} \right) \end{pmatrix}_{\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau}} \quad (2.19e)$$

$$\tilde{\tilde{E}}_1(a) = \frac{m}{4\pi} \int_{-S/2}^{S/2} \left\{ \frac{K(a+a') \left[\vec{b}(a+a') \wedge (\vec{X}(a+a') - \vec{X}(a)) \right] + 2\vec{\tau}(a+a')}{|\vec{X}(a+a') - \vec{X}(a)|^3} - \frac{1}{2} \frac{K(a)T(a)\vec{b}(a) + T^2(a)\vec{\tau}(a) + 3K_a(a)\vec{n}(a)}{|a'|} - 2 \frac{\vec{\tau}(a)}{|a'|^3} \right\} da' \quad (2.19f)$$

où :

$$m_1 = \pi \int_0^\infty r^{-2} \ln \bar{r} \omega_2(\bar{r}) d\bar{r} \quad (2.20a)$$

$$m = \pi \int_0^\infty \omega_2 \bar{r}^2 d\bar{r} \quad (2.20b)$$

Le terme $\tilde{\tilde{E}}_1(a)$ est une partie de l'expression (2.14e) de $\vec{E}_1(a)$ et m est le débit axial.

II.6. La limite loin du filament du développement intérieur \vec{v}^{inn} du champ de vitesse

A l'aide de la formule (2.16) du champ de vitesse intérieur $\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon)$ complétée des ordres $\varepsilon \ln \varepsilon$ et ε , on montre que sa limite en l'infini est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \vec{v}^{\text{inn}(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) \\ &+ \ln \varepsilon \vec{v}^{\text{inn}(01)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) + \vec{v}^{\text{inn}(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) \\ &+ \varepsilon \ln \varepsilon \vec{v}^{\text{inn}(12)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) + \varepsilon \vec{v}^{\text{inn}(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) \\ &+ O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si l'on effectue le changement de variables $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ dans cette expression (2.21), nous

obtenons :

$$\left[\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a, \varepsilon) \right]_{\bar{r}=\frac{r}{\varepsilon}} = \vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, a) + \varepsilon \vec{v}^{\text{out}(1)}(r \rightarrow 0, \varphi, a) + \dots \quad (2.22)$$

où $\vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, a)$ et $\vec{v}^{\text{out}(1)}(r \rightarrow 0, \varphi, a)$ sont donnés par (2.11a) et (2.13) jusqu'aux ordres $r^2 \ln r$ et $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$. Nous avons ainsi montré la relation suivante :

$$\left[\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a, \varepsilon) \right]_{\bar{r}=\frac{r}{\varepsilon}} = \left[\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a, \varepsilon) \right]_{r \rightarrow 0} \quad (2.23)$$

Les développements extérieur et intérieur de l'intégrale de Biot et Savart se raccordent donc bien entre eux.

Pour un jet tourbillon avec un champ de vorticité $\vec{\omega}^{(0)} = \omega_2(\bar{r})\vec{\theta} + \omega_3(\bar{r})\vec{\tau}$, qui ne dépend que de la coordonnée radiale et qui n'a pas de composante radiale, les expressions simplifiées de $\vec{v}^{\text{inn}(j)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a)$ sont les suivantes :

$$\vec{v}^{\text{inn}(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) = \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\theta}}{\bar{r}} + \frac{\vec{I}_1}{\bar{r}^2} + O(\frac{1}{\bar{r}^3}) \quad (2.24a)$$

$$\vec{v}^{\text{inn}(01)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) = -\frac{K}{4\pi} \vec{b} \quad (2.24b)$$

$$\vec{v}^{\text{inn}(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) = \frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{\bar{r}} - 1 \right] \vec{b} + \frac{K}{4\pi} \cos \varphi \vec{\theta} + \vec{A} + \frac{\vec{I}_2}{\bar{r}} + O(\frac{1}{\bar{r}^2}) \quad (2.24c)$$

$$\vec{v}^{\text{inn}(12)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) = \vec{I}_3 + \vec{I}_5 \bar{r} \quad (2.24d)$$

$$\vec{v}^{\text{inn}(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a) = (\vec{I}_3 + \vec{I}_5 \bar{r}) \ln \bar{r} + [\vec{I}_6 + \vec{E}_2(\varphi, a)] \bar{r} + \vec{I}_4 + \vec{E}_1(a) \quad (2.24e)$$

Ici, $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3, \vec{I}_4, \vec{E}_1(a)$ ont les mêmes définitions qu'au paragraphe II.4 et les termes $\vec{I}_5, \vec{I}_6, \vec{E}_2$ sont définis par :

$$\vec{\mathbf{I}}_5 = -\frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} K^2 \sin(2\varphi) \vec{\mathbf{r}} \\ + \frac{3}{4} K^2 \cos(2\varphi) \vec{\theta} \\ + (K_a \sin \varphi - KT \cos \varphi) \vec{\tau} \end{bmatrix} \quad (2.25a)$$

$$\vec{\mathbf{I}}_6 = -\frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} \left[1 - \frac{3}{4} \ln S \right] K^2 \sin(2\varphi) \vec{\mathbf{r}} \\ + \left[\frac{4}{S^2} - \frac{K^2}{24} + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln S \right) K^2 \cos(2\varphi) \right] \vec{\theta} \\ + (K_a \sin \varphi - KT \cos \varphi) [1 - \ln S] \vec{\tau} \end{bmatrix} \quad (2.25b)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2(\varphi, a) = \frac{1}{4\pi} [\vec{\mathbf{B}}(\varphi, a) - 3\vec{\mathbf{C}}(\varphi, a)] \quad (2.25c)$$

Avec ces notations, les formules (2.11a) et (2.13) s'écrivent simplement :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, a) &= \frac{1}{2\pi r} \vec{\theta} + \frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{r} - 1 \right] \vec{\mathbf{b}} + \frac{K}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta} \\ &\quad + \vec{\mathbf{A}} \\ &\quad + \vec{\mathbf{I}}_5 r \ln r + (\vec{\mathbf{I}}_6 + \vec{\mathbf{E}}_2) r \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}^{\text{out}(1)}(r \rightarrow 0, \varphi, a) &= \frac{\vec{\mathbf{I}}_1}{r^2} + \frac{\vec{\mathbf{I}}_2}{r} + \vec{\mathbf{I}}_3 \ln r \\ &\quad + \vec{\mathbf{E}}_1(a) + \vec{\mathbf{I}}_4(\varphi, a) \end{aligned} \quad (2.26b)$$

La loi de raccord asymptotique et les résultats (2.26) ou les résultats (2.24) donnent les conditions aux limites en l'infini des équations dynamiques intérieures du problème de couche limite sur la fibre centrale et sont utilisées dans le prochain chapitre. Dans la démarche de résolution présentée au chapitre I, on souligne l'importance de développer en série de Fourier selon la coordonnée φ les composantes des différents champs sur $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$. C'est pour cela que dans les résultats (2.14) et (2.24), on a linéarisé les termes trigonométriques qui apparaissent dans les composantes des différents champs sur $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$. Seuls les termes $\vec{\mathbf{E}}_1(a)$ et $\vec{\mathbf{E}}_2(\varphi, a)$ n'ont pas subit ce traitement.

Les développements en série de Fourier selon φ des composantes du terme intégral $\vec{\mathbf{E}}_1(a)$ sur $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}_1(a) &= (\vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_1) \vec{\tau} + (\vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_1) \vec{\mathbf{n}} + (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_1) \vec{\mathbf{b}} \\
&= [(\vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_1) \cos \varphi + (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_1) \sin \varphi] \vec{\mathbf{r}} \\
&\quad + [-(\vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_1) \sin \varphi + (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_1) \cos \varphi] \vec{\theta} \\
&\quad + (\vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_1) \vec{\tau}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

D'après (2.25c), on voit que $\vec{\mathbf{E}}_2(\varphi, a)$ s'écrit :

$$\vec{\mathbf{E}}_2(\varphi, a) = \vec{\mathbf{E}}_{21}(a) \cos \varphi + \vec{\mathbf{E}}_{22}(a) \sin \varphi \tag{2.28}$$

où les termes $\vec{\mathbf{E}}_{21}(a)$ et $\vec{\mathbf{E}}_{22}(a)$ sont donnés par :

$$\vec{\mathbf{E}}_{21}(a) = \frac{1}{4\pi} \int_{-S/2}^{+S/2} \left[-3 \frac{\vec{\mathbf{n}}(a) \bullet (\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a))}{|\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)|^5} [\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a))] \right. \right. \tag{2.29a}$$

$$\left. \left. - \frac{3}{8} K^2(a) \frac{\vec{\mathbf{b}}(a)}{|a'|} \right] da' \right. \\
+ \frac{1}{4\pi} \int_{-S/2}^{+S/2} \left[- \frac{\vec{\mathbf{n}}(a) \wedge \vec{\tau}(a+a')}{|\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)|^3} \right. \right. \tag{2.29a}$$

$$\left. \left. - \frac{\vec{\mathbf{b}}(a)}{|a'|^3} + \frac{1}{2} K(a) T(a) \frac{\vec{\tau}(a)}{|a'|} \right] da' \right. \\
\vec{\mathbf{E}}_{22}(a) = \frac{1}{4\pi} \int_{-S/2}^{+S/2} \left[-3 \frac{\vec{\mathbf{b}}(a) \bullet (\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a))}{|\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)|^5} [\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a))] \right. \right. \tag{2.29b}$$

$$\left. \left. - \frac{3}{8} K^2(a) \frac{\vec{\mathbf{n}}(a)}{|a'|} \right] da' \right. \\
+ \frac{1}{4\pi} \int_{-S/2}^{+S/2} \left[- \frac{\vec{\mathbf{b}}(a) \wedge \vec{\tau}(a+\bar{a})}{|\vec{\mathbf{X}}(a+a') - \vec{\mathbf{X}}(a)|^3} \right. \right. \tag{2.29b}$$

$$\left. \left. + \frac{\vec{\mathbf{n}}(a)}{|a'|^3} - \frac{1}{2} K_a(a) \frac{\vec{\tau}(a)}{|a'|} \right] da' \right. \\$$

Les développements en série de Fourier selon φ des composantes du terme intégral $\vec{\mathbf{E}}_2(\varphi, a)$ sur $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}_2(\varphi, a) &= (\vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_2) \vec{\tau} + (\vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_2) \vec{\mathbf{n}} + (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_2) \vec{\mathbf{b}} \\
&= \frac{1}{2} \left[(-\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) \cos 2\varphi \right. \\
&\quad \left. + (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22}) \sin 2\varphi \right] \vec{\mathbf{r}} \\
&\quad + (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) \vec{\theta} \\
&+ \frac{1}{2} \left[(\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22}) \cos 2\varphi \right. \\
&\quad \left. + (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} - \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) \sin 2\varphi \right] \vec{\theta} \\
&+ \left[\begin{array}{l} \vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} \cos \varphi \\ + \vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} \sin \varphi \end{array} \right] \vec{\tau}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

II.7. Généralisation des résultats

Dans ce paragraphe, on n'omet plus de mettre l'indice 0 pour la configuration initiale. Précédemment, on a donné des développements des intégrales de Biot et Savart à l'instant initial $t=0$, pour un filament $\vec{\mathbf{X}}_0(a)$ qui n'a pas de petites longueurs d'ondes et dont le développement intérieur du champ de vorticité est initialement $\vec{\omega}_0 = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}_0^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a)$, où a est le paramètre de longueur d'arc sur la fibre centrale. Comme la loi de Biot et Savart est une fonction linéaire du champ de vorticité, on peut étendre facilement les résultats précédents à un champ de vorticité *initial* qui a le développement intérieur suivant :

$$\vec{\omega}_0 = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}_0^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a) + \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{\omega}_0^{(1)}(\bar{r}, \varphi, a) + \varepsilon^0 \vec{\omega}_0^{(2)}(\bar{r}, \varphi, a) + \varepsilon^1 \vec{\omega}_0^{(3)}(\bar{r}, \varphi, a) + \dots \quad (2.31)$$

Les relations (2.24) donnent les conditions aux limites du champ de vitesse intérieur en l'infini à l'instant initial. Or comme il a été dit au chapitre I, pour obtenir l'équation du mouvement d'un filament tourbillon, on a besoin des conditions aux limites du champ de vitesse intérieur en l'infini à tout temps t et pas uniquement à l'instant initial. Il est donc nécessaire de généraliser les relations (2.24) pour ce temps t .

Même si initialement le paramètre a sur la fibre est une longueur d'arc, il ne l'est plus au temps t , car on doit utiliser un paramètre s qui n'est pas une longueur d'arc pour décrire le mouvement. D'autre part, la fibre centrale au temps t est développée par rapport à ε :

$$\vec{\mathbf{X}}(s, t, \varepsilon) = \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{X}}^{(1)}(s, t) + \dots, \quad (2.32)$$

contrairement à la fibre centrale initiale $\vec{\mathbf{X}}_0$ que l'on a prise sous la forme $\vec{\mathbf{X}}_0(a)$. Le champ de vorticité au temps t est de la forme :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{\omega}^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \vec{\omega}^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots, \quad (2.33)$$

contrairement au champ de vorticité initial $\vec{\omega}_0$ que l'on a pris sous la forme $\vec{\omega}_0 = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}_0^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a)$. Comme on le verra à la fin du paragraphe III.7.2, la fibre centrale initiale $\vec{\mathbf{X}}_0$ et le champ de vorticité initial $\vec{\omega}_0$ d'un filament à structure normale (au sens du chapitre I) sont aussi développés par rapport à ε .

Ainsi, une première façon d'étendre les résultats (2.24) précédents est de refaire les calculs de ce chapitre (à l'aide du calculateur formel) sur un paramétrage s qui n'est pas une longueur d'arc et avec une fibre centrale et un champ de vorticité qui ont les développements

(2.32) et (2.33) précédents. Une seconde façon de procéder est de remplacer $\vec{\mathbf{X}}_0(a)$ par (2.32)

et $\vec{\omega}_0 = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}_0^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a)$ par (2.33) dans les résultats (2.24) précédents en considérant qu'ils

sont valables au temps t , tout en changeant de paramétrage pour se mettre sur un paramètre s qui n'est pas une longueur d'arc.

En procédant comme ceci, l'expression (2.11b) du terme intégral global $\vec{\mathbf{A}}(a)$:

$$\vec{\mathbf{A}}(a) = \frac{1}{4\pi} \int_{-S/2}^{+S/2} \left[\begin{array}{l} \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a'))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a')|^3} \\ - \frac{K(a)\vec{\mathbf{b}}(a)}{2|a'|} \end{array} \right] da'$$

devient :

$$\vec{\mathbf{A}}(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma^{(0)}(s+s', t) \left[\begin{array}{l} - \frac{\vec{\tau}^{(0)}(s+s', t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t))}{|\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)|^3} \\ - \frac{K^{(0)}(s, t)}{2} \frac{\vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t)}{|\lambda^{(0)}(s, s', t)|} \end{array} \right] ds' \quad (2.34)$$

avec

$$\lambda^{(0)}(s, s', t) = \int_s^{s+s'} \sigma^{(0)}(s^*, t) ds^*. \quad (2.35)$$

C'est cette expression (2.34) qui sera utilisée dans le chapitre III.

Comme $\frac{\sigma^{(0)}(s+s', t)}{|\lambda^{(0)}(s, s', t)|} = \frac{1}{|s'|} + O(1)$ en $s' = 0$, $\vec{\mathbf{A}}(s, t)$ s'écrit également :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}}(s, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\begin{array}{l} - \sigma^{(0)}(s+s', t) \frac{\vec{\tau}^{(0)}(s+s', t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t))}{|\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)|^3} \\ - \frac{K^{(0)}(s, t)}{2} \frac{\vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t)}{|s'|} \end{array} \right] ds' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{K^{(0)}(s, t)}{2} \vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t) \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\sigma^{(0)}(s+s', t) \frac{1}{|\lambda^{(0)}(s, s', t)|} - \frac{1}{|s'|} \right] ds' \end{aligned}$$

et c'est une expression de ce type que l'on aurait obtenue, si on avait appliqué la première façon de faire qui a été indiquée.

On peut encore généraliser les résultats précédents à un filament avec des ondes courtes. Le développement du champ de vorticité intérieur a alors des parties spatiales oscillantes selon la variable $\bar{s} = s / \varepsilon$ et est de la forme suivante :

$$\vec{\omega}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, \bar{s}, t) + \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{\omega}^{\text{inn}(1)}(\bar{r}, \varphi, s, \bar{s}, t) + \vec{\omega}^{\text{inn}(2)}(\bar{r}, \varphi, s, \bar{s}, t) + \dots \quad (2.36)$$

On peut alors encore appliquer la méthode des développements asymptotiques raccordés des intégrales singulières comme on l'a fait pour l'intégrale de Biot et Savart (2.15). La partie intérieure ($\varepsilon \rightarrow 0$ à $\frac{s' - s}{\varepsilon}$ fixé) de l'intégrale devient plus compliquée, mais se développe de la même façon que précédemment ; alors que la partie extérieure ($\varepsilon \rightarrow 0$ à $s' - s$ fixé) fait apparaître une intégrale avec une partie oscillante. On la développe alors par la méthode de la phase stationnaire ou une méthode WKB¹.

II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé le développement extérieur de l'intégrale de Biot et Savart, ainsi que son développement intérieur. Puis, nous avons obtenu la limite en zéro du développement extérieur du champ de vitesse, ainsi que la limite en l'infini du développement intérieur du champ de vitesse et nous avons montré que ces deux limites se raccordent bien entre elles.

Même si ces résultats ne sont que des résultats de cinématique obtenus à partir de la loi de Biot et Savart qui est une loi linéaire, ils mettent en jeu bon nombre de calculs. Dans la littérature, la démarche utilisée pour faire ces développements et les résultats obtenus ne sont généralement pas très bien précisés. Le développement intérieur de la loi de Biot et Savart permet d'obtenir directement les échelles du développement du champ de vitesse intérieur connaissant celui du champ de vorticité. Il donne également un éclairage complémentaire qui peut servir de garde fou.

Ces résultats ont été obtenus d'abord pour la configuration initiale, puis ont été généralisés au temps t . Dans le chapitre suivant, ils sont utilisés pour obtenir les conditions aux limites en l'infini des équations aux dérivées partielles satisfaites par le champ de vitesse intérieur.

Notons que pour des raisons de simplicité, on dit parfois la *vitesse extérieure* au lieu du *développement extérieur de la vitesse* et la *vitesse intérieure* au lieu du *développement intérieur de la vitesse*.

II.9. Bibliographie du chapitre II

1. BENDER,C.M. et ORSZAG,S.A. 1978 Advanced mathematical methods for scientists and engineers, *McGraw-Hill, New York*, 341-349
2. CALLEGARI,A.J. et TING,L. 1978 Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1), 148-175
3. FRANCOIS,C. 1981 Les méthodes de perturbation en mécanique. ENSTA. Paris, 98-104
4. FUKUMOTO,Y. et MIYAZAKI,T. 1991 Three dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity, *J. Fluid Mech.* **222**, 369-416
5. KLEIN,R. et KNIO,O.M. 1995 Asymptotic vorticity structure and numerical simulation of slender vortex filaments, *J. Fluid Mech.* **284**, 257-321
6. LEVI-CIVITA,T. 1908 Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile, *Rend. R.Acc. Lincei* **17**, 413-426, 535-551
7. LEVI-CIVITA,T. 1932 Attrazione newtoniana dei tubi sottili vorticiti filiformi, *Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa. Zanichelli,Bologna*, 1-33

Chapitre III

ÉVOLUTION D'UN ANNEAU TOURBILLON A STRUCTURE NORMALE SIMPLE

Dans ce chapitre, nous décrivons le développement asymptotique raccordé des équations de Navier-Stokes, qui conduit à l'équation d'évolution de la fibre centrale d'un anneau tourbillon. On étudie un filament à structure normale simple. C'est un filament qui n'a pas de petites longueurs d'onde et dont le champ de vitesse ne dépend pas du temps dilaté t/ε^2 et est axisymétrique et indépendant de l'abscisse s à l'ordre principal. Le but essentiel de ce chapitre est de développer, pour ce filament, la démarche qui a été décrite au chapitre I, tout en se servant des résultats du chapitre II. On reprend la démarche de Callegari et Ting¹, Ting et Tung¹³, Ting et Klein¹⁴, Fukumoto et Miyazaki³ pour obtenir l'équation d'évolution de la fibre centrale d'un anneau tourbillon. On donne une équation d'évolution de la fibre centrale à l'ordre 1 qui corrige celle de Fukumoto et Miyazaki³, ainsi que les équations aux dérivées partielles satisfaites par la partie axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1. On a ainsi un système fermé d'équations à l'ordre 1.

III.1. Équations écrites sur les coordonnées locales

Nous rappelons dans ce paragraphe les équations dynamiques du champ de vitesse données dans le chapitre I. La vitesse est décomposée en tout point du fluide selon la formule :

$$\vec{v}(r, \varphi, s, t, \varepsilon) = \dot{\vec{X}}(s, t, \varepsilon) + \vec{V}(r, \varphi, s, t, \varepsilon) \quad (3.1)$$

La vitesse relative \vec{V} est projetée sur les vecteurs de base :

$$\vec{V} = u\vec{r} + v\vec{\theta} + w\vec{\tau} \quad (3.2)$$

où l'on appelle :

$u\vec{r}$: la vitesse radiale

$v\vec{\theta}$: la vitesse orthoradiale (ou circonférentielle)

$w\vec{\tau}$: la vitesse axiale.

L'équation de la conservation de la masse et les équations de Navier-Stokes sont écrites sur les coordonnées curvilignes locales (Annexe A.1.) :

$$(urh_3)_r + (h_3v)_{\varphi} + rw_s - \sigma Trw_{\varphi} = -r \dot{\vec{X}}_s \bullet \vec{\tau} \quad (3.3)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = -gradp + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{h_3} \left(\frac{1}{h_3} \dot{\vec{X}}_s \right)_s \quad (3.4)$$

où :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} = & \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{V}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} + u \dot{\vec{r}} + v \dot{\vec{\theta}} + w \dot{\vec{\tau}} + \ddot{\vec{X}} + (\vec{V} - r\vec{r}_t) \bullet grad \vec{V} + \frac{\dot{\vec{X}}_s}{h_3} (w - r \dot{\vec{r}} \bullet \vec{\tau}) \\ & \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{V}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} = \frac{\partial u}{\partial t} \vec{r} + \frac{\partial v}{\partial t} \vec{\theta} + \frac{\partial w}{\partial t} \vec{\tau} \end{aligned}$$

et où les expressions de $grad\vec{V}$ et de $\Delta\vec{V}$ en coordonnées curvilignes peuvent se trouver facilement dans la littérature de base.

III.2. Définition de la fibre centrale

D'après le chapitre I, la fibre centrale est définie comme *la courbe dont le paramétrage vérifie $\dot{\vec{X}}(s,t) \bullet \vec{\tau} = 0$ et qui se trouve au centre de vorticité de toutes les sections du filament orthogonales à cette courbe*. Vis-à-vis de cette définition, la condition aux limites en zéro de nos équations aux dérivées partielles est :

$$\boxed{\vec{V} - (\vec{V} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = 0}. \quad (3.5)$$

III.3. Forme des développements intérieurs

Nous choisissons des développements intérieurs du champ de vitesse de la forme suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} u^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \bar{u} = \varepsilon^{-1} u^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \\ v^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \bar{v} = \varepsilon^{-1} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \\ w^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \bar{w} = \varepsilon^{-1} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \end{aligned}} \quad (3.6)$$

et un développement de la fibre centrale de la forme:

$$\vec{\mathbf{X}}(s, t, \varepsilon) = \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{X}}^{(1)}(s, t) + \dots \quad (3.7)$$

L'abscisse $s \in [-\pi, \pi]$ n'est pas une longueur d'arc et φ est l'angle polaire et non pas l'angle Θ défini dans Callegari et Ting¹ par :

$$\begin{aligned} \Theta &= \varphi - \Theta_0(s, t, \varepsilon) \\ d\Theta_0 &= \sigma(s, t, \varepsilon) T(s, t, \varepsilon) ds \end{aligned}$$

Comme la fibre centrale est une inconnue du problème, elle dépend de ε et bon nombre de grandeurs liées à cette fibre doivent être développées :

$$\sigma = \sigma^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \sigma^{(1)}(s, t) + \dots$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \vec{\tau}^{(1)}(s, t) + \dots$$

$$K = K^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 K^{(1)}(s, t) + \dots$$

$$\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{n}}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{n}}^{(1)}(s, t) + \dots$$

$$T = T^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 T^{(1)}(s, t) + \dots$$

$$\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{b}}^{(1)}(s, t) + \dots$$

$$h_3 = h_3^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 h_3^{(1)}(s, t) + \dots$$

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}^{(0)}(s, \varphi, t) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{r}}^{(1)}(s, \varphi, t) + \dots$$

$$\vec{\Theta} = \vec{\Theta}^{(0)}(s, \varphi, t) + \varepsilon^1 \vec{\Theta}^{(1)}(s, \varphi, t) + \dots$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(0)} &= \left| \vec{\mathbf{X}}_s^{(0)} \right| \\
 \sigma^{(1)} &= \vec{\mathbf{X}}_s^{(0)} \bullet \vec{\mathbf{X}}_s^{(1)} / \sigma^{(0)} \\
 \sigma^{(0)} K^{(0)} &= \frac{\left| \vec{\mathbf{X}}_s^{(0)} \right|}{\sigma^{(0)}} \\
 h_3^{(0)} &= \sigma^{(0)} \\
 h_3^{(1)} &= \sigma^{(1)} - \sigma^{(0)} K^{(0)} \bar{r} \cos(\varphi) \\
 \tau^{(0)} &= \mathbf{X}_s^{(0)} / \sigma^{(0)} \\
 \bar{\mathbf{n}}^{(0)} &= \frac{\vec{\tau}_s^{(0)}}{\sigma^{(0)} K^{(0)}} \\
 \bar{\mathbf{b}}^{(0)} &= \bar{\tau}^{(0)} \wedge \bar{\mathbf{n}}^{(0)} \\
 \bar{\mathbf{r}}^{(0)} &= \bar{\mathbf{n}}^{(0)} \cos(\varphi) + \bar{\mathbf{b}}^{(0)} \sin(\varphi) \\
 \tau^{(1)} &= \frac{\mathbf{X}_s^{(0)}}{\sigma^{(0)}} - \frac{\mathbf{X}_s^{(0)} \sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}{}^2}
 \end{aligned}$$

III.4. Les équations à l'ordre 0

Nous cherchons un champ de vitesse \vec{v} solution de notre problème dont *l'ordre principal* est *axisymétrique*. Nous supposons donc que si initialement l'écoulement est axisymétrique à cet ordre, il le reste à tout les temps. A l'ordre principal, chaque section orthogonale à la fibre centrale du filament est alors circulaire et son centre est confondu avec le centre de vorticité de celle-ci.

Comme on considère que notre filament tourbillon ne possède pas de répartition linéique de sources sur sa fibre centrale, on annule la composante radiale de la vitesse à l'ordre principal :

$$\boxed{u^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = 0} \quad (3.8)$$

Sans faire l'hypothèse de l'axisymétrie du champ de vitesse à l'ordre principal, les équations de conservation de la masse et de Navier Stokes s'écrivent à l'ordre principal (Annexe A.4) :

$$v_\phi^{(0)} = 0 \quad (3.9a)$$

$$\frac{v^{(0)2}}{\bar{r}} = p_r^{(0)} \quad (3.9b)$$

$$p_\varphi^{(0)} = 0 \quad (3.9c)$$

$$w_\varphi^{(0)} v^{(0)} = 0 \quad (3.9d)$$

L'ordre principal axisymétrique (i.e. indépendant de φ) satisfait donc bien ces équations. A l'aide de (3.9b), il vient :

$$p^{(0)} = - \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{[v^{(0)}(\bar{r}', s, t)]^2}{\bar{r}'} d\bar{r}' \quad (3.10)$$

Cette relation exprime l'équilibre entre le gradient de pression et la force centrifuge.

Afin de vérifier la condition aux limites $\vec{V} - (\vec{V} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = 0$ en $\bar{r} = 0$ et pour des raisons de symétrie axiale sur $\bar{v}^{(0)}(\bar{r}, s, t)$, on a :

$$\boxed{v^{(0)}(\bar{r} = 0, s, t) = 0} \quad (3.11)$$

Comme les équations (3.9) à l'ordre principal ne permettent pas de déterminer complètement l'ordre principal du champ de vitesse, le problème est de perturbation singulière.

Les équations (3.9) sont *des équations de compatibilité pour l'ordre principal* qui imposent à la condition initiale d'être axisymétrique et d'y rester.

Si la condition initiale n'est pas axisymétrique, il y a un problème de couche limite initiale. Les développements choisis ici ne dépendent que du temps t et de l'abscisse s , alors que nous avons vu au chapitre I que les échelles t/ε^2 et s/ε peuvent intervenir. Lorsque l'on n'utilise que le temps t , seules les variations le long de la fibre centrale de l'ordre de la grande échelle caractéristique L sont prises en compte et on ne détermine que la dynamique principale de l'évolution du filament tourbillon. Pour notre problème d'anneau tourbillon, on n'est en fait pas en présence d'une couche limite initiale, pour laquelle on obtiendrait la dynamique principale après un transitoire rapide, mais en présence d'une oscillation rapide autour de la dynamique principale de l'évolution du filament tourbillon. Alors que les

problèmes de couche limite initiale se résolvent à l'aide d'une méthode de développement asymptotique raccordé, les problèmes d'oscillations rapides se résolvent à l'aide d'une méthode d'échelles multiples à double échelle de temps. C'est cette méthode qu'il faudrait utiliser si on voulait résoudre complètement le problème de l'évolution d'un filament tourbillon dont la condition initiale ne vérifierait pas les conditions de compatibilité.

D'après le chapitre I, la vorticité est liée au champ de vitesse par l'équation :

$$\bar{\omega} = \text{rot} \vec{v} = \text{rot} \vec{V} + \frac{\vec{\tau}}{h_3} \wedge \dot{\vec{X}} = \omega_1 \vec{r} + \omega_2 \vec{\theta} + \omega_3 \vec{\tau} \quad (3.12)$$

L'ordre principal (annexe A.5) de la vorticité est donc :

$$\omega_1^{(0)} = 0 \quad (3.13a)$$

$$\omega_2^{(0)} = -w_r^{(0)} \quad (3.13b)$$

$$\omega_3^{(0)} = \frac{1}{r} [r v^{(0)}]_r \quad (3.13c)$$

On remarque que l'ordre principal des équations de la vorticité (1.12) et (1.13) est automatiquement vérifié par une solution axisymétrique indépendante de l'abscisse.

III.5. Le raccord à l'ordre ε^{-1} et les conditions aux limites en l'infini de l'ordre zéro

La loi de raccord asymptotique à l'ordre ε^{-1} dit que le développement du champ de vitesse extérieur en zéro à l'ordre ε^{-1} est identique au développement du champ de vitesse intérieur en l'infini à l'ordre ε^{-1} , ce qui s'écrit :

$$\left(\text{Dev}_{r=0} [\vec{v}^{\text{out}}] = \text{Dev}_{r=\infty} [\vec{v}^{\text{inn}}] \right)_{\varepsilon^{-1}} \quad (3.14)$$

Or d'après le chapitre II :

$$\vec{v}^{\text{out}}(r \rightarrow 0, \varphi, s, t) = \frac{1}{2\pi r} \vec{\theta},$$

si l'écoulement potentiel n'a pas de contribution à cet ordre. On en déduit donc en utilisant (3.14) que :

$$\vec{v}^{\text{inn}(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = \frac{1}{2\pi \bar{r}} \vec{\theta}^{(0)},$$

c'est à dire que :

$$\boxed{v^{(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty, t) = \frac{1}{2\pi \bar{r}}} \quad (3.15a)$$

$$\boxed{w^{(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty, t) = 0} \quad (3.15b)$$

III.6. Les équations à l'ordre 1

III.6.1. Partie axisymétrique des équations à l'ordre 1 et équations de compatibilité à l'ordre 1

La partie axisymétrique des équations à l'ordre 1 est obtenue en moyennant les équations à l'ordre 1 en φ et donne :

$$\frac{\partial \bar{r} u_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} = -\frac{\bar{r}}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \quad (3.16a)$$

$$-2v^{(0)}(\bar{r}, s, t)v_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) + \bar{r} \frac{\partial p_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (3.16b)$$

$$\frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} u_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) = -\frac{\bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \quad (3.16c)$$

$$\sigma^{(0)}(s, t) \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} u_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) = -w^{(0)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} - \frac{\partial p^{(0)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \quad (3.16d)$$

Si $u_c^{(1)}$ est tiré de la première équation (3.16a) et est remplacé dans les deux dernières (3.16c-d), nous obtenons alors deux équations avec uniquement les champs $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$. Comme le temps t n'apparaît pas dans ces équations, le champ de vitesse à l'ordre principal ne peut pas vérifier une condition initiale quelconque.

Ces équations sont *des conditions de compatibilité de l'ordre principal*, qui sont automatiquement vérifiées initialement et le restent si l'ordre principal ne dépend pas de l'abscisse s : on parle alors *d'anneaux à structure normale simple* comme on l'a déjà défini au chapitre I.

Nous notons qu'alors : $u_c^{(1)} = 0$. L'équation (3.16b), qui n'a pas servi, est celle qui donne la pression $p_c^{(1)}$. Ces équations ne nous donnent pas d'information sur $v_c^{(1)}$ ni $w_c^{(1)}$.

III.6.2. Partie non axisymétrique des équations

Il nous reste donc à résoudre la partie non axisymétrique des équations d'ordre 1. Pour un anneau à structure normale simple, on a :

$$\frac{\partial \bar{r}u^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial v^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \varphi} = s_1^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) \quad (3.17a)$$

$$-2v^{(0)}(\bar{r},t)v^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) + \frac{\partial u^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \varphi}v^{(0)}(\bar{r},t) + \bar{r}\frac{\partial p^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \bar{r}} = s_2^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) \quad (3.17b)$$

$$v^{(0)}(\bar{r},t)\frac{\partial v^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \varphi} + u^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t)\frac{\partial \bar{r}v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial p^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \varphi} = s_3^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) \quad (3.17c)$$

$$\bar{r}\frac{\partial w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}}u^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) + v^{(0)}(\bar{r},t)\frac{\partial w^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \varphi} = s_4^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) \quad (3.17d)$$

avec :

$$s_1^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) = -\bar{r}K^{(0)}(s,t)\sin(\varphi)v^{(0)}(\bar{r},t)$$

$$s_2^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) = -\bar{r}w^{(0)}(\bar{r},t)^2 K^{(0)}(s,t)\cos(\varphi)$$

$$s_3^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) = +\bar{r}w^{(0)}(\bar{r},t)^2 K^{(0)}(s,t)\sin(\varphi)$$

$$s_4^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t) = -\bar{r}v^{(0)}(\bar{r},t)K^{(0)}(s,t)\sin(\varphi)w^{(0)}(\bar{r},t)$$

Les seules inconnues d'ordre 1 qui interviennent dans les trois premières relations (3.17a-c) ne font intervenir que $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $p^{(1)}$ et pas $w^{(1)}$. L'écoulement à cet ordre se comporte comme un écoulement *bidimensionnel* rotationnel et non conservatif. Quand cet écoulement est résolu, la dernière équation (3.17d) nous donne alors la partie non axisymétrique de $w^{(1)}$. Ces équations font intervenir des termes sources qui proviennent de l'ordre principal du champ de vitesse. Elles ne font pas intervenir de dérivée en temps et sont donc des conditions de compatibilité. *La partie non axisymétrique de l'ordre 1 du champ de vitesse ne peut pas être nulle à l'instant initial.*

L'équation de continuité est satisfaite à l'aide de la fonction de courant $\Psi^{(1)}(\bar{r},\varphi,s,t)$ qui vérifie :

$$u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \quad (3.18a)$$

$$v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = -\frac{\partial \Psi^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial r} + \bar{r} K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi) v^{(0)}(\bar{r}, t) \quad (3.18b)$$

Ces relations sont substituées dans les deux équations (3.17b-c) du mouvement, puis la pression est éliminée entre les deux relations obtenues en se servant de l'égalité :

$$\partial^2 p^{(1)} / \partial \bar{r} \partial \varphi = \partial^2 p^{(1)} / \partial \varphi \partial \bar{r}.$$

Nous obtenons alors l'équation suivante pour $\Psi^{(1)}$:

$$\begin{aligned} & v^{(0)}(\bar{r}, t) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r} \partial \varphi} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^3 \Psi^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial^3 \varphi} + \frac{\partial^3 \Psi^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}^2 \partial \varphi} \right] \\ & - \frac{\partial \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right]}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \Psi^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \\ & = - \left(2 \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right] + v^{(0)}(\bar{r}, t)^2 + \bar{r} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right) K^{(0)}(s, t) \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (3.19)$$

On écrit alors la décomposition en série de Fourier de la fonction de courant :

$$\Psi^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = \Psi_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Psi_{n1}^{(1)} \cos(n\varphi) + \Psi_{n2}^{(1)} \sin(n\varphi) \right) \quad (3.20)$$

et il s'en suit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} + \left[-\frac{n^2}{\bar{r}^2} - \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right]}{\partial \bar{r}} \right] \Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \\ & = \left(2 \bar{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right] + v^{(0)}(\bar{r}, t) + \frac{\bar{r}}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right) K^{(0)}(s, t) \delta_{nj} \delta_{j1} \end{aligned} \quad (3.21a)$$

Cette équation s'écrit également :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} + \frac{1-n^2}{\bar{r}^2} \Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}, s, t) - \frac{\Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} - \frac{\Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial^2 v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}^2} = H_{nj}^{(1)}$$

avec :

$$H_{nj}^{(1)} = \left(2\bar{r} \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right] + v^{(0)}(\bar{r}, t) + \frac{\bar{r}}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right) K^{(0)}(s, t) \delta_{nj} \delta_{j1}$$

On a les conditions aux limites en $\bar{r} = 0$:

$$\boxed{\Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r} = 0) = 0} \quad (3.21b)$$

$$\boxed{\frac{\partial \Psi_{nj}^{(1)}}{\partial \bar{r}}(\bar{r} = 0) = 0} \quad (3.21c)$$

et une condition en l'infini donnée par la loi de raccord asymptotique à l'ordre 1.

III.6.3. Le raccord à l'ordre 1 et les conditions aux limites en l'infini de l'ordre 1

La loi de raccord asymptotique à l'ordre 1 dit que le développement du champ de vitesse extérieur en zéro à l'ordre 1 est identique au développement du champ de vitesse intérieur en l'infini à l'ordre 1, ce qui s'écrit :

$$\boxed{\left(\text{Dev}_{r=0} \left[\vec{v}^{\text{out}} \right] = \text{Dev}_{r=\infty} \left[\vec{v}^{\text{inn}} \right] \right)_{\varepsilon 0}} \quad (3.22)$$

Or, si l'écoulement potentiel n'a pas de contribution à l'ordre 1, les résultats (2.11a) et (2.34) du chapitre II donnent :

$$\begin{aligned} \vec{v}^{\text{out}}(r \rightarrow 0, \varphi, s, t) &= \frac{1}{2\pi r} \vec{\theta} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S^{(0)}}{r} - 1 \right] \vec{b} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta} \\ &\quad + \vec{A} \end{aligned}$$

avec :

$$\vec{A}(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\begin{array}{l} -\sigma^{(0)}(s+s', t) \frac{\vec{\tau}(s+s', t) \wedge (\vec{X}^{(0)}(s+s', t) - \vec{X}^{(0)}(s, t))}{|\vec{X}^{(0)}(s+s', t) - \vec{X}^{(0)}(s, t)|^3} \\ - \frac{K^{(0)}(s, t)}{2} \frac{\vec{b}(s, t) \sigma^{(0)}(s+s', t)}{|\lambda^{(0)}(s, s', t)|} \end{array} \right] ds' \quad (3.23)$$

et

$$\lambda^{(0)}(s, s', t) = \int_s^{s+s'} \sigma^{(0)}(s^*, t) ds^* \quad (3.24)$$

En appliquant la condition de raccord (3.22), nous en déduisons alors que :

$$\vec{v}^{\text{inn}(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S^{(0)}}{\varepsilon r} - 1 \right] \vec{b}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta}^{(0)} + \vec{A}$$

c'est à dire :

$$\dot{\vec{X}}^{(0)} + \vec{V}^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S^{(0)}}{\varepsilon r} - 1 \right] \vec{b}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta}^{(0)} + \vec{A}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} u^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) &= \left[\vec{V}^{(1)} \bullet \vec{r} \right]_{\bar{r} \rightarrow \infty} \\ &= \frac{K^{(0)}}{4\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon r} \sin(\varphi) + (\vec{A} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} [\ln S^{(0)} - 1] \vec{b} - \dot{\vec{X}}^{(0)}) \bullet (\vec{n} \cos(\varphi) + \vec{b} \sin(\varphi)) \\ &= \left[\frac{K^{(0)}}{4\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon r} + (\vec{A} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} [\ln S^{(0)} - 1] \vec{b} - \dot{\vec{X}}^{(0)}) \bullet \vec{b} \right] \sin(\varphi) \\ &\quad + \left[(\vec{A} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} [\ln S^{(0)} - 1] \vec{b} - \dot{\vec{X}}^{(0)}) \bullet \vec{n} \right] \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) &= \left[\vec{V}^{(1)} \bullet \vec{\theta} \right]_{\bar{r} \rightarrow \infty} \\ &= \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon r} + 1 \right) \cos(\varphi) \\ &\quad + (\vec{A} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} [\ln S^{(0)} - 1] \vec{b} - \dot{\vec{X}}^{(0)}) \bullet (-\vec{n} \sin(\varphi) + \vec{b} \cos(\varphi)) \\ &= \left[\frac{K^{(0)}}{4\pi} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon r} + 1 \right) + (\vec{A} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} [\ln S^{(0)} - 1] \vec{b} - \dot{\vec{X}}^{(0)}) \bullet \vec{b} \right] \cos(\varphi) \\ &\quad - \left[(\vec{A} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} [\ln S^{(0)} - 1] \vec{b} - \dot{\vec{X}}^{(0)}) \bullet \vec{n} \right] \sin(\varphi) \end{aligned}$$

et :

$$w^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = \left[\vec{V}^{(1)} \bullet \vec{\tau} \right]_{\bar{r} \rightarrow \infty} = (\vec{A} - \dot{\vec{X}}^{(0)}) \bullet \vec{\tau}.$$

La fonction de courant du problème intérieur vérifie donc :

$$\Psi_{11}^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = \left[-\frac{K^{(0)}}{4\pi} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon r} \right) - (\vec{\mathbf{A}} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} [\ln S^{(0)} - 1] \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}) \bullet \vec{\mathbf{b}} \right] \bar{r} \quad (3.25a)$$

$$\Psi_{12}^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = \left[(\vec{\mathbf{A}} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} [\ln S^{(0)} - 1] \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}) \bullet \mathbf{n} \right] \bar{r} \quad (3.25b)$$

$$\Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = 0 \quad n \neq 1 \quad (3.25c)$$

$$w^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = (\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}) \bullet \vec{\tau} \quad (3.25d)$$

$$v_c^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, s, t) = 0 \quad (3.25e)$$

Ces relations donnent les conditions aux limites en l'infini des équations aux dérivées partielles (3.21).

III.6.4. La résolution des équations à l'ordre 1

La solution $\Psi_{nj}^{(1)}$ de l'équation (3.21) est la somme d'une solution particulière $\Psi_{nj}^p{}^{(1)}$ de cette équation avec second membre et des solutions générales $\Psi_{nj}^h{}^{(1)}$ de son équation homogène, ce qui s'écrit :

$$\Psi_{nj}^{(1)} = \Psi_{nj}^h{}^{(1)} + \Psi_{nj}^p{}^{(1)}$$

D'après (3.13c) l'égalité suivante :

$$\omega_3^{(0)} = \frac{1}{r} \left[\bar{r} v^{(0)} \right] \bar{r}$$

est vérifiée, où $\omega_3^{(0)}$ est l'ordre principal de la vorticité axiale. On admet que près de zéro :

$$\frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \omega_3^{(0)}(\bar{r}, t) \rightarrow \text{constante},$$

ce que l'on vérifiera a posteriori. Le comportement près de zéro de l'équation homogène associée à l'équation (3.21) est alors :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{nj}^{(1)}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{nj}^{(1)}}{\partial \bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} \Psi_{nj}^{(1)} = 0 \quad (3.26)$$

Une des solutions de cette équation se comporte comme $(\bar{r})^{-n}$ et doit être écartée. L'autre se

comporte comme $(\bar{r})^{+n}$ et alors la solution de l'équation (3.21) vérifie :

$$\boxed{\Psi_{nj}^{(1)} \approx C_n (\bar{r})^n + \Psi_{nj}^{p(1)}(\bar{r} \rightarrow 0)} \text{ pour } \bar{r} \approx 0 \quad (3.27)$$

où C_n est une constante déterminée par la condition aux limites de la solution en l'infini.

Si $n \neq 1$, les conditions en zéro sont vérifiées et c'est la condition en l'infini qui permet de déterminer la constante C_n et donc $\Psi_{nj}^{(1)}$. On voit que $\Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}) = 0$ est solution des équations (3.21) et (3.25c) et donc :

$$\boxed{\Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}) = 0 \quad n \neq 1} \quad (3.28a)$$

Si $n = 1$, les conditions en zéro imposent $C_1 = 0$ et donc $\Psi_{1j}^{(1)}$ est déterminé sans avoir besoin de la condition en l'infini. Comme $v^{(0)}$ est alors solution de l'équation homogène associée à (3.21), la variation de la constante nous donne :

$$\boxed{\frac{\Psi_{11}^{(1)}}{v^{(0)}(\bar{r}, t) K^{(0)}(s, t)} = \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z v^{(0)}(z, t)^2} \int_0^z \left[2\xi^2 v^{(0)}(\xi, t) \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi v^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \right] + \xi v^{(0)2}(\bar{r}, t) + \xi^2 \frac{\partial w^{(0)2}(\xi, t)}{\partial \xi} \right] d\xi dz} \quad (3.28b)$$

et

$$\boxed{\Psi_{12}^{(1)} = 0} \quad (3.28c)$$

Les équations (3.25a-b) nous donnent une condition aux limites en l'infini qui doit s'identifier avec la limite en l'infini de l'expression (3.28b) de $\Psi_{1j}^{(1)}$. On arrive toujours en fait à avoir l'égalité de ces deux limites, car les équations (3.25a-b) font intervenir la fonction inconnue $\bar{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)$. C'est donc cette égalité qui détermine l'équation de $\bar{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)$.

III.6.5. La limite en l'infini de $\Psi_{11}^{(1)}$

Nous admettons que :

$$\frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \omega_3^{(0)}(\bar{r}, t) = O(\exp(-\bar{r}^2))$$

près de l'infini et nous vérifierons dans la suite que c'est bien le cas. Nous recherchons alors la limite en l'infini de $\Psi_{11}^{(1)}$ que l'on va obtenir soit par une limite en l'infini dans l'équation (3.21) soit par le développement en l'infini de (3.28b) qui devient une intégrale singulière.

III.6.5.1. Par une limite dans l'équation

Le comportement près de l'infini de l'équation homogène associée à l'équation (3.21) est :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{nj}^{(1)}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{nj}^{(1)}}{\partial r} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} \Psi_{nj}^{(1)} = 0. \quad (3.29)$$

Une des solutions de cette équation se comporte comme $(\bar{r})^{-n}$ et l'autre comme $(\bar{r})^{+n}$. La solution de l'équation (3.21) vérifie donc :

$$\Psi_{nj}^{(1)} \approx d_n(\bar{r})^{+n} + e_n(\bar{r})^{-n} + \Psi_{nj}^{p(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty) \text{ pour } \bar{r} \approx \infty. \quad (3.30)$$

Comme l'équation est homogène pour $n \neq 1$, on a :

$$\Psi_{nj}^{(1)} \approx d_n(\bar{r})^{+n} + e_n(\bar{r})^{-n} \quad (n \neq 1) \text{ en } \bar{r} \approx \infty$$

et comme $\Psi_{nj}^{(1)}(\bar{r}) = 0$ d'après le résultat (3.28a), alors :

$$\boxed{\Psi_{nj}^{(1)\infty} = 0 \quad n \neq 1.}$$

Comme $\Psi_{12}^{(1)} = 0$ d'après (3.28c), alors :

$$\boxed{\Psi_{12}^{(1)\infty} = 0.} \quad (3.31a)$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer le comportement de $\Psi_{11}^{(1)}$ en l'infini. Une première façon de procéder est de considérer la limite en l'infini du terme de droite de l'équation (3.21) pour $n=1$:

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{r} \Psi_{11}^{(1)\infty}(\bar{r})}{\partial \bar{r}} \right]}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{2\pi} \frac{K^{(0)}}{\bar{r}}$$

D'où :

$$\Psi_{11}^{(1)\infty}(\bar{r}) = \frac{1}{8} \frac{\bar{r} K^{(0)} (2 \ln(\bar{r}) - 1)}{\pi} + C_1 \bar{r} + \frac{C_2}{\bar{r}},$$

c'est à dire :

$$\boxed{\Psi_{11}^{(1)\infty}(\bar{r}) = \bar{r} K^{(0)} C^*(t) + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \bar{r} \ln(\bar{r}) + O(\frac{1}{\bar{r}})} \quad (3.31b)$$

La constante $C^*(t)$ est alors déterminée par la limite :

$$C^*(t) = \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left[\frac{v^{(0)}}{\bar{r}} h - \frac{1}{4\pi} \ln(\bar{r}) \right]$$

avec :

$$h = \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz$$

et

$$\boxed{H = 2\bar{r}\omega_3^{(0)} + v^{(0)} + \frac{2\bar{r}w^{(0)}w_r^{(0)}}{v^{(0)}}} \quad (3.32a)$$

Comme

$$v^{(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty, t) = \frac{1}{2\pi\bar{r}},$$

alors :

$$C^*(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left[\frac{h - \frac{1}{2} \frac{\bar{r}^2}{r^2} \ln(\bar{r})}{\frac{\bar{r}^2}{r}} \right].$$

Cette limite peut être simplifiée grâce à la règle de l'hôpital (Annexe A.6) et finalement, on obtient le comportement suivant de la fonction de courant $\Psi_{11}^{(1)}$ en l'infini :

$$\boxed{\Psi_{11}^{(1)\infty}(\bar{r}) = \bar{r} K^{(0)} C^*(t) + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \bar{r} \ln(\bar{r}) + O(\frac{1}{\bar{r}})} \quad (3.31b)$$

avec :

$$\boxed{C^*(t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ +\frac{1}{2} + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)2} d\xi - \ln(\bar{r}) \right) - 8\pi^2 \int_0^{\infty} \xi w^{(0)2} d\xi \right\}} \quad (3.31c)$$

III.6.5.2. Par une limite dans l'intégrale

Une autre façon d'obtenir ce résultat est de faire la limite en l'infini dans l'expression intégrale (3.28b) de $\Psi_{11}^{(1)}$:

$$\Psi_{11}^{(1)} = K^{(0)} v^{(0)} \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z v^{(0)2}} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \quad (3.32b)$$

Lorsque \bar{r} tend vers l'infini, on obtient alors une intégrale singulière par rapport au petit paramètre $1/\bar{r}$.

Un calcul d'intégrale singulière (Annexe A.6) nous amène à :

$$\boxed{\Psi_{11}^{(1)\infty}(\bar{r}) = \bar{r} K^{(0)} C^*(t) + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \bar{r} \ln(\bar{r}) + O(\frac{1}{\bar{r}})}$$

avec :

$$\boxed{C^*(t) = -\frac{1}{8\pi} + \pi \frac{\tilde{a}}{K^{(0)}}}$$

$$\boxed{\frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} = \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)} H d\xi - \frac{1}{4\pi^2} \ln \bar{r} \right\}}$$

qui après intégration par parties redonne le même résultat (3.31b-c) que précédemment.

III.7. L'équation d'évolution du filament à l'ordre 0 et la partie non axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1

III.7.1. Détermination de l'équation de la fibre centrale

En égalant les limites en l'infini (3.25a-b) et (3.31a-b) des paragraphes III.6.3. et III.6.5, nous obtenons :

$$(\vec{A} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln S^{(0)} - 1 \right] \vec{b} - \vec{X}^{(0)}) \bullet \vec{n} = 0$$

$$\left[-\frac{K^{(0)}}{4\pi} (\ln \frac{1}{\varepsilon r}) - (\vec{A} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln S^{(0)} - 1 \right] \vec{b} - \vec{X}^{(0)}) \bullet \vec{b} \right] \bar{r} = \left[-\frac{K^{(0)}}{4\pi} (\ln \frac{1}{r}) + K^{(0)} C^* \right] \bar{r}$$

d'où :

$$(\vec{A} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S^{(0)}}{\varepsilon} - 1 \right] \vec{b} - \vec{X}^{(0)}) \bullet \vec{b} = -K^{(0)} C^*$$

On obtient donc l'équation suivante d'évolution de la fibre centrale :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)} - (\vec{\mathbf{X}}^{(0)} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = \left(\frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S^{(0)}}{\varepsilon} - 1 \right] + K^{(0)} C^* \right) \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{A}} - (\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} \quad (3.33a)$$

avec

$$C^*(t) = \frac{1}{4\pi} (C_v(t) + C_w(t)) \quad (3.33b)$$

$$C_v(t) = +\frac{1}{2} + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)2} d\xi - \ln(\bar{r}) \right) \quad (3.33c)$$

$$C_w(t) = -8\pi^2 \int_0^{\infty} \xi w^{(0)2} d\xi \quad (3.33d)$$

$$\vec{\mathbf{A}}(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\begin{array}{l} -\sigma^{(0)}(s+s', t) \frac{\vec{\tau}(s+s', t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t))}{|\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)|^3} \\ -\frac{K^{(0)}(s, t)}{2} \frac{\vec{\mathbf{b}}(s, t) \sigma^{(0)}(s+s', t)}{|\lambda^{(0)}(s, s', t)|} \end{array} \right] ds' \quad (3.33e)$$

$$\lambda^{(0)}(s, s', t) = \int_s^{s+s'} \sigma^{(0)}(s^*, t) ds^* \quad (3.33f)$$

C'est l'équation de Callegari et Ting¹ que l'on a déjà écrite et commentée dans l'introduction (Formules 11 a-d).

Si on choisit une abscisse s sur la fibre centrale du filament telle que :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)} \bullet \vec{\tau} = \vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\tau},$$

alors, d'après (3.25d), on a :

$$w^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = 0$$

Lorsque l'on ne s'intéresse qu'à l'évolution de la fibre centrale, on peut prendre une abscisse sur le filament différente de celle qui est déterminée par la relation :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)} \bullet \vec{\tau} = \vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\tau}.$$

Par exemple, on peut choisir des abscisses telles que

$$\overset{\bullet}{\vec{X}}^{(0)} \bullet \vec{\tau} = 0,$$

ou encore :

$$\overset{\bullet}{\vec{X}}^{(0)} \bullet \vec{\tau} = \vec{v}^{\text{inn}(0)}(\bar{r} = 0, \varphi, s, t) \bullet \vec{\tau}.$$

Cependant, si on veut donner la vitesse axiale relative, il ne faut pas oublier que celle-ci change en fonction du choix de l'abscisse. La limite $w^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t)$ en dépend également et elle n'est nulle que pour le choix d'une abscisse telle que :

$$\overset{\bullet}{\vec{X}}^{(0)} \bullet \vec{\tau} = \vec{A} \bullet \vec{\tau}.$$

Ici, rien ne donne la valeur $w^{(1)}(\bar{r} = 0, \varphi, s, t)$ de la vitesse axiale à l'ordre 1 sur la fibre centrale. Celle-ci sera déterminée après avoir obtenu la partie non axisymétrique de $w^{(1)}$ avec l'équation (3.17d) et la partie axisymétrique $w_c^{(1)}$ par résolution de l'équation aux dérivées partielles qu'elle vérifie avec sa condition aux limites $w^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = 0$ en l'infini. Cette équation sera donnée au paragraphe III.10. Pour la partie axisymétrique de la vitesse axiale à l'ordre 1, tout se passe donc comme pour $w^{(0)}$.

III.7.2. La partie non axisymétrique du champ à l'ordre 1

Posons :

$$u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) = -\frac{\Psi_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\bar{r}} \quad (3.34)$$

Les champs à l'ordre 1 sont alors de la forme :

$$u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \sin(\varphi) \quad (3.35a)$$

$$v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = v_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) + v_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \cos(\varphi) \quad (3.35b)$$

$$w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) + w_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \cos(\varphi) \quad (3.35c)$$

$$p^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = p_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) + p_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \cos(\varphi) \quad (3.35d)$$

où :

$$w_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) = \frac{\bar{r}u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} + K^{(0)}(s, t)\bar{r}w^{(0)}(\bar{r}, t) \quad (3.36a)$$

$$v_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) = \frac{\partial \bar{r}u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} + K^{(0)}(s, t)\bar{r}v^{(0)}(\bar{r}, t) \quad (3.36b)$$

$$\begin{aligned} p_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) = & -K^{(0)}(s, t)\bar{r}v^{(0)}(\bar{r}, t)^2 - K^{(0)}(s, t)\bar{r}w^{(0)}(\bar{r}, t)^2 \\ & - \bar{r}v^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} + \bar{r}u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \end{aligned} \quad (3.36c)$$

De l'équation radiale (3.16b), on tire :

$$-2 \frac{v^{(0)}(\bar{r}, t)v_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\bar{r}} + \frac{\partial p_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} = 0$$

et donc :

$$p_c^{(1)} = -\int_{\bar{r}}^{\infty} 2 \frac{v^{(0)}(\bar{r}', t)v_c^{(1)}(\bar{r}', s, t)}{\bar{r}'} d\bar{r}' \quad (3.37)$$

Nous avons tout le champ de vitesse à l'ordre 1 en fonction du champ de vitesse à l'ordre principal, à l'exception des champs axisymétriques $v_c^{(1)}$ et $w_c^{(1)}$.

Si les expressions (3.36) du champ de vitesse sont remplacées dans les différents ordres (Annexe A.5) du lien (3.12) entre la vorticité et la vitesse, nous obtenons :

$$\omega_1^{(1)} = \omega_{12}^{(1)} \sin(\varphi) \quad (3.38a)$$

$$\omega_2^{(1)} = \omega_{2c}^{(1)} + \omega_{211}^{(1)} \cos(\varphi) \quad (3.38b)$$

$$\omega_3^{(1)} = \omega_{3c}^{(1)} + \omega_{311}^{(1)} \cos(\varphi) \quad (3.38c)$$

où :

$$\omega_{12}^{(1)} = \left(w^{(0)} K^{(0)} - \frac{w_{11}^{(1)}}{\bar{r}} \right) \quad (3.39a)$$

$$\omega_{2c}^{(1)} = -w_{c\bar{r}}^{(1)} \quad (3.39b)$$

$$\omega_{211}^{(1)} = w^{(0)} K^{(0)} - \frac{w_{11}^{(1)}}{r} \quad (3.39c)$$

$$\omega_{3c}^{(1)} = \frac{1}{r} \left[\bar{r} v_c^{(1)} \right]_r \quad (3.39d)$$

$$\omega_{311}^{(1)} = \frac{1}{r} \left(\left[\bar{r} v_{11}^{(1)} \right]_r - u_{11}^{(1)} \right) \quad (3.39e)$$

Les équations de la vorticité (1.12) et (1.13) sont alors automatiquement vérifiées à l'ordre 1, sauf l'équation de la vorticité axiale qui donne :

$$\left[(\omega_3^{(0)})_{\bar{r}} \right] u_{11}^{(1)} - \frac{v^{(0)}}{\bar{r}} \omega_{311}^{(1)} = \omega_3^{(0)} v^{(0)} K^{(0)} + 2(w^{(0)})_{\bar{r}} w^{(0)} K^{(0)} \quad (3.40)$$

c'est à dire :

$$\omega_{311}^{(1)} = \frac{\bar{r}(\omega_3^{(0)})_{\bar{r}}}{v^{(0)}} u_{11}^{(1)} + K^{(0)} \bar{r} \left[-\omega_3^{(0)} - \frac{(w^{(0)})^2}{v^{(0)}} \right]$$

Si les relations (3.39e) et (3.34) sont remplacées dans cette relation, nous retrouvons l'équation de (3.21) de $\Psi_{11}^{(1)}$, ce qui montre que l'équation de la vorticité axiale est bien vérifiée par notre solution.

Si l'on intègre la vorticité (3.39) sur une section du filament, il vient :

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{\omega} dS &= \iint_S \varepsilon^2 \bar{\omega} \bar{r} d\bar{r} d\varphi = \iint_S (\omega_2^{(0)}(\bar{r}) \bar{\theta} + \omega_3^{(0)}(\bar{r}) \bar{\tau}) \bar{r} d\bar{r} d\varphi \\ &\quad + \varepsilon \iint_S (\omega_1^{(1)} \bar{r} + \omega_2^{(1)} \bar{\theta} + \omega_3^{(1)} \bar{\tau}) \bar{r} d\bar{r} d\varphi + O(\varepsilon^2) \quad (3.41) \\ &= \Gamma \bar{\tau} + \varepsilon \left(\frac{\bar{\mathbf{b}}}{2} \int \left[2w_{11}^{(1)} \frac{\bar{r}}{r} \right] \bar{r} d\bar{r} + \bar{\tau} \int \omega_{3c}^{(1)} \bar{r} d\bar{r} \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

ce qui montre que *la circulation initiale de notre anneau dépend de ε* . Comme on recherche une solution sur un temps normal (au sens du chapitre I), la partie non axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1 est directement déterminée en fonction du champ de vitesse à l'ordre principal et on ne peut pas choisir sa valeur initiale. Seul l'ordre principal du champ de vitesse (qui ici est axisymétrique) et la partie non axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1 sont fonction d'une condition initiale que l'on peut choisir.

A l'instant initial, l'anneau tourbillon à structure normale simple a donc un champ de vitesse, un champ de vorticité, une fibre centrale et une circulation qui sont développés selon le petit paramètre ε et seule la partie axisymétrique des champs peut être choisie initialement.

III.7.3. Autre détermination de l'équation de la fibre centrale

Nous pouvons aussi obtenir l'équation d'évolution de la fibre centrale en écrivant que sa vitesse est la valeur en un point de la fibre de l'ordre 1 du développement intérieur de la vitesse non relative, c'est à dire :

$$\dot{\vec{X}}^{(0)} = \vec{v}^{\text{inn}(1)}(\bar{r} = 0, \varphi, s, t) \quad (3.42)$$

où $\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r}, \varphi, s, t)$ est l'expression (2.16) du chapitre II généralisée à un paramétrage qui n'est pas une longueur d'arc et à un champ de vorticité qui a des échelles en $1/\varepsilon^2$ et $1/\varepsilon$.

D'après les formules (3.13) et (3.38), les champs de vorticité à l'ordre principal et à l'ordre 1 sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^{(0)} &= \omega_2^{(0)}(\bar{r}, t)\vec{\theta} \\ &\quad + \omega_3^{(0)}(\bar{r}, t)\vec{\tau} \end{aligned} \quad (3.43a)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^{(1)} &= \omega_{12}^{(1)} \sin(\varphi) \vec{r} \\ &\quad + (\omega_{2c}^{(1)} + \omega_{211}^{(1)} \cos(\varphi)) \vec{\theta} \\ &\quad + (\omega_{3c}^{(1)} + \omega_{311}^{(1)} \cos(\varphi)) \vec{\tau} \end{aligned} \quad (3.43b)$$

Si l'on remplace ces expressions (3.43) dans l'expression (2.16) écrite en $\bar{r} = 0$, la relation (3.42) devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}}^{(0)} &= \vec{A}(s, t) \\ &\quad + K^{(0)} \left[-\frac{1}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{S}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty \omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} d\bar{r} \right) \right] \vec{b}, \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \iint \vec{r}' \wedge \vec{\omega}^{(1)} \frac{d\bar{r}}{\bar{r}'} d\varphi' \\ &\quad - \left[w_c^{(1)}(\bar{r}, t) \right]_0^\infty \vec{\tau} \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)} &= \vec{\mathbf{A}}(s, t) \\ &+ \left[K^{(0)} \left(-\frac{1}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{S}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty \omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} d\bar{r} \right) \right) - \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty \omega_{311}^{(1)} d\bar{r} \right) \right] \vec{\mathbf{b}} \\ &- [w_c^{(1)}(\bar{r}, t)]_0^\infty \vec{\tau} \end{aligned}$$

d'où :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{S}{\varepsilon}\right) + C \right) K^{(0)} \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{A}}(s, t) - [w_c^{(1)}(\bar{r}, t)]_0^\infty \vec{\tau}, \quad (3.44a)$$

avec :

$$C = -1 + 4\pi C^* = -\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{1} \int_0^\infty \left[\frac{\omega_{311}^{(1)}}{K^{(0)}} + \omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} \right] d\bar{r} \quad (3.44b)$$

Avec l'abscisse s définie par (3.42), la partie axisymétrique de la vitesse axiale vérifie :

$$\begin{aligned} w_c^{(1)}(\bar{r} = 0) &= 0 \\ w_c^{(1)}(\bar{r} = \infty) &= -\tilde{w}_c^{(1)}(\bar{r} = 0) \neq 0, \end{aligned}$$

où $\tilde{w}_c^{(1)}$ est la partie axisymétrique de vitesse axiale pour une abscisse s telle que :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)} \bullet \vec{\tau} = \vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\tau}.$$

Si on choisit une abscisse s telle que :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)} \bullet \vec{\tau} = \vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\tau},$$

l'équation (3.44) d'évolution de la fibre centrale devient alors :

$$\boxed{\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)} = \left(\frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S^{(0)}}{\varepsilon} - 1 \right] + K^{(0)} C^* \right) \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{A}}} \quad (3.45a)$$

avec

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)} \bullet \vec{\tau} = \vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\tau} \quad (3.45b)$$

$$C^* = \frac{1}{8\pi} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{\omega_{311}^{(1)}}{K^{(0)}} + \omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} \right) d\bar{r} \quad (3.45c)$$

Le coefficient C^* peut être aussi exprimé en fonction du champ de vitesse (annexe A.7) :

$$C^* = +\frac{1}{8\pi} + \pi \left[\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)2} d\xi - \frac{1}{4\pi^2} \ln \bar{r} \right\} - 2 \int_0^{\infty} \xi w^{(0)2} d\xi \right]. \quad (3.45d)$$

Nous retrouvons de cette façon l'équation (3.33) d'évolution de la fibre centrale avec en plus l'expression suivante du coefficient C^ en fonction du champ de vorticité :*

$$C^* = \frac{1}{8\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\omega_3^{(1)} \Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)}} + \omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} \right) d\bar{r}$$

Si l'on veut une expression du coefficient C^* en fonction du champ de vitesse, cette méthode nous paraît moins avantageuse que la précédente. On a pu constater que pour retrouver le résultat précédent (3.33), il a été plus compliqué de simplifier l'expression (3.44b) de C que de prendre la limite en l'infini de l'expression (3.28b) de $\Psi_{11}^{(1)}$. Cette méthode a cependant l'intérêt de retrouver par un autre calcul la formule (3.33) d'évolution de la fibre centrale, ce qui donne une vérification de ce résultat.

Malgré tout, si l'on veut une expression du coefficient C^* en fonction du champ de vorticité, cette seconde approche est plus utile. On peut imaginer une approche dans laquelle on essayerait de résoudre le problème de couche limite qu'à partir de l'équation de Biot et Savart (1.8) et des équations (1.12-1.13) de la vorticité. Si une telle approche paraît séduisante, car il suffit de choisir la forme du développement de la vorticité pour résoudre le problème, elle ne s'est pas révélée être très fructueuse.

III.8. Les équations à l'ordre 2 et les équations pour l'ordre principal du champ de vitesse

III.8.1. Equations de compatibilité à l'ordre 2 et équations pour la partie axisymétrique du champ des vitesses à l'ordre 0

La partie axisymétrique des équations à l'ordre 2 est obtenue en moyennant les équations en φ à l'ordre 2 et l'on obtient

$$\sigma^{(0)}(s,t) \frac{\partial \bar{r} u_c^{(2)}(\bar{r},s,t)}{\partial \bar{r}} = s_1^{(2)}(\bar{r},s,t) \quad (3.46a)$$

$$-2 \frac{v^{(0)}(\bar{r},t) v_c^{(2)}(\bar{r},s,t)}{\bar{r}} + \frac{\partial p_c^{(2)}(\bar{r},s,t)}{\partial \bar{r}} = s_2^{(2)}(\bar{r},s,t) \quad (3.46b)$$

$$-\frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} \right) u_c^{(2)}(\bar{r},s,t) = s_3^{(2)}(\bar{r},s,t) \quad (3.46c)$$

$$-\frac{\partial w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} u_c^{(2)}(\bar{r},s,t) = s_4^{(2)}(\bar{r},s,t) \quad (3.46d)$$

avec :

$$s_1^{(2)}(\bar{r},s,t) = -\bar{r} \frac{\partial \sigma^{(0)}(s,t)}{\partial t} - \bar{r} \frac{\partial w_c^{(1)}(\bar{r},s,t)}{\partial s}$$

$$\begin{aligned} s_2^{(2)}(\bar{r},s,t) = & \left(-\frac{3}{2} w^{(0)}(\bar{r},t)^2 + \frac{1}{2} v^{(0)}(\bar{r},t)^2 \right) \bar{r} K^{(0)}(s,t)^2 \\ & + \left(\frac{1}{2} u_{11}^{(1)}(\bar{r},s,t) + \bar{r} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r},s,t)}{\partial \bar{r}} \right) K^{(0)}(s,t) v^{(0)}(\bar{r},t) \\ & - \frac{w^{(0)}(\bar{r},t) \bar{r} u_{11}^{(1)}(\bar{r},s,t)}{v^{(0)}(\bar{r},t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} K^{(0)}(s,t) \\ & - \frac{v_c^{(1)}(\bar{r},s,t)^2}{\bar{r}} + \frac{1}{2} \bar{r} \left(\frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r},s,t)}{\partial \bar{r}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3^{(2)}(\bar{r},s,t) = & \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial t} - \alpha^2 \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \left(\bar{r} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} \right)}{\partial \bar{r}} - \frac{v^{(0)}(\bar{r},t)}{\bar{r}^2} \right] \\ & + \frac{w^{(0)}(\bar{r},t)}{\sigma^{(0)}(s,t)} \frac{\partial v_c^{(1)}(\bar{r},s,t)}{\partial s} \end{aligned}$$

$$s_4^{(2)}(\bar{r}, s, t) = \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial t} - \frac{\alpha^2}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}}}{\partial \bar{r}} \right] + \frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \left[w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} + w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial \sigma^{(0)}(s, t)}{\partial t} + \frac{\partial p_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \right]$$

De l'équation de conservation de la masse (3.46a), on tire :

$$\sigma^{(0)}(s, t) u_c^{(2)}(\bar{r}, s, t) = -\frac{1}{r} \int_0^{\bar{r}} z \frac{\partial w_c^{(1)}(z, s, t)}{\partial s} dz - \frac{1}{2} r \frac{\partial \sigma^{(0)}(s, t)}{\partial t} \quad (3.47)$$

Remarquons que le changement d'abscisse $s = f(l, t)$ qui nous fait passer de $\vec{X}(s, t)$ en $\tilde{\vec{X}}(l, t)$ implique :

$$\dot{\tilde{\vec{X}}} \bullet \vec{\tau} = \sigma \dot{f} + \dot{\vec{X}} \bullet \vec{\tau} \quad (3.48a)$$

$$\dot{\tilde{\vec{X}}} \bullet \vec{n} = \dot{\vec{X}} \bullet \vec{n} \quad (3.48b)$$

$$\dot{\tilde{\vec{X}}} \bullet \vec{b} = \dot{\vec{X}} \bullet \vec{b} \quad (3.48c)$$

$$\tilde{\sigma}(l) = \sigma(s) \frac{\partial f}{\partial l} \quad (3.48d)$$

Seule la composante axiale du champ de vitesse est alors changée selon la formule suivante :

$$\vec{v} \bullet \vec{\tau} = w + \dot{\vec{X}} \bullet \vec{\tau} = \tilde{w} + \dot{\tilde{\vec{X}}} \bullet \vec{\tau} \quad (3.49a)$$

et le gradient de vitesse axiale vérifie la relation :

$$\frac{w_s + \sigma}{\sigma} = \frac{\tilde{w}_l + \tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}} \quad (3.49b)$$

On voit ainsi comment la formule (3.47) peut être affectée par un changement de paramétrage de la fibre centrale.

Si l'expression (3.47) de $u_c^{(2)}$ est remplacée dans les équations (3.46c-d), nous obtenons alors deux équations avec uniquement les termes axisymétriques d'ordre 1 $u_c^{(1)}, v_c^{(1)}, w_c^{(1)}$. Si on développe ces termes axisymétriques *en série de Fourier* selon s , le temps t n'apparaît que pour la partie indépendante de s des équations. Les parties des

équations dépendantes de s ne permettent pas de vérifier une condition initiale quelconque et sont donc *des conditions de compatibilité*. Les équations (3.46c-d) multipliées par $\sigma^{(0)}$ et moyennées selon l'abscisse donnent la partie indépendante de s des équations, qui est :

$$v_t^{(0)} - \alpha^2 \left[\frac{1}{r} \left(\bar{r} v \frac{(0)}{\bar{r}} \right) \frac{\bar{r}}{\bar{r}} - \frac{v^{(0)}}{\bar{r}^2} \right] = \frac{1}{2} \left(\bar{r} v^{(0)} \right) \frac{\dot{\bar{r}}}{\bar{r}} \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} \quad (3.50a)$$

$$w_t^{(0)} - \alpha^2 \frac{1}{r} \left(\bar{r} w \frac{(0)}{\bar{r}} \right) \frac{\bar{r}}{\bar{r}} = \frac{1}{2} \left(\frac{w^{(0)}}{\bar{r}^2} \right) \frac{\dot{\bar{r}}}{\bar{r}} \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} \quad (3.50b)$$

Ces équations pour l'ordre principal du champ de vitesse $v^{(0)}$ et $w^{(0)}$ ajoutées à l'équation (3.33) de la fibre centrale $\bar{\mathbf{X}}^{(0)}$, forment *un système complet d'équations à l'ordre principal*, que nous résoudrons au paragraphe III.11.

En retranchant les équations (3.50a-b) à (3.46c-d), on obtient les équations de compatibilité suivantes :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} (u_c^{(2)}(\bar{r}, s, t) + \frac{1}{2} \bar{r} \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}}) = - \frac{w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial v_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \quad (3.51a)$$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} (u_c^{(2)}(\bar{r}, s, t) + \frac{1}{2} \bar{r} \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}}) &= + \frac{w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\ &+ w^{(0)}(\bar{r}, t) \left(\frac{\bullet \sigma^{(0)}}{\sigma^{(0)}} - \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} \right) \\ &+ \frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial p_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.51b)$$

On prend un gradient de vitesse axiale de la forme suivante :

$$\frac{\partial w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} = - \frac{\bullet \sigma^{(0)}}{\sigma^{(0)}} + a(s, t) \sigma^{(0)} \quad (3.52)$$

où la constante $a(s, t)$ correspond à un certain *taux d'étirement* et on décompose la partie axisymétrique $w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)$ de la vitesse axiale en une partie indépendante de l'abscisse et une partie ne dépendant que de l'abscisse :

$$w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) = w_{cc}^{(1)}(s, t) + w_c^{(1)}(\bar{r}, t) \quad (3.53)$$

Alors (3.47) devient :

$$u_c^{(2)}(\bar{r}, s, t) = -\frac{1}{2}a(s, t)\bar{r} \quad (3.54)$$

et les équations de compatibilité (3.51a-b) deviennent :

$$-\frac{\partial \bar{r}v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{1}{2} \left(\frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} - a(s, t) \right) = \frac{w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial v_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \quad (3.55a)$$

$$\left(-\frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{1}{2} \bar{r} + w^{(0)}(\bar{r}, t) \right) \left(\frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} - a(s, t) \right) = \frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial p_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \quad (3.55b)$$

Ces équations sont *des conditions de compatibilité du champ de vitesse à l'ordre 1*. Elles sont automatiquement vérifiées initialement et le restent si l'anneau a une structure telle que

$$\boxed{\frac{\partial w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} = -\sigma^{(0)} + a(s, t)\sigma^{(0)}},$$

avec un taux d'éirement $a(s, t)$ tel que

$$\boxed{a(s, t) = \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}}} \quad (3.56)$$

et si $v_c^{(1)}, p_c^{(1)}$ ne dépendent pas de l'abscisse s : on parlera alors *d'anneaux à structure normale simple à l'ordre 1*, ce qui étend la définition du chapitre I.

Nous noterons qu'alors (3.54) devient :

$$u_c^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} \bar{r}$$

L'équation (3.46b) qui n'a pas servi est celle qui donne $p_c^{(2)}$. Les équations (3.46) ne nous donnent pas d'information sur $v_c^{(2)}$ ni $w_c^{(2)}$. Il nous reste à résoudre la partie non axisymétrique des équations d'ordre 2, ce qui est le but du prochain paragraphe.

III.8.2. Partie non axisymétrique des équations

Pour un anneau à structure normale, l'équation de conservation de la masse à l'ordre 2 s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{r}u^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial v^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \varphi} = s_1^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t), \quad (3.57)$$

avec :

$$\begin{aligned} s_1^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t) = & -\bar{r}K^{(0)}(s,t)v_c^{(1)}(\bar{r},t)\sin(\varphi) \\ & -\frac{\bar{r}^2 T^{(0)}(s,t)u_{11}^{(1)}(\bar{r},s,t)}{v^{(0)}(\bar{r},t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} \sin(\varphi) \\ & -\frac{\bar{r}^2 K^{(0)}(s,t)\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\sigma^{(0)}(s,t)v^{(0)}(\bar{r},t)} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r},s,t)}{\partial \bar{r}} \\ & -\frac{\bar{r}^2}{\sigma^{(0)}(s,t)v^{(0)}(\bar{r},t)} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r},s,t)}{\partial s} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} \cos(\varphi) \\ & -\left(T^{(0)}(s,t)K^{(0)}(s,t)\sin(\varphi) - \frac{1}{\sigma^{(0)}(s,t)} \frac{\partial K^{(0)}(s,t)}{\partial s}\cos(\varphi)\right) \bar{r}^2 w^{(0)}(\bar{r},t) \\ & -\bar{r} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \\ & -\left(2\bar{r}K^{(0)}(s,t)^2 \cos(\varphi) + K^{(1)}(s,t)\right) \bar{r}v^{(0)}(\bar{r},t)\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Nous remarquons que les seules inconnues d'ordre 2 qui interviennent dans cette équation sont $u^{(2)}$, $v^{(2)}$. L'équation (3.57) est satisfaite à l'aide de la fonction de courant $\Psi^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t)$ qui vérifie :

$$u^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \bar{r} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \quad (3.58a)$$

$$v^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t) = -\frac{\partial \Psi^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \bar{r}} + v_r^{(2)}(\bar{r},\varphi,s,t) \quad (3.58b)$$

avec :

$$\begin{aligned}
v_r^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = & +\frac{1}{4} \bar{r}^2 K^{(0)}(s, t) \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{2} \bar{r}^2 K^{(0)}(s, t)^2 v^{(0)}(\bar{r}, t) \\
& + \left[\begin{array}{l} \bar{r}^2 T^{(0)}(s, t) \left[\frac{u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} + K^{(0)}(s, t) w^{(0)}(\bar{r}, t) \right] \\ + \bar{r} K^{(0)}(s, t) v_c^{(1)}(\bar{r}, t) + \bar{r} K^{(1)}(s, t) v^{(0)}(\bar{r}, t) \end{array} \right] \cos(\varphi) \\
& - \frac{\bar{r}^2}{\sigma^{(0)}(s, t)} \left(w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s} + \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right) \sin(\varphi) \\
& + \bar{r}^2 K^{(0)}(s, t) \left(\frac{1}{4} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{2} v^{(0)}(\bar{r}, t) \right) \cos(2\varphi)
\end{aligned} \tag{3.58c}$$

Les seules inconnues d'ordre 2 qui interviennent dans l'équation (3.57) et dans les équations du mouvement sur \vec{r} et $\vec{\theta}$ à l'ordre 2 (Annexe A.4), sont $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $p^{(2)}$ et pas $w^{(2)}$. L'écoulement à cet ordre se comporte donc comme un écoulement bidimensionnel rotationnel et non conservatif. Une fois cet écoulement résolu, l'équation du mouvement sur $\vec{\tau}$ à l'ordre 2 nous donne la partie non axisymétrique de la vitesse axiale $w^{(2)}$ à l'ordre 2.

Nous substituons ces relations (3.58a-b) dans les deux premières équations du mouvement sur \vec{r} et $\vec{\theta}$ à l'ordre 2 (Annexe A.4). Puis, la pression est éliminée entre les deux relations obtenues en se servant de l'égalité :

$$\partial^2 p^{(2)} / \partial \bar{r} \partial \varphi = \partial^2 p^{(2)} / \partial \varphi \partial \bar{r}.$$

Nous obtenons alors une équation pour $\Psi^{(2)}$ dans laquelle nous substituons la décomposition suivante de la fonction de courant en série de Fourier :

$$\Psi^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = \Psi_c^{(2)}(\bar{r}, s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{n1}^{(2)} \cos(n\varphi) + \Psi_{n2}^{(2)} \sin(n\varphi))$$

(3.59)

et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} + \frac{1-n^2}{\bar{r}^2} \Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \\
& - \frac{\Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} - \frac{\Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial^2 v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}^2} = H_{nj}^{(2)}
\end{aligned}$$

(3.60a)

où seuls $H_{12}^{(2)}$, $H_{11}^{(2)}$ et $H_{21}^{(2)}$ sont non nuls et sont donnés dans l'annexe A.9.

Cette équation (3.60a) s'écrit également :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} - \left[\frac{n^2}{\bar{r}^2} + \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right]}{\partial \bar{r}} \right] \Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}, s, t) = H_{nj}^{(2)}$$

Remarquons que l'équation (3.60a) de la fonction de courant $\Psi_{nj}^{(2)}$ a la même équation homogène et les mêmes conditions aux limites en $\bar{r} = 0$:

$$\boxed{\Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r} = 0) = 0} \quad (3.60b)$$

$$\boxed{\frac{\partial \Psi_{nj}^{(2)}}{\partial \bar{r}}(\bar{r} = 0) = 0}, \quad (3.60c)$$

que l'équation (3.21a) de la fonction de courant $\Psi_{nj}^{(1)}$.

III.8.3. Le raccord à l'ordre ε^1 et les conditions aux limites en l'infini de l'ordre deux

La loi de raccord asymptotique à l'ordre ε^1 dit que le développement du champ de vitesse extérieur en zéro à l'ordre ε^1 est identique au développement du champ de vitesse intérieur en l'infini à l'ordre ε^1 , ce qui s'écrit :

$$\left(\text{Dev}_{r=0} \left[\vec{v}^{\text{out}} \right] = \text{Dev}_{r=\infty}^- \left[\vec{v}^{\text{inn}} \right] \right)_{\varepsilon^1}. \quad (3.61)$$

Si l'écoulement potentiel n'a pas de contribution à l'ordre ε^1 , la formule (2.24e) du chapitre II donne :

$$\vec{v}^{\text{inn}(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s) = (\vec{I}_3 + \vec{I}_5 \bar{r}) \ln \bar{r} + [\vec{I}_6 + \vec{E}_2(\varphi, s)] \bar{r} + \vec{I}_4 + \vec{E}_1(s).$$

Ce résultat a été obtenu, soit en faisant le changement de variable $r = \varepsilon \bar{r}$ dans $\vec{v}^{\text{out}}(r \rightarrow 0, \varphi, s)$, soit directement à partir de la limite en l'infini du développement intérieur de l'intégrale de Biot et Savart.

Comme :

$$\vec{v}^{\text{inn}(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = \overset{\bullet}{\vec{X}}^{(1)} + \vec{V}^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t),$$

il vient donc :

$$\begin{aligned}
u^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) &= \left[\bar{\mathbf{V}}^{(2)} \bullet \bar{\mathbf{r}} \right]_{\bar{r} \rightarrow \infty} \\
&= \left[(\vec{\mathbf{I}}_3 + \vec{\mathbf{I}}_5 \bar{r}) \ln \varepsilon \bar{r} + (\vec{\mathbf{I}}_6 + \vec{\mathbf{E}}_2(\varphi, s)) \bar{r} + \vec{\mathbf{I}}_4 + \vec{\mathbf{E}}_1(s) - \vec{\mathbf{X}}^{(1)} \right] \bullet \bar{\mathbf{r}} \\
&= (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) \bar{r} \\
&\quad - \frac{m}{4\pi} K^{(0)} T^{(0)} \left[\ln \varepsilon \bar{r} + \frac{5}{6} - \ln S \right] \sin \varphi + (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \bullet \vec{\mathbf{b}} \sin \varphi \\
&\quad - \frac{m}{4\pi} K_s^{(0)} \left[3 \ln \varepsilon \bar{r} + 3 + \frac{5}{6} - 3 \ln S \right] \cos \varphi + (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \bullet \vec{\mathbf{n}} \cos \varphi \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3}{4} K^{(0)2} \bar{r} \ln \varepsilon \bar{r} + \left(1 - \frac{3}{4} \ln S \right) K^{(0)2} \bar{r} \right] \sin 2\varphi \\
&\quad + \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22}) \bar{r} \sin 2\varphi \\
&\quad + \frac{1}{2} (-\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) \bar{r} \cos 2\varphi \\
v^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) &= \left[\bar{\mathbf{V}}^{(2)} \bullet \bar{\theta} \right]_{\bar{r} \rightarrow \infty} \\
&= \left[(\vec{\mathbf{I}}_3 + \vec{\mathbf{I}}_5 \bar{r}) \ln \varepsilon \bar{r} + (\vec{\mathbf{I}}_6 + \vec{\mathbf{E}}_2(\varphi, s)) \bar{r} + \vec{\mathbf{I}}_4 + \vec{\mathbf{E}}_1(s) - \vec{\mathbf{X}}^{(1)} \right] \bullet \bar{\theta} \\
&= (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} - \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22}) \bar{r} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{S^2} - \frac{K^{(0)2}}{24} \right) \bar{r} \\
&\quad - \frac{m}{4\pi} K^{(0)} T^{(0)} \left[\ln \varepsilon \bar{r} + \frac{5}{6} - \ln S \right] \cos \varphi + (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \bullet \vec{\mathbf{b}} \cos \varphi \\
&\quad - \frac{m}{4\pi} K_s^{(0)} \left[-3 \ln \varepsilon \bar{r} - 4 - \frac{1}{6} - 3 \ln S \right] \sin \varphi - (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \bullet \vec{\mathbf{n}} \sin \varphi \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3}{4} K^{(0)2} \bar{r} \ln \varepsilon \bar{r} + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln S \right) K^{(0)2} \bar{r} \right] \cos 2\varphi \\
&\quad + \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22}) \bar{r} \cos 2\varphi \\
&\quad - \frac{1}{2} (-\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) \bar{r} \sin 2\varphi
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
w^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) &= \left[\bar{\mathbf{V}}^{(2)} \bullet \bar{\tau} \right]_{\bar{r} \rightarrow \infty} \\
&= \left[(\vec{\mathbf{I}}_3 + \vec{\mathbf{I}}_5 \bar{r}) \ln \varepsilon \bar{r} + (\vec{\mathbf{I}}_6 + \vec{\mathbf{E}}_2(\varphi, s)) \bar{r} + \vec{\mathbf{I}}_4 + \vec{\mathbf{E}}_1(s) - \vec{\mathbf{X}}^{(1)} \right] \bullet \bar{\tau}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{m}{4\pi} \left(T^{(0)2} - \frac{K^{(0)2}}{2} \right) \ln \varepsilon r \\
&\quad + \frac{m}{4\pi} \left(\left[-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5}{16} - \frac{8}{S^2} \right] K^2 + \left[\ln 2 - \frac{3}{2} \right] T^{(0)2} \right) + (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \bullet \vec{\tau} \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} K^{(0)} T^{(0)} (-1 + \ln S - \ln \varepsilon r) \bar{r} \cos \varphi + \vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} \bar{r} \cos \varphi \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} K_s^{(0)} (1 - \ln S + \ln \varepsilon r) \bar{r} \sin \varphi + \vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} \bar{r} \sin \varphi \\
&\quad + \frac{m}{4\pi} \frac{K^{(0)2}}{4} \cos 2\varphi
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\Psi_{11}^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = \left\{ \frac{m}{4\pi} K_s^{(0)} \left[3 \ln \varepsilon \bar{r} + 3 + \frac{5}{6} - 3 \ln S \right] - (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \bullet \vec{\mathbf{n}} \right\} \bar{r} \quad (3.62a)$$

$$\Psi_{12}^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = \left\{ -\frac{m}{4\pi} K^{(0)} T^{(0)} \left[\ln \varepsilon \bar{r} + \frac{5}{6} - \ln S \right] + (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \bullet \vec{\mathbf{b}} \right\} \bar{r} \quad (3.62b)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{21}^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty) &= -\frac{1}{8\pi} \left[\frac{3}{4} K^{(0)2} \bar{r}^{-2} \ln \varepsilon \bar{r} + \left(1 - \frac{3}{4} \ln S \right) K^{(0)2} \bar{r}^{-2} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22}) \bar{r}^{-2}
\end{aligned} \quad (3.62c)$$

$$\Psi_{22}^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = -\frac{1}{4} (-\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) \bar{r}^{-2} \quad (3.62d)$$

$$\Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = 0 \quad n \neq 1 \text{ et } n \neq 2 \quad (3.62e)$$

$$\begin{aligned}
w^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) &= -\frac{m}{4\pi} \left(T^{(0)2} - \frac{K^{(0)2}}{2} \right) \ln \varepsilon \bar{r} + \vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_1 \\
&\quad + \frac{m}{4\pi} \left(\left[-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5}{16} - \frac{8}{S^2} \right] K^{(0)2} + \left[\ln 2 - \frac{3}{2} \right] T^{(0)2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} K^{(0)} T^{(0)} (-1 + \ln S - \ln \varepsilon r) \bar{r} \cos \varphi + \vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} \bar{r} \cos \varphi \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} K_s^{(0)} (1 - \ln S + \ln \varepsilon r) \bar{r} \sin \varphi + \vec{\tau} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} \bar{r} \sin \varphi \\
&\quad + \frac{m}{4\pi} \frac{K^{(0)2}}{4} \cos 2\varphi
\end{aligned} \quad (3.62f)$$

$$\nu_c^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21} - \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22}) \bar{r} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{S^2} - \frac{K^2}{24} \right) \bar{r} \quad (3.62g)$$

Ces relations donnent les conditions aux limites en l'infini des équations aux dérivées partielles (3.60).

III.8.4. Résolution des équations à l'ordre 2

La solution $\Psi_{nj}^{(2)}$ de l'équation (3.60) est la somme d'une solution particulière $\Psi_{nj}^p{}^{(2)}$

de cette équation avec second membre et des solutions générales $\Psi_{nj}^h{}^{(2)}$ de son équation homogène, ce qui s'écrit :

$$\Psi_{nj}^{(2)} = \Psi_{nj}^h{}^{(2)} + \Psi_{nj}^p{}^{(2)}.$$

Nous avons les mêmes résultats qu'au paragraphe III.6.4. sur les comportements aux limites de nos équations différentielles.

La solution $\Psi_{nj}^{(2)}$ de l'équation (3.60) a le comportement suivant proche de zéro :

$$\boxed{\Psi_{nj}^{(2)} \approx C_n (\bar{r})^n + \Psi_{nj}^p{}^{(2)} (\bar{r} \rightarrow 0)} \text{ pour } \bar{r} \approx 0, \quad (3.63)$$

où C_n est une constante déterminée par la condition aux limites de la solution en l'infini.

Si $n \neq 1$, les conditions en zéro sont vérifiées et c'est la condition en l'infini qui permet de déterminer la constante C_n et donc $\Psi_{nj}^{(2)}$.

Si $n \neq 1$ et $n \neq 2$, on voit que $\Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}) = 0$ est solution des équations (3.60) et (3.62e)

$$\boxed{\Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}) = 0 \quad n \neq 1 \text{ et } n \neq 2}. \quad (3.64a)$$

Les fonctions $\Psi_{2j}^{(2)}(\bar{r})$ sont solutions de (3.60) avec les conditions aux limites (3.62c-d). Elles peuvent être résolues numériquement à l'aide de (3.63) par une méthode de tir sur la constante C_n .

La même résolution avec variation de la constante que pour la fonction de courant à l'ordre 1 peut être appliquée pour obtenir des expressions intégrales de $\Psi_{12}^{(2)}$ et $\Psi_{11}^{(2)}$ qui sont de la forme suivante (Annexe A.9) :

$$\boxed{\Psi_{1j}^{(2)} = v^{(0)}(\bar{r}, t) \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z v^{(0)}(z, t)^2} \int_0^z [\xi v^{(0)}(\xi, t) H_{nj}^{(2)}(t, \xi)] d\xi dz}. \quad (3.64b)$$

Remarquons que les équations (3.62a-b) nous donnent une condition aux limites en l'infini qui doit s'identifier avec la limite en l'infini de l'expression (3.64b) de $\Psi_{1j}^{(2)}$. En fait, on arrive toujours à avoir l'égalité de ces deux limites, car les équations (3.62a-b) font intervenir la fonction inconnue $\bar{\mathbf{X}}^{(1)}(s,t)$. Cette égalité détermine alors l'équation de la fibre centrale $\bar{\mathbf{X}}^{(1)}(s,t)$ à l'ordre 1.

III.8.5. Limite en l'infini de $\Psi_{12}^{(2)}$ et $\Psi_{11}^{(2)}$

Le comportement près de l'infini de l'équation homogène associée à l'équation (3.60) est :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{nj}^{(2)}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \Psi_{nj}^{(2)}}{\partial \bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} \Psi_{nj}^{(2)} = 0. \quad (3.65)$$

Une des solutions de cette équation se comporte comme $(\bar{r})^{-n}$ et l'autre comme $(\bar{r})^{+n}$. La solution $\Psi_{nj}^{(2)}$ de l'équation (3.60) a donc le comportement suivant en l'infini :

$$\Psi_{nj}^{(2)} \approx d_n(\bar{r})^{+n} + e_n(\bar{r})^{-n} + \Psi_{nj}^{p(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty) \text{ pour } \bar{r} \approx \infty. \quad (3.66)$$

Pour $n \neq 1$ et $n \neq 2$, on a :

$$\Psi_{nj}^{(2)} \approx d_n(\bar{r})^{+n} + e_n(\bar{r})^{-n} \text{ pour } \bar{r} \approx \infty$$

et comme $\Psi_{nj}^{(2)}(\bar{r}) = 0$ d'après (3.64a), alors :

$$\Psi_{nj}^{(2)} = 0 \text{ en } \bar{r} \approx \infty \text{ pour } n \neq 1 \text{ et } n \neq 2.$$

Le comportement en l'infini de $\Psi_{21}^{(2)}$ est de la forme :

$$\Psi_{21}^{(2)} \approx d_2(\bar{r})^{+2} + e_2(\bar{r})^{-2} + \Psi_{21}^{(2)p}(\bar{r} \rightarrow \infty) \text{ pour } \bar{r} \approx \infty.$$

Or, on trouve que :

$$H_{21}^{(2)}(\infty) \approx \frac{3}{8} \frac{K^2}{\pi},$$

et donc :

$$\Psi_{21}^{(2)} \approx d_2(\bar{r})^{+2} + e_2(\bar{r})^{-2} + \frac{3}{32} \frac{K_0^2}{\pi} \bar{r}^{-2} \ln(\bar{r}), \quad (3.67a)$$

ce qui est cohérent avec la limite (3.62c) à un terme en $\ln \varepsilon$ près.

Le comportement en l'infini de $\Psi_{22}^{(2)}$ est de la forme :

$$\Psi_{22}^{(2)} \approx d_2(\bar{r})^{+2} + e_2(\bar{r})^{-2} \text{ pour } \bar{r} \approx \infty, \quad (3.67b)$$

ce qui est cohérent avec la limite (3.62d).

Il reste à déterminer la limite en l'infini de $\Psi_{12}^{(2)}$ et $\Psi_{11}^{(2)}$ à partir de (3.64b). Le calcul d'intégrale singulière nous donne :

$$\Psi_{12}^{(2)}(\infty) = \pi \left(\int_0^\infty \xi v^{(0)}(\xi, t) H_{12}^{(2)}(\xi, t) d\xi \right) \bar{r}.$$

Après une intégration par parties de cette relation, les termes en $u_{11}^{(1)}$ dans

$H_{12}^{(2)}$ disparaissent et il vient :

$$\boxed{\Psi_{12}^{(2)}(\infty) = \pi \left(\int_0^\infty \xi v^{(0)}(\xi, t) H_{12}^{(2)}(\xi, t) d\xi \right) \bar{r}}, \quad (3.68a)$$

avec :

$$H_{12}^{(2)} = 2 \frac{\xi}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \left(\vec{\tau}^{(0)}(s, t) \bullet \vec{b}^{(0)}(s, t) \right) - 2 \xi \frac{w^{(0)}(\xi, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s}. \quad (3.68b)$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^{(2)}(\infty) &= \pi \bar{r} \left(\int_0^1 \xi v^{(0)}(\xi, t) H_{11}^{(2)}(\xi, t) d\xi + \int_1^\infty \left[\xi v^{(0)}(\xi, t) H_{11}^{(2)}(\xi, t) - \frac{1}{4} \frac{K^{(1)}(s, t)}{\pi^2 \xi} \right] d\xi \right) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \bar{r} K^{(1)}(s, t) [2 \ln \bar{r} - 1] \\ &= \pi \bar{r} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)}(\xi, t) H_{11}^{(2)}(\xi, t) d\xi - \frac{1}{4} \frac{K^{(1)}(s, t)}{\pi^2} \ln \bar{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \bar{r} K^{(1)}(s, t) [2 \ln \bar{r} - 1] \end{aligned}$$

Après une intégration par parties de cette relation, les termes en $u_{11}^{(1)}$ dans $H_{11}^{(2)}$

disparaissent et il vient :

$$\boxed{\begin{aligned}\Psi_{11}^{(2)}(\infty) = \pi \bar{r} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} & \left(\int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)}(\xi, t) Hs_{11}^{(2)}(\xi, t) d\xi - \frac{1}{4} \frac{K^{(1)}(s, t)}{\pi^2} \ln \bar{r} \right), \\ & + \frac{1}{8\pi} \bar{r} K^{(1)}(s, t) [2 \ln \bar{r} - 1]\end{aligned}}, \quad (3.68c)$$

avec :

$$\begin{aligned}Hs_{11}^{(2)} = & 2\xi K^{(0)}(s, t) \frac{\partial v_c^{(1)}(\xi, t)}{\partial \xi} + 3v^{(0)}(\xi, t) K^{(1)}(s, t) \\ & + 2 \frac{\xi}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \left(\frac{\bullet^{(0)}}{\tau}(s, t) \bullet \bar{n}^{(0)}(s, t) \right) \\ & + 6K^{(0)}(s, t) v_c^{(1)}(\xi, t) + 2\xi \frac{\partial v^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} K^{(1)}(s, t) \\ & + 2\xi w^{(0)}(\xi, t) K^{(0)}(s, t) T^{(0)}(s, t) \\ & + 2 \frac{\xi K^{(0)}(s, t) v_c^{(1)}(\xi, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial v^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \\ & + 2 \frac{\xi K^{(0)}(s, t) (w_c^{(1)}(\xi, t) + w_{cc}^{(1)}(s, t))}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \\ & + 2 \frac{\xi K^{(1)}(s, t) w^{(0)}(\xi, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \\ & + 2 \frac{\xi K^{(0)}(s, t) w^{(0)}(\xi, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w_c^{(1)}(\xi, t)}{\partial \xi}\end{aligned} \quad (3.68d)$$

III.9. L'équation d'évolution du filament à l'ordre 1 et la partie non axisymétrique du champ à l'ordre 2

III.9.1. Détermination de l'équation de la fibre centrale

En égalant les limites en l'infini (3.68) et (3.62a-b) des paragraphes III.8.3. et III.8.5, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Psi_{12}^{(2)}(\infty) &= \pi \left(\int_0^\infty \xi v^{(0)}(\xi, t) Hs_{12}^{(2)}(\xi, t) d\xi \right) \bar{r} \\
&= \left\{ -\frac{m}{4\pi} K^{(0)} T^{(0)} \left[\ln \varepsilon \bar{r} + \frac{5}{6} - \ln S \right] - (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \bullet \vec{\mathbf{b}} \right\} \bar{r} \\
\Psi_{11}^{(2)}(\infty) &= \pi \bar{r} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)}(\xi, t) Hs_{11}^{(2)}(\xi, t) d\xi - \frac{1}{4} \frac{K^{(1)}(s, t)}{\pi^2} \ln \bar{r} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \bar{r} K^{(1)}(s, t) \ln \bar{r} - \frac{1}{8\pi} \bar{r} K^{(1)}(s, t) \\
&= \left\{ \frac{m}{4\pi} K_s^{(0)} \left[3 \ln \varepsilon \bar{r} + 3 + \frac{5}{6} - 3 \ln S \right] - (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \bullet \vec{\mathbf{n}} \right\} \bar{r} \\
\text{et } -\frac{1}{2} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} &= (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) \tag{3.69}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{X}}^{(1)} \bullet \vec{\mathbf{n}} &= \pi \bar{r} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)}(\xi, t) Hs_{11}^{(2)}(\xi, t) d\xi - \frac{1}{4} \frac{K^{(1)}(s, t)}{\pi^2} \ln \bar{r} \right) \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} K^{(1)}(s, t) + \frac{1}{4\pi} K^{(1)}(s, t) \ln \varepsilon \\
&\quad - \frac{m}{4\pi} K_s^{(0)} \left[3 \ln \varepsilon + 3 + \frac{5}{6} - 3 \ln S \right] + \vec{\mathbf{E}}_1 \bullet \vec{\mathbf{n}} \\
&= C_2 - \frac{1}{8\pi} K^{(1)}(s, t) + \frac{1}{4\pi} K^{(1)}(s, t) \ln \varepsilon - \frac{m}{4\pi} K_s^{(0)} \left[3 \ln \varepsilon + 3 + \frac{5}{6} - 3 \ln S \right] + \vec{\mathbf{E}}_1 \bullet \vec{\mathbf{n}} \tag{3.70a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{X}}^{(1)} \bullet \vec{\mathbf{b}} &= \pi \left(\int_0^\infty \xi v^{(0)}(\xi, t) Hs_{12}^{(2)}(\xi, t) d\xi \right) + \frac{m}{4\pi} K^{(0)} T^{(0)} \left[\ln \varepsilon + \frac{5}{6} - \ln S \right] + \vec{\mathbf{E}}_1 \bullet \vec{\mathbf{b}} \\
&= C_1 + \frac{m}{4\pi} K^{(0)} T^{(0)} \left[\ln \varepsilon + \frac{5}{6} - \ln S \right] + \vec{\mathbf{E}}_1 \bullet \vec{\mathbf{b}} \tag{3.70b}
\end{aligned}$$

avec

$$C_1 = \pi \left(\int_0^\infty \xi v^{(0)}(\xi, t) Hs_{12}^{(2)}(\xi, t) d\xi \right) \tag{3.70c}$$

$$C_2 = \pi \bar{r} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)}(\xi, t) Hs_{11}^{(2)}(\xi, t) d\xi - \frac{1}{4} \frac{K^{(1)}(s, t)}{\pi^2} \ln \bar{r} \right) \tag{3.70d}$$

On obtient alors l'équation suivante d'évolution de la fibre centrale à l'ordre 1 :

$$\boxed{\dot{\vec{X}}^{(1)} - (\vec{X}^{(1)} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = \left\{ \begin{array}{l} * \\ C_2 - \frac{1}{8\pi} K^{(1)}(s, t) + \frac{1}{4\pi} K^{(1)}(s, t) \ln \varepsilon - \frac{m}{4\pi} K_s \left[3 \ln \varepsilon + 3 + \frac{5}{6} - 3 \ln S \right] \end{array} \right\} \vec{n} \\ + \left\{ \begin{array}{l} * \\ C_1 + \frac{m}{4\pi} KT \left[\ln \varepsilon + \frac{5}{6} - \ln S \right] \end{array} \right\} \vec{b} + \vec{E}_1 - (\vec{E}_1 \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} } \quad (3.71a)$$

où :

$$m = \pi \int_0^\infty \omega_2 r^2 dr$$

est le débit axial et

$$\boxed{C_1 = \pi \left(\int_0^\infty \xi v^{(0)}(\xi, t) Hs_{12}^{(2)}(\xi, t) d\xi \right)} \quad (3.71b)$$

$$\boxed{C_2 = \pi \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)}(\xi, t) Hs_{11}^{(2)}(\xi, t) d\xi - \frac{1}{4} \frac{K^{(1)}(s, t)}{\pi^2} \ln \bar{r} \right)}. \quad (3.71c)$$

Les expressions de $Hs_{12}^{(2)}$ et $Hs_{11}^{(2)}$ sont données par (3.68b) et (3.68d) et $\vec{E}_1(a)$ par :

$$\vec{E}_1(a) = \frac{m}{4\pi} \quad (3.71d)$$

$$\boxed{\int_{-S/2}^{S/2} \left[\begin{array}{l} \frac{K^{(0)}(a+a') \vec{b}^{(0)}(a+a') \wedge (\vec{X}^{(0)}(a+a') - \vec{X}^{(0)}(a)) + 2\vec{\tau}(a+a')}{|\vec{X}^{(0)}(a+a') - \vec{X}^{(0)}(a)|^3} \\ + 3 \left[\frac{[\vec{n}(a+a') \bullet (\vec{X}^{(0)}(a+a') - \vec{X}^{(0)}(a))] (\vec{b}(a+a') \wedge (\vec{X}^{(0)}(a+a') - \vec{X}^{(0)}(a)))}{|\vec{X}^{(0)}(a+a') - \vec{X}^{(0)}(a)|^3} \right. \\ \left. - 3 \left[\frac{[\vec{b}(a+a') \bullet (\vec{X}^{(0)}(a+a') - \vec{X}^{(0)}(a))] (\vec{n}(a+a') \wedge (\vec{X}^{(0)}(a+a') - \vec{X}^{(0)}(a)))}{|\vec{X}^{(0)}(a+a') - \vec{X}^{(0)}(a)|^3} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(-2 \frac{1}{|a'|^3} + \frac{K^{(0)}(a)^2}{4|a'|} - \frac{T^{(0)}(a)^2}{2|a'|} \right) \vec{\tau}(a) - \frac{K^{(0)}(a) T^{(0)}(a)}{2|a'|} \vec{b}(a) - \frac{3}{2} \frac{K_a^{(0)}(a)}{|a'|} \vec{n}(a) \right] da' \end{array} \right]}$$

Cette équation (3.71a) est l'équation pour l'ordre 1 de la fibre centrale. Fukumoto et Miyazaki³ (page 373) ont écrit cette équation, mais ont oublié les termes dus à la courbure $K^{(1)}$ à l'ordre 1 et les termes dus à l'ordre ε de l'intégrale de Biot et Savart. Ces derniers

termes ont tous le débit axial m en facteur. Leur résultat n'est donc valable que lorsque le filament n'a pas de débit axial. Par l'intermédiaire de $Hs_{12}^{(2)}$ et $Hs_{11}^{(2)}$, on voit que la détermination de $\bar{\mathbf{X}}^{(1)}$ nécessite la connaissance des champs axisymétriques $v_c^{(1)}$ et $w_c^{(1)}$ que l'on ne connaît pas.

Remarquons que la relation (3.69) :

$$\boxed{-\frac{1}{2} \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} = (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21})} \quad (3.69)$$

n'est a priori pas forcément vérifiée par la solution de l'équation (3.33) de la fibre centrale à l'ordre principal. Il nous faut donc revenir sur les hypothèses que l'on a faites pour satisfaire les équations de compatibilité à l'ordre 1. Si on abandonne la relation (3.56) :

$$a(s, t) = \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}},$$

alors (3.69) devient :

$$a(s, t) = -2 (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) \quad (3.72a)$$

ce qui nous montre que le taux d'étirement $a(s, t)$ est imposé par la solution de l'ordre principal du problème. Les équations de compatibilité (3.51a-b) nous donnent alors la valeur des gradients axiaux de la partie axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial v_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} = -\frac{\sigma^{(0)}(s, t)}{w^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{1}{2} \left(\frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} - a(s, t) \right) \quad (3.72b)$$

$$\frac{\partial p_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} = \sigma^{(0)}(s, t) \left(\frac{1}{2} r \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} - w^{(0)}(\bar{r}, t) \right) \left(\frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} - a(s, t) \right). \quad (3.72c)$$

En moyennant ces équations selon l'abscisse s , et en utilisant le fait que le filament est fermé, on obtient que la condition suivante doit être vérifiée :

$$\int_0^{2\pi} \sigma^{(0)}(s, t) a(s, t) ds = \bullet S^{(0)}, \quad (3.73)$$

c'est à dire

$$-2 \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)}(s, t) (\vec{\mathbf{b}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{22} + \vec{\mathbf{n}} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{21}) ds = \bullet S^{(0)}. \quad (3.74)$$

Cette relation n'est a priori pas forcément vérifiée par la solution de l'équation (3.33). Le problème de la relation supplémentaire (3.69) n'est donc toujours pas résolu.

Remarquons également qu'avec le choix d'un gradient axial de vitesse axiale de la forme :

$$\frac{\partial w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} = -\overset{\bullet}{\sigma}^{(0)} + a(s, t)\sigma^{(0)},$$

alors :

$$w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) = w_{cc}^{(1)}(s, t) + w_c^{(1)}(\bar{r}, t)$$

et donc :

$$w_c^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, s, t) = w_{cc}^{(1)}(s, t),$$

ce qui doit concorder avec la limite (3.25d), qui s'écrit :

$$w^{(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = 0,$$

pour un choix du paramétrage du type :

$$(\vec{A} - \vec{X}) \bullet \vec{\tau} = 0.$$

On a donc $w_{cc}^{(1)}(s, t) = 0$ et le taux d'étirement est donné par :

$$a(s, t) = \frac{\overset{\bullet}{\sigma}^{(0)}}{\sigma^{(0)}}.$$

La relation (3.73) est alors vérifiée, mais pas l'équation (3.69) qui devient :

$$-\frac{1}{2} \frac{\overset{\bullet}{\sigma}^{(0)}}{\sigma^{(0)}} = (\vec{b} \bullet \vec{E}_{22} + \vec{n} \bullet \vec{E}_{21})$$

Cette relation n'est a priori pas forcément vérifiée par la solution de l'équation (3.33). Notons que s'il existe un écoulement potentiel avec une action d'étirement, celui-ci peut modifier l'expression de $a(s, t)$.

III.9.2. La partie non axisymétrique du champ des vitesses à l'ordre 2

Nous posons :

$$u_{11}^{(2)}(\bar{r}, s, t) = -\frac{1}{r} \Psi_{11}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \quad (3.75)$$

Les champs à l'ordre 2 sont alors de la forme suivante :

$$u^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = u_c^{(2)}(\bar{r}, s, t) + u_{11}^{(2)} \cos \varphi + u_{12}^{(2)} \sin \varphi + u_{21}^{(2)} \cos 2\varphi + u_{22}^{(2)} \sin 2\varphi \quad (3.76a)$$

$$v^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = v_c^{(2)}(\bar{r}, s, t) + v_{11}^{(2)} \cos \varphi + v_{12}^{(2)} \sin \varphi + v_{21}^{(2)} \cos 2\varphi + v_{22}^{(2)} \sin 2\varphi \quad (3.76b)$$

$$w^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = w_c^{(2)}(\bar{r}, s, t) + w_{11}^{(2)} \cos \varphi + w_{12}^{(2)} \sin \varphi + w_{21}^{(2)} \cos 2\varphi + w_{22}^{(2)} \sin 2\varphi \quad (3.76c)$$

Nous avons déterminé tous les champs à l'ordre 2, à l'exception de leur partie axisymétrique $v_c^{(2)}$ et $w_c^{(2)}$.

III.10. Les équations pour la partie axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1

La partie axisymétrique des équations à l'ordre 3 est obtenue en moyennant en φ les équations à l'ordre 3 (Annexe A.10). La partie axisymétrique $u_c^{(3)}$ de la vitesse radiale à l'ordre 3 est extraite de la partie axisymétrique de l'équation de continuité. Si on la remplace dans les équations axisymétriques du mouvement sur \bar{r} et $\bar{\theta}$, nous obtenons alors deux équations qui ne contiennent que les termes axisymétriques $u_c^{(2)}, v_c^{(2)}, w_c^{(2)}$ d'ordre 2. En développant ces champs en série de Fourier de s , on remarque alors que le temps t n'apparaît que pour la partie indépendante de s de ces équations. Les parties des équations dépendantes de s ne permettent pas de vérifier une condition initiale quelconque et sont donc *des conditions de compatibilité pour l'ordre 2*.

La partie indépendante de s de ces équations est obtenue en prenant la moyenne selon l'abscisse s des équations axisymétriques (Annexe A.11). A partir des équations sur $\bar{\theta}$ et sur $\bar{\tau}$, on extrait les équations suivantes pour l'ordre 1 axisymétrique du champ de vitesse $v_c^{(1)}$ et

$w_c^{(1)}$:

$$\boxed{S^{(0)} \left(\frac{\partial v_c^{(1)}}{\partial \bar{r}} - \alpha^2 \left[\frac{1}{\bar{r}} (\bar{r} v_c^{(1)})_{\bar{r}} \right]_{\bar{r}} \right) - \frac{1}{2} \bullet^{(0)} S \left(\bar{r} v_c^{(1)} \right)_{\bar{r}} = c_1^{(1)}(\bar{r}, t)} \quad (3.77a)$$

$$\boxed{S^{(0)} \left(\frac{\partial w_c^{(1)}}{\partial \bar{r}} - \alpha^2 \left[\frac{1}{\bar{r}} (\bar{r} w_c^{(1)})_{\bar{r}} \right]_{\bar{r}} \right) - \frac{1}{2} \bullet^{(0)} \bar{r}^3 \left(\frac{w_c^{(1)}}{\bar{r}^2} \right)_{\bar{r}} = c_2^{(1)}(\bar{r}, t)}, \quad (3.77b)$$

où :

$$\begin{aligned}
c_1^{(1)}(\bar{r}, t) &= \frac{\bar{r}}{2} \left(\frac{\bullet}{S}^{(1)} - S^{(1)} \frac{\bullet}{S}^{(0)} \right) \omega_3^{(0)} \\
c_2^{(1)}(\bar{r}, t) &= \frac{\bar{r}^3}{2} (w^{(0)} / \bar{r}^2) \bar{r} \left(\frac{\bullet}{S}^{(1)} - S^{(1)} \frac{\bullet}{S}^{(0)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{S}{\varepsilon}\right) + C - 4\pi r v^{(0)} \right) \int_0^{2\pi} K^{(0)} \vec{A}_s(s, t) \bullet \vec{b}^{(0)} ds \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} \vec{A}(s, t) \bullet \vec{\tau}^{(0)} ds \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} \frac{\partial w_{cc}^{(1)}(s, t)}{\partial \tau} ds - \frac{\bullet}{S}^{(0)} \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} w_{cc}^{(1)}(s, t) ds
\end{aligned}$$

avec :

$$S^{(1)} = \int_0^{2\pi} \sigma^{(1)} ds$$

$$w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) = w_{cc}^{(1)}(s, t) + w_c^{(1)}(\bar{r}, t).$$

Ces équations (3.77a-b) pour l'ordre 1 axisymétrique du champ de vitesse $v_c^{(1)}$ et $w_c^{(1)}$, ajoutées à l'équation (3.71a) de la fibre centrale $\vec{X}^{(1)}$, forment *un système complet d'équations à l'ordre 1*.

La partie homogène de ces équations (3.77a-b) de $v_c^{(1)}(\bar{r}, t)$ et $w_c^{(1)}(\bar{r}, t)$ est la même que celle des équations (3.50a-b) des champs de vitesse axisymétrique $v^{(0)}(\bar{r}, t)$ et $w^{(0)}(\bar{r}, t)$.

Remarquons que Fukumoto et Miyazaki³ (page 378) ont supposé que $v_c^{(1)} = 0$. Ils ont essayé de fermer le système à l'ordre 1 d'une façon ad hoc alors qu'ici, nous avons proposé une dérivation asymptotique de cette fermeture. On voit que même si initialement $w_c^{(1)}(\bar{r}, 0) = 0$, les termes sources de (3.77b) font que $w_c^{(1)}(\bar{r}, t)$ ne reste pas nul.

III.11. La résolution des équations de l'ordre principal du champ de vitesse

Les équations (3.50a-b) de l'ordre principal du champ de vitesse sont :

$$w_t^{(0)} - \alpha^2 \frac{1}{r} \left(\bar{r} w_r^{(0)} \right)_r = \frac{1}{2} \left(\frac{w^{(0)}}{\bar{r}^2} \right)_r \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \quad (3.50a)$$

$$v_t^{(0)} - \alpha^2 \left[\frac{1}{r} \left(\bar{r} v_r^{(0)} \right)_r - \frac{v^{(0)}}{\bar{r}^2} \right] = \frac{1}{2} \left(\bar{r} v^{(0)} \right)_r \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}}. \quad (3.50b)$$

De (3.50b), nous en déduisons que la vorticité axiale $\omega_3^{(0)}$ vérifie l'équation :

$$\omega_{3t}^{(0)} - \alpha^2 \frac{1}{r} \left(\bar{r} \omega_3^{(0)} \right)_r = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{r}^2}{r} \omega_3^{(0)} \right)_r \frac{\dot{S}^{(0)}}{r S^{(0)}}. \quad (3.50c)$$

III.11.1. La solution non visqueuse

Si $\alpha = 0$, nous trouvons que $w^{(0)}/\bar{r}^2$ et $\omega_3^{(0)}\bar{r}^2$ satisfont tous deux l'équation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\bar{r}}{2} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right) \chi = 0 \quad (3.78)$$

Les solutions des équations (3.50) sont donc :

$$w^{(0)}(\bar{r}, t) = w_0(\eta) S^{(0)}(0)/S^{(0)}(t) \quad (3.79a)$$

$$\omega_3^{(0)}(\bar{r}, t) = \omega_{30}(\eta) S^{(0)}(t)/S^{(0)}(0) \quad (3.79b)$$

$$v^{(0)}(\bar{r}, t) = v_0(\eta) \sqrt{S^{(0)}(t)/S^{(0)}(0)} \quad (3.79c)$$

avec

$$\eta = \bar{r} \sqrt{S^{(0)}(t)/S^{(0)}(0)} \quad (3.80)$$

Ces équations donnent les évolutions temporelles des champs à l'ordre principal si le fluide est parfait. On voit que seul l'étirement de l'anneau change les champs. On peut désormais préciser la définition de l'épaisseur réduite du filament par la relation :

$$\bar{\delta}(t) = \sqrt{\frac{S^{(0)}(0)}{S^{(0)}(t)}}$$

III.11.2. La solution visqueuse et l'équation de diffusion bidimensionnelle

Si $\alpha \neq 0$, nous résolvons ces équations (3.50) au moyen du changement de variables :

$$\bar{\tau}_1 = \int_0^t S^{(0)}(t') dt' \quad (3.81a)$$

$$\xi = \bar{r} \sqrt{S^{(0)}} \quad (3.81b)$$

et du changement de fonction :

$$\bar{W}(\xi, \bar{\tau}_1) = S^{(0)}(t) w^{(0)} \quad (3.82a)$$

$$\bar{Z}(\xi, \bar{\tau}_1) = \frac{\omega_3^{(0)}}{S^{(0)}(t)} \quad (3.82b)$$

Les équations (3.50) de $w^{(0)}$ et $\omega_3^{(0)}$ sont alors remplacées par celles de $\bar{W}(\xi, \bar{\tau}_1)$ et $\bar{Z}(\xi, \bar{\tau}_1)$,

qui toutes deux ont la même forme suivante :

$$\bar{\chi} = \alpha^2 \frac{1}{\xi} \left(\xi \bar{\chi}_{\xi} \right)_{\xi}. \quad (3.83)$$

Dans un article, Lundgren⁹ (p.2194) a fait le même type de changement de variables que (3.81a-b). En effet, l'équation qu'il résout s'écrit dans le cas axisymétrique :

$$\omega_t - \nu \frac{1}{r} \left(r \omega_r \right)_r = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{r} \omega \right)_{\frac{r}{r}} \frac{1}{r} a(t). \quad (3.84)$$

Si on pose :

$$\frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} = a,$$

cette équation est la même que l'équation (3.50c) de $\omega_3^{(0)}$, et c'est justement ce qu'a posé l'auteur, qui utilise alors les mêmes transformations (3.81).

L'équation (3.83) de $\bar{\chi}$ est l'équation de diffusion d'un point tourbillon. A partir de la solution élémentaire de cette équation, on sait construire sa solution qui est :

$$\bar{\chi}(\xi, \bar{\tau}_1) = \frac{1}{2\alpha^2 \bar{\tau}_1} \int_0^\infty \bar{\chi}(\tilde{\xi}, 0) e^{-(\xi^2 + \tilde{\xi}^2)/(4\alpha^2 \bar{\tau}_1)} I_0\left(\frac{\xi \tilde{\xi}}{2\alpha^2 \bar{\tau}_1}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi}, \quad (3.85)$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée.

III.11.3. Représentation sous forme de série de la solution visqueuse

Nous pouvons aussi exprimer la solution $\bar{\chi}(\xi, \bar{\tau}_1)$ de (3.83) sous forme d'une série en se servant du changement de variables suivant :

$$\tau_1 = \bar{\tau}_1 + \tau_{10} \quad (3.86a)$$

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{4\alpha^2 \tau_1}}, \quad (3.86b)$$

où τ_{10} est une constante quelconque.

Callegari et Ting¹ ont tout de suite donné la transformation de t en τ_1 et de \bar{r} en η , qui est la composition des changements de variables précédents (3.81) et (3.86). Ils ont utilisé les fonctions $\chi = \tau_1 \bar{\chi}$, $W = \tau_1 \bar{W}$ et $Z = \tau_1 \bar{Z}$, plutôt que $\bar{\chi}$, \bar{W} et \bar{Z} , mais cela n'a pas d'importance. Le désavantage de faire tout de suite la composition des changements de variables précédents (3.81) et (3.86) est que l'on ne voit plus alors le lien avec le tourbillon bidimensionnel. En ne faisant pas tout de suite la composition des changements de variables, nous avons donné une expression de la solution de l'équation (3.83) sous forme d'une intégrale de Green (3.85) et on a fait le lien avec l'article de Lundgren⁹.

Avec ces variables τ_1 et η , l'équation (3.83) devient séparable et si on pose :

$$\bar{\chi}(\eta, \tau_1) = \bar{T}(\tau_1)\psi(\eta), \quad (3.87)$$

l'équation (3.83) donne

$$\tau_1 \frac{d\bar{T}}{d\tau_1} + \bar{T} + \lambda \bar{T} = 0,$$

qui a pour solution

$$\bar{T} = \tau_1^{-\lambda-1}$$

et

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + 2\eta\right) \frac{d\psi}{d\eta} + 4(\lambda+1)\psi = 0,$$

qui par la transformation :

$$\beta = \eta^2 \quad (3.88a)$$

$$B(\beta) = e^\beta \psi(\sqrt{\beta}) \quad (3.88b)$$

est transformée en l'équation de Laguerre

$$\beta \frac{d^2B}{d\beta^2} + (1-\beta) \frac{dB}{d\beta} + \lambda B = 0. \quad (3.89)$$

Afin de satisfaire les conditions en 0 et l'infini de cette équation, on a :

$$\lambda = n \in \mathbb{N}$$

$$B(\beta) = L_n(\beta) = \sum_0^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{\beta^m}{m!} \quad (3.90)$$

où

$$\binom{n}{m} = C_n^m$$

sont les coefficients du binôme et $L_n(\beta)$ sont les polynômes de Laguerre. Ils vérifient la propriété d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^\infty e^{-\beta} L_n(\beta) L_m(\beta) d\beta = \delta_{nm}, \quad (3.91)$$

que l'on construit à partir de (3.89). Ici, δ_{nm} est le symbole de Kronecker.

Pour satisfaire la condition initiale, la solution de (3.83) a le développement en série suivant :

$$\bar{\chi}(\eta, \tau_1) = \sum_n C_n \tau_1^{-n-1} L_n(\eta^2) e^{-\eta^2}, \quad (3.92a)$$

avec : $C_n = 2\tau_{10}^{n+1} \int_0^\infty \bar{\chi}(\eta \sqrt{4\alpha^2 \tau_{10}}, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta. \quad (3.92b)$

Le champ de vitesse solution des équations (3.50a-c) est donc le suivant¹ :

$$\omega_3^{(0)}(\bar{r}, t) = S^{(0)} e^{-\eta^2} \sum_n D_n \tau_1^{-n-1} L_n(\eta^2) \quad (3.93a)$$

$$w^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{1}{S^{(0)}} e^{-\eta^2} \sum_n C_n \tau_1^{-n-1} L_n(\eta^2) \quad (3.93b)$$

$$v^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{2\alpha^2}{\bar{r}} \left[D_0 (1 - e^{-\eta^2}) + e^{-\eta^2} \sum_1^\infty D_n \tau_1^{-n} (L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)) \right] \quad (3.93c)$$

avec :

$$\bar{\delta}(t) = \sqrt{\frac{4\alpha^2}{S^{(0)}} \left(\int_0^t S^{(0)}(t') dt' + \tau_{10} \right)} \quad (3.94a)$$

$$\eta = \frac{\bar{r}}{\bar{\delta}(t)} \quad (3.94b)$$

$$\tau_1 = \frac{S^{(0)} \bar{\delta}^2(t)}{4\alpha^2} \quad (3.94c)$$

$$L_n(\eta^2) = \sum_0^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{\eta^{2m}}{m!} \quad (3.94d)$$

et les constantes C_n et D_n sont déterminées à partir du champ de vitesse initial par les formules :

$$C_n = 2S_0 \tau_{10}^{n+1} \int_0^\infty w^{(0)}(\eta \sqrt{4\alpha^2 \tau_{10} / S_0}, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta \quad (3.95a)$$

$$D_n = 2 \frac{\tau_{10}^{n+1}}{S_0} \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\eta \sqrt{4\alpha^2 \tau_{10} / S_0}, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta. \quad (3.95b)$$

Par la relation :

$$\delta(t) = \varepsilon \bar{\delta}(t), \quad (3.96)$$

on peut alors préciser la définition de l'épaisseur $\delta(t)$ du filament qui jusqu'ici n'était définie qu'en ordre de grandeur.

Comme le choix de la constante τ_{10} est arbitraire, on n'est pas obligé de choisir la même pour la vitesse orthoradiale et pour la vitesse axiale. Alors pour distinguer ces deux constantes, on les note respectivement : τ_{10}^v et τ_{10}^w . A ces deux constantes sont associées deux épaisseurs différentes : $\delta_v(t)$ et $\delta_w(t)$. Si c'est $\delta_v(0)$ qui sert de définition de la petite longueur caractéristique l du problème, alors $\bar{\delta}_v(0) = 1$ et donc :

$$\tau_{10} = \frac{S_0}{4\alpha^2}. \quad (3.94e)$$

Alors, C_n et D_n se simplifient en :

$$C_n = 2S_0 \tau_{10}^{n+1} \int_0^\infty w^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta$$

$$D_n = 2 \frac{\tau_{10}^{n+1}}{S_0} \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta.$$

En prenant $t = 0$ dans (3.93a-c), la condition initiale s'écrit :

$$\omega_3^{(0)}(\bar{r},0) = S_0 e^{-\bar{r}^2} \sum_n [D_n \tau_{10}^{-n-1}] L_n(\bar{r}^2)$$

$$w^{(0)}(\bar{r},0) = \frac{1}{S_0} e^{-\bar{r}^2} \sum_n [C_n \tau_{10}^{-n-1}] L_n(\bar{r}^2)$$

$$v^{(0)}(\bar{r},0) = \frac{S_0}{2r} \left[[\tau_{10}^{-1} D_0] (1 - e^{-\bar{r}^2}) + e^{-\bar{r}^2} \sum_1^\infty [D_n \tau_{10}^{-n-1}] (L_{n-1}(\bar{r}^2) - L_n(\bar{r}^2)) \right].$$

Les expressions de C_0 , D_0 sont (Annexe A.13) :

$$C_0 = \frac{S_0^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{4\pi} \quad (3.97a)$$

$$D_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\alpha^2}. \quad (3.97b)$$

III.11.4. Simplification de cette représentation en série

Afin de simplifier et d'homogénéiser l'écriture de la solution précédente, on définit \tilde{C}_n et \tilde{D}_n par :

$$C_n = 2S_0 \tau_{10}^{n+1} \tilde{C}_n$$

$$D_n = 2 \frac{\tau_{10}^{n+1}}{S_0} \tilde{D}_n.$$

Les expressions de \tilde{C}_n et \tilde{D}_n sont donc :

$$\tilde{C}_n = \int_0^\infty w^{(0)}(\eta,0) L_n(\eta^2) \eta d\eta$$

$$\tilde{D}_n = \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\eta,0) L_n(\eta^2) \eta d\eta.$$

Les expressions de \tilde{C}_0 , \tilde{D}_0 sont :

$$\tilde{C}_0 = \frac{m_0}{2\pi}$$

$$\tilde{D}_0 = \frac{1}{2\pi}.$$

La solution (3.93) s'écrit :

$$\omega_3^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{S^{(0)}}{S_0} 2e^{-\eta^2} \sum_n \tilde{D}_n (1 + \tau_\alpha)^{-n-1} L_n(\eta^2) \quad (3.93d)$$

$$w^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{S_0}{S^{(0)}} 2e^{-\eta^2} \sum_n \tilde{C}_n (1 + \tau_\alpha)^{-n-1} L_n(\eta^2) \quad (3.93e)$$

$$v^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{1}{r} \left[\tilde{D}_0 (1 - e^{-\eta^2}) + e^{-\eta^2} \sum_1^\infty \tilde{D}_n (1 + \tau_\alpha)^{-n} (L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)) \right] \quad (3.93f)$$

avec :

$$\bar{\delta}(t) = \sqrt{\frac{S_0}{S^{(0)}}} \sqrt{1 + \tau_\alpha}$$

$$\eta = \frac{\bar{r}}{\bar{\delta}(t)}$$

$$\tau_\alpha = 4\alpha^2 \int_0^t \frac{S^{(0)}(t')}{S_0} dt'$$

$$\tilde{C}_n = \int_0^\infty w^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta$$

$$\tilde{D}_n = \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta.$$

A partir de l'expression de l'épaisseur du filament :

$$\bar{\delta}(t) = \sqrt{\frac{S_0}{S^{(0)}}} \sqrt{1 + \tau_\alpha},$$

on voit bien comment intervient l'étirement du filament et la diffusion.

Si on pose $t = 0$ dans ce champ solution, on obtient la condition initiale :

$$\omega_3^{(0)}(\bar{r}, 0) = 2e^{-\bar{r}^2} \sum_n \tilde{D}_n L_n(\bar{r}^2)$$

$$w^{(0)}(\bar{r}, 0) = 2e^{-\bar{r}^2} \sum_n \tilde{C}_n L_n(\bar{r}^2)$$

$$v^{(0)}(\bar{r}, 0) = \frac{1}{r} \left[\tilde{D}_0 (1 - e^{-\bar{r}^2}) + e^{-\bar{r}^2} \sum_1^\infty \tilde{D}_n (L_{n-1}(\bar{r}^2) - L_n(\bar{r}^2)) \right].$$

La solution écrite avec \tilde{C}_n et \tilde{D}_n est plus simple qu'avec C_n et D_n . Ting et Klein¹⁴ n'ont introduit que C_n et D_n .

III.11.5. Lien entre le développement en série de cette solution visqueuse et la solution non visqueuse

L'ordre principal du champ de vitesse d'un anneau tourbillon non visqueux ($\alpha = 0$) est donné par (3.79). Si on décompose la condition initiale sur les polynômes de Laguerre, on obtient :

$$\begin{aligned}\omega_3^{(0)}(\bar{r},0) &= 2e^{-\bar{r}^2} \sum_n \tilde{D}_n L_n(\bar{r}^2) \\ w^{(0)}(\bar{r},0) &= 2e^{-\bar{r}^2} \sum_n \tilde{C}_n L_n(\bar{r}^2) \\ v^{(0)}(\bar{r},0) &= \frac{1}{r} \left[\tilde{D}_0 (1 - e^{-\bar{r}^2}) + e^{-\bar{r}^2} \sum_1^\infty \tilde{D}_n (L_{n-1}(\bar{r}^2) - L_n(\bar{r}^2)) \right].\end{aligned}$$

Avec le profil initial écrit sous cette forme, on remarque que la solution non visqueuse (3.79) associée est identique à la solution visqueuse (3.93d-f) précédente dans laquelle on met $\alpha = 0$.

Ainsi, il suffit alors de prendre $\alpha \neq 0$ ou $\alpha = 0$ pour être dans le cas du fluide visqueux ou non visqueux.

III.11.6. Expressions de $C_v(t)$ et $C_w(t)$ à partir du développement en série de la solution

Au paragraphe III.7.1., nous avons obtenu l'équation (3.33a) d'évolution de la fibre centrale, dans laquelle apparaît les termes $C_v(t)$ et $C_w(t)$. Le changement de variable

$\eta = \frac{\bar{r}}{\bar{\delta}(t)}$ dans les expressions intégrales (3.33c-d) de $C_v(t)$ et $C_w(t)$, donne :

$$C_v(t) = +\frac{1}{2} - \ln(\bar{\delta}) + \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^\eta \xi \left(\bar{\delta}v^{(0)}(\bar{r}, t) \right)^2 d\xi - \ln(\eta) \right)$$

$$C_w(t) = -8\pi^2 \int_0^\infty \xi \left(\bar{\delta}w^{(0)}(\bar{r}, t) \right)^2 d\xi .$$

En se servant de la solution (3.93d-f) sous forme de série, on voit que les expressions de $C_v(t)$ et $C_w(t)$ sont de la forme suivante :

$$\boxed{C_v(t) = -\ln(\bar{\delta}) + \frac{1}{2}(1+\gamma - \ln 2) + 2\pi \sum_{n=1}^N \tilde{\alpha}_n (1+\tau_\alpha)^{-n} + 2\pi^2 \sum_{n=2}^N \tilde{\gamma}_n (1+\tau_\alpha)^{-n}}$$

$$\boxed{C_w(t) = -16\pi^2 \left(\frac{S_0}{S^{(0)}} \right)^3 \sum_{n=0}^N \tilde{w}_n (1+\tau_\alpha)^{-n-1}},$$

où $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\gamma}_n$, et \tilde{w}_n sont des constantes qui ne dépendent que des valeurs des constantes \tilde{C}_n et \tilde{D}_n du profil initial. Les expressions précises de ces constantes sont données dans l'annexe A.13.

A l'aide des expressions ci-dessus de $C_v(t)$ et $C_w(t)$, on a alors une équation (3.33a) d'évolution de la fibre centrale qui est découpée des équations (3.50a-b) d'évolution du champ de vitesse.

III.11.7. Expressions de $C_v(t)$ et $C_w(t)$ pour un anneau non visqueux

En se servant de la solution non visqueuse (3.79), on voit que les expressions de $C_v(t)$ et $C_w(t)$ sont de la forme suivante :

$$\boxed{C_v(t) = +C_v(0) - \ln(\bar{\delta})}$$

$$\boxed{C_w(t) = C_w(0) \left(\frac{S_0}{S^{(0)}} \right)^3},$$

avec

$$\boxed{C_v(0) = +\frac{1}{2} + \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^\eta \xi v_0^2(\xi) d\xi - \ln(\eta) \right)}$$

$$\boxed{C_w(0) = -8\pi^2 \int_0^\infty \xi w_0^2(\xi) d\xi}.$$

Si on connaît le profil initial, on peut alors calculer $C_v(0)$ et $C_w(0)$.

Le profil de vitesse orthoradiale d'un tourbillon à vorticité uniforme est :

$$\begin{aligned} v_0(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \xi \quad \text{si } \xi < 1 \\ &= \frac{1}{2\pi\xi} \quad \text{si } \xi > 1 \end{aligned}$$

et donc, pour cet anneau :

$$C_v(0) = +\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Le profil de vitesse orthoradiale d'un tourbillon creux est :

$$\begin{aligned} v_0(\xi) &= 0 \quad \text{si } \xi < 1 \\ &= \frac{1}{2\pi\xi} \quad \text{si } \xi > 1 \end{aligned}$$

et donc, pour cet anneau :

$$C_v(0) = +\frac{1}{2}.$$

Un anneau tourbillon creux dans un liquide est une bulle d'air torique qui a une circulation non nulle. Comme le champ de vitesse subit une discontinuité à la surface du tore, cette surface est une nappe de vorticité.

Pour un profil uniforme de vitesse axiale de la forme :

$$\begin{aligned} w_0(\xi) &= \frac{m_0}{\pi} \quad \text{si } \xi < 1 \\ &= 0 \quad \text{si } \xi > 1 \end{aligned},$$

on a :

$$C_w(0) = -4m_0^2.$$

III.11.8. Expression de la solution visqueuse sous la forme d'une intégrale de Green

Le champ de vitesse solution des équations (3.50a-c) se met également sous la forme suivante :

$$w^{(0)}(\bar{r}, t) = 2 \frac{S_0}{S^{(0)}(t)} \int_0^\infty w^{(0)}(\tilde{\xi}, 0) \frac{e^{-(\xi^2 + \tilde{\xi}^2)/\tau_\alpha}}{\tau_\alpha} I_0\left(\frac{2\xi\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi} \quad (3.98a)$$

$$\omega_3^{(0)}(\bar{r}, t) = 2 \frac{S^{(0)}(t)}{S_0} \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\tilde{\xi}, 0) \frac{e^{-(\xi^2 + \tilde{\xi}^2)/\tau_\alpha}}{\tau_\alpha} I_0\left(\frac{2\xi\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi}, \quad (3.98b)$$

où

$$\xi = \bar{r} \sqrt{\frac{S^{(0)}}{S_0}}$$

$$\tau_\alpha = 4\alpha^2 \int_0^t \frac{S^{(0)}}{S_0}(t') dt'$$

et où I_0 est la fonction de Bessel modifiée.

On a aussi :

$$v^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{2}{r} \int_0^\infty [\tilde{\xi} v_0(\tilde{\xi})] \frac{1}{\tau_\alpha} \left(\int_0^\xi e^{-(\eta^2 + \tilde{\xi}^2)/\tau_\alpha} I_0\left(\frac{2\eta\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) d\eta \right) d\tilde{\xi},$$

qui après intégration par parties devient :

$$v^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{2}{r} \frac{1}{\tau_\alpha^2} \int_0^\infty v_0(\tilde{\xi}) \int_0^\xi \left[\left(\eta I_0\left(\frac{2\eta\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) - \tilde{\xi} I_1\left(\frac{2\eta\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) \right) e^{-(\eta^2 + \tilde{\xi}^2)/\tau_\alpha} \right] d\eta d\tilde{\xi},$$

puis en réintégrant par parties :

$$v^{(0)}(\bar{r}, t) = -\frac{1}{r} \int_0^\infty v_0(\tilde{\xi}) \frac{e^{-(\xi^2 + \tilde{\xi}^2)/\tau_\alpha}}{\tau_\alpha} I_0\left(\frac{2\xi\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi}. \quad (3.98c)$$

III.11.9. Lien entre la forme intégrale de cette solution visqueuse et la solution non visqueuse

La limite quand t devient nul dans les expressions (3.98a-b) donne les conditions initiales $w^{(0)}(\bar{r}, t=0)$ et $\omega_3^{(0)}(\bar{r}, t=0)$. On a donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} w^{(0)}(\bar{r}, t) = w^{(0)}(\bar{r}, 0),$$

d'où l'on en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{S_0}{S(t)} \int_0^\infty w^{(0)}(\tilde{\xi}, 0) \frac{e^{-\left(\bar{r}^2 \frac{S^{(0)}}{S_0} + \tilde{\xi}^2\right)/\tau_\alpha}}{\tau_\alpha} I_0\left(\frac{2\bar{r}\sqrt{\frac{S^{(0)}}{S_0}}\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi} = w^{(0)}(\bar{r}, 0).$$

Comme :

$$\lim_{t \rightarrow 0} S^{(0)} = S_0,$$

il vient :

$$\lim_{t \rightarrow 0} 2 \int_0^\infty w^{(0)}(\tilde{\xi}, 0) \frac{e^{-(\bar{r}^2 + \tilde{\xi}^2)/\tau_\alpha}}{\tau_\alpha} I_0\left(\frac{2\bar{r}\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi} = w^{(0)}(\bar{r}, 0),$$

et comme :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tau_\alpha = 4\alpha^2 t,$$

on a :

$$\lim_{\tau_\alpha \rightarrow 0} 2 \int_0^\infty w^{(0)}(\tilde{\xi}, 0) \frac{e^{-(\bar{r}^2 + \tilde{\xi}^2)/\tau_\alpha}}{\tau_\alpha} I_0\left(\frac{2\bar{r}\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi} = w^{(0)}(\bar{r}, 0),$$

c'est à dire :

$$\lim_{\tau_\alpha \rightarrow 0} 2 \int_0^\infty w^{(0)}(\tilde{\xi}, 0) \frac{e^{-(\zeta^2 + \tilde{\xi}^2)/\tau_\alpha}}{\tau_\alpha} I_0\left(\frac{2\zeta\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi} = w^{(0)}(\zeta, 0) \quad \forall \zeta$$

(3.99)

On utilise alors cette relation avec $\zeta = \bar{r} \sqrt{\frac{S^{(0)}}{S_0}}$ pour montrer que :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_\alpha \rightarrow 0} w^{(0)}(\bar{r}, t) &= \lim_{\tau_\alpha \rightarrow 0} 2 \frac{S_0}{S(t)} \int_0^\infty w^{(0)}(\tilde{\xi}, 0) \frac{e^{-(\bar{r}^2 \frac{S^{(0)}}{S_0} + \tilde{\xi}^2)/\tau_\alpha}}{\tau_\alpha} I_0\left(\frac{2\bar{r}\sqrt{\frac{S^{(0)}}{S_0}}\tilde{\xi}}{\tau_\alpha}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi} \\ &= \frac{S_0}{S(t)} w^{(0)}\left(\bar{r} \sqrt{\frac{S^{(0)}}{S_0}}, 0\right) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la solution non visqueuse (3.79a).

La solution non visqueuse est identique à la solution visqueuse (3.98) précédente dans laquelle on met $\alpha = 0$.

III.12. La solution à l'ordre principale et sa représentation pour un anneau similaire

L'anneau *similaire* est défini comme l'anneau tel que seuls C_0 et D_0 sont non nuls. Il est intéressant, car tout anneau qui n'est pas similaire ne se comporte pas fondamentalement différemment d'un anneau similaire. En effet, on remarque sur la solution générale (3.93d-f) que dans le développement en séries les contributions non similaires ($n \neq 0$) ont le terme

$$(1 + \tau_\alpha)^{-n} = \left(1 + 4\alpha^2 \int_0^t \frac{S^{(0)}(t')}{S_0} dt' \right)^{-n}$$

en facteur. Or ce terme devient rapidement petit dans le temps et l'effet de non similarité disparaît.

III.12.1. Le système à l'ordre principal pour un anneau similaire

Au paragraphe III.7.1, nous avons obtenu l'équation (3.33) suivante d'évolution de la fibre centrale :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)}(s, t) = \vec{\mathbf{Q}}^*(s, t) + \frac{K^{(0)}(s, t)}{4\pi} \left[-\ln \varepsilon + \ln(S(t)) - 1 + C_v(t) + C_w(t) \right] \vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t), \quad (3.100a)$$

avec :

$$\vec{\mathbf{Q}}^*(s, t) = \vec{\mathbf{A}}(s, t) - \left[\vec{\mathbf{A}}(s, t) \bullet \vec{\boldsymbol{\tau}}^{(0)}(s, t) \right] \vec{\boldsymbol{\tau}}^{(0)}(s, t) \quad (3.100b)$$

$$\lambda^{(0)}(s, s', t) = \int_s^{s'} \sigma^{(0)}(s^*, t) ds^* \quad (3.100c)$$

$$\vec{\mathbf{A}}(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[-\sigma^{(0)}(s + s', t) \frac{\vec{\boldsymbol{\tau}}^{(0)}(s + s', t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s + s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t))}{|\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s + s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)|^3} - \frac{K^{(0)}(s, t)}{2} \frac{\vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t) \sigma^{(0)}(s + s', t)}{|\lambda^{(0)}(s, s', t)|} \right] ds'. \quad (3.100d)$$

Dans cette expression, $C_v(t)$ et $C_w(t)$ sont donnés par (3.33c-d) et sont des fonctions connues pourvu que l'on connaisse le champ de vitesse initial. Dans le cas spécial et intéressant de *l'anneau tourbillon similaire*, on a (Annexe A.13) :

$$v^{(0)} = \frac{1}{2\pi r} (1 - e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}\right)^2}) \quad (3.101a)$$

$$w^{(0)} = \frac{m_0}{\pi \bar{\delta}^2} \left(\frac{S_0}{S} \right)^2 e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}\right)^2} \quad (3.101b)$$

$$C_v(t) = \frac{1}{2} [1 + \gamma - \ln 2] - \ln(\bar{\delta}) \quad (3.102a)$$

$$C_w(t) = -2 \left(\frac{S_0}{S} \right)^4 \left(\frac{m_0}{\bar{\delta}} \right)^2 \quad (3.102b)$$

$$\bar{\delta}(t) = \left(\frac{S_0}{S} \right)^{1/2} \left(1 + 4\alpha^2 \int_0^t \frac{S(t')}{S_0} dt' \right)^{1/2} \quad (3.103)$$

$$m_0 = 2\pi \int_0^\infty r w^{(0)}(0, \bar{r}) d\bar{r} \quad (3.104)$$

où :

$$\bar{\delta} = \delta/\varepsilon.$$

Ici, γ est le nombre d'Euler et $S(t)$ la longueur de l'anneau tourbillon. Nous rappelons que m_0 est l'inverse du nombre de Swirl $S_w = 1/m_0$.

Le problème adimensionnel de l'anneau similaire dépend de la géométrie de la fibre initiale et des trois paramètres, qui sont le paramètre de viscosité α , l'épaisseur réduite initiale ε du filament et le nombre de Swirl $S_w = 1/m_0$, qui est l'inverse du débit axial initial.

Le champ de vitesse principal d'un anneau tourbillon non visqueux ($\alpha = 0$) est donné par (3.79). Il est intéressant de choisir le profil de vitesse initial suivant :

$$v_0^{(0)} = \frac{1}{2\pi r} (1 - e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}_0}\right)^2}) \quad (3.105a)$$

$$w_0^{(0)} = \frac{m_0}{\pi \bar{\delta}_0^2} e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}_0}\right)^2}, \quad (3.105b)$$

pour lequel, on dira qu'on a un *anneau non visqueux similaire*.

Avec ce profil initial, la solution non visqueuse (3.79) est identique à la solution similaire visqueuse (3.101) dans laquelle on met $\alpha = 0$.

Ainsi, avec ce choix de profil initial, on peut faire des calculs avec les expressions (3.101a-b) et il suffit alors de prendre $\alpha \neq 0$ ou $\alpha = 0$ pour être dans le cas du fluide visqueux ou non visqueux.

III.12.2. L'évolution d'un anneau similaire elliptique

Nous avons écrit un code en fortran (Annexe A.15) qui simule numériquement l'équation asymptotique (3.100a) du mouvement d'un anneau tourbillon similaire :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) = \vec{\mathbf{Q}}^*(s,t) + \frac{K(s,t)}{4\pi} [-\ln \varepsilon + \ln(S(t)) - 1 + C_v(t) + C_w(t)] \vec{\mathbf{b}}(s,t) \quad (3.100a)$$

La méthode numérique (Annexe A.15) est une différence finie spatiale, une méthode temporelle d'Euler implicite et une méthode de Simpson pour déterminer l'intégrale $\vec{\mathbf{Q}}^*(s,t)$ définie par (3.100b-d).

Nous avons trouvé numériquement les différentes étapes d'évolution d'un anneau tourbillon similaire non visqueux et sans débit axial qui initialement est dans un plan et est elliptique :

$$\vec{\mathbf{X}}_0(s) = (1 + r_0 \cos(2s))(\cos(s)\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos(s)\vec{\mathbf{e}}_2)$$

Le résultat de simulation est visible sur la figure 3.1 suivante. Ce cas a aussi été simulé par Liu, Tavantziz et Ting⁴ et nos simulations sont en accord avec les leurs. On voit sur cette simulation qu'initialement, là où la courbure est plus grande, le filament se déplace plus rapidement selon la binormale. Il s'avère que le mouvement est périodique et on obtient bien numériquement la même valeur de période que Liu, Tavantziz et Ting¹⁴. Au temps qui correspond à la demi-période, l'ellipse est dans une configuration inversée pour laquelle le grand axe a pris la valeur du petit axe et vice versa.

III.12.3. La représentation des champs pour un anneau similaire

On définit les grandeurs réduites :

$$r^* = \bar{r} / \bar{\delta} \quad (3.106a)$$

$$G = \frac{m_0}{\bar{\delta}} \left(\frac{S_0}{S} \right)^2, \quad (3.106b)$$

avec lesquelles, on peut donner les comportements en $r^* = 0$ zéro et *tracer des abaques* du champ de vitesse d'un anneau similaire valables à tout temps t et pour tout anneau de ce type.

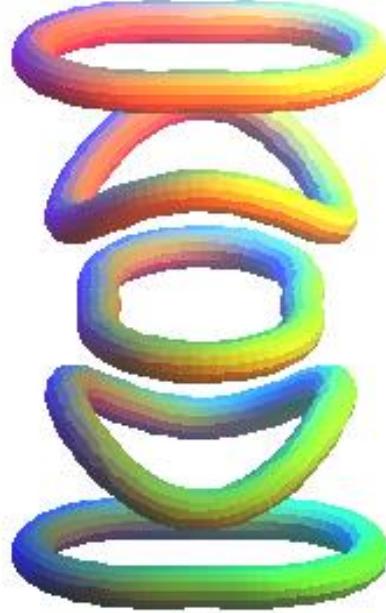


Figure 3.1: Evolution d'une ellipse

(Le mouvement va de bas en haut)

$$m_0 = 0, \varepsilon = 0.02, \alpha = 0, r_0 = 0.1$$

On a alors les comportements réduits suivant des champs près de $r^* = 0$:

$$p^{(0)}(r^*, t)\bar{\delta}^2 = -\frac{\ln(2)}{4\pi^2} + O(r^*)$$

$$v^{(0)}(r^*, t)\bar{\delta} = \frac{1}{2\pi}r^* - \frac{1}{4\pi}r^{*3} + O(r^{*5})$$

$$w^{(0)}(r^*, t)\frac{\bar{\delta}}{G} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}r^{*2} + \frac{1}{2\pi}r^{*4} + O(r^{*6})$$

$$\omega_2^{(0)}(r^*, t)\frac{\bar{\delta}^2}{G} = \frac{2}{\pi}r^* - \frac{2}{\pi}r^{*3} + \frac{1}{\pi}r^{*5} + O(r^{*7})$$

$$\omega_3^{(0)}(r^*, t)\bar{\delta}^2 = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}r^{*2} + \frac{1}{2\pi}r^{*4} + O(r^{*6})$$

$$\frac{\Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)}\bar{\delta}} = \frac{5}{16\pi}r^{*3} - \frac{1}{\pi}G^2r^{*3}$$

Ici, nous nous sommes servi de l'équation différentielle de $\Psi_{11}^{(1)}$ pour obtenir son développement en zéro, mais il aurait pu être obtenu à partir de l'expression intégrale de $\Psi_{11}^{(1)}$. Une étape intermédiaire lors de ce calcul est de prouver que l'on a :

$$v(r^*, t) H(r^*, t) \bar{\delta}^2 = \left(-4 \frac{G^2}{\pi^2} + \frac{5}{4\pi^2} \right) r^{*2} + O(r^{*4}).$$

Pour un anneau similaire, nous traçons (Figures 3.2 à 3.19) les différents champs sous

forme réduite à l'ordre 0 et 1. Le tracé de $\frac{\Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)} \bar{\delta}}$ est déterminé soit en calculant numériquement son expression intégrale (3.28b), soit par une méthode de Runge Kutta sur son équation différentielle (3.21a). Dans cette seconde méthode, on utilise les deux conditions aux limites pour r^* proche de zéro déterminées par :

$$\frac{\Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)} \bar{\delta}} = \frac{5}{16\pi} r^{*3} - \frac{1}{\pi} Gr^{*3},$$

et sa dérivée selon r^* .

S'il y a un écoulement potentiel, la limite en l'infini de $\Psi_{nj}^{(1)}$ ($n \neq 1$) peut ne pas être nulle, si bien que la solution de (3.21a) n'est plus identiquement nulle. Le développement en zéro de $\Psi_{nj}^{(1)}$ ($n \neq 1$) est alors fonction d'une certaine constante. On obtient alors le tracé de $\Psi_{nj}^{(1)}$ ($n \neq 1$) à l'aide de d'une méthode de Runge Kutta appliquée sous la forme *d'une méthode de tir*¹³, afin de satisfaire cette condition non nulle en l'infini.

Nous posons :

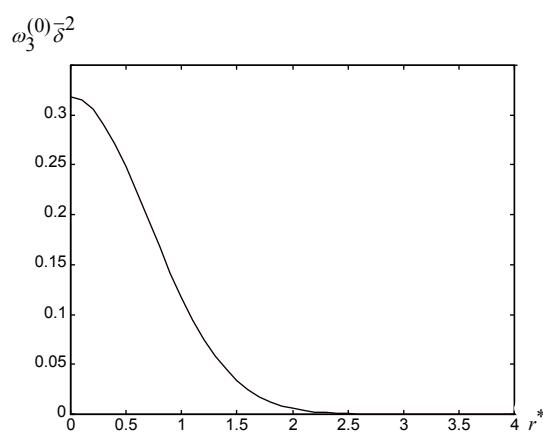
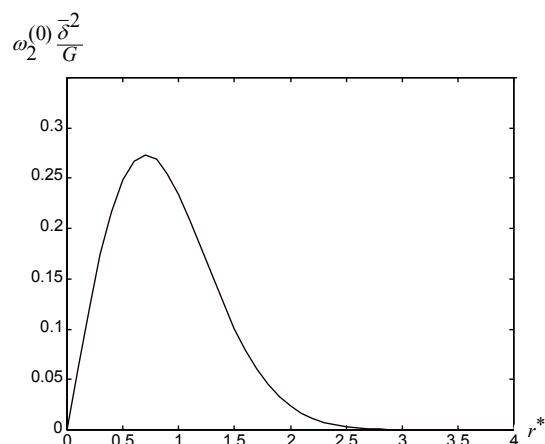
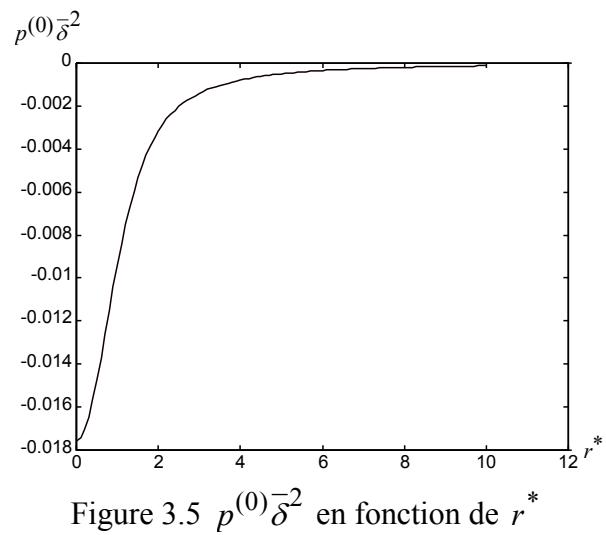
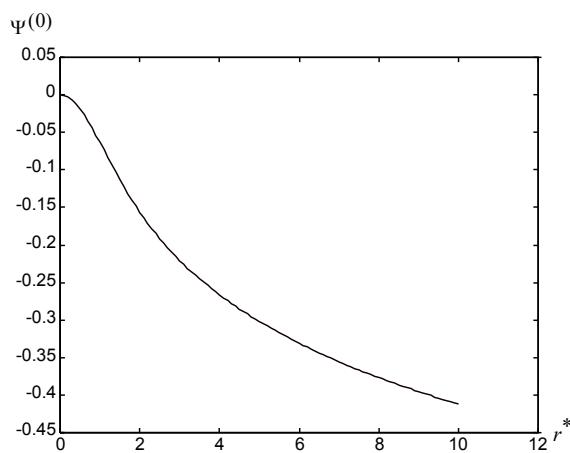
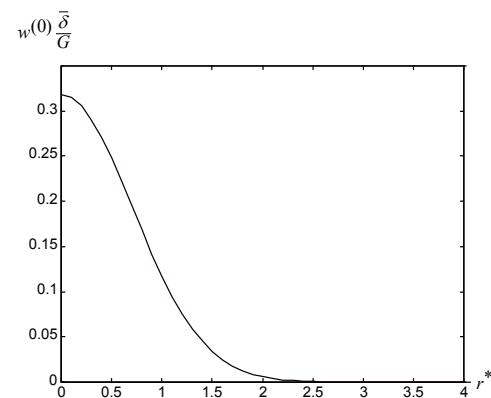
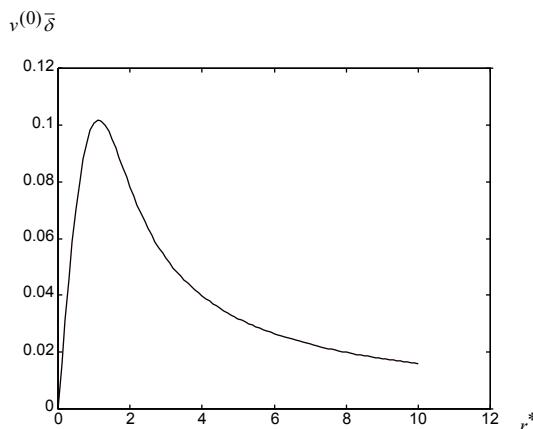
$$u_{so}^{(1)} = u^{(1)} \quad (3.107a)$$

$$v_{so}^{(1)} = -\frac{\partial \Psi^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} - v_c^{(1)} \quad (3.107b)$$

$$v_r^{(1)} = \bar{r} K^{(0)} v^{(0)} \cos \varphi. \quad (3.107c)$$

D'après la relation (3.18b), on a alors la décomposition suivante de la vitesse orthoradiale :

$$v^{(1)} = v_c^{(1)} + v_{so}^{(1)} + v_r^{(1)}. \quad (3.108)$$



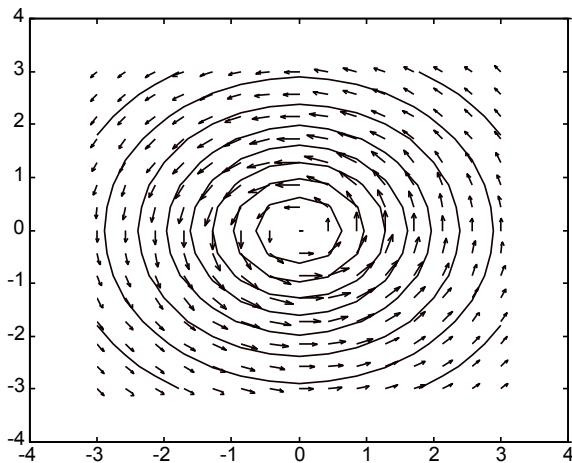


Figure 3.8 Champ $(u^{(0)}\bar{\delta}, v^{(0)}\bar{\delta})$
dans le plan (r^*, φ)

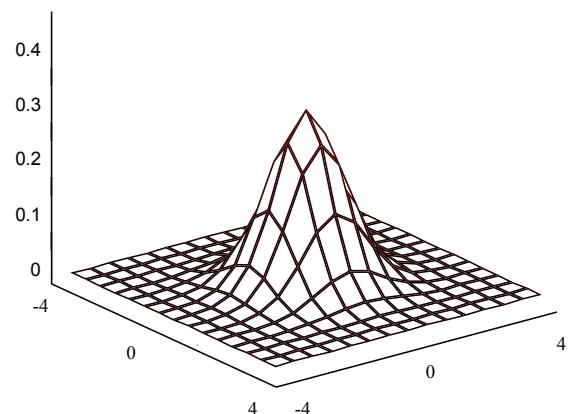


Figure 3.9 $w^{(0)}\frac{\bar{\delta}}{G}$ dans le plan (r^*, φ)

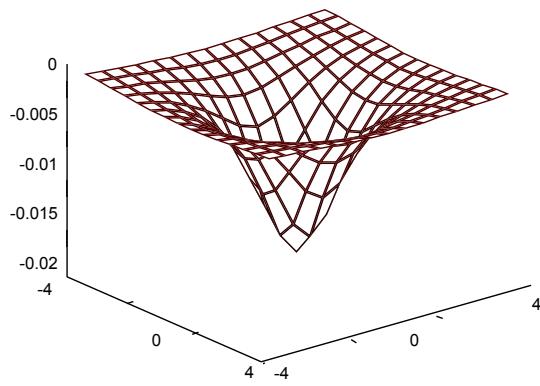


Figure 3.10 $p^{(0)}\bar{\delta}^2$ dans le plan (r^*, φ)

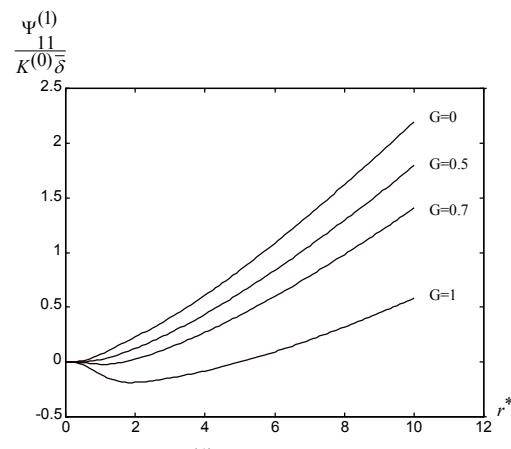


Figure 3.11 $\frac{\Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)}\bar{\delta}}$ en fonction de r^* et G

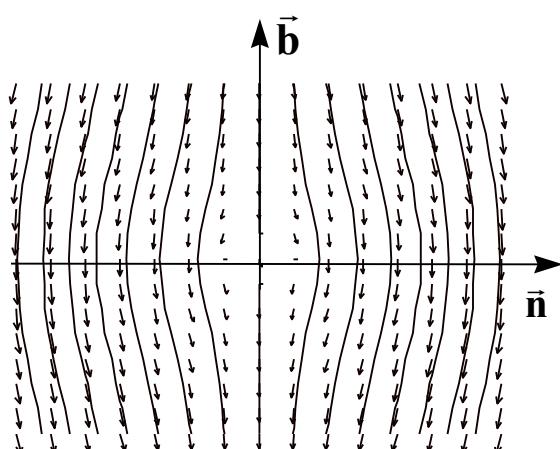


Figure 3.12 Champ $(\frac{u_{so}^{(1)}}{K^{(0)}}, \frac{v_{so}^{(1)}}{K^{(0)}})$ dans le plan
 (r^*, φ) pour $G=0$

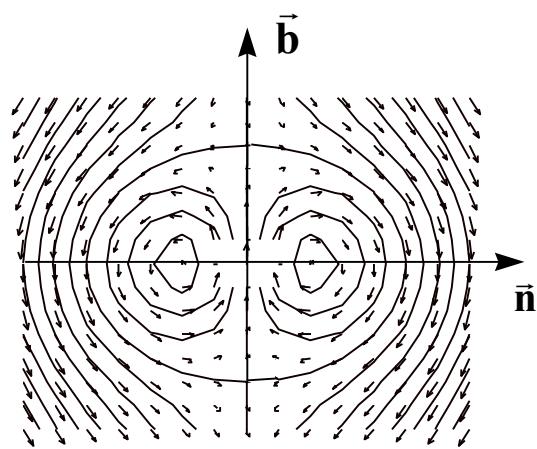


Figure 3.13 Champ $(\frac{u_{so}^{(1)}}{K^{(0)}}, \frac{v_{so}^{(1)}}{K^{(0)}})$ dans le plan
 (r^*, φ) pour $G=1$

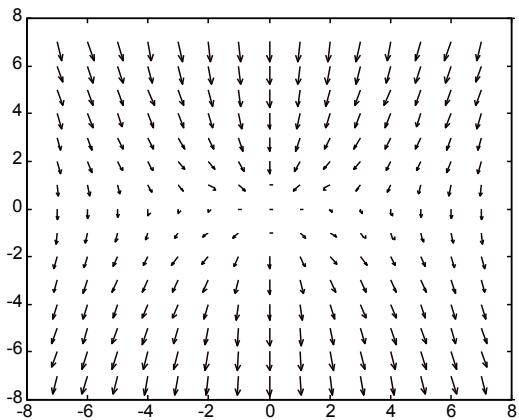


Figure 3.14 Champ $(\frac{u_{SO}^{(1)}}{K^{(0)}}, \frac{v_{SO}^{(1)} + v_r^{(1)}}{K^{(0)}})$ dans le plan (r^*, φ) pour $G=0$

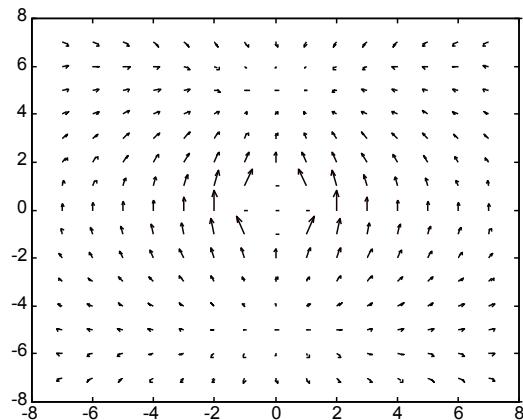


Figure 3.15 Champ $(\frac{u_{SO}^{(1)}}{K^{(0)}}, \frac{v_{SO}^{(1)} + v_r^{(1)}}{K^{(0)}})$ dans le plan (r^*, φ) pour $G=1$

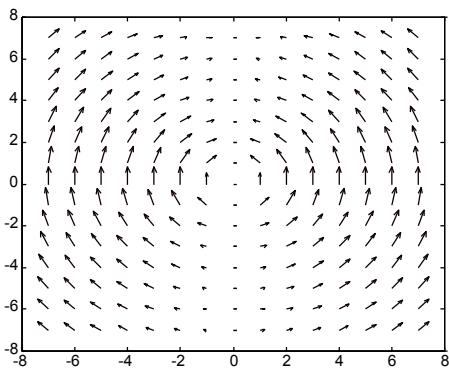


Figure 3.16 Champ $\frac{v_r^{(1)}}{K^{(0)}}$ dans le plan (r^*, φ)

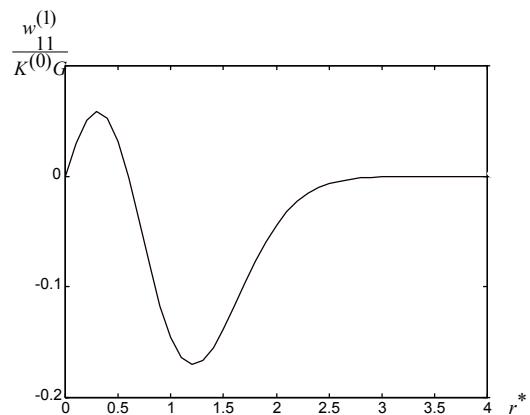


Figure 3.17 $\frac{w_{11}^{(1)}}{K^{(0)} G}$ en fonction de r^*
pour $G=1$

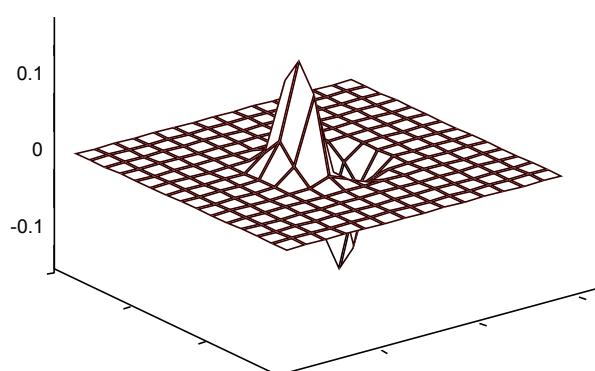


Figure 3.18 Champ $\frac{w_{11}^{(1)} \cos \varphi}{K^{(0)} G}$ dans le plan (r^*, φ) pour $G=1$

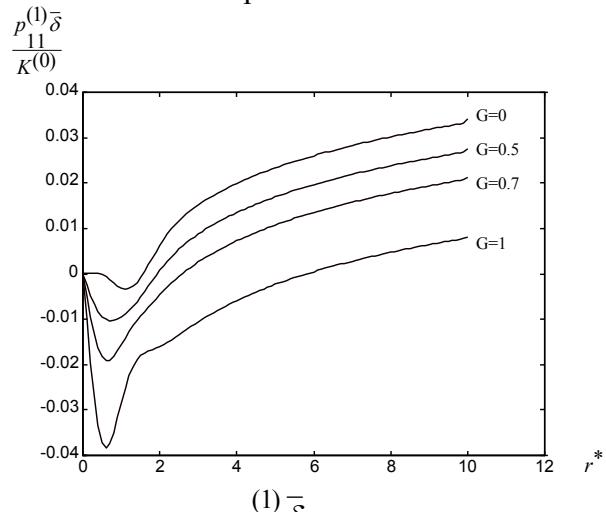


Figure 3.19 $\frac{p_{11}^{(1)} \bar{\delta}}{K^{(0)}}$ en fonction de r^*

Les champs bidimensionnels $(u_c^{(1)}, v_c^{(1)})$ et $(u_{so}^{(1)}, v_{so}^{(1)})$ sont à divergence nulle (l'indice so a été mis pour dire solénoïde), ce qui n'est pas le cas de $(0, v_r^{(1)})$. En effet, d'après les équations (3.18a-b), le champ de vitesse à l'ordre 1 n'est pas à divergence nulle. Il y a un terme source producteur de matière qui provient de l'ordre principal.

Les figures (3.11 à 3.19) donnent les allures de l'ordre 1 des champs d'un anneau similaire. C'est la première fois que des abaques de ce type sont donnés pour un anneau

similaire et $\frac{\Psi^{(1)}}{K^{(0)}\delta}$ n'avait jamais été tracée à notre connaissance.

III.13 Les termes logarithmiques

Lors du raccord asymptotique entre les problèmes extérieur et intérieur, qu'il soit effectué comme aux paragraphes III.5, III.6.3, III.8.3, ou sur une zone intermédiaire (Annexe A.8); il apparaît un terme en $\ln \varepsilon$ qui provient du problème extérieur. Avec nos choix (3.6-7) de développements, le problème intérieur n'apporte pas de terme en $\ln \varepsilon$ qui viendrait égaler ce terme extérieur. C'est pour cela que l'on a rejeté ce terme dans l'équation du mouvement (3.33a) de la fibre centrale sans se poser de question.

Cependant, si on veut être plus rigoureux, lorsqu'on fait un raccord asymptotique et qu'il apparaît une échelle que l'on n'avait pas mise initialement dans les développements ; il faut alors changer la forme des développements en prenant en compte cette information, afin d'avoir des développements avec lesquels il n'y a pas d'autres échelles qui apparaissent et qui permettent de bien réaliser le raccord asymptotique. Le raccord asymptotique permet donc de trouver les échelles à prendre dans le développement. Un calcul de développement asymptotique s'effectue généralement en deux étapes :

- calcul avec les développements initiaux et prédition des développements corrects à l'aide du raccord
- calculs et raccord correct avec les développements corrigés

Pour l'instant, pour notre problème, nous n'avons fait que la première étape.

Si on veut effectuer la deuxième étape, pour comprendre le terme en $\ln \varepsilon$ dans l'équation (3.33a) du mouvement de la fibre centrale et afin de satisfaire scrupuleusement la règle de raccord échelles par échelles, il faut introduire un temps $\tilde{t} = \ln(\frac{1}{\varepsilon})t$ dans les développements. Ainsi, si l'on adopte le développement à échelles multiples de \vec{X} suivant :

$$\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t, \tilde{t}) + \varepsilon \vec{\mathbf{X}}^{(1)}(s, t, \tilde{t}) + \dots, \quad (3.109)$$

alors :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial t} = -\ln(\varepsilon) \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial t} \quad (3.110)$$

et on arrive à satisfaire exactement le raccord. On a alors les *deux équations* suivantes pour l'équation d'évolution d'un filament tourbillon :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(0)}}{\partial \tilde{t}}(s, t, \tilde{t}) = \frac{K^{(0)}(s, t, \tilde{t})}{4\pi} \vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t, \tilde{t})} \quad (3.111a)$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(0)}}{\partial t}(s, t, \tilde{t}) = \vec{\mathbf{Q}}^* + \frac{K^{(0)}(s, t, \tilde{t})}{4\pi} [\ln(S) - 1 + C_v(t) + C_w(t)] \vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t, \tilde{t})} \quad (3.111b)$$

L'équation (111a) est l'équation (10) d'induction locale dont on a parlé en introduction.

Il s'avère que ces deux équations (3.111a-b) peuvent être combinées en *une seule* équation :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)}(s, t) = \vec{\mathbf{Q}}^* + \frac{K^{(0)}(s, t)}{4\pi} [-\ln \varepsilon + \ln(S) - 1 + C_v(t) + C_w(t)] \vec{\mathbf{b}}^{(0)} \quad (3.112)$$

Il faut aussi adopter des développements du champ de vitesse relatif avec des échelles en $\ln \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{V}}^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \vec{\mathbf{V}}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \vec{\mathbf{V}}^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \\ &\quad + \ln \varepsilon [\vec{\mathbf{V}}^{(01)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{V}}^{(12)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots] \end{aligned} \quad (3.113)$$

ou en projection :

$$\begin{aligned} u^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \bar{u} = \varepsilon^{-1} u^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \\ &\quad + \ln \varepsilon [u^{(01)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \varepsilon^1 u^{(12)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots] \\ v^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \bar{v} = \varepsilon^{-1} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \\ &\quad + \ln \varepsilon [v^{(01)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \varepsilon^1 v^{(12)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots] \\ w^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \bar{w} = \varepsilon^{-1} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \\ &\quad + \ln \varepsilon [w^{(01)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \varepsilon^1 w^{(12)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots] \end{aligned} \quad (3.114)$$

On n'a pas fait apparaître la dépendance en \tilde{t} de ces projections, car \tilde{t} n'est qu'un paramètre implicite muet dans les équations du mouvement et de conservation de la masse, et ceci même lorsqu'il y a des dérivées en temps. On pourrait alors écrire des équations pour les différents ordres logarithmiques (à l'aide du calculateur formel) et trouver les champs associés, afin d'avoir une solution rigoureuse vis-à-vis des termes logarithmiques.

III.14. Une évolution qui sort du domaine de validité du modèle ?

L'analyse asymptotique de ce chapitre a été formulée sous la condition que l'épaisseur effective $\delta(t)$ du filament soit bien inférieure aux autres longueurs caractéristiques de l'écoulement. Cependant, trois autres échelles de longueur peuvent être définies :

- le rayon de courbure minimum R_{\min} sur la ligne centrale \mathcal{C}
- le minimum de distance d_{ij} entre deux lignes centrales \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j , s'il y a plusieurs anneaux
- le minimum de distance d_{\min} entre deux points '*distincts*' de \mathcal{C} , où l'on définit que deux points de \mathcal{C} sont distincts si la longueur d'arc entre eux le long de \mathcal{C} est plus grande que πR_{\min} .

Pour que le développement que l'on fait ne tombe pas en défaut au temps t , il faut que ces trois longueurs soient de l'ordre de la grande longueur caractéristique L . Les trois conditions suivantes doivent donc être satisfaites :

$$\left(\frac{R_{\min}}{\delta} \right)_i \gg 1 \quad i = 1 \dots N \quad (3.115a)$$

$$\left(\frac{d_{\min}}{2\delta} \right)_i \gg 1 \quad i = 1 \dots N \quad (3.115b)$$

$$\left(\frac{d_{ij}}{\delta_i + \delta_j} \right)_i \gg 1 \quad i, j = 1 \dots N \quad i \neq j \quad (3.115c)$$

où N est le nombre d'anneaux.

Si le modèle tombe en défaut au bout d'un certain temps, il faut refaire une analyse des différentes échelles du problème dans sa nouvelle configuration pour en cerner les différentes régions asymptotiques et déterminer la forme des développements asymptotiques à prendre dans ces différentes régions. Il faut faire un raccord asymptotique entre ces régions et on peut parfois être obligé de recourir à une résolution numérique dans l'une de ces régions.

III.15. Interaction du plusieurs filaments et filament dans un écoulement potentiel

III.15.1. Interaction de plusieurs filaments

Lorsque l'on a plusieurs filaments, on doit écrire une équation d'évolution de la fibre centrale de chacun des filaments. L'obtention de l'équation d'évolution d'un des filaments (que l'on indice ici par i) se déroule comme aux paragraphes III.6 et III.7, si ce n'est que dans le paragraphe III.6.3, à l'expression de la limite proche du filament du développement extérieur de la vitesse d'auto-induction du filament se rajoute celle du développement extérieur de la vitesse due aux autres filaments :

$$\vec{\mathbf{Q}}_2(s,t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nbra} \Gamma_j \oint_{C_j} \frac{\vec{\mathbf{X}}_j - \vec{\mathbf{X}}}{\left| \vec{\mathbf{X}}_j - \vec{\mathbf{X}} \right|^3} \wedge \vec{\mathbf{X}}_{j,s} ds + O(\varepsilon) + O(r), \quad (3.116a)$$

où $nbra$ est le nombre d'anneaux. Cette vitesse ne dépend que de s et t et se retrouve avec le

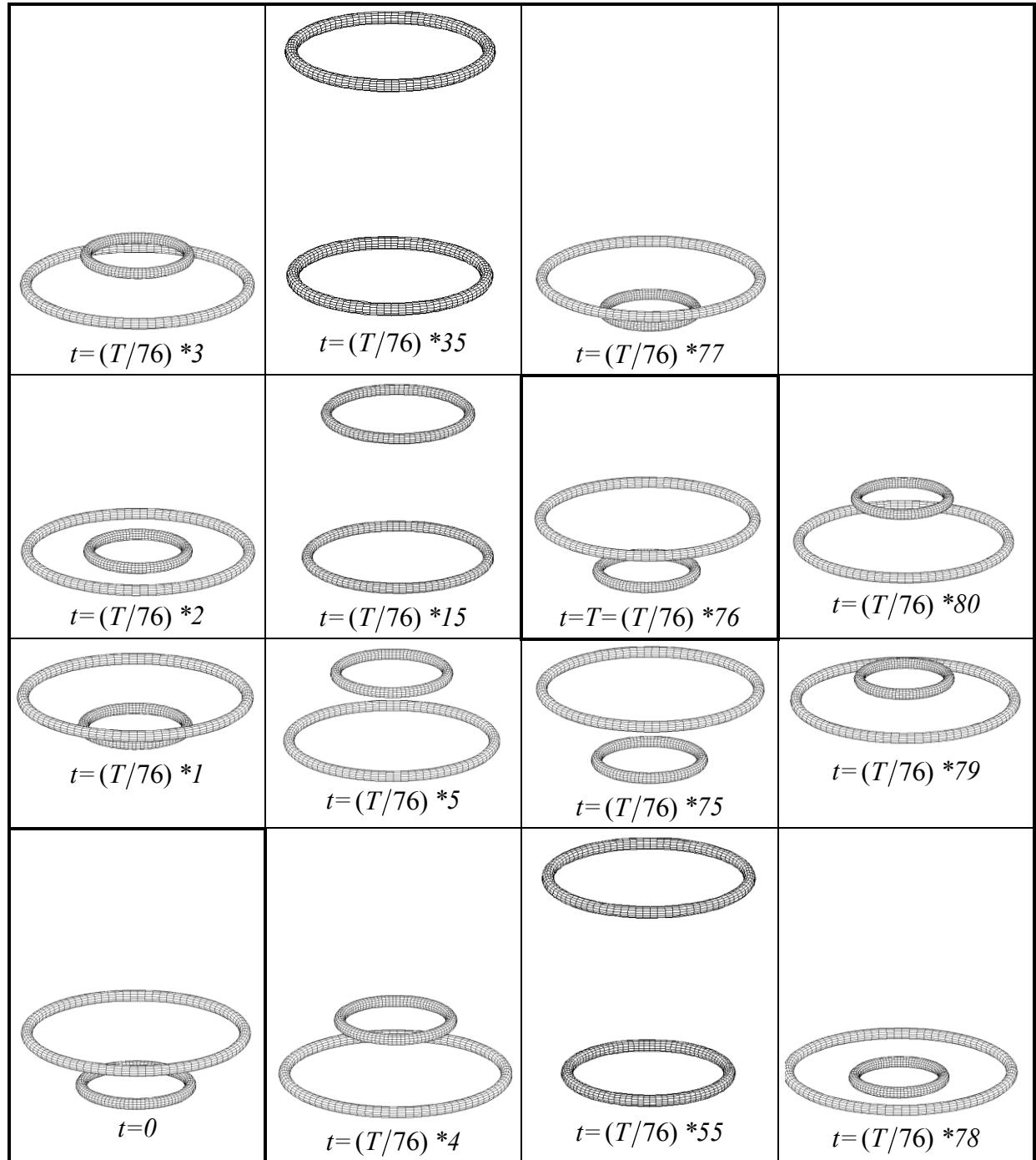
terme $\overset{\bullet}{\vec{\mathbf{X}}}^{(0)}(s,t)$ dans les conditions aux limites en l'infini.

Lorsque l'on a plusieurs filaments, pour obtenir l'équation d'évolution d'un des filaments, il suffit donc de rajouter le terme

$$\vec{\mathbf{Q}}_2(s,t) - \left[\vec{\mathbf{Q}}_2(s,t) \bullet \vec{\tau}^{(0)}(s,t) \right] \vec{\tau}^{(0)}(s,t)$$

dans le terme $\vec{\mathbf{Q}}^*(s,t)$ de l'équation (3.100a) du filament tout seul.

Sur les figures 3.20 et 3.21, nous donnons les résultats de deux simulations numériques des équations d'évolution de deux anneaux tourbillons. La première (figure 3.20) est une simulation dite de *saute mouton*, dans laquelle un anneau circulaire est placé derrière un autre anneau circulaire de plus gros rayon et de même intensité. Au début, le petit anneau se rapproche du grand en diminuant de rayon, alors que le grand anneau (qui se déplace aussi) voit encore son rayon augmenter. Le petit rattrape alors le grand et passe à travers. A partir de cet instant, le petit anneau qui va plus vite se trouve devant et voit son rayon augmenter, alors que le rayon du grand diminue. A un moment, on se retrouve dans la même configuration qu'au début, mais avec des anneaux qui ont échangé leur place et leur rayon. Puis, l'histoire recommence.

Figure 3.20 : Saute mouton de deux anneaux. Période $T=82.08$

$$m_0 = 0, \varepsilon = 0.02, \alpha = 0, R_1 = 2R_2$$

La deuxième simulation (figure 3.21) correspond à l'évolution de deux anneaux tourbillons enlacés. Initialement, les deux anneaux ont la même intensité, le même diamètre, sont dans deux plans perpendiculaires et passent chacun par le centre de l'autre. Ils évoluent comme on peut le voir sur la figure en s'éloignant l'un de l'autre tout en restant enlacés. Il

existe cependant un point sur chacun des deux anneaux qui se rapprochent de plus en plus l'un de l'autre. Au temps réduit $t=0.534*4$, nous avons arrêté la simulation, car les deux filaments sont à une distance de l'ordre de d'épaisseur réduite ε de nos anneaux, qui est notre petit paramètre. Le développement asymptotique tombe alors en défaut, comme il a été précisé au paragraphe III.14. Dans ces deux exemples, la longueur caractéristique d'adimensionnalisation qui a été choisie est le rayon des anneaux tourbillons.

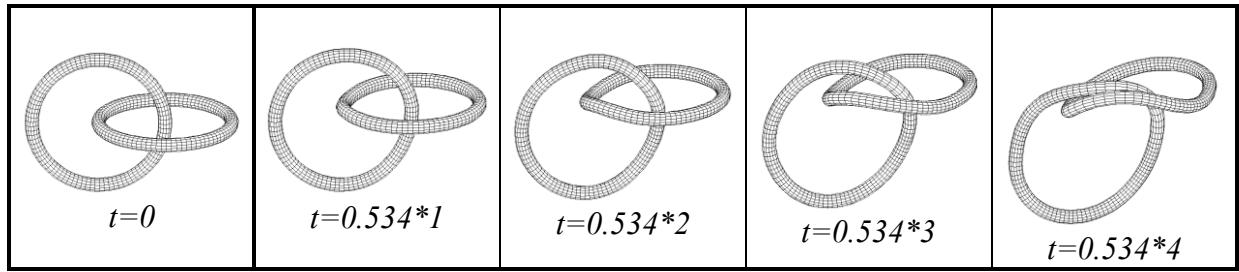


Figure 3.21: Evolution de deux anneaux enlacés

$$m_0 = 0, \varepsilon = 0.02, \alpha = 0, R_1 = R_2$$

III.15.2. Filament dans un écoulement potentiel

On considère un filament dans un écoulement potentiel :

$$\vec{v}_{\text{Back}} = \text{grad} \varphi.$$

Si la limite près du filament du développement extérieur de cet écoulement sur les coordonnées locales au filament est de la forme :

$$\vec{v}_{\text{Back}} = \vec{v}_{\text{Back}} [\vec{X}(s, t)] + O(\varepsilon) + O(r), \quad (3.117a)$$

alors, tout se passe comme lorsqu'il y a plusieurs anneaux et désormais c'est le terme :

$$\vec{Q}_2(s, t) = \vec{v}_{\text{Back}} [\vec{X}(s, t)], \quad (3.116b)$$

qui se rajoute dans le terme $\vec{Q}^*(s, t)$ de l'équation (3.100a) d'évolution du filament.

Si la limite proche du filament du développement extérieur de cet écoulement sur les coordonnées locales au filament est de la forme :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{Back}}(r \rightarrow 0) &= \vec{v}_{\text{Back}}(\vec{X}(s, t)) + O(\varepsilon) + O(r) \\ &= \sum_0^n [u_{n1\text{Back}}(s, t) \cos n\varphi + u_{n2\text{Back}}(s, t) \sin n\varphi] \vec{r} \\ &\quad + \sum_0^n [v_{n1\text{Back}}(s, t) \cos n\varphi + v_{n2\text{Back}}(s, t) \sin n\varphi] \vec{\theta} \end{aligned}$$

$$+ \sum_0^n [w_{n1} \text{Back}(s, t) \cos n\varphi + w_{n2} \text{Back}(s, t) \sin n\varphi] \vec{\tau}, \quad (3.117b)$$

$$+ O(\varepsilon) + O(r)$$

alors les conditions aux limites en l'infini des équations aux dérivées partielles sont changées en conséquence, ce qui modifie la forme du champ de vitesse à l'ordre 1. Si on note :

$$(\vec{v}_{\text{Back}}[\vec{X}(s, t)])_c,$$

la partie axisymétrique de $\vec{v}_{\text{Back}}[\vec{X}(s, t)]$, alors c'est le terme :

$$\vec{Q}_2(s, t) = (\vec{v}_{\text{Back}}[\vec{X}(s, t)])_c, \quad (3.116c)$$

qui se rajoute désormais dans le terme $\vec{Q}^*(s, t)$ de l'équation (3.100) d'évolution du filament.

III.15.3. Filament dans un écoulement de rotationnel

On considère un filament placé initialement dans un écoulement rotationnel $\vec{\Omega}_{0 \text{Back}}(r, \varphi, s)$ d'ordre 1. L'écoulement rotationnel $\vec{\Omega}_{\text{Back}}$ va alors évoluer dans le temps. C'est une inconnue du problème qui dépend de ε . Il a donc un développement du type :

$$\vec{\Omega}_{\text{Back}}(r, \varphi, s, t, \varepsilon) = \vec{\Omega}_{\text{Back}}^{(0)}(r, \varphi, s, t) + \varepsilon^1 \vec{\Omega}_{\text{Back}}^{(1)}(r, \varphi, s, t) + \dots \quad (3.118)$$

Le développement extérieur du champ de vorticité est alors :

$$\vec{\omega}^{\text{out}}(r, \varphi, s, t, \varepsilon) = \vec{\Omega}_{\text{Back}}^{(0)}(r, \varphi, s, t) + \varepsilon^1 \vec{\Omega}_{\text{Back}}^{(1)}(r, \varphi, s, t) + \dots \quad (3.119a)$$

et son développement intérieur est :

$$\vec{\omega}^{\text{inn}}(\bar{r}, \varphi, s, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{\omega}^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \vec{\omega}^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \quad (3.119b)$$

Le raccord asymptotique nous donne :

$$\vec{\omega}^{(2)}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, s, t) = \vec{\Omega}_{\text{Back}}^{(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, s, t). \quad (3.120)$$

Par rapport au problème d'un anneau dans un écoulement potentiel, ici il faut résoudre l'équation du tourbillon pour le développement extérieur de la vorticité et celui-ci est couplé avec le problème intérieur. A l'aide du développement extérieur de l'équation de Biot et Savart, le développement extérieur du champ de vitesse à l'ordre 1 est la superposition du champ induit par un filet tourbillon et du champ $\vec{v}_{\text{Back}}^{(0)}$ induit par l'écoulement rotationnel extérieur $\vec{\Omega}_{\text{Back}}^{(0)}$. La limite près du filament de ce développement est donc la limite habituelle due à un filet tourbillon à laquelle se rajoute :

$$\vec{v}_{\text{Back}}^{(0)}(r \rightarrow 0) = \vec{v}_{\text{Back}}^{(0)}(\vec{X}(s,t)).$$

C'est donc le terme :

$$\vec{Q}_2(s,t) = \vec{v}_{\text{Back}}^{(0)}(\vec{X}(s,t)), \quad (3.116d)$$

qui se rajoute désormais dans le terme $\vec{Q}^*(s,t)$ de l'équation (3.100) d'évolution du filament.

Lorsqu'un anneau tourbillon est placé dans un écoulement de cisaillement, on est dans la situation décrite par ce paragraphe.

III.16. Conclusion

Dans ce chapitre, on trouve l'équation d'évolution de la fibre centrale d'un anneau tourbillon de faible épaisseur qui a une structure normale simple. On donne aussi la forme du champ de vitesse relatif à l'ordre principal. Nous avons décrit la résolution du problème de couche limite autour de la fibre centrale du filament par un développement asymptotique raccordé des équations de Navier-Stokes. Ce chapitre illustre donc le déroulement de la méthode qui a été présentée au chapitre I.

Nous avons donné également un système d'équations complet et fermé pour l'ordre 1 du champ de vitesse et des exemples de déplacement de filaments similaires, ainsi que le tracé du champ de vitesse associé. Pour finir, on a généralisé l'équation d'évolution de la fibre centrale pour plusieurs filaments ou pour un filament dans un écoulement potentiel ou dans un écoulement rotationnel d'ordre 1.

III.17. Bibliographie du chapitre III

1. CALLEGARI,A.J. et TING,L. 1978 Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1), 148-175
2. FRAENKEL,L.E. 1970 On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid, *Proc. Roy. Soc. London. A* **316**, 29-62
3. FUKUMOTO,Y. et MIYAZAKI,T. 1991 Three dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity, *J. Fluid Mech.* **222**, 369-416
4. GENOUX,P. et CHAHINE,L. 1983 Equilibre statique et dynamique d'un tore de vapeur tourbillonnaire, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* **2** (5), 829-857
5. KLEIN,R. et TING,L. 1992 Vortex filaments with axial core structure variation, *Appl.Math.Lett.* **5**, 99-103
6. KLEIN,R. et KNIO,O.M. 1995 Asymptotic vorticity structure and numerical simulation of slender vortex filaments, *J. Fluid Mech.* **284**, 257-321
7. KLEIN,R. et KNIO,O.M. et TING,L. 1996 Representation of core dynamics in slender vortex simulations, *Phys. Fluids* **8** (9), 2415-2425
8. LOUGH,M.F. 1994 On the dynamics of ultra-thin vortex filaments, *Phys. Fluids* **6** (5), 1745-1751
9. LUNDGREN,T.S. 1982 Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, *Phys. Fluids* **25** (12), 2193-2203
10. MOFFATT,H.K. et KIDA,S. et OHKITANI,K. 1994 Stretched vortices-the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics, *J. Fluid Mech.* **259**, 241-264
11. MOORE,D.W. et SAFFMAN,P.G. 1972 The motion of a vortex filament with axial flow, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **226** (272), 403-429
12. SAFFMAN,P.G. 1970 The velocity of viscous vortex rings, *Studies Appl. Math.* **49**, 371-380
13. TING,L. et TUNG,C. 1965 Motion and decay of a vortex in a non-uniform Stream, *The Physics of Fluids* **8** (6), 1039-1051
14. TING,L. et KLEIN,R. : 1991 Viscous Vortical Flows,(Monograph),*Lecture Notes in Physics*,374, Springer
15. WIDNALL,S.E. et BLISS,D.B. et ZALAY,A. 1971 Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington*, 305-338

Chapitre IV

LES MÉTHODES DE COUPURE ET LEUR JUSTIFICATION

Dans ce chapitre, nous présentons différentes méthodes de coupure. Ce sont des méthodes ad hoc qui donnent des équations d'évolutions de la fibre centrale d'un filament tourbillon. Les intégrales qui interviennent dans ces méthodes sont singulières par rapport au petit paramètre qui est la longueur de coupure (ou de cut-off). Nous déterminons les développements asymptotiques de ces intégrales en utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés d'intégrales singulières. Pour les différentes méthodes de coupure envisagées, la comparaison de ces développements avec l'équation d'évolution d'un anneau tourbillon de Callegari et Ting donne les expressions des longueurs de coupure en fonction de la structure et de l'épaisseur du filament. Comme on utilise l'équation de Callegari et Ting, on considère implicitement que le filament ne possède pas de petites longueurs d'ondes et a une structure normale simple au sens de ce qui a été défini au chapitre I.

IV.1. Les différentes méthodes de coupure

Dans la méthode de Burgers^{4,6} l'équation d'évolution de la fibre centrale d'un filament est :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus [s - s_c, s + s_c]} \frac{\sigma(s', t) \vec{\tau}(s', t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}(s, t) - \vec{\mathbf{X}}(s', t))}{|\vec{\mathbf{X}}(s, t) - \vec{\mathbf{X}}(s', t)|^3} ds'. \quad (4.1a)$$

La variable inconnue s_c est un petit paramètre introduit pour éviter la singularité logarithmique qui fait diverger l'intégrale de Biot et Savart d'un filet tourbillon, qui

correspond à avoir $s_c = 0$ dans l'intégrale (4.1a). Cette méthode a été appelée la '*méthode de coupure*' par Crow⁴, nom que nous généralisons à toutes les méthodes qui introduisent un petit paramètre ad hoc s_c , dit *longueur de coupure*, pour éviter la singularité logarithmique.

Thomson²⁰ utilise l'équation d'évolution de la fibre centrale d'un filament donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\mathbf{v}}_{\text{Dirac}}(r=s_c, s, t) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(s',t) \vec{\tau}(s',t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}(s,t) + s_c \vec{\mathbf{r}}(\varphi, s, t) - \vec{\mathbf{X}}(s',t))}{|\vec{\mathbf{X}}(s,t) + s_c \vec{\mathbf{r}}(\varphi, s, t) - \vec{\mathbf{X}}(s',t)|^3} ds' d\varphi.\end{aligned}. \quad (4.1b)$$

La singularité logarithmique peut aussi être éliminée d'une façon ad hoc en utilisant^{12,15,16,17,19} l'équation suivante d'évolution de la fibre centrale d'un filament :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(s',t) \vec{\tau}(s',t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}(s,t) - \vec{\mathbf{X}}(s',t))}{[(\vec{\mathbf{X}}(s,t) - \vec{\mathbf{X}}(s',t))^2 + s_c^2]^{3/2}} ds', \quad (4.1c)$$

ou bien encore¹¹ l'équation :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(s',t) \vec{\tau}(s',t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}(s,t) - \vec{\mathbf{X}}(s',t))}{|\vec{\mathbf{X}}(s,t) - \vec{\mathbf{X}}(s',t)|^3} f\left(\frac{|\vec{\mathbf{X}}(s,t) - \vec{\mathbf{X}}(s',t)|}{s_c}\right) ds', \quad (4.1d)$$

où la fonction $f(\chi)$ est choisie telle que $f(\chi) \rightarrow 1$ quand $\chi \rightarrow \infty$. Le choix :

$$f(\chi^2) = \frac{\chi^3}{(\chi^2 + 1)^{3/2}}, \quad (4.2a)$$

de la méthode d'éléments de vorticité de Moore et Saffman¹¹ (VEM1), redonne l'équation (4.1c). Le choix :

$$f(\chi^2) = \frac{-2\chi^2 + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\chi^2) e^{\chi^4}}{\sqrt{\pi} e^{\chi^4}}, \quad (4.2b)$$

où erf est la fonction erreur est celui de la méthode d'éléments de vorticité de Leonard¹¹ (VEM2).

Si on note $\vec{\mathbf{Cut}}(s, t, s_c)$ le membre de droite des expressions (4.1) précédentes, toutes ces méthodes de coupure s'écrivent de façon générique sous la forme suivante :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) = \vec{\mathbf{Cut}}(s, t, s_c). \quad (4.3)$$

Comme on peut décrire la fibre centrale avec différents choix du paramétrage s , un meilleur choix que le précédent est de choisir l'abscisse s telle que :

$$\bullet \quad \vec{\dot{X}}(s, t) \bullet \vec{\tau} = 0. \quad (4.4)$$

Avec ce choix de paramétrage de la fibre centrale, les méthodes de coupure (4.3) s'écrivent de façon générique :

$$\bullet \quad \vec{\dot{X}}(s, t) = \vec{\text{Cut}}(s, t, s_c) - \left[\vec{\text{Cut}}(s, t, s_c) \bullet \vec{\tau}(s, t) \right] \vec{\tau}(s, t). \quad (4.5)$$

Dans toutes ces méthodes, la longueur de coupure s_c est un paramètre inconnu qui doit être spécifié, puisqu'il n'est pas dans les données initiales de description du problème d'évolution du filament tourbillon. Ce paramètre est lié à l'épaisseur ε du filament et le choix qui est couramment fait est de supposer que l'on a simplement :

$$s_c = \varepsilon. \quad (4.6)$$

Ainsi, l'équation d'évolution de la fibre centrale d'un filament tourbillon d'épaisseur ε , donnée par ces méthodes de coupure, est :

$$\bullet \quad \vec{\dot{X}}(s, t) = \vec{\text{Cut}}(s, t, \varepsilon) - \left[\vec{\text{Cut}}(s, t, \varepsilon) \bullet \vec{\tau}(s, t) \right] \vec{\tau}(s, t). \quad (4.7)$$

Cette équation a été *postulée* de façon ad hoc de façon à éviter de *résoudre* le problème de couche limite traité au chapitre III. Il se pose naturellement la question du rapport qu'il peut y avoir entre cette équation (4.7) et l'équation (3.33a) de Callegari et Ting que l'on rappelle dans le prochain paragraphe.

IV.2. L'équation d'évolution de Callegari et Ting

L'équation d'évolution (3.33a) de la fibre centrale d'un filament tourbillon d'épaisseur ε obtenue au paragraphe III.7.1 du chapitre précédent par résolution du problème de couche limite est la suivante :

$$\bullet \quad \vec{\dot{X}}(s, t) = \vec{\text{Q}}^*(s, t) + \frac{K(s, t)}{4\pi} \left[-\ln \varepsilon + \ln(S(t)) - 1 + C_v(t) + C_w(t) \right] \vec{\text{b}}(s, t), \quad (4.8)$$

où $\vec{\text{Q}}^*(s, t)$ est donné par les formules (3.100b-d), et $C_v(t)$ et $C_w(t)$ sont liés au champ de vitesse à l'ordre principal par leurs expressions (3.33c-d). Ce champ de vitesse satisfait les équations d'évolution (3.50a-b), dont les solutions sont données par les formules (3.79) pour un fluide parfait et par les formules (3.93) pour un fluide visqueux. Le terme $\vec{\text{Q}}^*(s, t)$ est un

terme intégral non local qui ne dépend que de la géométrie de la fibre centrale. Les termes $C_v(t)$ et $C_w(t)$ sont des termes locaux qui proviennent de la structure interne du filament et sont liés au comportement et à l'évolution locale du champ de vitesse dans cette zone intérieure. Pour *un anneau tourbillon similaire*, $C_v(t)$ et $C_w(t)$ sont des fonctions connues, qui sont uniquement liées à la longueur $S(t)$ du filament par les formules (3.102a-b) et (3.103).

IV.3. Justification des méthodes de coupure

IV.3.1. Développement des méthodes de coupure

Toutes les méthodes de coupure (4.5) introduisent un petit paramètre s_c , pour lequel les intégrales des méthodes de coupure (appelées aussi *intégrales de coupure*) sont singulières. Nous pouvons développer ces intégrales par rapport à s_c jusqu'à l'ordre 1 en utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés d'intégrales singulières que l'on a déjà présentée au paragraphe II.4. Les intégrales de coupure (4.1) que l'on doit développer ici par rapport à s_c ressemblent beaucoup à l'intégrale (2.8b), que l'on a développée par rapport à r .

IV.3.2. Comparaisons du développement avec l'équation de Callegari et Ting

On compare alors le développement obtenu de l'équation d'évolution du filament de la méthode de coupure avec l'équation d'évolution (4.8) de Callegari et Ting. Cette dernière équation est un développement selon l'épaisseur réduite du filament ε jusqu'à l'ordre 1.

On montre alors que, à l'ordre 1, les méthodes de coupure (4.5) sont équivalentes à l'équation asymptotique (4.8) de Callegari et Ting, si la longueur de coupure s_c est choisie telle que :

$$\int_s^{s+s_c(s,t,\varepsilon)} \sigma(s^*) ds^* = \varepsilon e^{N - C_v(t) - C_w(t)}, \quad (4.9)$$

où les valeurs du réel N dépendent de la méthode de coupure utilisée et sont données dans la table 4.1. pour différentes méthodes.

Nom de la méthode de coupure	N
Burgers	1- $\ln 2$
Thomson	$1/2$
Rosenhead	0
VEM1	0
VEM2	1- $0.009122-\ln 2$

Table 4.1 : Valeurs de N selon la méthode de coupure

La longueur :

$$l_c(t, \varepsilon) = \int_s^{s+s_c(s,t,\varepsilon)} \sigma^{(0)}(s^*, t) ds^* \quad (4.10)$$

est la longueur de coupure pour un paramétrage qui est une longueur d'arc. Comme la longueur de coupure $s_c(s, t, \varepsilon)$ est de l'ordre de ε , l'équation (4.10) s'écrit :

$$l_c(t, \varepsilon) = \sigma^{(0)}(s, t) s_c(s, t, \varepsilon)$$

et la relation (4.9) se simplifie en :

$$s_c(s, t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{1}{\sigma(s, t)} e^{N - C_V(t) - C_W(t)}. \quad (4.11)$$

Cette relation corrige donc le lien élémentaire (4.6) entre la longueur de coupure et l'épaisseur du filament et on a le résultat suivant :

L'équation ad hoc (4.5) d'évolution du filament est corrigée par le système de deux équations suivantes :

$$\dot{\vec{X}}(s, t) = \vec{\text{Cut}}(s, t, s_c) - \left[\vec{\text{Cut}}(s, t, s_c) \bullet \vec{\tau}(s, t) \right] \vec{\tau}(s, t) \quad (4.12a)$$

$$s_c(s, t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{1}{\sigma(s, t)} e^{N - C_V(t) - C_W(t)}, \quad (4.12b)$$

qui sont équivalentes à l'équation (4.8) de Callegari et Ting.

Les méthodes de coupure (4.12a) sont donc justifiées du moment que la longueur de coupure $s_c(s, t, \varepsilon)$ est donnée par (4.12b). Alors que dans l'équation (4.8) de Callegari et Ting, la structure de l'anneau est complètement prise en compte dans le groupement $[-\ln \varepsilon - 1 + C_V(t) + C_W(t)]$, de façon équivalente, dans l'équation (4.12a-b), celle-ci est complètement prise en compte dans la longueur de coupure s_c .

IV.3.3. Autres groupements équivalents et lien entre les longueurs de coupure

L'épaisseur apparente $\varepsilon_a(t)$, définie par

$$\varepsilon_a(t) = \varepsilon \left(\frac{1}{\sigma(s,t)} e^{N - C_v(t) - C_w(t)} \right), \quad (4.12c)$$

est un autre groupement intéressant qui est équivalent à l'épaisseur de coupure. Il vérifie l'équation :

$$s_c = \varepsilon_a(t),$$

qui est l'équation (4.6) corrigée.

Si on compare une première méthode de coupure (s_{c1}, N_1) de longueur de coupure s_{c1} et de constante N_1 avec une seconde (s_{c2}, N_2) , d'après (4.12b), on a le lien suivant entre ces deux méthodes :

$$s_{c1} = s_{c2} e^{N_1 - N_2}. \quad (4.13)$$

Les deux longueurs de coupures sont donc différentes d'un facteur constant près.

Le lien exact (4.12b) entre la longueur de coupure s_c et l'épaisseur ε est valable également si le paramètre de viscosité α est non nul; si bien que, pour un anneau similaire, les méthodes de coupure (4.7) sont corrigées et généralisées au cas visqueux.

Que l'on soit dans le cas d'un anneau similaire ou d'un anneau non visqueux, $C_v(t)$ est donné par la formule (paragraphes III.11.7 et III.12.1) :

$$C_v(t) = +C_v(0) - \ln(\bar{\delta}). \quad (4.14)$$

On a $C_v(0) = +\frac{1}{2}(1 + \gamma - \ln 2) \approx 0.442$ pour un anneau similaire et $C_v(0) = \frac{3}{4}$ pour un anneau uniforme. Remarquons que Widnall²⁴ et Widnall et Sullivan²³ ont défini la constante $A = C_v(0) - \frac{1}{2}$ que l'on n'utilisera pas. Pour des anneaux tourbillons similaires, la formule (4.12.b) qui donne la longueur de coupure s'écrit :

$$l_c(t, \varepsilon) = s_c(s, t, \varepsilon) \sigma(s, t) = \varepsilon \bar{\delta} e^{N - C_v(0) - C_w(t)}, \quad (4.15a)$$

ou bien sous sa forme logarithmique :

$$\ln l_c = \ln s_c + \ln \sigma = \ln \varepsilon + \ln \bar{\delta} + N - C_v(0) - C_w(t). \quad (4.15b)$$

IV.3.4. Justification particulière de la méthode de Burgers

Dans le cas particulier de la méthode de Burgers, l'équation (4.1a) de la méthode de coupure et l'équation asymptotique (4.8) se comparent directement sans que l'on ait besoin de faire un développement de l'intégrale de coupure (4.1a), du moment que l'on prend l'expression (2.12) suivante de $\vec{\mathbf{A}}(s, t)$:

$$\vec{\mathbf{A}}(s, t) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{4\pi} \int_{-\zeta}^{+\pi} -\sigma^{(0)}(s+s', t) \frac{\vec{\tau}^{(0)}(s+s', t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t))}{|\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)|^3} ds' \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{-\zeta} -\sigma^{(0)}(s+s', t) \frac{\vec{\tau}^{(0)}(s+s', t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t))}{|\vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s+s', t) - \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)|^3} ds' \\ - \frac{1}{4\pi} K^{(0)}(s, t) \vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t) \ln\left(\frac{S/2}{l}\right) \end{array} \right) \quad (4.16)$$

avec

$$l(t) = \int_s^{s+\zeta} \sigma^{(0)}(s^*, t) ds^*. \quad (4.17)$$

Si dans cette limite, la variable muette ζ est notée s_c , la soustraction de l'équation (4.1a) de la méthode de coupure et de l'équation asymptotique (4.8) donne :

$$0 = -\frac{1}{4\pi} K^{(0)}(s, t) \vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t) \ln\left(\frac{S/2}{l_c}\right) + \frac{K(s, t)}{4\pi} \left[-\ln \varepsilon + \ln(S(t)) - 1 + C_v(t) + C_w(t) \right] \vec{\mathbf{b}}(s, t),$$

avec

$$l_c = \int_s^{s+s_c} \sigma^{(0)}(s^*, t) ds^*, \quad (4.18)$$

c'est à dire :

$$\ln l_c = -\ln 2 + \ln \varepsilon + 1 - C_v(t) - C_w(t). \quad (4.19)$$

En comparant avec (4.9), on obtient que pour la méthode de coupure de Burgers, on a :

$$N = 1 - \ln 2, \quad (4.20)$$

ce qui est bien la valeur trouvée dans la table 4.1 par la méthode de développement d'intégrale singulière.

Arms et Hama¹ ont développé l'intégrale de coupure (4.1a) par rapport à s_c . Ils ont retenu seulement l'ordre principal logarithmique de ce développement et ont remplacé s_c par ε , ce qui donne l'équation suivante :

$$\bullet \quad \dot{\vec{X}}(s,t) = -\frac{K(s,t)}{4\pi} \ln \varepsilon \vec{b}(s,t), \quad (4.21)$$

qu'ils ont appelé l'équation de *l'approximation de l'induction locale*. Désormais que la méthode de coupure est justifiée, leur procédure est justifiée et donne le même résultat que si nous ne retenons que l'ordre principal dans l'équation asymptotique (4.8) d'évolution d'un anneau tourbillon.

IV.4. Discussion bibliographique et autres équations des filaments de la littérature

L'idée de comparer les méthodes de coupure à d'autres résultats connus afin de déterminer la longueur de coupure n'est pas récente. Par exemple, Crow⁴ compare la fréquence de vibration d'un filament tourbillon droit donnée par Kelvin⁸ avec celle donnée par la méthode de coupure de Burgers et trouve une valeur de la longueur de coupure. Il compare également la vitesse d'un anneau tourbillon circulaire donnée par Kelvin⁷ avec celle donnée par la méthode de coupure afin d'obtenir la longueur de coupure.

Widnall^{22,23,24} est le premier auteur qui a comparé une méthode de coupure avec une équation d'évolution d'un anneau non circulaire obtenue par un développement asymptotique raccordé en fonction de l'épaisseur du filament, afin d'obtenir la longueur de coupure. Elle a d'abord²² justifié la méthode de coupure dans le cas de l'étude de Crow⁴ de deux filaments droits faiblement perturbés. Dans cet article, elle réalise le raccord asymptotique uniquement dans le cas linéaire des faibles perturbations et détermine alors la longueur de coupure de la méthode de Burgers en fonction de l'épaisseur et de la structure du filament dans ce cadre linéarisé. Puis, dans un article suivant²³, elle obtient l'équation suivante d'évolution d'un filament tourbillon :

$$\bullet \quad \dot{\vec{X}}(s,t) = \frac{K(s,t)}{4\pi} \left[\left(-\ln \frac{\varepsilon K(s)}{2} + A_W - \frac{1}{2} \right) \vec{b}(s,t) + \vec{Q}(s)_W \right], \quad (4.22a)$$

où :

$$A_W = \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)2} d\xi - \ln(\bar{r}) \right). \quad (4.22b)$$

Le terme $\vec{Q}(s)_W$ dépend de la géométrie de la fibre centrale mais n'est pas donné. Pour obtenir ce résultat, l'auteur fait le raccord entre le développement intérieur du champ de vitesse déterminé comme dans Callegari et Ting et le développement extérieur de celui-ci

obtenu à partir de la loi de Biot et Savart. Pour obtenir la limite du développement extérieur du champ de vitesse $\vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, s)$ près du filament, elle somme d'abord l'intégrale de la méthode de coupure de Burgers pour le filament avec la valeur de la limite $\vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, s)$ pour un filet tourbillon concentré sur le cercle osculateur au filament au point considéré. Cette dernière limite a été obtenue par Tung et Ting²¹. Puis, à ce résultat elle retranche l'intégrale de coupure de Burgers pour le cercle osculateur, ce qui s'écrit :

$$\vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, s) = \overset{\bullet}{\text{Cut}}_{\text{Filament}}(s, t, s_c) + \vec{v}_{\text{Cercle}}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, s) - \overset{\rightarrow}{\text{Cut}}_{\text{Cercle}}(s, t, s_c) \quad (4.23)$$

L'équation (4.22a) est alors obtenue à l'aide de cette limite (4.23) en faisant le raccord asymptotique. La comparaison de (4.22a) avec la méthode de coupure de Burgers :

$$\overset{\bullet}{\vec{X}} = \overset{\rightarrow}{\text{Cut}}_{\text{Filament}}(s, t, s_c), \quad (4.24)$$

lui permet d'obtenir la valeur de la longueur de coupure s_c en fonction de la structure interne du filament. Elle a obtenu la même valeur de N que nous pour la méthode de *Burgers*.

De notre côté, dans le chapitre II, nous avons obtenu cette limite par la méthode de développement d'intégrale singulière, qui s'écrit (Annexe A.3) :

$$\vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, s) = \vec{E} + \vec{I}, \quad (4.25a)$$

avec :

$$1 \gg s_c \gg r$$

et

$$\vec{E} = \overset{\rightarrow}{\text{Cut}}_{\text{Filament}}(s, t, s_c). \quad (4.25b)$$

Le terme \vec{I} est l'intégrale de Biot et Savart sur la zone de coupure $[-s_c, +s_c]$. On détermine son développement en faisant la dilatation de l'abscisse par rapport à la coordonnée radiale r . Après avoir effectué le raccord asymptotique, le terme intégral de l'équation d'évolution de la fibre centrale que l'on obtient est donné pour un filament qui peut avoir une forme quelconque et qui peut être visqueux. A partir de cette équation, on justifie la méthode de coupure de Burgers également dans le cas visqueux et en procédant de la même façon, on justifie d'autres méthodes de coupure. La méthode de coupure *de Burgers* a été également comparée à l'équation de Callegari et Ting³ par Lough¹³, qui a obtenu la même valeur de N que nous pour cette méthode.

Moore et Saffman¹⁵ ont trouvé l'équation suivante d'évolution de la fibre centrale d'un filament tourbillon¹⁴ à vorticité d'extension finie :

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) = & \frac{K(s,t)}{4\pi} \left(\ln \frac{8K(s)}{2\varepsilon} + A_{\text{MS}} - \varepsilon 16\pi^2 \int_0^\infty \xi w^{(0)}(\xi) w_c^{(1)}(\xi) d\xi \right) \vec{\mathbf{b}}(s,t) \\
& - 4\pi \left[\int_0^\infty \xi w^{(0)}(\xi) d\xi \right] \vec{\tau}(s,t) \wedge \frac{\partial \dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t)}{\partial s} \\
& - 2\pi \left[\int_0^\infty \xi^2 w^{(0)}(\xi) d\xi \right] \vec{\tau}(s,t) \wedge \frac{\partial [\vec{\mathbf{b}}(s,t) / K(s,t)]}{\partial s} \\
& + \vec{\mathbf{Q}}(s)_{\text{MS}}
\end{aligned} \tag{4.26a}$$

avec :

$$A_{\text{MS}} = 4\pi^2 \int_0^\delta \xi v^{(0)2} d\xi - \frac{1}{2} - 8\pi^2 \int_0^\delta \xi w^{(0)2} d\xi, \tag{4.26b}$$

où δ est l'épaisseur du filament à vorticité d'extension finie et $\vec{\mathbf{Q}}(s)_{\text{MS}}$ dépend de la géométrie de la fibre centrale. Cette équation a été obtenue en faisant un bilan de forces sur une portion de filament. Dans l'équation d'évolution de Callegari et Ting, on constate que la structure interne du filament apparaît sous forme d'une intégrale sur toute une section du filament. L'application d'un théorème intégral devrait donc permettre d'obtenir plus rapidement l'équation d'évolution de la fibre centrale recherchée. De surplus, cette approche donne une description des forces qui s'exercent sur une portion de filament. Le volume de contrôle utilisé est une portion de filament dont la surface est constituée des deux extrémités S_I de la portion du tube de vorticité et de sa surface extérieure S_E . Comme le filament est à vorticité d'extension finie, ils écrivent l'équation du potentiel de l'écoulement potentiel en dehors de la zone de vorticité sur la variables radiale dilatée et la résolve. Les conditions aux limites de cette équation est la condition de surface matérielle de la surface du tube de vorticité et la condition aux limites en l'infini qui provient de la loi de raccord asymptotique. La limite $\vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, s)$ est obtenue à l'aide du cercle osculateur par la même relation (4.23) que Widnall. La force exercée sur S_E est déterminée par intégration de la pression obtenue à l'aide de l'écoulement potentiel trouvé et de la loi de Bernoulli. La force exercée sur S_I est déterminée en fonction du champ de vitesse intérieur à la zone de vorticité. Une partie de cette force est l'intégration de la pression de la zone de vorticité obtenue par intégration de l'équation (3.9b) qui exprime l'équilibre entre le gradient de pression et la force centrifuge. Les auteurs obtiennent alors leur équation (4.26a) pour la fibre centrale.

Dans Moore et Saffman¹⁵, la longueur de coupure de la méthode de Burgers est obtenue en comparant l'équation de la fibre centrale de cette méthode et la vitesse générale d'un anneau *circulaire* trouvée par Saffman¹⁵. Quand cette longueur de coupure, valable pour un anneau circulaire, est mise dans l'équation de la méthode de coupure, l'équation qui est obtenue est l'équation (4.26a) de la fibre centrale d'un anneau *non circulaire* qui avait préalablement trouvée dans cet article. Ces auteurs ont donc justifié la méthode de coupure de Burgers et ont trouvé que la longueur de coupure qui doit être choisie est la même que pour un anneau circulaire. Néanmoins, il est beaucoup plus satisfaisant d'obtenir la longueur de coupure en comparant les deux équations²⁴ (4.24) et (4.26a) au lieu de postuler une expression de la longueur de coupure et de montrer qu'avec cette longueur, ces deux équations sont équivalentes.

Klein et Knio⁹ ont donné une justification d'une méthode numérique d'élément de vortex, appelée '*le modèle du tube fin*'. Nous pouvons dire que cette méthode numérique est une méthode de coupure, car elle possède une longueur de coupure δ^{ttm} appelée '*le paramètre numérique d'épaisseur de corps*'. Ils ont spécifié δ^{ttm} en comparant cette méthode de coupure avec le régime de Klein et Majda¹⁰ qui est un cas restrictif très intéressant (paragraphe VI.3) de l'équation (4.8) de Callegari et Ting³. Ils obtiennent alors leur expression (6.4) de la longueur de coupure δ^{ttm} . Klein et Knio⁹ ont ainsi justifié la méthode de coupure du 'modèle du tube fin' et ont trouvé la longueur de coupure à l'aide du régime Klein et Majda¹⁰; tandis que nous, d'une façon assez similaire, nous avons justifié d'autres méthodes de coupure à l'aide de l'équation (4.8) de Callegari et Ting³ et nous avons trouvé les longueurs de coupure associées.

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé les *développements des intégrales* qui interviennent dans les méthodes de coupure en fonction d'un petit paramètre qui est la longueur de coupure. La comparaison du résultat obtenu avec l'équation asymptotique (4.8) de Callegari et Ting³ en fonction de l'épaisseur de l'anneau tourbillon, nous a permis de donner une justification de ces méthodes ad hoc. Nous avons ainsi trouvé l'expression de la longueur de coupure en fonction de la structure du filament. Nous avons justifié des méthodes de coupure qui ne l'étaient pas et nous avons étendu la justification de celles qui l'étaient au cas d'un anneau visqueux avec vitesse axiale.

Avec le bon choix de la longueur de coupure, la méthode de coupure est équivalente à l'équation d'évolution déterminée asymptotiquement à l'aide des équations de Navier Stokes. Les méthodes de coupure ont donc le même domaine de validité que cette équation et ne prennent donc pas en compte des ondes courtes.

La stabilité d'un anneau tourbillon circulaire peut alors être étudiée avec une méthode de coupure qui a été justifiée plutôt qu'avec l'équation de Callegari et Ting. C'est ce qui est fait dans le prochain chapitre.

IV.6. Bibliographie du chapitre IV

1. ARMS,R.J. et HAMA,F.R. 1965 Localised-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring, *Phys. Fluids* **8** (4), 553-559
2. BENDER,C.M. et ORSZAG,S.A. 1978 Advanced mathematical methods for scientists and engineers, *McGraw-Hill, New York*, 341-349
3. CALLEGARI,A.J. et TING,L. 1978 Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1), 148-175
4. CROW,S.C. 1970 Stability theory for a pair of trailing vortices, *AIAA J.* **8**, 2172-2179
5. FRANCOIS,C. 1981 Les méthodes de perturbation en mécanique. ENSTA. Paris, 98-104
6. HAMA,F.R. 1962 Progressive deformation of a curved vortex filament by its own induction, *Phys. Fluids* **5**, 1156-1162
7. KELVIN 1867 The translatory velocity of a circular vortex ring, *Philos. Mag.* **33**, 511-512
8. KELVIN 1880 Vibration of a columnar vortex, *Philos. Mag.* **10**, 152-165

9. KLEIN,R. et KNIO,O.M. 1995 Asymptotic vorticity structure and numerical simulation of slender vortex filaments, *J. Fluid Mech.* **284**, 257-321
10. KLEIN,R. et MAJDA,A.J. 1991 Self-stretching of a perturbed vortex filament I: the asymptotic equation for derivations from a straight line, *Physica D* **49**, 323-352
11. LEONARD,A. 1985 Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **17**, 523-559
12. LEVY,H. et FORSDYKE,A.G. 1928 The steady motion and stability of a helical vortex, *Proc. R. Soc. London. A* **120**, 670-690
13. LOUGH,M.F. 1994 On the dynamics of ultra-thin vortex filaments, *Phys. Fluids* **6** (5), 1745-1751
14. LOUGH,M.F. 1994 The motion of thin-cored vortex filaments : the equations of motion and their solution for some special cases, *PhD Thesis California Institute of Technology*.
15. MOORE,D.W. et SAFFMAN,P.G. 1972 The motion of a vortex filament with axial flow, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **226** (272), 403-429
16. PARKS,P.C. 1971 A new look at the dynamics of vortices with finite cores, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington*, 355-388
17. ROSENHEAD,L. 1930 The spread of vorticity in the wake behind a cylinder, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **127**, 590-599
18. SAFFMAN,P.G. 1970 The velocity of viscous vortex rings, *Studies Appl. Math.* **49**, 371-380
19. SAFFMAN,P.G. 1992 Vortex dynamics, *Cambridge University Press.*, 33-38, 208-215
20. THOMSON,J.J. 1882 On the vibration of a vortex ring and the action upon each other of two vortices in a perfect fluid, *Phil. Trans.*, 493-521
21. TUNG,C. et TING,L. 1967 The Motion and Decay of a Vortex Ring, *The Physics of Fluids* **10** (5), 901-910
22. WIDNALL,S.E. et BLISS,D.B. et ZALAY,A. 1971 Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington*, 305-338
23. WIDNALL,S.E. et SULLIVAN,J.P. 1973 On the stability of vortex rings, *Proc. R. Soc. London A* **332**, 335-353
24. WIDNALL,S.E. 1975 The structure and dynamics of vortex filaments, *Annual Review of Fluid Mechanics* **7**, 141-165

Chapitre V

VITESSE ET OSCILLATIONS D'UN ANNEAU CIRCULAIRE PERTURBÉ

L'anneau tourbillon circulaire est une solution particulière de l'équation d'évolution de la fibre centrale d'un filament. Il se déplace sans se déformer à une vitesse V dans une direction perpendiculaire au plan dans lequel se trouve sa fibre centrale. Dans ce chapitre, on détermine la vitesse V de cet anneau circulaire et on étudie les oscillations de celui-ci lorsqu'il est perturbé par une perturbation dont la longueur d'onde est grande devant son épaisseur réduite ε . Cette étude est faite d'une part d'une façon analytique en linéarisant l'équation d'évolution de la fibre centrale de l'anneau circulaire perturbé vis-à-vis de l'amplitude petite de la perturbation et d'autre part par simulation numérique de l'équation non linéaire d'évolution de la fibre centrale. Une comparaison entre les résultats analytiques linéarisés et les résultats numériques est donnée.

L'équation d'évolution qui est utilisée est une équation qui tient compte de la structure interne de l'anneau. On considère implicitement que le filament a une structure normale simple et similaire au sens de ce qui a été défini au chapitre I.

V.1. Vitesse d'un anneau tourbillon circulaire

La fibre centrale d'un anneau circulaire de rayon R_0 est repérée au temps t par une représentation paramétrique $\vec{\mathbf{X}}(\theta, t)$ adimensionnelle de la forme suivante :

$$\boxed{\vec{\mathbf{X}}(\theta, t) = \vec{\mathbf{i}}_r(\theta) + d(t)\vec{\mathbf{e}}_3}, \quad (5.1)$$

où $(\vec{\mathbf{i}}_r, \vec{\mathbf{i}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_3)$ et θ sont respectivement les vecteurs de base et l'angle des coordonnées cylindriques associées à la géométrie axisymétrique de cette fibre centrale (figure 5.1). Le rayon R_0 de l'anneau a été pris comme longueur caractéristique d'adimensionalisation. Le trièdre $(\vec{\mathbf{i}}_r, \vec{\mathbf{i}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_3)$ est la base de Frénet liée à cette courbe et le paramètre θ sur la fibre centrale est appelé le *paramètre polaire*. Ici, $d(t)$ est la position du cercle sur l'axe de symétrie au temps t .

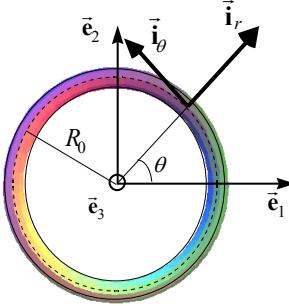


Figure 5.1. L'anneau tourbillon circulaire

Lorsque le paramètre sur le filament est noté θ , l'équation (4.12a-b) d'évolution de la fibre centrale d'un filament, écrite pour une méthode de coupure de Burgers (4.1a) s'écrit :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta, t) = \vec{\mathbf{Cut}}(\theta, t, \theta_c) - \left[\vec{\mathbf{Cut}}(\theta, t, \theta_c) \bullet \vec{\tau}(\theta, t) \right] \vec{\tau}(\theta, t) \quad (5.2a)$$

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta, t) \bullet \vec{\tau} = 0 \quad (5.2b)$$

$$\vec{\mathbf{Cut}}(\theta, t, \theta_c) = \frac{1}{4\pi} \int_{[0, 2\pi[\setminus[\theta-\theta_c, \theta+\theta_c[)} \frac{\sigma(\theta^*, t) \vec{\tau}(\theta^*, t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}(\theta, t) - \vec{\mathbf{X}}(\theta^*, t))}{|\vec{\mathbf{X}}(\theta, t) - \vec{\mathbf{X}}(\theta^*, t)|^3} d\theta^* \quad (5.2c)$$

$$\theta_c(\theta, t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sigma(\theta, t)} e^{1-C_V(t)-C_W(t)}, \quad (5.2d)$$

où θ_c est la longueur de coupure et $\vec{\tau}$ le vecteur tangent à la fibre centrale.

L'anneau circulaire (5.1) est une solution exacte de ce système d'équations, si bien que l'anneau tourbillon circulaire reste circulaire et se déplace dans la direction $\vec{\mathbf{e}}_3$ de son axe de symétrie à la vitesse $V(t)$ donnée par :

$$V(t) = \dot{d}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_c(t)}^{\pi} \frac{1 - \cos \theta^*}{[2(1 - \cos \theta^*)]^{3/2}} d\theta^*. \quad (5.3a)$$

Comme ici, on a $\sigma(\theta, t) = 1$, alors :

$$\theta_c(\theta, t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} e^{1-C_v(t)-C_w(t)}. \quad (5.3b)$$

Or l'intégrale qui apparaît dans cette expression (5.3a) se calcule et l'expression de la vitesse de l'anneau devient :

$$V(t) = \frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos \theta_c}}{\sqrt{1 - \cos \theta_c}} \right]. \quad (5.4)$$

Finalement, comme la longueur de coupure θ_c est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'anneau tourbillon qui est petite, la vitesse $V(t)$ de l'anneau tourbillon circulaire est donnée par l'expression simple suivante :

$$V(t) = \frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{4}{\theta_c} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{8}{\varepsilon} + C_v(t) - 1 + C_w(t) \right]. \quad (5.5)$$

Que l'on soit dans le cas d'un anneau similaire ou d'un anneau non visqueux, $C_v(t)$ est donné à partir de (4.14) par la formule suivante :

$$C_v(t) = +C_v(0) - \ln(\bar{\delta}), \quad (5.6)$$

avec

$$\bar{\delta}(t) = \frac{\delta}{\varepsilon} = \sqrt{1 + 4\alpha^2 t}, \quad (5.7)$$

où α est le paramètre de viscosité et δ l'épaisseur du filament déterminée par (3.103) avec $S(t) = S_0$, car la longueur $S(t)$ de l'anneau circulaire est constante.

Pour un anneau similaire $C_v(0) \approx 0.442$, alors que $C_v(0) = \frac{3}{4}$ pour un anneau de vorticité uniforme. De même, pour un anneau similaire (3.102b) donne :

$$C_w(t) = -2 \left(\frac{m_0}{\bar{\delta}} \right)^2,$$

alors que $C_w(0) = -4m_0^2$ pour un anneau de vorticité uniforme. Ici, m_0 est le débit axial initial. Il est non nul si la composante axiale du développement intérieur de la vitesse de l'anneau à l'ordre principal est non nulle.

On note $V(t, \alpha)$ la vitesse de l'anneau pour faire apparaître la dépendance avec le paramètre de viscosité α . On compare alors facilement la vitesse d'un anneau similaire visqueux et non visqueux grâce à l'égalité suivante :

$$V(t, \alpha) = V(t, \alpha = 0) - \frac{1}{2\pi} \ln(1 + 4\alpha^2 t). \quad (5.8)$$

Sous forme dimensionnelle, la vitesse (5.5) d'un anneau similaire s'écrit :

$$V(t) = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left[\ln \frac{8R_0}{\varepsilon} + C_v(t) - 1 + C_w(t) \right]. \quad (5.9)$$

On peut la comparer à l'équation (8) de Kelvin donnée dans l'introduction.

V.2. Description et équation d'évolution d'un anneau circulaire perturbé

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notations et les coordonnées qui permettent de décrire un anneau tourbillon perturbé et nous donnons l'équation d'évolution que satisfait sa fibre centrale.

V.2.1. Description de la fibre centrale de l'anneau tourbillon perturbé

La fibre centrale d'un anneau tourbillon circulaire perturbé de rayon R_0 est repérée au temps t par une représentation paramétrique $\vec{X}(\theta, t)$ de la forme suivante (figure 5.2) :

$$\boxed{\vec{X}(\theta, t) = \vec{X}_b(\theta, t) + \vec{X}'(\theta, t)} \quad (5.10)$$

avec

$$\vec{X}_b(\theta, t) = \vec{i}_r(\theta) + d(t)\vec{e}_3, \quad (5.11)$$

où $(\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{e}_3)$ et θ sont respectivement les vecteurs de base et l'angle des coordonnées cylindriques associées à la géométrie axisymétrique de la solution de base $\vec{X}_b(\theta, t)$, qui est l'anneau circulaire non perturbé étudié au paragraphe précédent. Le rayon R_0 de l'anneau a été pris comme longueur caractéristique d'adimensionnalisation et le paramètre θ sur la fibre centrale est appelé le *paramètre polaire*.

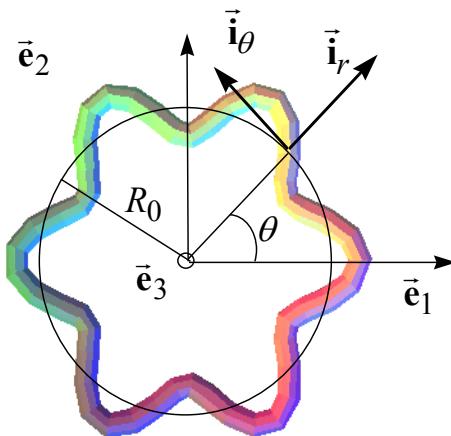


Figure 5.2. La fibre centrale d'un anneau tourbillon circulaire et l'anneau perturbé par un mode 6

D'après la définition du paramètre polaire θ et des vecteurs $(\vec{\mathbf{i}}_r, \vec{\mathbf{i}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_3)$ des coordonnées cylindriques, la fibre centrale $\vec{\mathbf{X}}(\theta, t)$ vérifie :

$$\vec{\mathbf{X}}(\theta, t) \bullet \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta) = 0. \quad (5.12)$$

Cette relation est alors également vérifiée par la perturbation $\vec{\mathbf{X}}'(\theta, t)$:

$$\vec{\mathbf{X}}'(\theta, t) \bullet \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta) = 0. \quad (5.13)$$

La projection de $\vec{\mathbf{X}}'(\theta, t)$ sur la base $(\vec{\mathbf{i}}_r, \vec{\mathbf{i}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_3)$ s'écrit donc :

$$\vec{\mathbf{X}}'(\theta, t) = \rho(\theta, t) \vec{\mathbf{i}}_r(\theta) + \xi(\theta, t) \vec{\mathbf{e}}_3. \quad (5.14)$$

V.2.2. Equation de la fibre centrale écrite sous la forme d'une méthode de coupure

La fibre centrale $\vec{\mathbf{X}}(\theta, t)$ de l'anneau circulaire perturbé (5.10) doit vérifier l'équation d'évolution (5.2a-b), qui s'écrit ici :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta, t) - \left[\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta, t) \bullet \vec{\tau}(\theta, t) \right] \vec{\tau}(\theta, t) = \vec{\text{Cut}}(\theta, t, \theta_c) - \left[\vec{\text{Cut}}(\theta, t, \theta_c) \bullet \vec{\tau}(\theta, t) \right] \vec{\tau}(\theta, t), \quad (5.15a)$$

car la relation $\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta, t) \bullet \vec{\tau} = 0$ n'est pas vérifiée. Cette équation est complétée par la condition $\vec{\mathbf{X}}(\theta, t) \bullet \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta) = 0$, qui après une dérivation temporelle devient :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta, t) \bullet \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta) = 0. \quad (5.15b)$$

L'ensemble de ces deux équations peut être regroupé dans la seule équation :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta, t) &= \vec{\text{Cut}}(\theta, t, \theta_c) - \left[\vec{\text{Cut}}(\theta, t, \theta_c) \bullet \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta, t) \right] \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta, t) \\ &+ \left[\left(\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta, t) - \vec{\text{Cut}}(\theta, t, \theta_c) \right) \bullet \vec{\tau}(\theta, t) \right] \vec{\tau}(\theta, t) + \left[\vec{\text{Cut}}(\theta, t, \theta_c) \bullet \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta, t) \right] \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta, t) \end{aligned}, \quad (5.16)$$

qui n'est pas l'équation :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta, t) = \vec{\text{Cut}}(\theta, t, \theta_c) - \left[\vec{\text{Cut}}(\theta, t, \theta_c) \bullet \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta, t) \right] \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta, t), \quad (5.17)$$

utilisée par Widnall et Sullivan⁹ lors de leur étude de la stabilité linéaire d'un anneau tourbillon circulaire. Néanmoins, dans le cadre de la linéarisation, le terme additionnel de (5.16) par rapport à (5.17) s'avérera être nul.

V.2.3. Equation de la fibre centrale écrite à l'aide de l'équation de Callegari et Ting

La fibre centrale $\vec{\mathbf{X}}(s,t)$ de l'anneau circulaire perturbé doit vérifier l'équation (4.8) de Callegari et Ting :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) = \vec{\mathbf{Q}}^*(s,t) + \frac{K(s,t)}{4\pi} [-\ln \varepsilon + \ln(S(t)) - 1 + C_v(t) + C_w(t)] \vec{\mathbf{b}}(s,t), \quad (5.18a)$$

où s est le paramètre sur la fibre qui vérifie :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s,t) \bullet \vec{\tau} = 0. \quad (5.18b)$$

Lorsque que l'on prend le paramètre polaire θ sur la fibre centrale, cette équation devient :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta,t) &= \vec{\mathbf{Q}}^*(\theta,t) + \frac{K(\theta,t)}{4\pi} [-\ln \varepsilon + \ln(S(t)) - 1 + C_v(t) + C_w(t)] \vec{\mathbf{b}}(\theta,t) \\ &\quad + \left[\dot{\vec{\mathbf{X}}} \bullet \vec{\tau}(\theta,t) \right] \vec{\tau}(\theta,t) \end{aligned} \quad (5.19a)$$

avec

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta,t) \bullet \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta) = 0. \quad (5.19b)$$

V.2.4. Discussion sur les équations d'évolution de la fibre centrale

Les équations d'évolution de la fibre centrale (5.15a) et (5.19) ci-dessus sont écrites pour un anneau similaire. Ce sont des équations équivalentes. Elles sont visqueuses ou non suivant que le paramètre α est ou n'est pas nul. Elles ne peuvent pas rendre compte de perturbations sur le filament dont la longueur le long du filament serait de l'ordre de l'épaisseur ε de l'anneau qui ici est petite.

Pour des filaments ultra-fins ($-\ln \varepsilon \gg 1$), ces équations se simplifient toutes deux à l'ordre principal logarithmique en l'équation de l'induction locale :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}}(\theta,t) = -\frac{K(\theta,t)}{4\pi} \ln \varepsilon \vec{\mathbf{b}}(\theta,t). \quad (5.20)$$

Cependant, on peut corriger ce résultat en prenant en compte l'équation complète (5.19), c'est à dire en ne négligeant plus les termes d'ordre 1 par rapport aux termes logarithmiques. Pour des filaments qui ne sont pas ultra-fins ($-\ln \varepsilon = O(1)$), elles ne se simplifient pas : on ne peut plus prendre l'équation d'induction (5.20), il faut prendre l'équation complète (5.19). Cette discussion revient à donner les différentes régions de simplification de l'équation (5.19) sur un axe gradué selon le paramètre $-\ln \varepsilon$ (Figure 5.3).

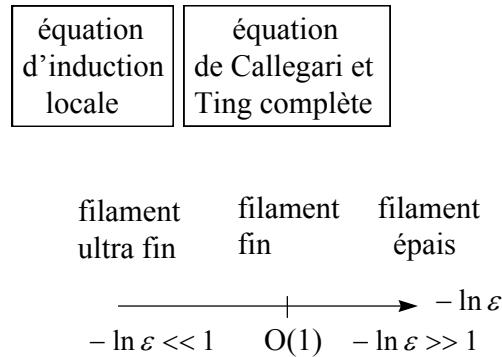


Figure 5.3 Les différents régimes d'épaisseur du filament

Lorsque l'on connaît une solution particulière de ces équations (5.15a) et (5.19), on peut simplifier les équations vérifiées par une perturbation de cette solution si son amplitude est de l'ordre d'un petit paramètre d . Cependant, l'équation simplifiée que l'on obtient dépend de l'ordre de grandeur de d par rapport à celui de $\ln \varepsilon$. On représente alors les différentes régions de simplification de l'équation (Figure 5.4) dans un plan $(-\ln \varepsilon, d)$ de la même façon que l'on représente les différentes zones de simplification des équations de Navier Stokes compressible¹² dans un plan (nombre de Reynolds, nombre de Mach).

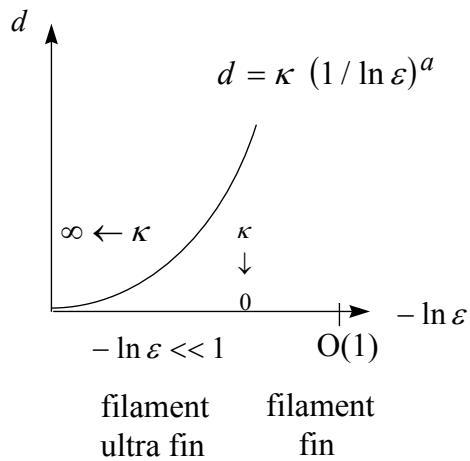


Figure 5.4 Les différents régimes selon l'épaisseur ε
et un autre petit paramètre d

Avec ce nouveau petit paramètre d en plus de $-1 / \ln \varepsilon$, trois types de limites peuvent être envisagées dans ces équations pour les simplifier¹² :

- i) $d \rightarrow 0$ à $1 / \ln \varepsilon$ fixé, puis $1 / \ln \varepsilon \rightarrow 0$
- ii) $1 / \ln \varepsilon \rightarrow 0$ à d fixé, puis $d \rightarrow 0$
- iii) $d \rightarrow 0$ et $1 / \ln \varepsilon \rightarrow 0$ avec le lien $d = \kappa (1 / \ln \varepsilon)^a$ où $\kappa = O(1)$ est une constante et a un exposant réel à préciser.

Le cas i) correspond à iii) dans lequel on fait $\kappa \rightarrow 0$ et le cas ii) correspond à iii) dans lequel on fait $\kappa \rightarrow \infty$.

Notons pour finir que dans le cas i), on réalise successivement les limites $d \rightarrow 0$ à $1/\ln \varepsilon$ fixé, puis $1/\ln \varepsilon \rightarrow 0$ dans les équations (5.15a) et (5.19) que l'on a obtenues à partir des équations de Navier Stokes en effectuant la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ à d fixé.

V.3. Étude numérique des oscillations d'un anneau circulaire perturbé

Le code fortran qui simule numériquement l'équation (5.18) du mouvement d'un anneau tourbillon, dont on a déjà parlé aux paragraphes III.12.2 et III.15.1, est légèrement modifié afin de simuler l'équation (5.19) avec un paramétrage polaire θ . On prend alors mieux en compte la géométrie de l'anneau circulaire.

Nous avons trouvé numériquement les différentes étapes d'évolution d'un anneau tourbillon similaire initialement de la forme suivante :

$$\vec{X}_0(\theta) = (1 + r_0 \cos(n\theta)) \vec{i}_r. \quad (5.21)$$

Cet anneau est donc initialement dans un plan. Il est non visqueux ou visqueux suivant que α est nul ou ne l'est pas.

V.3.1. Le cas non visqueux

La simulation numérique de l'équation (5.18) pour un anneau elliptique $n=2$ a déjà été présentée au paragraphe III.12.2. La simulation de l'évolution de la fibre centrale de cet anneau elliptique réalisée avec la nouvelle équation (5.19) redonne bien le même résultat.

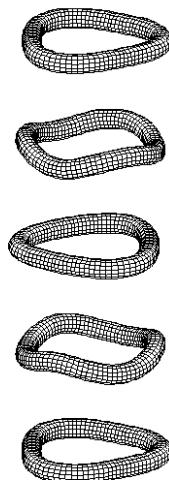
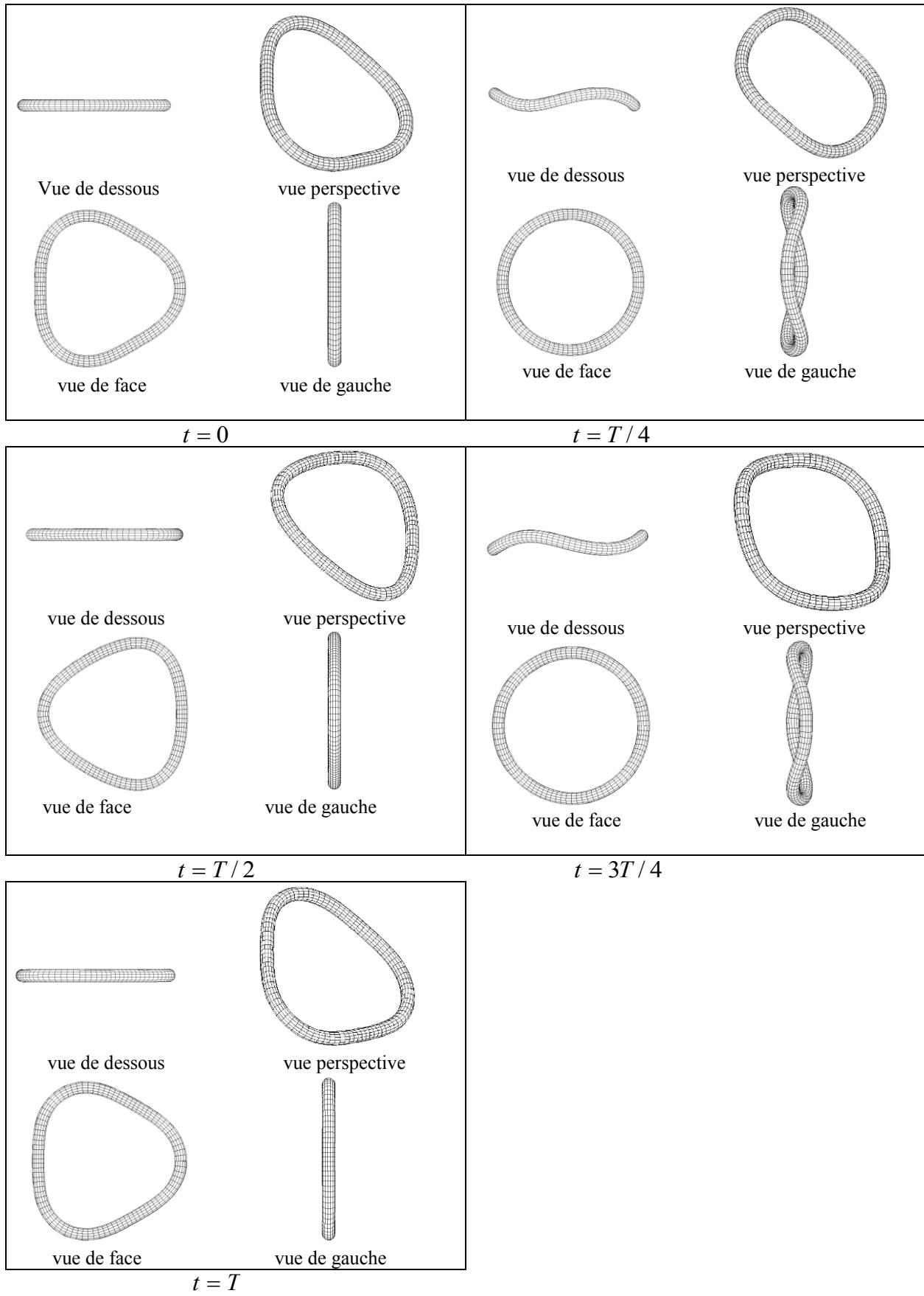


Figure 5.5 : Vue perspective de la simulation numérique
d'un mode $n=3$ (de bas en haut)
 $m_0 = 0, \varepsilon = 0.02, \alpha = 0, r_0 = 0.1$

Figure 5.6 Détail de la simulation numérique d'un mode $n=3$

$$m_0 = 0, \varepsilon = 0.02, \alpha = 0, r_0 = 0.1$$

Les figures 5.5 et 5.6 montrent le mouvement d'un mode 3. Comme pour l'anneau elliptique, on observe que le mouvement est périodique. Au temps qui correspond à la demi-période, l'anneau tourbillon est dans un plan et a la même forme qu'initialement mais inversée. Pour les modes supérieurs, on observe aussi une période d'oscillation et un passage par une configuration plane inversée à la demi-période.

V.3.2. Le cas visqueux

Lorsque l'anneau tourbillon est visqueux ($\alpha \neq 0$), les simulations donnent le même type de comportement que dans le cas non visqueux. Si l'anneau est initialement dans un plan, il reprend une forme plane au bout d'un temps $T_{1/2}^0$, puis retrouve sa forme initiale au temps T^0 . Cependant le temps T^0 est plus grand que le double du temps $T_{1/2}^0$. On passe donc toujours d'une configuration plane à une autre, mais en des temps qui deviennent toujours de plus en plus grand. La vitesse moyenne de l'anneau, selon la binormal de l'anneau non perturbé, diminue dans le temps.

V.4. Étude analytique linéaire des oscillations d'un anneau circulaire perturbé

Dans ce paragraphe, nous faisons une étude analytique linéarisée des oscillations d'un anneau circulaire perturbé. Dans les conditions de cette linéarisation, les amplitudes $\rho(\theta, t)$ et $\xi(\theta, t)$ de l'expression (5.14) de la perturbation de la fibre centrale sont petites.

V.4.1. Les équations des amplitudes de la perturbation

Nous recherchons une solution linéaire perturbée de la forme suivante :

$$\vec{\mathbf{X}}' = \rho(t)e^{in\theta}\vec{\mathbf{i}}_r(\theta) + \xi(t)e^{in\theta}\vec{\mathbf{e}}_3, \quad (5.22)$$

où le nombre entier n est *le mode* de la perturbation et $i^2 = -1$. On a représenté sur la figure 5.2 une perturbation avec six lobes. Elle correspond à un mode $n=6$.

Les équations d'évolution de la fibre centrale (5.15) et (5.19) ne sont valables que pour des perturbations dont la longueur d'onde est grande devant l'épaisseur réduite ε de l'anneau. Ceci impose au mode n de vérifier la relation :

$$\boxed{n \ll \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (5.23)$$

Or, d'après l'expression (5.2d), θ_c est de l'ordre de ε . Il satisfait donc la relation :

$$n\theta_c \ll 1. \quad (5.24)$$

En remplaçant cette expression (5.22) dans les équations (3.103) et (5.2d) d'un anneau similaire, on obtient :

$$S(t) = S_{\text{base}}(t) = S_0 \quad (5.25a)$$

$$\delta(t) = \delta_{\text{base}}(t) = \varepsilon \sqrt{1 + 4\alpha^2 t} \quad (5.25b)$$

$$\theta_c = \theta_{c \text{ base}}(1 - \rho e^{in\theta}) \quad (5.25c)$$

$$\theta_{c \text{ base}} = \frac{\delta}{2} e^{1 - C_v(0) + 2 \left(\frac{\varepsilon m_0}{\delta} \right)^2} \quad (5.25d)$$

$$C_v(0) \approx 0.442. \quad (5.25e)$$

Puis, si on remplace l'expression (5.22) dans l'expression (5.2c) de l'intégrale de coupure, ainsi que l'ont fait Widnall et Sullivan⁹, on obtient :

$$\vec{\mathbf{Cut}} = q_0 \vec{\mathbf{e}}_3 + q_1 \vec{\mathbf{i}}_r + q_2 \vec{\mathbf{e}}_3 + q_3 \vec{\mathbf{i}}_\theta, \quad (5.26)$$

avec :

$$q_0 = \frac{1}{4\pi} [F(0) - F(1)] \quad (5.27)$$

$$q_1 = \frac{1}{4\pi} \xi e^{in\theta} \begin{pmatrix} F(1) - \frac{1}{2} [F(n+1) + F(n-1)] \\ + \frac{1}{2} n [F(n+1) - F(n-1)] \end{pmatrix} \quad (5.28a)$$

$$q_2 = \frac{1}{4\pi} \rho e^{in\theta} \begin{pmatrix} 2F(n) - \frac{1}{2} [F(n+1) + F(n-1)] \\ - F(1) - \frac{1}{2} n [F(n+1) - F(n-1)] \\ - \frac{3}{2} \left[F(0) + F(n) - F(1) - \frac{1}{2} [F(n+1) + F(n-1)] \right] \end{pmatrix} \quad (5.28b)$$

$$q_3 = -i \frac{1}{4\pi} \xi e^{in\theta} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} [F(n+1) - F(n-1)] - nF(n) \\ + \frac{n}{2} [F(n+1) + F(n-1)] \end{pmatrix} \quad (5.28c)$$

et

$$F(n) = 2 \int_{\theta_c}^{\pi} \frac{\cos n\theta^*}{\{2(1 - \cos \theta^*)\}^{3/2}} d\theta^*. \quad (5.29)$$

Au premier ordre en ρ et ξ , nous pouvons remplacer θ_c par $\theta_{c\text{base}}$ dans q_1, q_2, q_3 tandis que l'expression (5.27) de q_0 devient :

$$q_0 = V_b + \frac{1}{4\pi} \rho e^{in\theta}, \quad (5.30)$$

où V_b est la vitesse de l'anneau circulaire non perturbé donnée par les expression (5.3a) et (5.5) dans lesquelles θ_c est remplacé par $\theta_{c\text{base}}$. Nous redéfinissons ainsi q_0 et q_2 par :

$$q_0 \equiv V_b \quad (5.31a)$$

$$q_2 \equiv q_2 + \frac{1}{4\pi} \rho e^{in\theta}. \quad (5.31b)$$

Au première ordre, on retrouve ici la vitesse d'évolution d'un anneau tourbillon circulaire, c'est à dire que l'on vérifie bien que l'écoulement de base avec la vitesse trouvée au paragraphe V.1. est solution des équations. On déduit alors les relations :

$$\left[\vec{\mathbf{Cut}}(\theta, t) \bullet \vec{\tau}(\theta, t) \right] \vec{\tau}(\theta, t) = (q_3 + V_b \frac{\xi}{R_0} i n e^{in\theta}) \vec{\mathbf{i}}_\theta(\theta) \quad (5.32a)$$

$$\left[\dot{\vec{\mathbf{X}}} \bullet \vec{\tau} \right] \vec{\tau} = (V_b \frac{\xi}{R_0} i n e^{in\theta}) \vec{\mathbf{i}}_\theta. \quad (5.32b)$$

On a donc :

$$\left[\dot{\vec{\mathbf{X}}} \bullet \vec{\tau} \right] \vec{\tau} - \left[\vec{\mathbf{Cut}} \bullet \vec{\tau} \right] \vec{\tau} + \left[\vec{\mathbf{Cut}} \bullet \vec{\mathbf{i}}_\theta \right] \vec{\mathbf{i}}_\theta = 0. \quad (5.33)$$

Dans ce cas linéaire, l'équation (5.15a-b) d'évolution du filament se simplifie bien en l'équation (5.17).

Finalement, en remplaçant l'expression (5.22) des modes dans les équations (5.17) d'évolution de la perturbation, on obtient les équations suivantes d'évolution des amplitudes de la perturbation :

$$\boxed{\dot{\rho} = V_\xi \xi} \quad (5.34a)$$

$$\boxed{\dot{\xi} = V_\rho \rho}, \quad (5.34b)$$

avec

$$V_\xi = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} F(1) - \frac{1}{2}[F(n+1) + F(n-1)] \\ + \frac{1}{2}[F(n+1) - F(n-1)] \end{pmatrix} \quad (5.35a)$$

$$V_\rho = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 2F(n) - \frac{1}{2}[F(n+1) + F(n-1)] - F(1) \\ - \frac{1}{2}n[F(n+1) - F(n-1)] \\ - \frac{3}{2} \left[F(0) + F(n) - F(1) - \frac{1}{2}[F(n+1) + F(n-1)] \right] + 1 \end{pmatrix}. \quad (5.35b)$$

Les équations (5.34) et (5.35) des amplitudes de la perturbation sont dues à Widnall et Sullivan⁹. Par rapport à leur étude, nous avons mieux écrit l'équation non linéaire de coupure (5.15a) associée au paramétrage polaire utilisé et nous avons montré que l'expression (5.33) n'a pas de contribution dans le cas linéaire. Cependant, lors d'une étude analytique faiblement non linéaire ou lors d'une étude numérique non linéaire, il ne faudrait pas oublier ce terme supplémentaire qui pourrait avoir son importance. Notre équation (5.25) possède le paramètre de viscosité α qui permet d'étudier les effets de la viscosité, ce qui n'avait pas été introduit par les précédents auteurs.

Comme θ_c est petit et que $n\theta_c \ll 1$, l'expression de $F(n)$ est une intégrale singulière par rapport au petit paramètre θ_c . Par un calcul de développement d'intégrale singulière comme on a fait déjà plusieurs fois dans ce mémoire, on peut donc développer $F(n)$ par rapport à θ_c . Son expression se simplifie et devient (Annexe A.14) :

$$F(n) = \frac{1}{\theta_{c \text{ base}}^2} + k(n) \ln \frac{4}{\theta_{c \text{ base}}} + l(n) + O(\theta_c^2) \quad (5.36)$$

avec :

$$k(n) = \frac{1}{4} - n^2 \quad (5.37a)$$

$$l(n) = -\frac{1}{\pi^2} + k(n) \ln \frac{\pi}{4} + \int_0^\pi \left| \frac{2 \cos(n\theta)}{[2(1-\cos\theta)]^2} - \frac{k(n)}{|\theta|} - \frac{2}{|\theta|^3} \right| d\theta. \quad (5.37b)$$

En particulier, on a : $l(0) = l(1) = 0$.

Notons que si l'on avait fait l'étude avec l'équation d'évolution (5.19a-b) de la fibre centrale perturbée au lieu d'utiliser l'équation équivalente (5.15a-b), le calcul d'intégrale singulière aurait déjà été effectué et on serait arrivé à ce même résultat (5.37).

Widnall et Sullivan⁹ ont désingularisé l'intégrale d'une façon un peu différente. Ils n'ont pas tabulé la fonction $l(n)$, mais une autre fonction qu'ils ont appelée $G(n)$. Cependant, leur résultat est équivalent à (5.36) si on enlève le terme $\ln(1+n^2)$ qui est de trop dans leur formule.

Thomson⁸, a fait une étude similaire à la précédente mais uniquement pour des filaments ultra-fins pour lesquels $-\ln \varepsilon \gg 1$. Comme $\theta_c \text{base} = O(\varepsilon)$, il vient $-\ln \theta_c \text{base} \gg 1$, c'est à dire qu'il a limité le développement (5.36) à son ordre logarithmique. L'apport complémentaire de l'étude Widnall et Sullivan⁹ précédente est de donner la correction d'ordre 1 à cette étude de Thomson⁸ pour des filaments ultra fins et de généraliser cette étude à des filaments non ultra-fins pour lesquels le terme logarithmique est alors du même ordre de grandeur que le terme d'ordre 1.

Dans la linéarisation que l'on a faite, les amplitudes ρ et ξ sont de l'ordre d'un petit paramètre d et on a effectué la limite :

$$d \rightarrow 0 \text{ à } 1/\ln \varepsilon \text{ fixé.} \quad (5.38)$$

Pour des anneaux fins ($-1/\ln \varepsilon = O(1)$), l'étude précédente et le résultat (5.34) est valable tant que d est assez petit :

$$d \ll 1.$$

Pour des anneaux ultra fins ($-1/\ln \varepsilon \ll 1$), le résultat (5.34) n'est pas uniquement valable dans le cadre de cette limite (5.38). D'après la discussion du paragraphe V.2.4, il doit être aussi valable dans toute une région $a \in]a_c, +\infty[$ en ordre de grandeur pour laquelle on a le lien $d = \kappa (-1/\ln \varepsilon)^a$. Le domaine de validité de l'étude, pour ces anneaux, est donc :

$$d \ll (-1/\ln \varepsilon)^{a_c}.$$

L'étude qui vient d'être faite n'est plus valable pour la valeur critique a_c , pour laquelle l'équation (5.19) de Callegari et Ting dégénère différemment et dans la région $a \in]0, a_c[$, pour laquelle l'équation du filament doit dégénérer en l'équation de l'induction locale. Il serait intéressant de déterminer cette valeur critique a_c et de voir comment l'équation (5.19) se simplifie alors dans ce régime critique. On pense que ce régime correspond à :

$$d = O(-1/\ln n\varepsilon)$$

et qu'il est l'équivalente pour l'anneau circulaire du régime de Klein et Majda qui a été déterminé pour un filament tourbillon droit (paragraphe VI.3).

n	$\tilde{V}^-(n)$	$\tilde{V}^+(n)$
2	1.665	2.333
3	2.311	2.666
4	2.695	2.920
5	2.967	3.124
6	3.178	3.294
7	3.350	3.440
8	3.496	3.568
9	3.623	3.6815
10	3.734	3.745
11	3.835	3.844

Table 5.1 : Valeurs de $\tilde{V}^-(n)$ et de $\tilde{V}^+(n)$

Lorsque nous substituons cette expression (5.36) de $F(n)$ dans les expressions (5.35a-b) de V_ξ et V_ρ , nous obtenons :

$$\boxed{V_\xi = -\frac{1}{4\pi} n^2 [\tilde{V} - \tilde{V}^+(n)]} \quad (5.39a)$$

$$\boxed{V_\rho = \frac{1}{4\pi} (n^2 - 1) [\tilde{V} + \tilde{V}^-(n)]}, \quad (5.39b)$$

où l'on a défini le paramètre \tilde{V} , que l'on appelle *paramètre de structure* par :

$$\boxed{\tilde{V} = \ln\left(\frac{4}{\theta_{c\text{base}}}\right)} \quad (5.40)$$

et où les expressions de $\tilde{V}^-(n)$ et $\tilde{V}^+(n)$ sont :

$$\boxed{\tilde{V}^-(n) = -\frac{g_\rho(n)}{n^2 - 1}} \quad (5.41a)$$

$$\boxed{\tilde{V}^+(n) = \frac{g_\xi(n)}{n^2}} \quad (5.41b)$$

avec :

$$\boxed{g_\xi(n) = \begin{pmatrix} l(1) - \frac{1}{2} [l(n+1) + l(n-1)] \\ + \frac{1}{2} n [l(n+1) - l(n-1)] \end{pmatrix}} \quad (5.42a)$$

$$g_\rho(n) = \begin{pmatrix} 2l(n) - \frac{1}{2}[l(n+1) + l(n-1)] - l(1) \\ -\frac{1}{2}n[l(n+1) - l(n-1)] \\ -\frac{3}{2} \left[l(0) + l(n) - l(1) - \frac{1}{2}[l(n+1) + l(n-1)] \right] + 1 \end{pmatrix}. \quad (5.42b)$$

Les valeurs de $\tilde{V}^-(n)$ et $\tilde{V}^+(n)$ ont été calculés et sont données dans la table 5.1.

Dans la limite des grands n , les expressions (5.41) de $\tilde{V}^-(n)$ et $\tilde{V}^+(n)$ deviennent :

$$\tilde{V}^-(n) = \ln n + \gamma + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{\ln n + \gamma + 2 \ln 2 - 1}{n^2} + O(n^{-4} \ln n) \quad (5.43a)$$

$$\tilde{V}^+(n) = \ln n + \gamma + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{\ln n + \gamma + 2 \ln 2 - 1 - \frac{14}{3}}{n^2} + O(n^{-4} \ln n). \quad (5.43b)$$

Ces expressions ne sont pas mauvaises depuis $n=2$.

Widnall et Sullivan⁹, ainsi que Thomson⁸, n'ont donné la formule (5.39) de V_ξ et V_ρ

que pour des filaments ultra-fins pour lesquels $\tilde{V} \gg 1$. Pour ces filaments, la formule (5.39) devient :

$$V_\xi = \frac{1}{4\pi} [-n^2 \tilde{V}] \quad (5.44a)$$

$$V_\rho = \frac{1}{4\pi} [(n^2 - 1)\tilde{V}]. \quad (5.44b)$$

Widnall et Sullivan⁹ n'ont pas donné les formules (5.39a-b) de V_ξ et V_ρ et pour continuer l'étude, ils se sont servis des expressions (5.35a-b) de V_ξ et V_ρ , de leur développement de $F(n)$ du même type que (5.36) et des valeurs du terme $G(n)$ qui est équivalent à notre $l(n)$. Il est bien plus agréable de travailler avec les formules (5.39a-b) et les valeurs de $l(n)$.

Thomson⁸ n'a pas utilisé la méthode de coupure de Burgers (4.1a), mais la méthode de coupure (4.1b). D'après la formule (4.13) et la table 4.1, le lien entre sa longueur de coupure θ_c et la longueur θ_c de la méthode de Burgers est :

$$\ln \frac{4}{\theta_c} = \ln \frac{4}{\theta_{c\text{Thomson}}} - 1 + \ln 2 + \frac{1}{2} \quad (5.45)$$

qu'on écrit :

$$\tilde{V} = \tilde{V}_{\text{Thomson}} - 1 + \ln 2 + \frac{1}{2}, \quad (5.46)$$

où l'on a posé :

$$\tilde{V}_{\text{Thomson}} = \ln \frac{4}{\theta_{c\text{Thomson}}} . \quad (5.47)$$

Ainsi, si Thomson⁸ avait tenu compte des termes d'ordre 1, il aurait obtenu :

$$V_\xi = -\frac{1}{4\pi} n^2 \left[\tilde{V}_{\text{Thomson}} - 1 + \ln 2 + \frac{1}{2} - \tilde{V}^+(n) \right] \quad (5.48a)$$

$$V_\rho = \frac{1}{4\pi} (n^2 - 1) \left[\tilde{V}_{\text{Thomson}} - 1 + \ln 2 + \frac{1}{2} + \tilde{V}^-(n) \right]. \quad (5.48b)$$

Les équations (5.48) et (5.39) diffèrent donc d'une constante, mais ne sont pas écrites avec le même paramètre de structure. Le lien entre le paramètre de structure et la structure de l'anneau diffère aussi de cette constante entre les deux méthodes de coupure et ne peut être connu que si l'équation de coupure a été reliée à l'équation de Callegari et Ting. Ce lien n'était pas connu de Thomson pour sa méthode de coupure. On l'a donné au chapitre IV précédent. Il était par contre connu de Widnall et Sullivan⁹ pour la méthode de Burgers.

Puisque la longueur de coupure θ_c est donnée par (5.25d) et la vitesse V_b d'un anneau circulaire par (5.5), le paramètre de structure \tilde{V} d'un anneau tourbillon similaire vaut alors :

$$\tilde{V} = 4\pi V_b = \ln\left(\frac{8}{\delta}\right) - 1 + C_v(0) - 2\left(\frac{\varepsilon m_0}{\delta}\right)^2, \quad (5.49)$$

avec $C_v(0) \approx 0.442$.

La structure interne du filament est prise en compte intégralement par les deux groupements équivalents \tilde{V} ou θ_c , qui sont définis par les formules (5.40) et (5.25d). Les effets de la structure de l'anneau sont complètement décrits par ces groupements.

Au lieu de donner l'expression (5.39) de V_ξ et V_ρ , en fonction du paramètre de structure \tilde{V} , on peut la donner en fonction de la longueur de coupure θ_c par la formule suivante :

$$V_\xi = -\frac{1}{4\pi} n^2 \left[\ln \frac{4}{\theta_c} - \tilde{V}^+(n) \right] \quad (5.50a)$$

$$V_\rho = \frac{1}{4\pi} (n^2 - 1) \left[\ln \frac{4}{\theta_c} + \tilde{V}^-(n) \right] \quad (5.50b)$$

avec l'expression (5.25d) de θ_c .

V.4.2. Le cas non visqueux

Si l'anneau tourbillon est non visqueux ($\alpha = 0$), alors le paramètre de structure \tilde{V} est indépendant du temps et son expression (5.49) devient :

$$\tilde{V} = \ln\left(\frac{8}{\varepsilon}\right) - 1 + C_V(0) - 2m_0^2. \quad (5.51)$$

Les amplitudes solutions des équations (5.34a-b) sont alors de la forme :

$$\rho(t) = \rho_0 e^{\beta t} \quad (5.52a)$$

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\beta t}, \quad (5.52b)$$

où le taux de croissance β est donné par :

$$\beta = \pm \sqrt{V_\rho V_\xi}. \quad (5.53)$$

Suivant le signe du produit $V_\rho V_\xi$, le mode solution est soit stable soit instable. Lorsque le mode est stable, il est purement oscillant et lorsqu'il est instable, il n'est pas oscillant.

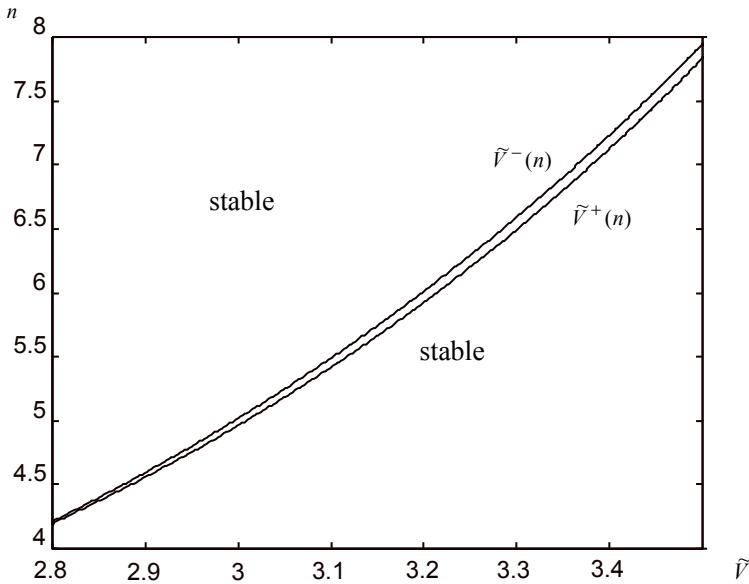


Figure 5.7 Domaines de stabilité et d'instabilité

La condition (5.23) peut s'écrire :

$$n \ll e^{\tilde{V}}. \quad (5.54a)$$

La zone d'instabilité de la figure 5.7 est située pour des valeurs de n de l'ordre de $n = O(e^{\tilde{V}})$. Elle sort donc du domaine de validité de l'étude. Ce graphique n'est plus valable non plus pour des valeurs trop grandes de l'épaisseur ε , ce qui correspond à des valeurs petites ou

négatives du paramètre de structure \tilde{V} . S'il n'y a pas de débit axial, la relation (5.49) indique qu'à la condition $\varepsilon \ll 1$ correspond la condition :

$$\boxed{\tilde{V} > 2}. \quad (5.54b)$$

V.4.2.1. Les modes instables

Lorsque le mode est instable, il est de la forme suivante :

$$\vec{X}(\theta, t) = d(t)\vec{e}_3 + \vec{i}_r(\theta) + 2\rho_0 \cos(n\theta)(\cosh(\beta t)\vec{i}_r(\theta) + \frac{V_\rho}{\beta} \sinh(\beta t)\vec{e}_3). \quad (5.55)$$

La figure 5.8 montre l'évolution et la forme de cette expression (5.55) pour un mode 4 *instable*.

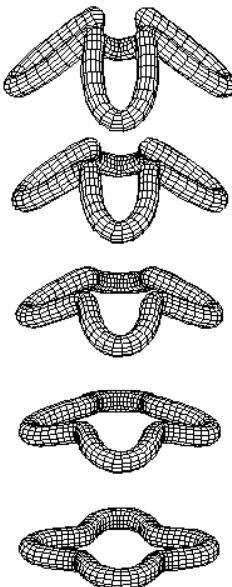


Figure 5.8 Evolution d'un mode 4 *instable* (de bas en haut)

$$\varepsilon = 0.27429, m_0 = 0 \text{ et } 2\rho_0 = 0.25$$

Le taux de croissance β du mode instable n est :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{4\pi} \sqrt{n^2(n^2 - 1)} \sqrt{-[\tilde{V} - \tilde{V}^-(n)][\tilde{V} - \tilde{V}^+(n)]}}, \quad (5.56)$$

où $\tilde{V}^-(n)$ et $\tilde{V}^+(n)$ sont donnés par les formules (5.43a-b) ou la table 5.1. L'abaque de la figure 5.9 représente alors la forme de ce taux de croissance en fonction du paramètre de structure \tilde{V} et du mode n .

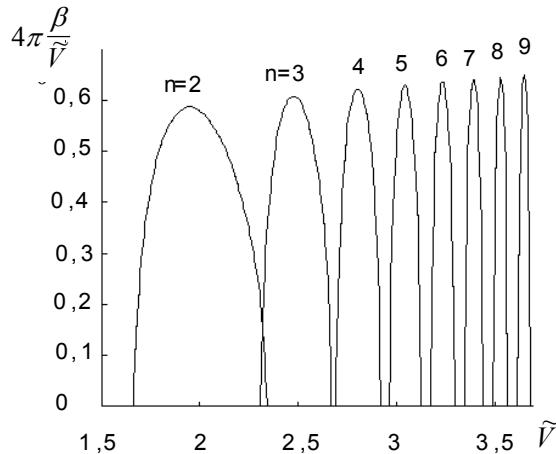


Figure 5.9 : Taux de croissance β suivant le mode
 n et le paramètre de structure \tilde{V}

Pour des filaments ultra fins et sans correction d'ordre 1, Thomson⁸ a obtenu les équations (5.44). L'anneau tourbillon est alors toujours stable. Pour des anneaux fins, mais non ultra fins, ou pour des anneaux ultra fins, mais en tenant compte de la correction d'ordre 1, l'étude de Widnall et Sullivan⁹ ou l'étude suivante montre qu'il existe des modes instables.

Si l'anneau a une structure non visqueuse similaire connue (épaisseur ε , débit axial m_0 et $C_v(0) \approx 0.442$), on peut alors calculer son paramètre de structure \tilde{V} à l'aide de la formule (5.51). Ainsi, à l'aide de la figure 5.9, on détermine facilement quel mode n est instable.

Néanmoins, comme les méthodes de coupure ont été justifiées par comparaison avec l'équation asymptotique d'évolution de Callegari et Ting, qui ne peut pas rendre compte des ondes courtes, les méthodes de coupure ne sont pas valables pour des variations courtes le long de la fibre centrale de l'ordre de l'épaisseur de corps. L'étude précédente ne peut donc pas dire si les ondes courtes sont stables ou pas. Pour des modes tels que $n = O(\frac{1}{\varepsilon})$, le graphique 5.9 n'est plus valable, c'est à dire qu'il faut que :

$$n \ll e^{\tilde{V}}.$$

Ce graphique n'est plus valable non plus pour des valeurs trop grandes de l'épaisseur ε . Il faut donc que :

$$\tilde{V} > 2.$$

D'après la figure 5.9, on trouve toujours un mode instable, mais pour des valeurs de n qui sont grandes. C'est pour cela que Widnall et Sullivan⁹ ont qualifié *d'instabilité fictive de*

Widnall', l'instabilité qu'ils ont trouvée et dont le taux de croissance est représenté sur la figure 5.9.

V.4.2.2. Les modes stables

Lorsque le mode est stable, il est de la forme suivante :

$$\vec{X}(\theta, t) = d(t)\vec{e}_3 + R_0 \vec{i}_r(\theta) + 2 \cos(n\theta)\rho_0 (\cos(\omega t)\vec{i}_r(\theta) + \frac{V_\rho}{\omega} \sin(\omega t)\vec{e}_3), \quad (5.57)$$

où ω est la pulsation définie par :

$$\beta \equiv \pm i\omega. \quad (5.58)$$

La figure 5.10 montre l'évolution et la forme de cette expression (5.57) pour un mode 4 *stable* qui est initialement dans un plan (figure 5.10a) ou qui ne l'est pas (figure 5.10b).

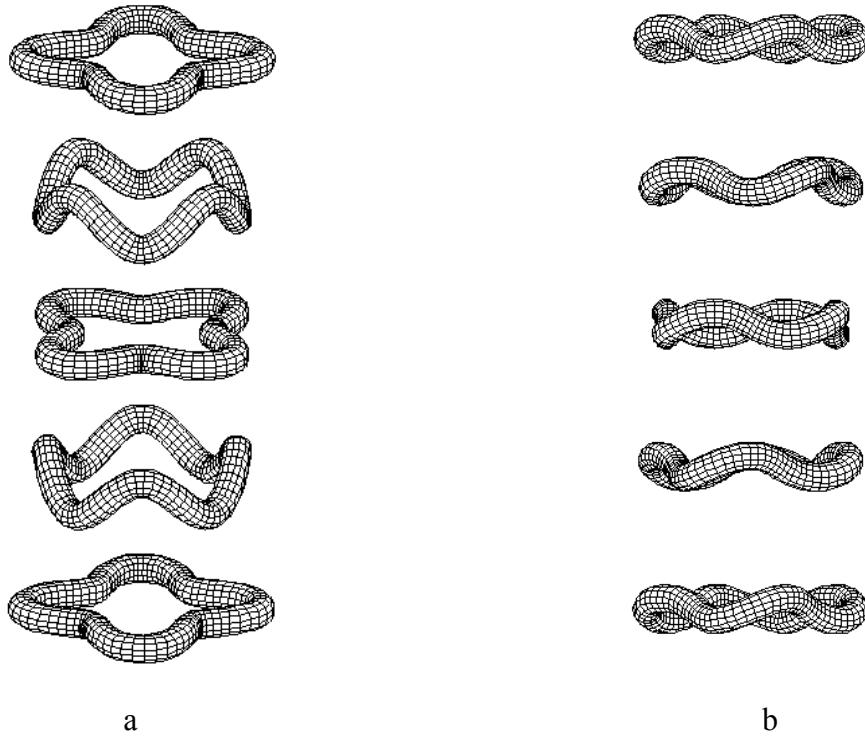


Figure 5.10 Evolution d'un mode 4 stable (de bas en haut)
pour $\varepsilon = 0.27429$, $m_0 = 0$ et $2\rho_0 = 0.25$
initialement dans un plan (a) ou pas (b)

La forme (5.57) des modes explique les résultats numériques des figures 5.5 et 5.6. D'après cette forme, les points d'intersection initiaux entre le cercle de l'anneau non perturbé et la fibre de l'anneau perturbée restent toujours à la même place dans le référentiel lié à l'anneau circulaire non perturbé. Si nous suivons un point pour une valeur fixe du paramètre

θ , il tourne autour de la fibre circulaire comme nous le voyons sur la figure 5.11. Ainsi, si nous regardons le tourbillon perturbé depuis la *direction* \vec{e}_3 , il est initialement dans un plan avec n boucles. Au temps $T/4$, où T est la période d'oscillation, il ressemble à un cercle. Au temps $T/2$, il est dans un plan comme initialement, mais avec les boucles à l'opposé d'où elles étaient initialement. Au temps $3T/4$, il ressemble de nouveau à un cercle et au temps T , il a la même forme qu'au début.

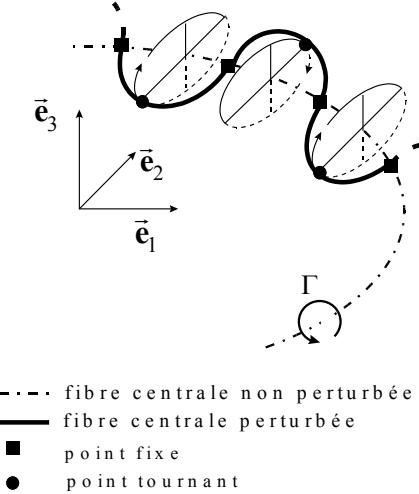


Figure 5.11 : Oscillations d'un anneau tourbillon

La période T d'oscillation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.59)$$

du mode n est :

$$T = \frac{8\pi^2}{\sqrt{(n^2 - 1)n^2} \sqrt{[\tilde{V} - \tilde{V}^+(n)][\tilde{V} - \tilde{V}^-(n)]}}, \quad (5.60)$$

où le paramètre de structure \tilde{V} est donné par la formule (5.51) et $\tilde{V}^-(n)$ et $\tilde{V}^+(n)$ par les (5.43a-b) ou la table 5.1.

Si on néglige $\tilde{V}^-(n)$ et $\tilde{V}^+(n)$ dans (5.60), on retrouve la période donnée par Thomson⁸ ou Da Rios⁷ pour des anneaux tourbillons ultra fins :

$$T = \frac{8\pi^2}{\tilde{V} \sqrt{(n^2 - 1)n^2}}. \quad (5.61)$$

Dans le cas $n=2$, cette expression (5.60) de la période est en accord avec celle de Dahnak et De Bernardinis³, qui ont utilisé les résultats de Widnall et Sullivan⁹.

L'abaque de la figure 5.12 représente alors la forme de cette période en fonction du paramètre de structure \tilde{V} et du mode n .

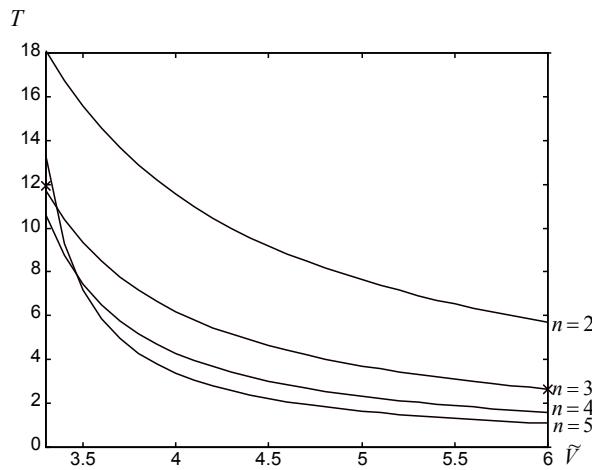


Figure 5.12 : Période d'oscillation suivant
le paramètre de structure \tilde{V} et le mode n

On voit sur cette figure que la période de l'anneau diminue si son épaisseur diminue et si son mode augmente.

V.4.3. Le cas visqueux

Dans le cas visqueux ($\alpha \neq 0$) l'expression (5.49) montre que le paramètre de structure \tilde{V} dépend du temps. Les termes V_ξ et V_ρ sont des fonctions du temps.

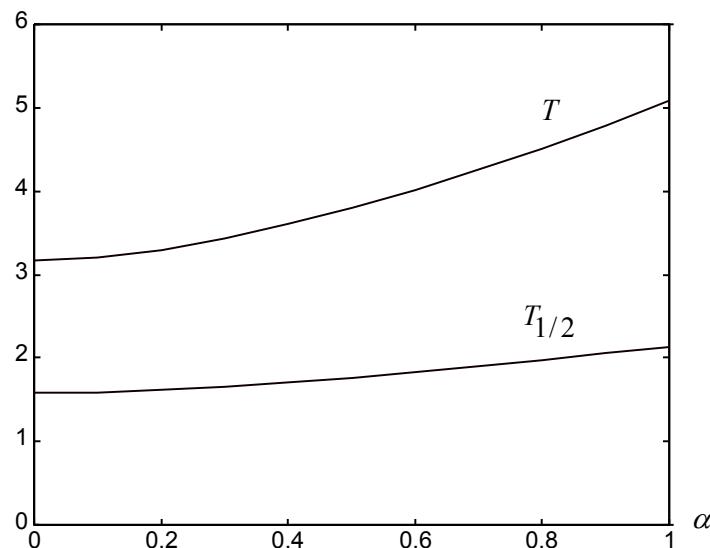


Figure 5.13 : Période d'oscillation visqueuse en fonction
du paramètre de viscosité α pour le mode $n=3$
(- étude linéaire, x simulation numérique)

Les équations (5.34a-b) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= V_\xi(t)\xi \\ \dot{\xi} &= V_\rho(t)\rho\end{aligned}. \quad (5.62)$$

Les solutions de (5.62) sont déterminées numériquement en utilisant une méthode de Runge Kutta. On obtient alors l'évolution de la figure 5.13 pour la période en fonction du paramètre de viscosité α . La première période et la première demi-période augmentent en fonction du paramètre de viscosité.

V.4.4. Le champ de vitesse d'un anneau circulaire perturbé

Jusqu'à présent, on a obtenu l'évolution de la fibre centrale d'un anneau tourbillon circulaire perturbé, mais rien n'a été dit sur le champ de vitesse associé. Dans ce paragraphe, on donne sa forme à une distance du filament grande par rapport à son épaisseur, puis à une distance de l'ordre de son épaisseur. Remarquons que dans l'étude analytique de stabilité linéaire qu'on vient de faire, seule la fibre centrale a été perturbée et pas le champ de vitesse relatif à cette fibre centrale.

V.4.4.1. Le développement extérieur du champ de vitesse

Dans coordonnées cylindriques (q, θ, z) , associées à la géométrie de l'anneau circulaire, le champ de vitesse de l'anneau circulaire *sans débit axial* est axisymétrique.

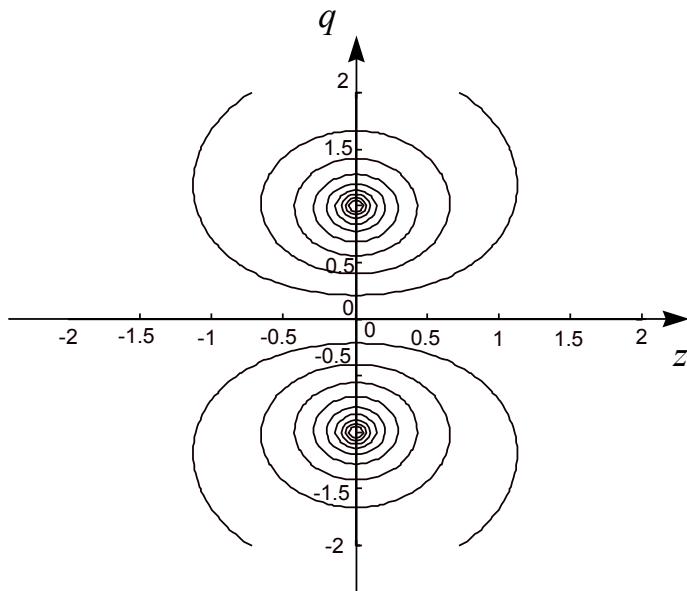


Figure 5.14 Lignes de courant du champ de vitesse extérieur
dans un plan méridien d'un anneau circulaire

Dans un plan méridien (q, z) , la fonction de courant ψ de l'écoulement est donnée par la formule :

$$\psi(q, z) = \frac{q}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta^*}{\sqrt{z^2 + q^2 + 1 - 2q \cos \theta^*}} d\theta^*, \quad (5.63)$$

pour un anneau de rayon 1 situé en $z = 0$. Les lignes de courant du champ de vitesse dans un plan méridien sont représentées sur la figure 5.14. Ce champ est le développement extérieur du champ de vitesse. Il est singulier en un point de la fibre centrale de l'anneau.

V.4.4.2. Le développement intérieur du champ de vitesse

Pour compléter le champ de vitesse de la figure 5.14, il faut donner le développement intérieur du champ de vitesse. Il est décomposé selon la formule (1.5) :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \dot{\vec{X}}(s, t) + \vec{V}(\vec{x}, t). \quad (5.64)$$

Les figures du chapitre III.12.3 nous donnent la forme du champ de vitesse relatif $\vec{V}(\vec{x}, t)$ et l'étude précédente V.4.2 et V.4.3 nous donne la vitesse $\dot{\vec{X}}(s, t)$ de la fibre centrale, puisque l'on connaît comment celle-ci se déplace.

Seules la partie axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1 et la partie de la vitesse $\dot{\vec{X}}(s, t)$ de la fibre centrale selon la tangente $\vec{\tau}(\theta, t)$ n'ont pas été données. Pour un anneau circulaire, la contribution $\dot{\vec{X}} \bullet \vec{\tau}$ de la vitesse tangente due à l'intégrale de Biot et Savart est nulle. Pour un anneau circulaire perturbé, on peut obtenir sa valeur analytique à partir de la formule (5.28c) :

$$\dot{\vec{X}} \bullet \vec{\tau} \vec{\tau} = \left[\vec{\text{Cut}}(\theta, t) \bullet \vec{\tau}(\theta, t) \right] \vec{\tau}(\theta, t) = -\xi V_\tau i e^{in\theta} \vec{i}_\theta \quad (5.65)$$

avec

$$V_\tau = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} [F(n+1) - F(n-1)] - nF(n) \\ + \frac{n}{2} [F(n+1) + F(n-1)] - n[F(0) - F(1)] \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

et nous trouvons :

$$V_\tau = \frac{1}{8\pi} (3n + 4n^3) [\tilde{V} - \tilde{V}^c(n)] \quad (5.67)$$

$$\tilde{V}^c(n) = -\frac{2g_\tau(n)}{(3n+4n^3)} \quad (5.68)$$

avec $g_\tau(n) = -\frac{1}{2}[l(n+1) - l(n-1)] - nl(n) + \frac{n}{2}[l(n+1) + l(n-1)] - n[l(0) - l(1)]$.

Pour n grand, on a :

$$\tilde{V}^c(n) = \frac{1}{2} \frac{2 \ln 2 + \ln n + \gamma - 2}{n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right). \quad (5.69)$$

Nous avons déterminé une fois pour toute les valeurs de $\tilde{V}^c(n)$, dans la table suivante :

n	$\tilde{V}^c(n)$
2	0.07
3	0.05
4	0.04
5	0.03
6	0.024
7	0.019
8	0.016
9	0.013

Table 5.2 : Valeurs de $\tilde{V}^c(n)$

Dans le cas des *oscillations stables*, (5.65) s'écrit :

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} \bullet \vec{\mathbf{r}}(\theta, t) \left[\vec{\mathbf{r}}(\theta, t) = -2\rho_0 L \cos(n\theta) \sin(\omega t) \vec{\mathbf{i}}_\theta \right] \quad (5.70)$$

avec

$$L = \frac{V_\rho V_\tau}{\omega} = V_\tau \sqrt{-\frac{V_\rho}{V_\xi}} = -\frac{1}{8\pi} (3n+4n^3) \sqrt{\frac{(n^2-1)}{n^2}} [\tilde{V} - \tilde{V}^c(n)] \sqrt{\frac{\tilde{V} - \tilde{V}^-(n)}{\tilde{V} - \tilde{V}^+(n)}}. \quad (5.71)$$

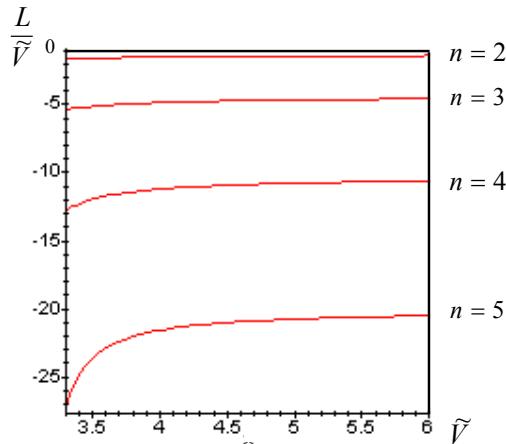


Figure 5.15 : Evolution du paramètre L

Nous avons représenté l'évolution du coefficient L avec le coefficient de structure sur la figure 5.15.

Le champ de vitesse axiale dû à l'intégrale de Biot et Savart est représenté sur la figure 5.16.

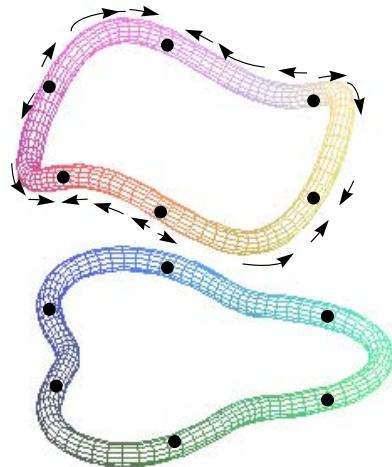


Figure 5.16 : Champ de vitesse axiale dû à l'intégrale de Coupure

Pour ce mode 3, initialement il n'y a pas de vitesse axiale due à Biot et Savart, puis il se forme trois points d'étirements et trois points de compressions qui correspondent aux points d'inflexions de la ligne centrale. Nous rappelons que ce sont des points immobiles dans le référentiel lié à l'écoulement de base. Cette vitesse est d'ordre 1 et elle se rajoute donc à la vitesse relative axiale à l'ordre 1.

V.5. Comparaison entre les simulations numériques et l'étude analytique linéaire

Nous pouvons comparer les résultats de l'étude analytique linéaire du paragraphe précédent avec des simulations numériques réalisées avec un profil initial (5.21) dont l'amplitude $r_0 = 0.01$ de la perturbation est petite. Le cas $\varepsilon = 0.02$ du paragraphe V.3 correspond à $\tilde{V} = 5.433$ et à une amplitude r_0 plus grande.

V.5.1. Le cas non visqueux

Pour un anneau non visqueux, la comparaison entre la période analytique et la période trouvée numériquement est en très bon accord. Sur la figure 5.17, la comparaison est faite pour le mode 3 en fonction du paramètre de structure \tilde{V} . Nous avons également réalisé la simulation d'un mode 4 instable non visqueux avec $\varepsilon = 0.27429$, $r_0 = 0.01$ et nous avons

trouvé un taux d'amplification de $\beta = 0.16$ qui est en bon accord avec la prédition linéaire de $\beta = 0.14$.

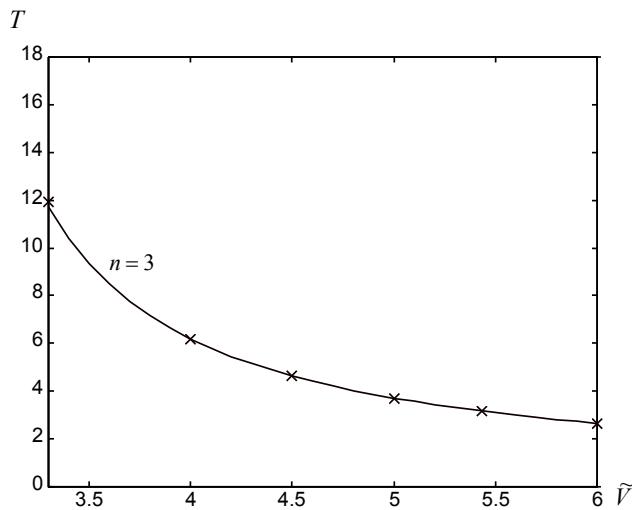


Figure 5.17 : Période d'oscillation suivant
le paramètre de structure \tilde{V} et le mode n
(- étude linéaire, x simulation numérique)

V.5.2. Le cas visqueux

Dans le cas visqueux, le tourbillon initialement dans un plan, est de nouveau dans un plan au temps $T_{1/2}$ que nous appelons la '*demi-pseudo-période*', puis au temps T que nous appelons la '*pseudo-période*' du tourbillon.

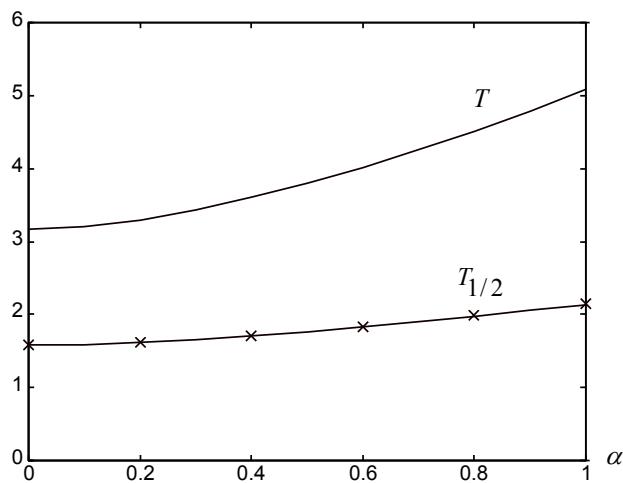


Figure 5.18 : Demi-période d'oscillation visqueuse en fonction
du paramètre de viscosité α pour le mode $n=3$
(- étude linéaire, x simulation numérique)

La figure 5.18 donne la demi-période d'oscillation du tourbillon pour un mode 3 avec $\varepsilon = 0.02$ en fonction du paramètre visqueux α . Il y a un bon accord entre la simulation et l'étude analytique linéaire.

V.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié numériquement les *oscillations de grandes longueurs d'onde* d'un anneau circulaire de faible épaisseur. Une étude analytique linéaire a donné une formule pour la période d'oscillation de l'anneau tourbillon qui est en bon accord avec les simulations numériques.

Ce chapitre complète l'étude linéaire de Widnall et Sullivan⁹, car ces auteurs n'ont pas donné de résultat sur la période d'oscillation et n'ont pas fait de comparaison avec des simulations numériques. Il généralise leur étude, car il prend en compte une vitesse axiale et que l'effet de la viscosité a également été étudié.

V.6. Bibliographie du chapitre V

1. CALLEGARI,A.J. et TING,L. 1978 Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1), 148-175
2. CROW,S.C. 1970 Stability theory for a pair of trailing vortices, *AIAA J.* **8**, 2172-2179
3. DHANAK,M.R. et DE BERNARDINIS,B. 1981 The evolution of an elliptic vortex ring, *J. Fluid Mech.* **109**, 189-216
4. LIU,C.H. et TAVANTZIS,J. et TING L. 1986 Numerical studies of motion and decay of vortex filaments, *AIAA Journal* **24** (8), 1290-1297
5. LOUGH,M.F. 1994 On the dynamics of ultra-thin vortex filaments, *Phys. Fluids* **6** (5), 1745-1751
6. MOORE,D.W. et SAFFMAN,P.G. 1974 A note on the stability of a vortex ring in of small cross-section, *Proc. R. Soc. London. A* **338**, 535-537
7. RICCA,R.L. 1996 The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics, *Fluid Dynamics Research* **18**, 245-268
8. THOMSON,J.J. 1882 On the vibration of a vortex ring and the action upon each other of two vortices in a perfect fluid, *Phil. Trans.*, 493-521
9. WIDNALL,S.E. et SULLIVAN,J.P. 1973 On the stability of vortex rings, *Proc. R. Soc. London A* **332**, 335-353
10. WIDNALL,S.E. 1975 The structure and dynamics of vortex filaments, *Annual Review of Fluid Mechanics* **7**, 141-165
11. WIDNALL,S.E., TSAI,C.Y. 1977 The Instability of the Thin Vortex Ring of Constant Vorticity, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **287**, pp. 273-305
12. ZEYTOUNIAN, R.Kh. 1985 Les Modèles Asymptotiques de la Mécanique des Fluides I., *Lecture Notes in Physics* **245**

Chapitre VI

LE FILAMENT NON FERMÉ

Dans ce chapitre, on étudie un filament non fermé, dont la fibre centrale \mathcal{C} est décrite paramétriquement à l'aide d'une fonction $\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}(s, t)$ avec $s \in]-\infty, +\infty[$. Il est représentée sur la figure 6.1.

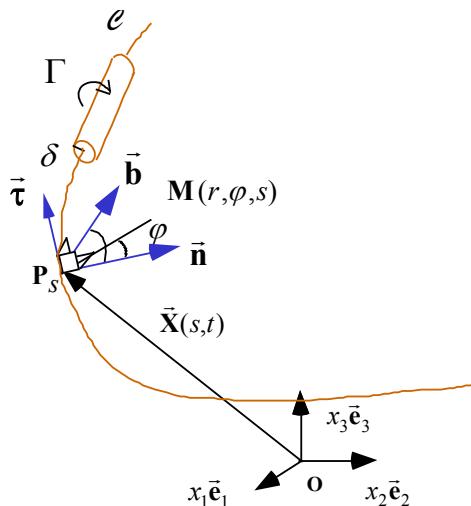


Figure 6.1 La filament tourbillon non fermé

Pour ce filament, nous obtenons les résultats équivalents à ceux que nous avons déterminés dans les chapitres II, III, IV précédents pour un anneau tourbillon. On détermine d'abord les développements extérieur et intérieur du champ de vitesse induit par le filament tourbillon, puis l'équation d'évolution de sa fibre centrale. On justifie alors les méthodes de coupure pour ce filament. Après avoir étudié un filament droit soumis à sa propre induction ou à un étirement longitudinale, on étudie le régime de Klein et Majda, les oscillations d'un filament droit et la stabilité de deux filaments parallèles.

VI.1. Champ de vitesse induit par un filament tourbillon non fermé

Ce paragraphe est l'équivalent du chapitre II. Nous cherchons les développements intérieur et extérieur du champ de vorticité ainsi que du champ de vitesse induit. Nous déterminons également le comportement près du filament du développement extérieur du champ de vitesse, ainsi que le comportement loin du filament du développement intérieur du champ de vitesse.

On ne peut pas se servir directement des résultats du chapitre II obtenus pour un anneau tourbillon de longueur S , car ces résultats font apparaître la longueur S du filament qui ici est infini. Cependant en séparant le filament en un morceau fini sur lequel on peut se servir des résultats du chapitre II et en deux morceaux semi-infinis, on trouve les résultats désirés. C'est ce comportement de l'abscisse s qui peut devenir infini qui distingue les résultats de ce paragraphe à ceux du chapitre II.

Comme pour le chapitre II, on s'intéresse à un filament tourbillon, qui n'a pas de petites longueurs d'ondes. On donne également les résultats simplifiés pour un filament dont l'ordre principal du champ de vitesse est axisymétrique et indépendant de l'abscisse. A part dans le sous-paragraphe VI.4, tous les champs de ce chapitre sont donnés pour la configuration initiale à $t=0$ et **on omettra systématiquement de mettre l'indice 0 qui doit le signaler**. On étudie un filament tourbillon avec une fibre centrale initiale \vec{X} de la forme

$\vec{X}(a)$ et un champ de vorticité initial $\vec{\omega}$ de la forme $\vec{\omega} = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{(0)}(\vec{r}, \varphi, a)$, où a est le paramètre sur la fibre centrale.

VI.1.1. Le développement extérieur du champ de vitesse

Comme pour un anneau tourbillon, le développement extérieur ($\varepsilon \rightarrow 0$ à \vec{x} fixé) du champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x}, \varepsilon)$ est :

$$\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a, \varepsilon) = \vec{v}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, a) + \varepsilon \vec{v}^{\text{out}(1)}(r, \varphi, a) + O(\varepsilon^2) \quad (6.1)$$

avec

$$\vec{v}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, a, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\tau}(a') \wedge ((\vec{X}(a) + r\vec{r}(\varphi, a)) - \vec{X}(a'))}{\left|(\vec{X}(a) + r\vec{r}(\varphi, a)) - \vec{X}(a')\right|^3} da'. \quad (6.2)$$

L'ordre principal du développement extérieur du champ de vitesse est donc une distribution de Dirac $\delta_{\vec{e}} \vec{\tau}$ concentrée sur la fibre centrale.

VI.1.2. La limite près du filament du développement extérieur champ de vitesse

Pour déterminer le développement proche de la fibre centrale de l'ordre principal $\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a)$ du développement extérieur du champ de vitesse, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés des intégrales singulières comme pour un anneau. On rappelle que dans cette méthode, nous développons d'abord l'intégrant par rapport à r à $\frac{a' - a}{r}$ fixé dans un voisinage du point $\mathbf{M}(r, \varphi, a)$, puis nous intégrons selon a' (Figure 6.2a). En dehors de ce voisinage, nous développons l'intégrant par rapport à r à $a' - a$ fixé et nous intégrons selon a' (Figure 6.2b). On obtient alors le résultat voulu en sommant les deux développements obtenus.

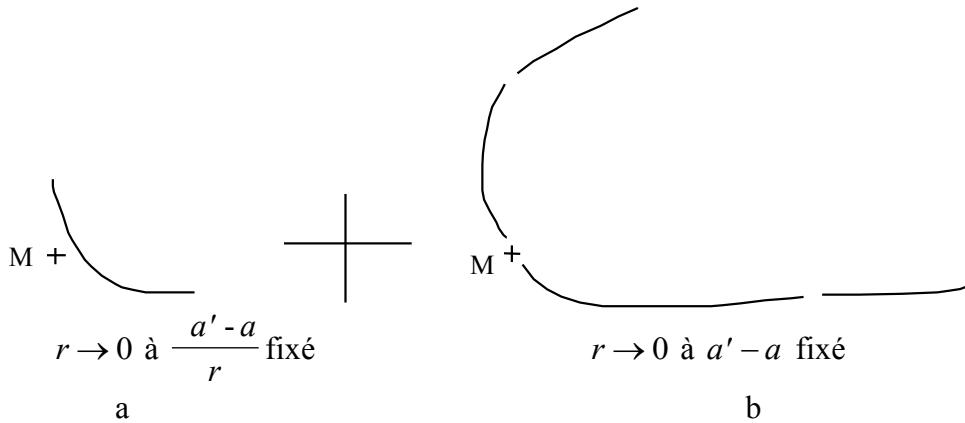


Figure 6.2: Schéma de la méthode de développement de l'intégrale singulière $\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a)$.

Pour un filament ouvert, le calcul diffère sensiblement de ce qui se passe pour un anneau. En dehors du voisinage du point $\mathbf{M}(r, \varphi, a)$, on est obligé de séparer l'intégrale en deux parties. Une partie sur une longueur \tilde{L} de l'ordre de 1 autour du point $\mathbf{M}(r, \varphi, a)$ qui se comporte comme pour un anneau tourbillon. Puis, une partie qui est composée de deux morceaux semi-infinis (Figure 6.2b). Sur celle-ci, le comportement est différent, car le terme

$$\frac{K(a)\vec{b}(a)}{2|a'|},$$

que l'on retranche à

$$\frac{\vec{\tau}(a + a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a + a'))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a + a')|^3},$$

pour que l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a'))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a')|^3} - \frac{K(a)\vec{\mathbf{b}}(a)}{2|a'|} da' \quad (6.3)$$

soit convergente en $a' = a$, introduit une singularité logarithmique lorsque a' est infini.

Si on choisit $\tilde{L} = 2$, le développement de $\vec{\mathbf{v}}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, a)$ pour r voisin de zéro est

(Annexe A.3) :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, a) = & \frac{1}{2\pi r} \vec{\theta} + \frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{2}{r} - 1 \right] \vec{\mathbf{b}} + \frac{K}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta} \\ & + \vec{\mathbf{A}} \\ & + \frac{3}{16} \frac{K^2}{\pi} r \left\{ \begin{aligned} & (\vec{\mathbf{r}} \sin 2\varphi + \vec{\theta} \cos 2\varphi) \left[\ln \frac{2}{r} - \frac{4}{3} \right] + \frac{1}{2} \vec{\theta} \cos 2\varphi \\ & + \frac{1}{18} \vec{\theta} + \frac{4}{3K^2} (\vec{\mathbf{B}} - 3\vec{\mathbf{C}} - \vec{\theta}) \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{1}{4\pi} r (K_a \sin \varphi - KT \cos \varphi) \left[\ln \frac{2}{r} - 1 \right] \vec{\tau} \\ & + O(r^2 \ln r) \end{aligned}} \quad (6.4a)$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}}(a) = \frac{1}{4\pi} \left[\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a'))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a')|^3} da' \\ & - H(1-|a'|) \frac{K(a)\vec{\mathbf{b}}(a)}{2|a'|} \end{aligned} \right]} \quad (6.4b)$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}}(a) = \lim_{l \rightarrow 0} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_l^{+\infty} \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a'))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a')|^3} da' \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^l \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a'))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a')|^3} da' \\ & - \frac{1}{4\pi} \frac{K(a)\vec{\mathbf{b}}(a)}{2} 2 \ln \left(\frac{1}{l} \right) \end{aligned} \right]} \quad (6.4c)$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{B}}(\varphi, a) = \vec{\mathbf{r}}(\varphi, a) \wedge \left[\begin{aligned} & - \frac{\vec{\tau}(a+a')}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a')|^3} \\ & + H(1-|a'|) \frac{1}{|a'|^3} (\vec{\tau}(a) + K(a)\vec{\mathbf{n}}(a)a' + \left[\begin{aligned} & (K_a(a)\vec{\mathbf{n}}(a) \\ & + K(a)T(a)\vec{\mathbf{b}}(a)) \frac{a'^2}{2} \\ & - \frac{3}{4} K^2(a)\vec{\tau}(a) \end{aligned} \right]) \end{aligned} \right] da'} \quad (6.4d)$$

$$\vec{C}(\varphi, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\vec{r}(\varphi, a) \bullet (\vec{X}(a+a') - \vec{X}(a))}{|\vec{X}(a+a') - \vec{X}(a)|^5} [\tau(a+a') \wedge (\vec{X}(a+a') - \vec{X}(a))] \right] da', \quad (6.4e)$$

$$+ H(1-|a'|) \frac{K^2(a)}{4} \frac{\vec{b}(a) \cos \varphi}{|a'|}$$

où H est la fonction d'Heaviside.

Si on compare ces relations avec celles d'un anneau tourbillon, on voit que les formules (6.4b), (6.4d) et (6.4e) changent par rapport aux formules (2.11b), (2.11c) et (2.11d), car les intégrales sont sommées sur $]-\infty, +\infty[$ au lieu de $]-S/2, +S/2[$ et qu'elles font apparaître la fonction d'Heaviside. Les formules (6.4a) et (6.4c) sont les mêmes que les formules (2.11a) et (2.12) avec la longueur S remplacée par 2.

VI.1.3. Le développement intérieur du champ de vitesse

Comme au paragraphe précédent, le calcul du développement intérieur du champ de vitesse du filament tourbillon ouvert diffère sensiblement de ce qui se passe pour un anneau. On est obligé de séparer en deux parties l'extérieur du voisinage du point $\mathbf{M}(r, \varphi, a)$. Une partie sur une longueur \tilde{L} de l'ordre de 1 autour du point $\mathbf{M}(r, \varphi, a)$ qui se comporte comme pour un anneau tourbillon. Puis, une partie qui est composée de deux morceaux semi-infinis (Figure 6.3).

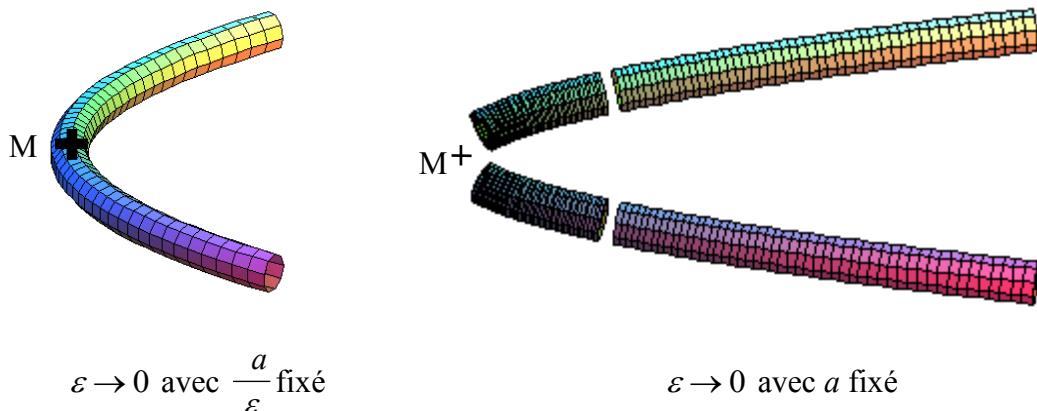


Figure 6.3: Schéma de la méthode de développement de l'intégrale singulière $\bar{v}(r, \varphi, a, \epsilon)$.

Le développement intérieur du champ de vitesse du filament tourbillon ouvert est l'expression (2.16) d'un anneau tourbillon dans laquelle la longueur S est remplacée par 2 et l'expression de \vec{A} par (6.4b).

VI.1.4. Généralisation des résultats

Dans le même cadre que le paragraphe II.7, l'expression (6.4b) de $\vec{A}(a)$ est généralisée au temps t par :

$$\boxed{\vec{A}(s,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\sigma^{(0)}(s+s',t) \frac{\vec{\tau}^{(0)}(s+s',t) \wedge (\vec{X}^{(0)}(s+s',t) - \vec{X}^{(0)}(s,t))}{|\vec{X}^{(0)}(s+s',t) - \vec{X}^{(0)}(s,t)|^3} - H(1 - |\lambda^{(0)}(s,s',t)|) \frac{K^{(0)}(s,t)}{2} \frac{\vec{b}^{(0)}(s,t) \sigma^{(0)}(s+s',t)}{|\lambda^{(0)}(s,s',t)|} \right] ds'} \quad (6.5)$$

avec

$$\lambda^{(0)}(s,s',t) = \int_s^{s+s'} \sigma^{(0)}(s^*,t) ds^*. \quad (6.6)$$

VI.2. Évolution d'un filament tourbillon à structure normale simple

Presque tous les calculs du chapitre III pour un anneau tourbillon restent valables. Nous n'avons cependant plus le droit de développer les fonctions en série de Fourier selon l'abscisse s , car celles-ci ne sont plus forcément périodiques. Les équations de compatibilités sont aussi satisfaites pour un filament dont l'ordre principal des parties axisymétriques des champs sont indépendantes de l'abscisse. Les parties non axisymétriques des équations se résolvent comme pour un anneau et le raccord asymptotique se passe de la même façon, à part que pour le réaliser, nous nous servons des résultats du paragraphe précédent.

L'équation d'évolution du filament est donc :

$$\dot{\vec{X}} - (\vec{X} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = \left(\frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] + KC^* \right) \vec{b} + \vec{A} - (\vec{A} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau}, \quad (6.7)$$

avec pour \vec{A} et $C^*(t)$ les expressions (6.5) et (3.33b). *Cette équation d'évolution est celle d'un anneau tourbillon dans laquelle l'expression de \vec{A} est remplacée par (6.5) et la longueur S par 2.*

Par rapport au paragraphe III.8.1, *les équations qui changent sont les équations (3.50a-b) d'évolution de l'ordre principal des champs*. Les parties axisymétriques (3.46a-d) des équations sont toujours valables, mais on ne peut plus les développer en série de Fourier selon l'abscisse s , car la périodicité n'est plus vérifiée. Si on les moyenne selon l'abscisse s , il reste les valeurs en l'infini de l'ordre 1 des champs. Les équations d'évolution de l'ordre principal des champs sont (ce point nécessiterait d'être vérifié) de la forme suivante :

$$\boxed{\frac{\partial v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial t} - \alpha^2 \left[\frac{1}{\bar{r}} \left(r \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}} - \frac{v^{(0)}(\bar{r},t)}{\bar{r}^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} c(t) = 0} \quad (6.8a)$$

$$\boxed{\frac{\partial w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial t} - \frac{\alpha^2}{\bar{r}} \left[r \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} \right]_{\bar{r}} - \frac{1}{2} \bar{r}^3 \left[\frac{w^{(0)}(\bar{r},t)}{\bar{r}^2} \right]_{\bar{r}} c(t) = 0}, \quad (6.8b)$$

où $c(t)$ est un taux d'étirement indépendant de l'abscisse. Pour chaque valeur de $c(t)$, on a une évolution différente de la structure interne du filament et ce sont les conditions aux limites imposées aux extrémités du filament qui fixent $c(t)$.

En prenant un gradient de la forme :

$$\frac{\partial w_c^{(1)}(\bar{r},s,t)}{\partial s} = -\sigma^{(0)} + a(s,t)\sigma^{(0)},$$

on a alors les équations de compatibilité suivantes :

$$\frac{\partial v_c^{(1)}(\bar{r},s,t)}{\partial s} = -\frac{\sigma^{(0)}(s,t)}{w^{(0)}(\bar{r},t)} \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} \frac{1}{2} (c(t) - a(s,t)) \quad (6.9a)$$

$$\frac{\partial p_c^{(1)}(\bar{r},s,t)}{\partial s} = \sigma^{(0)}(s,t) \left(\frac{1}{2} r \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} - w^{(0)}(\bar{r},t) (c(t) - a(s,t)) \right), \quad (6.9b)$$

qui donnent l'expression des gradients axiaux de l'ordre 1 des champs. L'expression de $a(s,t)$

qui remplace la relation (3.56) doit être donnée par (3.72a) où par $a(s,t) = \frac{\sigma^{(0)}}{\sigma^{(0)}}$ ainsi qu'il a été discuté au paragraphe III.9.1.

VI.3. Le régime de Klein et Majda

On cherche comment se simplifie l'équation (6.7) d'évolution du filament non fermé pour un filament droit perturbé (Figure 6.4) de la forme suivante :

$$\vec{X}(a, \bar{t}, d) = a \vec{\tau}_0 + d^2 \vec{X}^{(2)} \left(\tilde{a} = a/d, \bar{t} = t/d^2 \right) + o(d^2), \quad (6.10)$$

où d^2 est l'ordre de grandeur de l'amplitude de la perturbation et d celle de sa longueur d'onde. Le filament droit non perturbé est $\vec{X}_0(a) = a \vec{\tau}_0$. Nous appelons ce filament, *le filament de Klein et Majda*. Le petit paramètre d que l'on rajoute ici en plus de l'épaisseur ε du filament satisfait la condition $2\varepsilon \ll d \ll 1$.

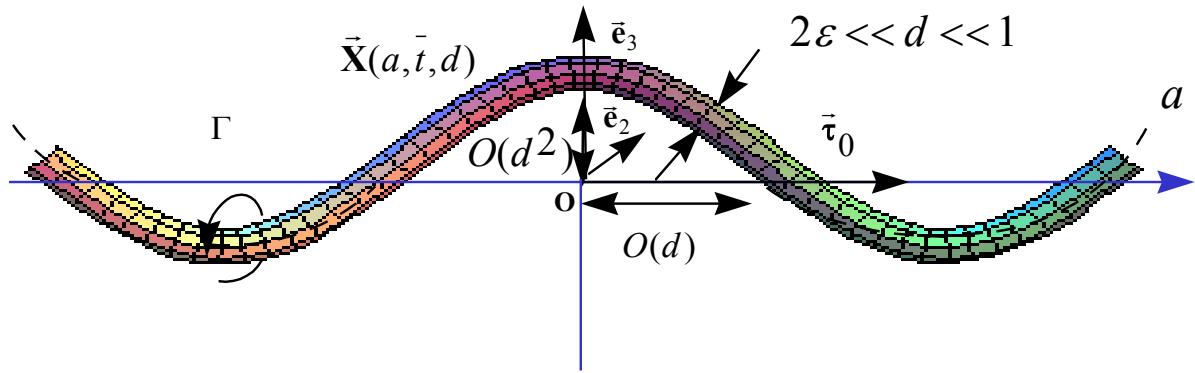


Figure 6.4 Le filament de Klein et Majda

VI.3.1. Simplification de l'équation d'évolution

Pour le filament de Klein et Majda, l'équation (6.7) d'évolution du filament devient (Annexe A.16):

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{a}, t) = \frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{a}, \tilde{t}) = \frac{1}{\tilde{\alpha}}(K\vec{b})(d\tilde{a}, t) - (\vec{\tau}_0 \wedge \vec{J}(\tilde{a}, t) + O(d)) \quad (6.11a)$$

avec :

$$\vec{J}(\tilde{a}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\vec{X}^{(2)}(\tilde{a} + h, t) - \vec{X}^{(2)}(\tilde{a}, t)) - h \frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a} + h, t)}{|h|^3} \right] dh \quad (6.11b)$$

$$\tilde{a} = 1 / \left(\frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{2d}{\varepsilon} - 1 \right] + C^* \right) \quad (6.11c)$$

$$(K\vec{b})(d\tilde{a}, t) = \vec{\tau}_0 \wedge \vec{X}_{\tilde{a}\tilde{a}}^{(2)}(\tilde{a}, t) + O(d) \quad (6.11d)$$

et

$$\tilde{t} = t/d^2.$$

Si $\tilde{\alpha} \gg d$, on est alors dans le cas de l'*approximation linéaire* et (6.11a) devient :

$$\frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{a}, \tilde{t}) = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \vec{\tau}_0 \wedge \vec{X}_{\tilde{a}\tilde{a}}^{(2)}(\tilde{a}, \tilde{t}) - \vec{\tau}_0 \wedge \vec{J}(\tilde{a}, \tilde{t}) \quad (6.12a)$$

Comme $\vec{X}^{(2)} \bullet \vec{\tau}_0 = 0$, la courbe de la perturbation $\vec{X}^{(2)}$ est dans un plan et l'on peut la remplacer par sa représentation complexe que nous notons ψ . D'après (6.12a), ψ vérifie alors :

$$\frac{1}{i} \psi_{\tilde{t}} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \psi_{\tilde{a}\tilde{a}} - J(\psi), \quad (6.12b)$$

où

$$J(\psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\psi(\tilde{\alpha} + h, \bar{t}) - \psi(\tilde{\alpha}, \bar{t})) - h \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\alpha}}(\tilde{\alpha} + h, \bar{t})}{|h|^3} + H(1 - |h|) \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\alpha}}(\tilde{\alpha}, \bar{t})}{2|h|} \right] dh. \quad (6.13)$$

Il est alors intéressant d'introduire le changement de variables suivant :

$$\tau = \bar{t} / \tilde{\alpha}. \quad (6.14)$$

Les équations (6.12a-b) s'écrivent alors :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(2)}}{\partial \tau}(\tilde{\alpha}, \tau) = \vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{X}}_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}^{(2)}(\tilde{\alpha}, \tau) - \tilde{\alpha} \vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{J}}(\tilde{\alpha}, \tau)} \quad (6.15a)$$

$$\boxed{\frac{1}{i} \psi_\tau = \psi_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}} - \tilde{\alpha} J(\psi)}. \quad (6.15b)$$

VI.3.2. L'équation de la fonction filament ψ

A partir de la relation suivante de définition de la fonction complexe ψ

$$\psi = K \exp(i \int_0^s T ds), \quad (6.16)$$

dite transformation d'Hasimoto, où K , T et s sont respectivement la courbure, la torsion et l'abscisse sur le filament $\vec{\mathbf{X}}(s, t)$; Hasimoto³ a montré que l'équation :

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial t}(s, t) = (K \vec{\mathbf{b}})(s, t) \quad (6.17a)$$

peut être transformée en l'équation de Schrödinger non linéaire suivante pour la *fonction fibre* ψ :

$$\frac{1}{i} \psi_t = (\psi_{ss} + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi). \quad (6.17b)$$

De façon générale, si la transformation d'Hasimoto^{3,5} est appliquée à l'équation (6.11a), nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{1}{i} \psi_{\bar{t}} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} (\psi_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}} + d^2 \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi) - (J(\psi) + O(d)), \quad (6.18)$$

où $\bar{t} = t/d^2$ et $\psi = O(1)$.

Il est alors intéressant d'introduire le changement de variables suivant :

$$\tau = \bar{t} / \tilde{\alpha} . \quad (6.19a)$$

L'équation (6.18) de la fonction fibre ψ s'écrit alors sous la forme plus intéressante :

$$\boxed{\frac{1}{i} \psi_\tau = \psi_{\tilde{a}\tilde{a}} + d^2 \left(\frac{1}{2} |\psi|^2 \psi - \tilde{\alpha} (J(\psi) + O(d)) \right)} . \quad (6.20)$$

VI.3.3. Les différentes dégénérescences de l'équation de la fonction filament ψ

La première dégénérescence intéressante de l'équation (6.20) est obtenue lorsque $\tilde{\alpha} \gg d^2$. L'équation (6.20) devient alors l'équation (6.15b) du cas linéaire :

$$\boxed{\frac{1}{i} \psi_\tau = \psi_{\tilde{a}\tilde{a}} - \tilde{\alpha} J(\psi) \quad \text{si } \tilde{\alpha} \gg d^2} . \quad (6.21a)$$

En effet, le terme non linéaire $d^2 \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi$ disparaît, car il est de l'ordre de termes que l'on a négligés pour que le terme non local $\bar{\mathbf{A}}(s, t, d)$ devienne $-J(\psi)$ à l'ordre 1.

On obtient une correction faiblement non linéaire de l'étude linéaire jusqu'à l'ordre d^2 en gardant le terme $d^2 \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi$ et en cherchant le développement de $\bar{\mathbf{A}}(s, t, d)$ jusqu'à d^2 dans le cas $\tilde{\alpha} = O(1)$ et jusqu'à l'ordre d dans le cas $\tilde{\alpha} = O(d)$.

La deuxième dégénérescence intéressante de l'équation (6.20) est obtenue lorsque l'on est dans le régime de Klein et Majda⁵ pour lequel $\tilde{\alpha} = O(d^2)$. L'équation (6.20) de la fonction fibre ψ devient alors :

$$\boxed{\frac{1}{i} \psi_\tau = \psi_{\tilde{a}\tilde{a}} + d^2 \left(\frac{1}{2} |\psi|^2 \psi - \kappa J(\psi) \right) \quad \text{si } \tilde{\alpha} = O(d^2)} \quad (6.21b)$$

avec

$$\kappa = \tilde{\alpha} / d^2 = O(1) .$$

Le cas $\kappa = 1$ est celui traité par Klein et Majda⁵. Dans cette équation, le terme local de l'équation de Callegari et Ting fait intervenir des non linéarités au même ordre que le terme non local, qui est devenu linéaire, car on est dans le cas de perturbations de petites amplitudes.

La troisième dégénérescence intéressante de l'équation (6.20) est obtenue lorsque $\tilde{\alpha} \ll d^2$. L'équation (6.20) devient alors:

$$\boxed{\frac{1}{i} \psi_\tau = \psi_{\tilde{a}\tilde{a}} + d^2 \left(\frac{1}{2} |\psi|^2 \psi \right) \quad \text{si } \tilde{\alpha} \ll d^2} . \quad (6.21c)$$

C'est le cas de l'approximation de l'induction locale pour laquelle le terme intégral non local est négligeable devant la non linéarité locale.

VI.3.4. Zoom sur le filament de Klein et Majda

Sur la figure 6.4, on remarque qu'avec la longueur caractéristique d'adimensionnalisation qui a été choisie pour représenter la forme (6.10) du filament de Klein et Majda, il n'apparaît pas d'échelle de longueur d'ordre 1. Si on dilate toutes les échelles à l'aide du paramètre d en prenant comme nouvelle échelle caractéristique l'ancienne multipliée par d , les nouvelles variables spatiales sont les anciennes divisées par d :

$$\tilde{\mathbf{X}}(\tilde{a}, \bar{t}, d) = \bar{\mathbf{X}}(\tilde{a}, \bar{t}, d) / d$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon / d.$$

Si l'on prend la circulation Γ comme autre grandeur caractéristique d'adimensionnalisation, le nouveau temps \bar{t} est l'ancien t divisé par d^2 :

$$\bar{t} = t / d^2.$$

Le filament a alors la nouvelle forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{X}}(\tilde{a}, \bar{t}, d) = \tilde{a} \tilde{\tau}_0 + d \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a}, \bar{t}) + o(d). \quad (6.22)$$

A cette échelle, on le voit comme sur la figure 6.5.

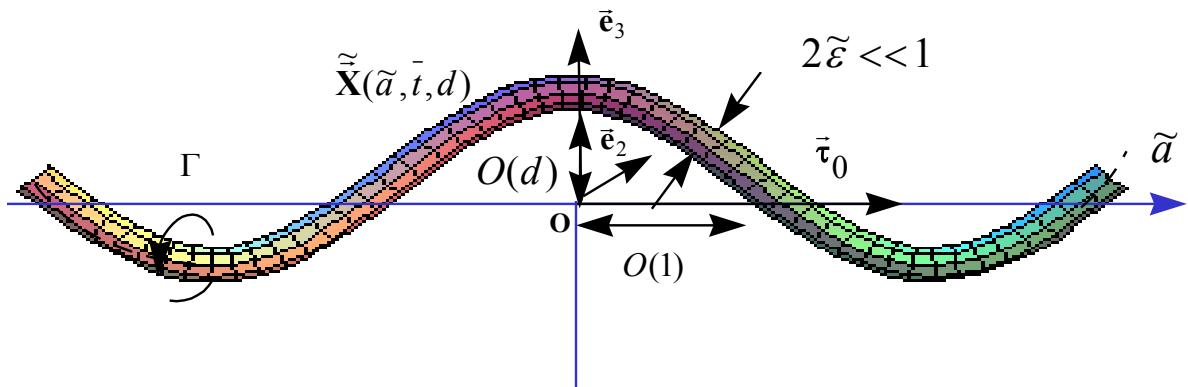


Figure 6.5 Zoom du filament de Klein et Majda

C'est un filament droit perturbé par une perturbation d'amplitude d et de longueur d'onde de l'ordre de 1. La description à l'aide de la nouvelle longueur caractéristique est plus simple que celle donnée par (6.10) et la Figure 6.4. On constate encore une fois l'importance de la longueur caractéristique dans la description d'un problème.

Le régime de Klein et Majda $\tilde{\alpha} = O(d^2)$ nécessite d'être dans le cas des *filaments ultra fins* pour lesquels $\ln \frac{\varepsilon}{d} = \ln \tilde{\varepsilon} \gg 1$. En effet, pour ces filaments, on a alors $\tilde{\alpha} \ll 1$. Dans le cas d'un filament non ultra fin $\ln \frac{\varepsilon}{d} = \ln \tilde{\varepsilon} = O(1)$ et on a $\tilde{\alpha} = O(1)$.

VI.3.5. Discussion des différents régimes pour l'équation de la fonction fibre ψ

Sur la figure 6.6, on a représenté les différentes simplifications que prend l'équation de Callegari et Ting en fonction du rapport qu'il existe entre l'amplitude d^2 du filament (6.10) de Klein et Majda et son épaisseur ε . On fait apparaître ce rapport dans le nombre :

$$\tilde{\alpha} = 1 / \left(\frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{2d}{\varepsilon} - 1 \right] + C^* \right).$$

Sur cette figure, d_s est la valeur de la racine de l'amplitude de la perturbation à partir de laquelle on ne peut plus négliger la première correction non linéaire dans le développement asymptotique du terme non local $\bar{\mathbf{A}}(s, t, d)$ en fonction de d .

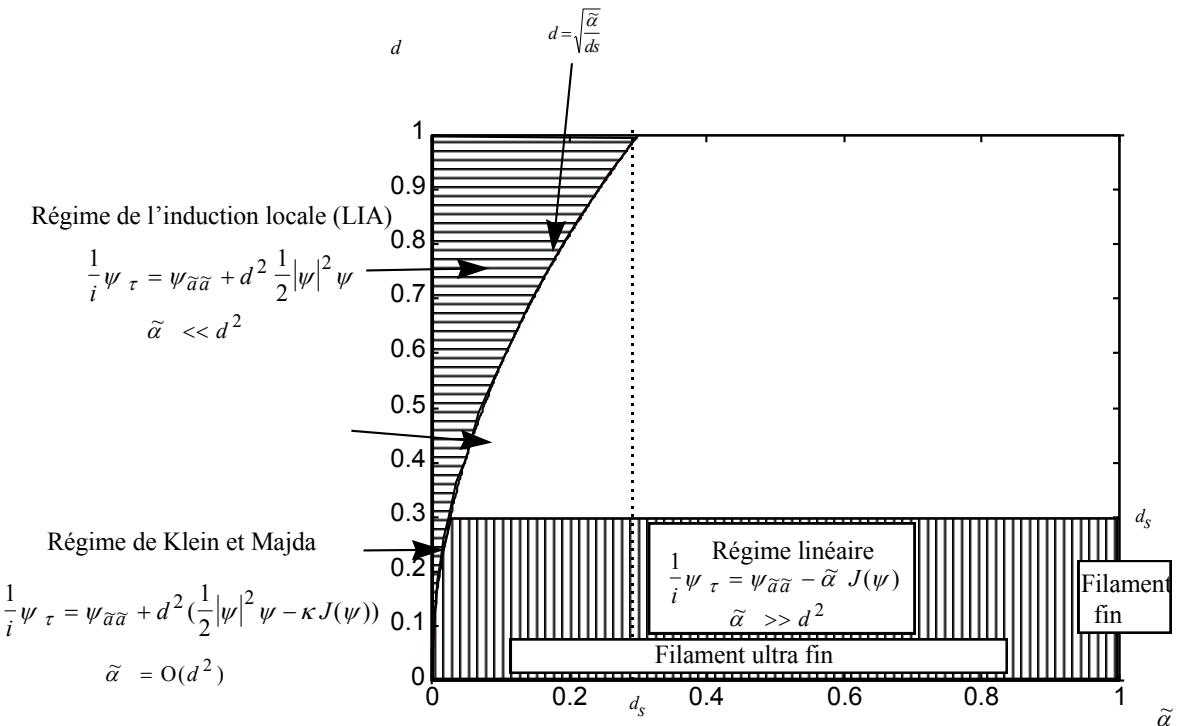


Figure 6.6: Zones de simplification de l'équation de Callegari et Ting

Il apparaît trois zones de simplification :

- la zone d'induction locale : $d > \sqrt{\tilde{\alpha}/d_s}$
- la zone du régime de Klein et Majda : $d = \sqrt{\tilde{\alpha}/d_s}$ et $d < d_s$
- la zone linéaire : $d < \sqrt{\tilde{\alpha}/d_s}$ et $d < d_s$

La zone complémentaire à ces trois zones est celle de l'équation complète de Callegari et Ting pour laquelle la non linéarité du terme non local $\vec{A}(s, t, d)$ intervient. Dans ces trois zones, on peut remplacer l'équation de Callegari et Ting par l'équation (6.20) et suivant la zone, l'équation se simplifie encore en une des équations (6.21).

A épaisseur de corps fixé ($\tilde{\alpha}$ fixé) et $\tilde{\alpha} \ll 1$, lorsque l'amplitude d^2 augmente, on passe progressivement du régime linéaire au régime de Klein et Majda, puis au régime de l'induction locale. Il faut faire attention que la linéarisation du régime de Klein et Majda n'est pas le régime linéaire. Le régime de Klein et Majda n'est valable que pour $d = O(\sqrt{\tilde{\alpha}})$ et pas pour $d \ll \sqrt{\tilde{\alpha}}$ ou $d \gg \sqrt{\tilde{\alpha}}$. A épaisseur de corps fixé ($\tilde{\alpha}$ fixé) et $\tilde{\alpha} = O(1)$, lorsque l'amplitude d^2 augmente, on passe progressivement du régime linéaire au régime non linéaire complet. Le régime de Klein et Majda n'est alors jamais applicable.

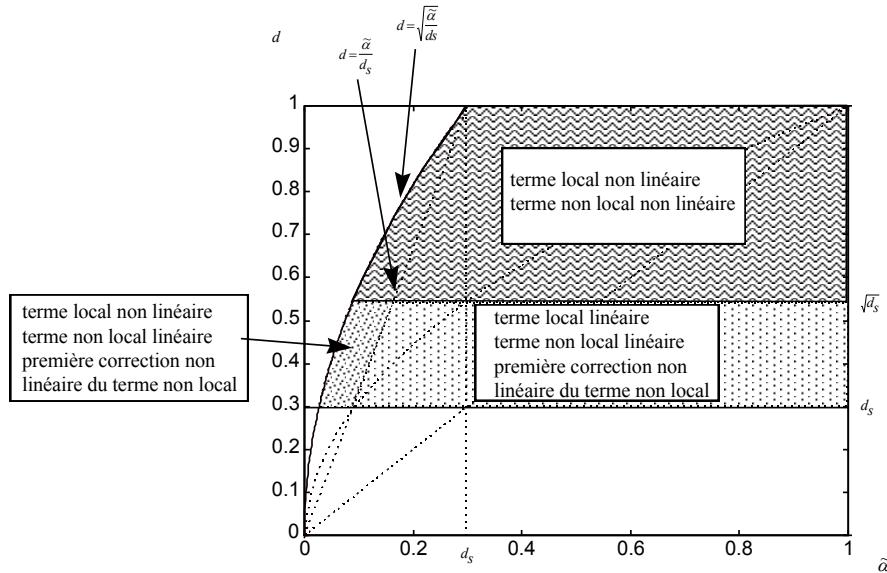


Figure 6.7: Description de la zone de l'équation complète de Callegari et Ting

Remarquons, qu'à géométrie fixée et donc à amplitude d^2 fixée, lorsque l'on diminue l'épaisseur du filament et donc $\tilde{\alpha}$, on finit alors par être dans le domaine de l'induction locale. A amplitude d fixée et $d \ll 1$, lorsque l'épaisseur de corps augmente ($\tilde{\alpha}$ augmente),

on passe progressivement du régime de l'induction locale au régime de Klein et Majda pour finir dans le régime linéaire. A amplitude d fixé et $d = O(1)$, lorsque l'épaisseur de corps augmente ($\tilde{\alpha}$ augmente), on passe progressivement du régime de l'induction locale au régime de l'équation de Callegari et Ting complète.

On peut compléter la figure 6.6 en présentant ce qu'il se passe dans la zone de l'équation complète de Callegari et Ting dans laquelle on pourrait chercher des approximations faiblement non linéaires. C'est l'objet de la figure 6.7.

VI.3.6. Un temps court logarithmique ?

Si on utilise l'adimensionnalisation du paragraphe VI.3.4, on remarque que pour les équations de Callegari et Ting simplifiées, on a utilisé le changement de temps $\tau = \tilde{t} / \tilde{\alpha}$ avec :

$$\tilde{\alpha} = 1 / \left(\frac{1}{4\pi} \left[-\ln \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} - 1 \right] + C^* \right).$$

Si $-\ln \tilde{\varepsilon} \gg 1$, alors $\tilde{\alpha} \ll 1$ et τ est donc un temps court logarithmique. On peut également faire ce changement de variable sur l'équation de Callegari et Ting complète (6.7), qui devient :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}} - (\vec{\mathbf{X}} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = \vec{\mathbf{b}} + \tilde{\alpha} [\vec{\mathbf{A}} - (\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau}].$$

Dans l'étude précédente, on s'est placé sur le *temps court logarithmique* τ et nous avons négligé l'évolution lentement variable selon un temps long t . Profitons de cette occasion pour souligner que le temps long n'est pas obligé d'intervenir. En effet, en prenant le développement suivant non polynomial de la fibre centrale :

$$\vec{\mathbf{X}}(s, \tilde{t} = -\ln \varepsilon t, \varepsilon) = \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, \tilde{t}) + \frac{1}{\ln \varepsilon} \vec{\mathbf{X}}^{(01)}(s, \tilde{t}) + \varepsilon \vec{\mathbf{X}}^{(1)}(s, \tilde{t}) + \frac{\varepsilon}{\ln \varepsilon} \vec{\mathbf{X}}^{(12)}(s, \tilde{t}) + \dots, \quad (6.23)$$

on arrive de satisfaire exactement le raccord asymptotique échelles par échelles en s'affranchissant d'un temps long. On obtient alors les équations suivantes de la fibre centrale aux différents ordres :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(0)}}{\partial \tilde{t}}(s, \tilde{t}) &= \frac{K^{(0)}(s, \tilde{t})}{4\pi} \vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, \tilde{t}) \\ \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(01)}}{\partial \tilde{t}}(s, \tilde{t}) &= \vec{\mathbf{Q}}^*(s, \tilde{t}) + \frac{K^{(0)}(s, \tilde{t})}{4\pi} [\ln(S(\tilde{t})) - 1 + C_v(\tilde{t}) + C_w(\tilde{t})] \vec{\mathbf{b}}^{(0)}(s, \tilde{t}). \end{aligned}$$

Dans le cas $-\ln \tilde{\varepsilon} \gg 1$, nous n'avons encore pas réussi à conclure si le bon développement solution du problème d'évolution de la fibre centrale d'un filament tourbillon est (3.109), ou bien (6.23) ou un mélange de ces deux développements. Peut-être que ces deux développements sont des façons équivalentes de décrire la solution de notre problème.

VI.4. Les méthodes de coupure

Pour un filament infini, la méthode de coupure de Burgers s'écrit :

$$\dot{\vec{X}}(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{]-\infty, +\infty[\setminus [s-s_c, s+s_c]} \frac{\sigma(s', t) \vec{\tau}(s', t) \wedge (\vec{X}(s, t) - \vec{X}(s', t)) ds'}{\left| \vec{X}(s, t) - \vec{X}(s', t) \right|^3}. \quad (6.24)$$

De la même façon, les autres méthodes de coupure sont les formules du paragraphe IV.1 dans lesquelles on remplace l'intervalle $[0, 2\pi[$ par $]+\infty, -\infty[$.

En soustrayant ces équations avec l'équation (6.7), la contribution des intégrales sur l'intervalle $]+\infty, -\infty[\setminus [0, 2\pi[$ disparaît, si bien que l'on n'a plus qu'à comparer leur contribution sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. La comparaison de ces équations se ramène donc à celle d'un filament de longueur fini qui a été étudié au paragraphe IV.3.

Pour un filament tourbillon non fermé, les méthodes de coupure s'appliquent comme pour un anneau tourbillon et on a le même lien entre la longueur de coupure et l'épaisseur.

VI.5. Le cas bidimensionnel

En imposant une courbure et une vitesse axiale nulle dans l'équation (6.7), on doit retrouver le cas bidimensionnel du paragraphe I.6.2.

Si le filament est placé dans un écoulement potentiel $\vec{v}_{\text{back}}(r)$, l'équation (6.7) s'écrit :

$$\dot{\vec{X}} - (\vec{X} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = \left(\frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] + KC^* \right) \vec{b} + \vec{A} - (\vec{A} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} + \vec{v}_{\text{back}}(r=0). \quad (6.25)$$

Si la courbure est nulle et si le filament n'a pas de vitesse axiale, cette équation devient :

$$\boxed{\dot{\vec{X}} = \vec{v}_{\text{back}}(r=0)}. \quad (6.26)$$

L'équation (6.8) donne alors l'équation suivante du champ de vitesse :

$$\boxed{\frac{\partial v^{(0)}}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial r} - \frac{v^{(0)}}{r^2} + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial r^2} \right)}. \quad (6.27)$$

Remarquons que si on impose $S(t) = S_0$ dans l'équation (3.50a) du champ d'un anneau tourbillon (Paragraphe III.11), on obtient (6.27). A l'aide de l'équation (3.93f), on déduit alors que l'expression du champ de vitesse solution de (6.27) est :

$$v^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{1}{r} \left[\tilde{D}_0 (1 - e^{-\eta^2}) + e^{-\eta^2} \sum_1^{\infty} \tilde{D}_n (1 + \tau_{\alpha})^{-n} (L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)) \right] \quad (6.28a)$$

avec

$$\bar{\delta}(t) = \sqrt{1 + \tau_{\alpha}} \quad (6.28b)$$

$$\eta = \frac{\bar{r}}{\bar{\delta}(t)} \quad (6.28c)$$

$$\tau_{\alpha} = 4\alpha^2 t \quad (6.28d)$$

$$\tilde{C}_n = \int_0^{\infty} w^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta \quad (6.28e)$$

$$\tilde{D}_n = \int_0^{\infty} \omega_3^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta \quad (6.28f)$$

$$L_n(\eta^2) = \sum_0^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{\eta^{2m}}{m!}. \quad (6.28g)$$

Pour un filament similaire, on a simplement :

$$v^{(0)} = \frac{1}{2\pi r} (1 - e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}\right)^2}) \quad (6.29a)$$

$$\bar{\delta}(t) = \sqrt{1 + 4\alpha^2 t} \quad (6.29b)$$

A l'aide de (3.98c), la solution de (6.27) s'écrit aussi sous forme d'un opérateur intégral de Green :

$$v^{(0)}(\bar{r}, t) = -\frac{1}{r} \int_0^{\infty} v_0(\tilde{\xi}) \frac{e^{-(\bar{r}^2 + \tilde{\xi}^2)/\tau_{\alpha}}}{\tau_{\alpha}} I_0\left(\frac{2\bar{r}\tilde{\xi}}{\tau_{\alpha}}\right) \tilde{\xi} d\tilde{\xi} \quad (6.30)$$

avec

$$\tau_{\alpha} = 4\alpha^2 t.$$

D'après la formule (3.28b), l'ordre 1 de la fonction de courant est nulle :

$$\Psi_{11}^{(1)} = 0. \quad (6.31)$$

Nous retrouvons donc les résultats⁸ du paragraphe I.1.6.2 pour un point tourbillon.

VI.6. Le filament droit étiré

Autour d'un filament dont la fibre centrale $\vec{X}(s,t)$ est droite, on impose un écoulement potentiel d'étirement de la forme suivant :

$$\vec{v}_{\text{back}}(r,s) = \alpha r \cos \varphi \ \vec{r} + \beta r \sin \varphi \ \vec{\theta} + \gamma s \vec{\tau} \quad (6.32)$$

avec

$$\alpha + \beta + \gamma = 0. \quad (6.33)$$

Le paramètre s sur la fibre centrale est celui qui vérifie

$$\dot{\vec{X}} \bullet \vec{\tau} = 0. \quad (6.34)$$

Comme la fibre centrale est droite, on a alors $\dot{\sigma} = 0$ et finalement $\sigma = 1$ vis-à-vis de la condition initiale. L'abscisse sur le filament est donc une longueur d'arc. Comme le filament est dans un écoulement potentiel, son équation d'évolution (6.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{X}} - (\dot{\vec{X}} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} &= \left(\frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] + KC^* \right) \vec{b} \\ &\quad + \vec{A} - (\vec{A} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} \\ &\quad + \vec{v}_{\text{back}}(r=0,s) - (\vec{v}_{\text{back}}(r=0,s) \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} \end{aligned} \quad (6.35)$$

et comme la courbure est nulle, cette équation devient :

$$\dot{\vec{X}} = 0. \quad (6.36)$$

La fibre centrale est donc immobile avec le choix du paramétrage (6.34) que l'on a fait. Cependant, avec ce choix, le filament a une vitesse axiale à l'ordre 1 qui vérifie :

$$w_c^{(1)}(r,s,t) = \gamma s + w_c^{(1)}(r,t), \quad (6.37)$$

Le gradient axial de vitesse axiale est donc donné par :

$$\frac{\partial w_c^{(1)}(r,s,t)}{\partial s} = \gamma. \quad (6.38)$$

La relation (3.47) donne alors la valeur suivante de la partie axisymétrique de la vitesse radiale à l'ordre 2 :

$$\sigma^{(0)}(s,t) u_c^{(2)}(\bar{r},s,t) = -\frac{1}{r} \int_0^{\bar{r}} z \frac{\partial w_c^{(1)}(z,s,t)}{\partial s} dz - \frac{1}{2} r \frac{\partial \sigma^{(0)}(s,t)}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2} \bar{r}. \quad (6.39)$$

Les équations axisymétriques (3.46c-d) deviennent :

$$\frac{\partial v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial t} - \alpha^2 \left[\frac{1}{\bar{r}} \left(\bar{r}(v^{(0)}(\bar{r},t))_{\bar{r}} \right)_{\bar{r}} - \frac{v^{(0)}(\bar{r},t)}{\bar{r}^2} \right] = (\bar{r}v^{(0)}(\bar{r},t))_{\bar{r}} \frac{\gamma}{2} \quad (6.40a)$$

$$\frac{\partial w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial t} - \frac{\alpha^2}{\bar{r}} \left[\bar{r}(w^{(0)}(\bar{r},t))_{\bar{r}} \right]_{\bar{r}} = \bar{r}^3 \left(\frac{w^{(0)}(\bar{r},t)}{\bar{r}^2} \right)_{\bar{r}} \frac{\gamma}{2}. \quad (6.40b)$$

Si on définit $S(t)$ par la relation :

$$\gamma = \frac{\dot{S}}{S}, \quad (6.41)$$

on a

$$S = e^{\gamma t}.$$

Les paragraphes III.11 et III.12, nous indiquent que ce système a une solution similaire de la forme :

$$v^{(0)} = \frac{1}{2\pi\bar{r}} \left(1 - e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}\right)^2} \right) \quad (6.42a)$$

$$\omega_3^{(0)} = \frac{1}{\pi\bar{\delta}^2} e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}\right)^2} \quad (6.42b)$$

$$w^{(0)} = \frac{m_0}{\pi\bar{\delta}^2} \left(\frac{S_0}{S} \right)^2 e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}\right)^2} \quad (6.42c)$$

avec

$$\bar{\delta}(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{\gamma t}}} \left(1 + \frac{4\alpha^2}{\gamma} [e^{\gamma t} - 1] \right)^{1/2}. \quad (6.43)$$

L'épaisseur du filament tend donc exponentiellement dans le temps vers la valeur constante :

$$\boxed{\bar{\delta}(t \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{4\alpha^2}{\gamma}}} \quad (6.44)$$

et les champs tendent très rapidement vers les profils stationnaires du vortex de Burgers :

$$\boxed{v^{(0)} = \frac{1}{2\pi\bar{r}} \left(1 - e^{-\gamma \frac{\bar{r}^2}{4\alpha^2}} \right)} \quad (6.45a)$$

$$\omega_3^{(0)} = \frac{\gamma}{4\pi\alpha^2} e^{-\gamma \frac{\bar{r}^2}{4\alpha^2}} \quad (6.45b)$$

$$w^{(0)} = 0. \quad (6.45c)$$

On retrouve donc l'équation aux dérivées partielles (3.40a) et la solution (6.45a) de l'article de Moffatt et all⁷.

VI.7. Oscillation d'un filament droit

Dans ce paragraphe, nous étudions la stabilité d'un filament droit d'épaisseur ε . La solution de base de l'étude de stabilité est un filament droit immobile dont la fibre centrale $\vec{\mathbf{X}}_b(x, t)$ est :

$$\boxed{\vec{\mathbf{X}}_b(x, t) = x\vec{\tau}_0}, \quad (6.46)$$

où $\vec{\tau}_0$ est un vecteur unitaire sur le filament droit.

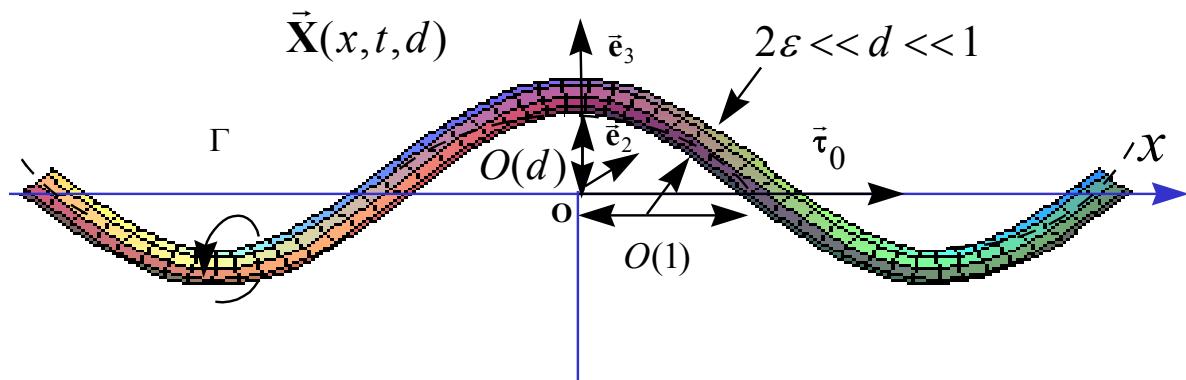


Figure 6.8 Le filament droit et sa perturbation

Pour une perturbation d'amplitude d et de longueur d'onde de l'ordre de 1, la fibre centrale a la représentation suivante :

$$\vec{\mathbf{X}}(x, t, d) = \vec{\mathbf{X}}_b(x) + \vec{\mathbf{X}}'(x, t, d) = \vec{\mathbf{X}}_b + d\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(x, t). \quad (6.47)$$

Le filament perturbé est représenté sur la figure 6.8. Nous sommes dans le même cadre d'étude que dans le paragraphe VI.3.4 avec les variables $\tilde{\alpha}, \tilde{t}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathbf{X}}$ qui sont respectivement notées ici $x, t, \varepsilon, \vec{\mathbf{X}}$.

VI.7.1. L'équation de la perturbation

Dans ce paragraphe, nous recherchons l'équation vérifiée par la perturbation $\vec{\mathbf{X}}^{(2)}$.

A l'aide des développements suivants :

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}(x+x') &= \frac{\vec{\mathbf{X}}_x}{|\vec{\mathbf{X}}_x|} = \frac{\vec{\tau}_0 + d\vec{\mathbf{X}}_x^{(2)}}{|\vec{\tau}_0 + d\vec{\mathbf{X}}_x^{(2)}|} + o(d) \\
\vec{\mathbf{X}}(x+x') - \vec{\mathbf{X}}(x) &= x' \vec{\tau}_0 + d(\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(x+x') - \vec{\mathbf{X}}^{(2)}(x)) \\
\frac{\vec{\tau}(x+x') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(x+x') - \vec{\mathbf{X}}(x))}{|\vec{\mathbf{X}}(x+x') - \vec{\mathbf{X}}(x)|^3} &= d\vec{\tau}_0 \wedge \frac{(\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(x+x') - \vec{\mathbf{X}}^{(2)}(x)) - x' \vec{\mathbf{X}}_x^{(2)}(x+x')}{|x'|^3} + o(d) \\
\vec{\mathbf{X}}_{xx} &= d\vec{\mathbf{X}}_{xx}^{(2)} + o(d) \\
(K\vec{\mathbf{b}})(x) &= \frac{\vec{\mathbf{X}}_x \wedge \vec{\mathbf{X}}_{xx}}{|\vec{\mathbf{X}}_x|^3} = d\vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{X}}_{xx}^{(2)} + o(d),
\end{aligned}$$

l'équation (6.24) d'évolution de la fibre de la méthode de Burgers donne l'équation suivante de la perturbation :

$$\boxed{\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(2)}(x,t) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\tau}_0 \wedge \int_{[l_c, +\infty] \cup [-\infty, -l_c]}^{+\infty} \frac{(\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(x+x',t) - \vec{\mathbf{X}}^{(2)}(x,t)) - x' \vec{\mathbf{X}}_x^{(2)}(x+x',t)}{|x'|^3} dx'} \quad (6.48a)$$

avec : $\ln l_c = -\ln 2 + \ln \varepsilon + 1 - 4\pi C^*$ (6.48b)

et l'équation asymptotique (6.7) donne l'équation suivante de la perturbation :

$$\boxed{\dot{\vec{\mathbf{X}}}^{(2)}(x,t) = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{X}}_{xx}^{(2)}(x,t) - \vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{J}}(x,t)}, \quad (6.49)$$

où $\tilde{\alpha} = 1 / \left(\frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] + C^* \right)$. (6.50)

L'expression de $\vec{\mathbf{J}}$ est donnée par la formule (6.11b) du paragraphe VI.3.1 sur le régime de Klein et Majda.

Lors de la dérivation l'équation (6.49), nous avons supposé que $\tilde{\alpha} \gg d$, afin que le terme d'ordre $O(d/\tilde{\alpha}) \ll 1$ du développement de :

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{K\vec{\mathbf{b}}}{d}(x,d) = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{X}}_{xx}^{(2)} + O\left(\frac{d}{\tilde{\alpha}}\right),$$

soit négligeable devant : $-\vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{J}}(x,t)$.

Comme on choisit un paramétrage de la perturbation tel que $\vec{\mathbf{X}}^{(2)} \bullet \vec{\tau}_0 = 0$, la courbe de la perturbation $\vec{\mathbf{X}}^{(2)}$ est dans un plan et on peut la remplacer par sa représentation complexe ψ , que nous appelons *la fonction fibre* de la perturbation. D'après la relation (6.49), cette fonction fibre ψ satisfait alors l'équation :

$$\boxed{\frac{1}{i} \psi_t = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \psi_{xx} - J(\psi)}$$

où l'expression de $J(\psi)$ est donnée par (6.13).

VI.7.2. Etude des modes solutions

Nous recherchons des solutions linéaires perturbées de la forme suivante :

$$\boxed{\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(x,t) = \rho(t)e^{ikx}\vec{\mathbf{e}}_2 + \xi(t)e^{ikx}\vec{\mathbf{e}}_3}, \quad (6.51)$$

où ρ et ξ sont les amplitudes de la perturbation dans les directions $\vec{\mathbf{e}}_2$ et $\vec{\mathbf{e}}_3$ perpendiculaires au filament droit non perturbé et k est le nombre d'onde de la perturbation.

D'après (6.51), on a :

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{X}}_x^{(2)} &= ik(\rho(t)\vec{\mathbf{e}}_3 - \xi(t)\vec{\mathbf{e}}_2)e^{ikx} \\ \vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{X}}_{xx}^{(2)} &= -k^2(\rho(t)\vec{\mathbf{e}}_3 - \xi(t)\vec{\mathbf{e}}_2)e^{ikx} \end{aligned}$$

et l'équation (6.49) d'évolution de la perturbation donne les équations suivantes d'évolution des amplitudes ρ et ξ :

$$\bullet \rho = \frac{1}{\tilde{\alpha}} k^2 \xi + \frac{\xi}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{ikh} - 1) - h i k e^{ikh}}{|h|^3} - H(1 - |h|) \frac{k^2}{2|h|} dh \quad (6.52a)$$

$$\bullet \xi = -\frac{1}{\tilde{\alpha}} k^2 \rho - \frac{\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(+e^{ikh} - 1) - h i k e^{ikh}}{|h|^3} - H(1 - |h|) \frac{k^2}{2|h|} dh, \quad (6.52b)$$

c'est à dire :

$$\bullet \rho = \left\{ \frac{k^2}{\tilde{\alpha}} + \frac{G(k)}{4\pi} \right\} \xi \quad (6.53a)$$

$$\bullet \xi = -\left\{ \frac{k^2}{\tilde{\alpha}} + \frac{G(k)}{4\pi} \right\} \rho, \quad (6.53b)$$

avec :

$$G(k) = k^2 \left(\frac{1}{2} - \gamma - \ln k \right), \quad (6.54)$$

car

$$2k^2 \int_0^{+\infty} \left[\frac{\frac{(\cos(h) - 1) + h \sin(h)}{|h|^3}}{-H(1 - \frac{|h|}{k}) \frac{1}{2|h|}} \right] dh = k^2 \left(\frac{1}{2} - \gamma - \ln k \right). \quad (6.55)$$

Nous définissons *le paramètre de structure* \tilde{V} par :

$$\boxed{\tilde{V} = \frac{1}{4\pi\tilde{\alpha}}}. \quad (6.56a)$$

Remarquons que l'on a alors :

$$\tilde{V} = \ln\left(\frac{1}{l_c}\right), \quad (6.57)$$

où l_c est défini par (6.48b) et correspond à la longueur de coupure de la méthode de coupure de Burgers. Pour un filament tourbillon non visqueux similaire, ce paramètre vaut :

$$\tilde{V} = -1 - \ln\frac{2}{\varepsilon} + C_v(0) + 2m_0^2, \quad (6.56b)$$

avec

$$C_v(0) \approx 0.442.$$

La structure interne du filament est prise en compte intégralement par les trois groupements équivalents $\tilde{\alpha}$, \tilde{V} ou l_c , qui sont définis par les formules (6.50), (6.57) et (6.48b). Les effets de la structure du filament n'interviennent que par ces groupements et l'un ou l'autre de ceux-ci peut être choisi pour les décrire.

Alors, les équations (6.53a-b) d'évolution des amplitudes ρ et ξ deviennent :

$$\boxed{\dot{\rho} = V_\xi \xi} \quad (6.58a)$$

$$\boxed{\dot{\xi} = V_\rho \rho}, \quad (6.58b)$$

avec :

$$\boxed{V_\xi = \frac{1}{4\pi} \left\{ k^2 \tilde{V} + G(k) \right\}} \quad (6.59a)$$

$$\boxed{V_\rho = -\frac{1}{4\pi} \left\{ k^2 \tilde{V} + G(k) \right\}} \quad (6.59b)$$

$$\boxed{G(k) = k^2 \left(\frac{1}{2} - \gamma - \ln k \right)}. \quad (6.60)$$

Pour un filament non visqueux ($\alpha = 0$), les solutions sont de la forme suivante :

$$\rho(t) = \rho_0 e^{\beta t} \quad (6.61a)$$

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\beta t}, \quad (6.61b)$$

où le taux de croissance β est donné par :

$$\beta = \pm \sqrt{V_\rho V_\xi}. \quad (6.62)$$

Comme $V_\xi = -V_\rho$, la solution est donc toujours stable. Nous introduisons la pulsation ω définie par :

$$\beta \equiv \pm i\omega. \quad (6.63)$$

Les modes non visqueux sont oscillants et s'écrivent :

$$\vec{\mathbf{X}}(x, t) = x\vec{\mathbf{r}}_0 + 2\cos(kx)\rho_0(\cos(\omega t)\vec{\mathbf{e}}_2 + \frac{V_\rho}{\omega}\sin(\omega t)\vec{\mathbf{e}}_3). \quad (6.64)$$

La période T d'oscillation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.65)$$

de l'onde de nombre d'onde k est donnée par :

$$T = \boxed{\frac{8\pi^2}{k^2(\tilde{V} + \frac{1}{2} - \gamma - \ln k)}}, \quad (6.66a)$$

où γ est le nombre d'Euler. Le paramètre de structure \tilde{V} est donné par (6.56a). Pour un filament non visqueux similaire d'épaisseur ε , on a :

$$\tilde{V} = -1 - \ln \frac{2}{\varepsilon} + C_v(0) + 2m_0^2, \quad (6.66b)$$

où le terme m_0 est le débit de vitesse axiale.

Cette formule (6.66a) est l'analogue de la formule (5.60) pour un anneau circulaire perturbé.

VI.8. Stabilité de deux filaments tourbillons parallèles contrarotatifs

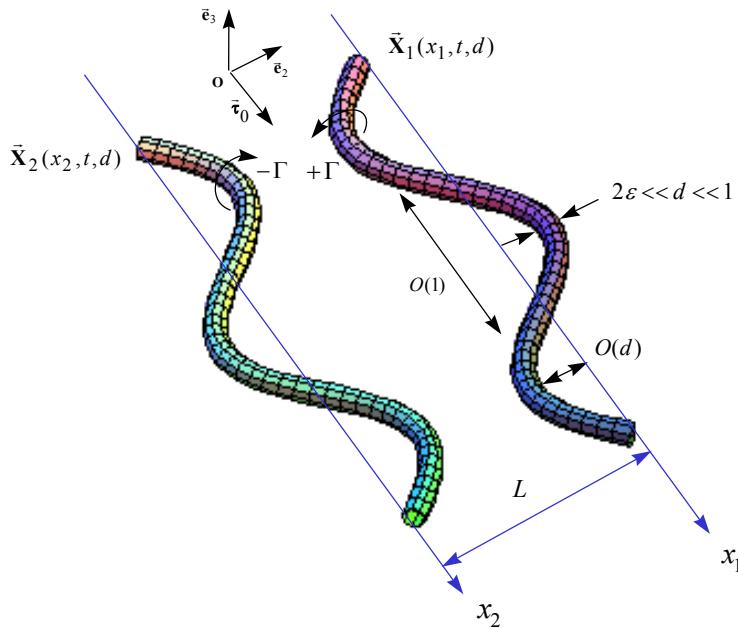


Figure 6.9 Les deux filaments droits parallèles contrarotatifs et leur perturbation

Comme on l'a vu au paragraphe I.6.1, deux filaments contrarotatifs parallèles se déplacent en translation sans se déformer. On étudie ici la stabilité de cet écoulement de base. Le point difficile de cette étude est le calcul de la vitesse d'auto-induction d'un filament sur lui-même en fonction de la structure du filament, car ce calcul fait apparaître une intégrale singulière. Comme ce problème a été résolu dans le paragraphe VI.7 précédent, il est alors facile de traiter la stabilité des deux filaments, car l'interaction d'un filament sur l'autre ne fait intervenir que des intégrales régulières.

On adimensionnalise le problème en prenant la longueur L entre les deux filaments comme longueur caractéristique. La solution de base est les deux fibres suivantes :

$$\boxed{\bar{X}_{1b}(x_1, t) = x_1 \vec{\tau}_0 + \frac{1}{2\pi} t \vec{e}_3} \quad (6.67a)$$

$$\boxed{\bar{X}_{2b}(x_2, t) = x_2 \vec{\tau}_0 + \frac{1}{2\pi} t \vec{e}_3}. \quad (6.67b)$$

Les fibres centrales des deux filaments perturbés ont la représentation suivante :

$$\bar{X}_1(x_1, t, d) = \bar{X}_{1b}(x_1, t) + \bar{X}_1'(x_1, t, d) = \bar{X}_{1b} + d \bar{X}_1^{(2)}(x_1, t) \quad (6.68a)$$

$$\bar{X}_2(x_2, t, d) = \bar{X}_{2b}(x_2, t) + \bar{X}_2'(x_2, t, d) = \bar{X}_{2b} + d \bar{X}_2^{(2)}(x_2, t) \quad (6.68b)$$

Pour deux filaments *non visqueux*, nous recherchons des solutions linéaires perturbées de la forme suivante :

$$\vec{X}_1^{(2)}(x_1, t) = \rho_1 e^{\beta t + ikx_1} \vec{e}_2 + \xi_1 e^{\beta t + ikx_1} \vec{e}_3 \quad (6.69a)$$

$$\vec{X}_2^{(2)}(x_2, t) = \rho_2 e^{\beta t + ikx_2} \vec{e}_2 + \xi_2 e^{\beta t + ikx_2} \vec{e}_3, \quad (6.69b)$$

où k est le nombre d'onde de la perturbation, β son taux de croissance et $\rho_{1,2}$ et $\xi_{1,2}$ sont les amplitudes de la perturbation dans les directions \vec{e}_2 et \vec{e}_3 perpendiculaires aux filaments droits non perturbés.

On remplace ces expressions dans l'équation (6.48a-b) d'évolution d'un filament tourbillon. En se servant des résultats du paragraphe précédent, nous obtenons les équations de dispersion suivantes, qui relient le taux de croissance β au nombre d'onde k :

$$2\pi\beta\rho_1 = -\xi_1 + \Psi(k)\xi_2 - k^2\tilde{\omega}(k, \tilde{V})\xi_1 \quad (6.70a)$$

$$2\pi\beta\xi_1 = -\rho_1 + X(k)\rho_2 + k^2\tilde{\omega}(k, \tilde{V})\rho_1 \quad (6.70b)$$

$$2\pi\beta\rho_2 = +\xi_2 - \Psi(k)\xi_1 + k^2\tilde{\omega}(k, \tilde{V})\xi_2 \quad (6.70c)$$

$$2\pi\beta\xi_2 = +\rho_2 - X(k)\rho_1 - k^2\tilde{\omega}(k, \tilde{V})\rho_2 \quad (6.70d)$$

avec

$$X(k) = kK_1(k) \quad (6.71a)$$

$$\Psi(k) = k^2 K_0(k) + kK_1(k) \quad (6.71b)$$

$$\boxed{\tilde{\omega}(k, \tilde{V}) = \frac{1}{2}(\tilde{V} + \frac{1}{2} - \gamma - \ln k)}, \quad (6.71c)$$

où $K_0(k)$ et $K_1(k)$ sont les fonctions de Bessel modifiées de seconde forme. La fonction $\tilde{\omega}$, dite de *self induction*, fait apparaître le *paramètre de structure* \tilde{V} , qui est relié à l'épaisseur ε et à la structure du filament. Il est défini comme au paragraphe précédent par :

$$\tilde{V} = \frac{1}{4\pi\tilde{\alpha}}. \quad (6.56a)$$

Pour des filaments tourbillons non visqueux similaires, ce paramètre vaut :

$$\tilde{V} = -1 - \ln \frac{2}{\varepsilon} + C_v(0) + 2m_0^2, \quad (6.56b)$$

avec $C_v(0) \approx 0.442$. Le terme m_0 est le débit de vitesse axiale.

Dans l'étude linéaire que l'on vient de faire, les amplitudes ρ et ξ de la perturbation sont de l'ordre d'un petit paramètre d et on a effectué la limite :

$$d \rightarrow 0 \text{ à } 1/\ln \varepsilon \text{ fixé.}$$

Pour des anneaux fins ($-1/\ln \varepsilon = O(1)$), le résultat (6.70) est valable tant que d est assez petit :

$$\boxed{d \ll 1}.$$

Pour des anneaux ultra fins ($-1/\ln \varepsilon \ll 1$), le résultat (6.70) n'est pas uniquement valable dans cette limite. D'après le paragraphe V.2.4, il est valable si $\tilde{\alpha} \gg d^2$, c'est à dire si

$$d \ll \frac{1}{-\ln(k\varepsilon)}.$$

Ces filaments ultra-fins vérifient $\tilde{V} \gg 1$ et la fonction de self induction devient :

$$\tilde{\omega}(k, \tilde{V}) = \frac{1}{2} \tilde{V},$$

si on ne prend pas en compte la correction au premier ordre.

Au paragraphe précédent, le paramètre de structure \tilde{V} a été relié à cette longueur de coupure s_c de la méthode de Burgers par la relation (6.57) :

$$\tilde{V} = \ln\left(\frac{1}{s_c}\right). \quad (6.72)$$

Au lieu de donner l'expression (6.71c) de la fonction de self induction $\tilde{\omega}$ en fonction du paramètre de structure \tilde{V} , on peut la donner en fonction de la longueur de coupure s_c par la formule suivante :

$$\tilde{\omega}(k, s_c) = \frac{1}{2} \left(-\ln s_c + \frac{1}{2} - \gamma - \ln k \right), \quad (6.73a)$$

où s_c est défini par (6.48b) :

$$\ln s_c = -\ln 2 + \ln \varepsilon + 1 - 4\pi C^*. \quad (6.74)$$

Comme pour le paragraphe précédent, la structure interne des filaments est prise en compte intégralement par les trois groupements équivalents $\tilde{\alpha}$, \tilde{V} ou s_c , qui sont définis par les formules (6.50), (6.72) et (6.74). On peut choisir l'un ou l'autre de ces groupements pour décrire les variations en fonction de la structure.

Crow² a obtenu le même système (6.70) d'équations de dispersion, mais avec une fonction de self induction $\tilde{\omega}$ qui vaut :

$$\tilde{\omega}(k, s_c) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\cos(k s_c) - 1)}{(k s_c)^2} + \frac{\sin(k s_c)}{k s_c} - C_i(k s_c) \right), \quad (6.73b)$$

où $C_i(s_c)$ est le cosinus intégral. Comme s_c est petit, on peut simplifier cette formule, qui devient la formule (6.73a) :

$$\tilde{\omega}(k, s_c) = \frac{1}{2} \left(-\ln s_c + \frac{1}{2} - \gamma - \ln k \right). \quad (6.73a)$$

Alors que Widnall et all⁹ utilisent l'expression simplifiée (6.73a) et ont une longueur de coupure qui est reliée à l'épaisseur et à la structure interne du filament, Crow² a utilisé (6.73b) et le lien avec la structure du filament est moins bien précisé. Pour notre part, nous sommes partis de l'équation de Callegari et Ting¹ pour faire l'étude linéaire, alors que Widnall et all⁹ font l'étude asymptotique en fonction de l'épaisseur du filament en même temps que l'étude linéaire. Ils ne font le raccord asymptotique entre la zone intérieure et la zone extérieure que pour le cas particulier de filaments droits faiblement perturbés. Leur étude asymptotique n'est valable que dans ce cas linéaire. Notre étude qui procède en deux étapes est plus simple à suivre et se généralise facilement pour un filament visqueux.

On définit les modes symétriques, dits modes S , comme les modes tels que :

$$\rho_S = \rho_2 - \rho_1 \quad (6.75a)$$

$$\xi_S = \xi_2 + \xi_1 \quad (6.75b)$$

et les modes antisymétriques, dits modes A , tels que :

$$\rho_A = \rho_2 + \rho_1 \quad (6.76a)$$

$$\xi_A = \xi_2 - \xi_1. \quad (6.76b)$$

Avec les équations de dispersion (6.70) et sa fonction de self induction (6.73b), Crow² a obtenu le diagramme d'instabilité de la Figure 6.10a pour les modes symétriques et de la Figure 6.10b pour les modes antisymétriques. Sur ces diagrammes, on a choisi d'utiliser la longueur de coupure s_c pour décrire la structure des filaments.

Si les deux filaments ont une structure non visqueuse similaire connue (épaisseur ε , débit axial m_0 et $C_v(0) \approx 0.442$), on peut alors calculer leur paramètre de structure \tilde{V} et la longueur de coupure s_c à l'aide de la formule (6.56b) et (6.72). Puis, à l'aide des figures 6.10 a et b, on détermine facilement pour quels nombre d'onde les modes symétriques et antisymétriques sont instables.

On rappelle que ces résultats ne prennent pas en compte les ondes courtes sur le filament. Pour des nombres d'ondes tels que $k = O(1/\varepsilon)$, le graphique n'est donc plus valable. Il faut $k \ll 1/\varepsilon$, ce qui s'écrit :

$$k \ll \frac{1}{s_c},$$

ou

$$k \ll e^{\tilde{V}}.$$

Il n'est plus valable non plus pour des valeurs trop grandes de l'épaisseur ε , ce qui correspond à des valeurs petites ou négatives du paramètre de structure \tilde{V} et à des valeurs de la longueur de coupure s_c de l'ordre 1. Il faut donc :

$$s_c \ll 1,$$

c'est à dire :

$$\tilde{V} > 2.$$

Les zones d'instabilité qui apparaissent en haut à droite sur les diagrammes de la figure 6.10 ont été jugées comme fictives par Crow², car elles sont dans une zone où l'épaisseur du filament n'est pas petite et où la longueur d'onde est petite. On sort du domaine de validité de l'étude.

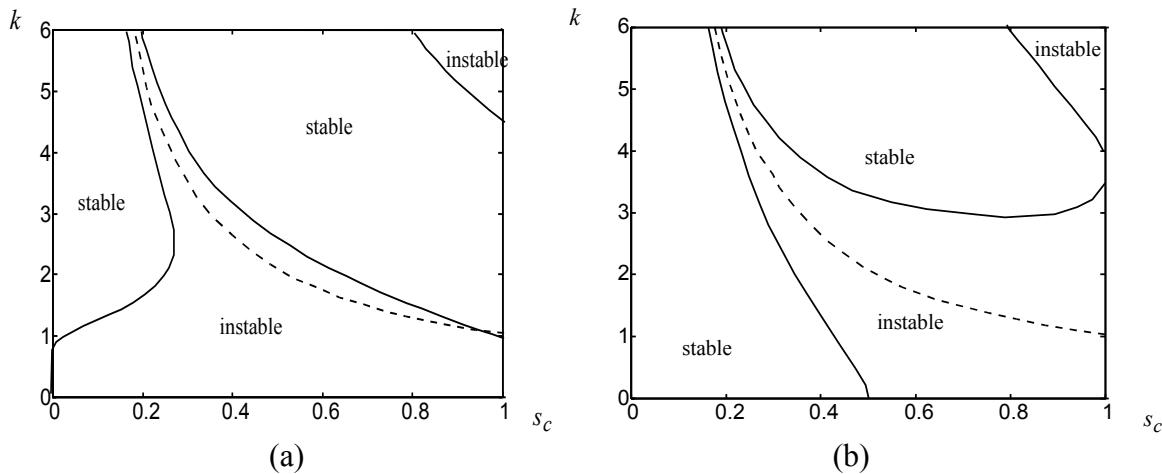


Figure 6.10 Diagramme de stabilité avec la fonction de self induction de Crow.

(a) mode symétrique S (b) mode antisymétrique A

La ligne en pointillés est la ligne $\tilde{\omega} = 0$

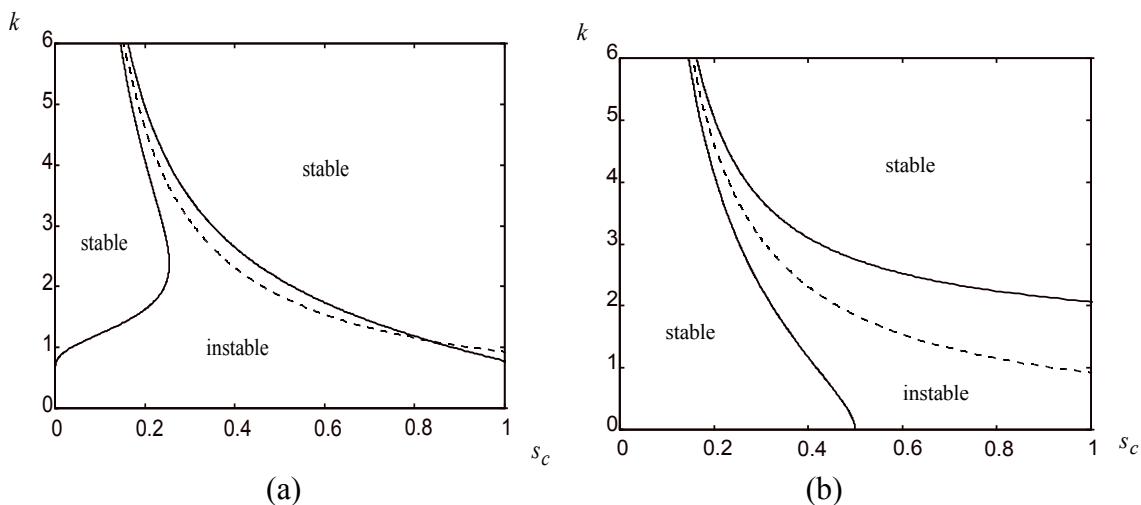


Figure 6.11 Diagramme de stabilité avec la fonction de self induction (6.73a)

(a) mode symétrique S (b) mode antisymétrique A

La ligne en pointillés est la ligne $\tilde{\omega} = 0$

Avec les équations de dispersion (6.70) et la fonction de self induction (6.73a), on obtient le diagramme d'instabilité de la Figure 6.11a pour les modes symétriques et de la Figure 6.11b pour les modes antisymétriques. Sur ces diagrammes, on retrouve les mêmes résultats que précédemment pour des valeurs petites du paramètre de coupure s_c et les zones fictives d'instabilité qui apparaissent sur les graphes de Crow² ont disparu. Cependant, malgré tout, les résultats où les graphes des figures 6.10 et 6.11 sont différents ne sont pas valables, car ils se trouvent dans la zone où l'étude tombe en défaut. A partir de ces graphes, on ne peut rien dire sur ce qu'il se passe si le nombre d'onde est grand où si l'épaisseur n'est pas petite.

Sur la figure 6.12, on trace ces graphes en fonction du paramètre de structure \tilde{V} au lieu de s_c , d'une façon analogue à ce qui a été fait pour un anneau tourbillon au paragraphe V.4.2.

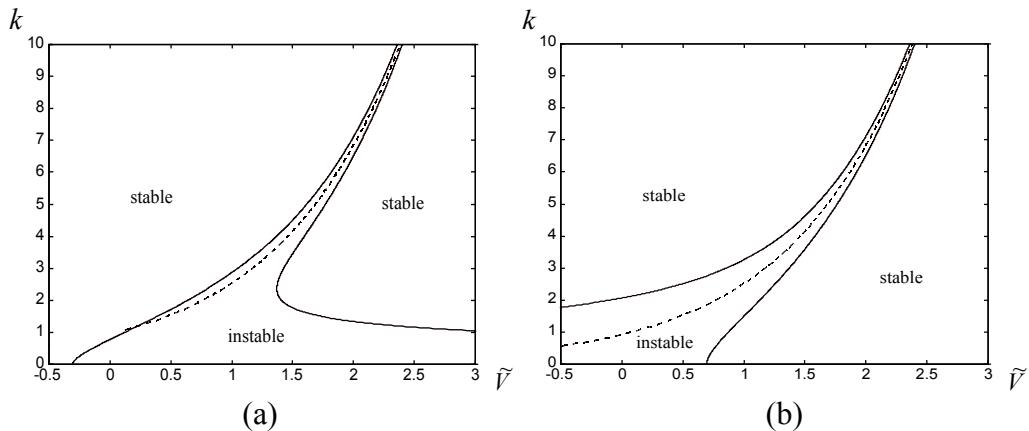


Figure 6.12 Diagramme de stabilité avec la fonction de self induction corrigée.

(a) mode symétrique S (b) mode antisymétrique A

La ligne en pointillés est la ligne $\tilde{\omega} = 0$

Pour un anneau tourbillon, le paramètre de structure \tilde{V} s'interprète comme la vitesse d'évolution de l'anneau non perturbé. Ici, il n'a pas d'interprétation simple : c'est la vitesse d'évolution d'un anneau qui aurait la même structure que notre filament et dont le rayon serait la distance entre nos deux filaments. C'est également la pulsation (multipliée par 4π) d'une onde de longueur d'onde 1 sur un filament ultra-fin, lorsque l'on ne prend en compte que l'ordre principal logarithmique.

VI.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment les résultats d'un anneau tourbillon doivent être modifiés lorsque l'on étudie un filament tourbillon non fermé. Pour ce filament, les résultats équivalents à ceux des chapitres II, III, IV ont été donnés. L'équivalent du chapitre V est l'étude des oscillations d'un filament droit perturbé. La période d'oscillation obtenue pour ce filament droit perturbé est valable pour des filaments fins tels que $-\ln(1/\varepsilon) = O(1)$. Ici, ε est l'épaisseur initiale *réduite* du filament vis-à-vis d'une longueur caractéristique liée à la *longueur d'onde* de la perturbation. Pour des filaments ultra-fins tels que $-\ln(1/\varepsilon) \gg 1$, suivant l'ordre de grandeur de l'amplitude de la perturbation comparativement à la structure du filament, on peut être soit dans le régime linéaire, soit dans celui de Klein et Majda, soit dans celui de l'induction locale. Lorsque l'on annule la courbure dans l'analyse tridimensionnelle, on retrouve bien les résultats connus pour les filaments droits qui sont étirés tangentiellement ou ne le sont pas. Des diagrammes de stabilité de deux filaments tourbillons parallèles contrarotatifs ont été donnés. Ce chapitre ne prend pas en compte des ondes dont la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du filament. A part dans le paragraphe VI.1, l'on a toujours un filament à structure normale simple au sens de ce qui a été défini au chapitre I.

VI.10. Bibliographie du chapitre VI

1. CALLEGARI,A.J. et TING,L. 1978 Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1), 148-175
2. CROW,S.C. 1970 Stability theory for a pair of trailing vortices, *AIAA J.* **8**, 2172-2179
3. HASIMOTO,H. : 1971 Motion of a vortex filament and its relation to elastica, *J.Phys. Soc. Japan* **31**,pp.293-294,1971
4. KELVIN 1880 Vibration of a columnar vortex, *Philos. Mag.* **10**, 152-165
5. KLEIN,R. et MAJDA,A.J. 1991 Self-stretching of a perturbed vortex filament I: the asymptotic equation for derivations from a straight line, *Physica D* **49**, 323-352
6. LOUGH,M.F. 1994 On the dynamics of ultra-thin vortex filaments, *Phys. Fluids* **6** (5), 1745-1751
7. MOFFATT,H.K., KIDA,S. et OHKITANI,K. 1994 Stretched vortices-the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics, *J. Fluid Mech.* **259**, 241-264
8. TING,L. et TUNG,C. 1965 Motion and decay of a vortex in a non-uniform Stream, *The Physics of Fluids* **8** (6), 1039-1051
9. WIDNALL,S.E. et BLISS,D.B. et ZALAY,A. 1971 Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington*, 305-338

CONCLUSION

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à l'étude du mouvement des filaments et des anneaux tourbillons de faible épaisseur. Dans cette conclusion, *nous rappelons l'ensemble des résultats obtenus dans cette thèse, puis nous proposons un certain nombre d'extensions possibles de ces résultats.*

Dans *le chapitre I* de ce mémoire, après avoir rappelé les coordonnées curvilignes locales associées à une courbe mobile en trois dimensions ainsi que l'écriture des équations sur ces coordonnées, nous avons montré que la courbure d'un filet tourbillon (épaisseur nulle) introduit une singularité de type couche limite qu'il est nécessaire de résoudre. La démarche de résolution, qui utilise la méthode des développements asymptotiques raccordés, a été présentée succinctement. Dans cette présentation, la règle de raccord asymptotique n'est pas présentée comme la condition qui donne l'équation de la fibre centrale du filament, mais comme la condition qui donne les conditions aux limites en l'infini des équations aux dérivées partielles des composantes du développement en séries de Fourier du champ de vitesse intérieur. C'est la partie des équations en $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$ qui donne l'équation d'évolution de la fibre centrale, car leur résolution ne nécessite pas de conditions aux limites en l'infini et que la condition aux limites qui est associée à chacune de ces équations fait apparaître la vitesse de la fibre centrale du filament. Nous avons également insisté sur les différentes formes que peut prendre le problème et les développements asymptotiques associés lorsque l'on change les grandeurs caractéristiques d'adimensionnalisation. Ainsi, le lien immédiat entre l'étude faite dans ce mémoire et d'autres études de la littérature peut être

masqué par des notations différentes et surtout par des choix différents de ces longueurs caractéristiques. On a insisté également sur la définition de la fibre centrale du filament, sur l'existence d'un temps dit normal et d'un temps court d'oscillations rapides. On souligne l'intérêt d'utiliser le calcul formel pour se libérer du grand nombre de calculs longs et fastidieux, qui sont sous-jacents à la méthode de résolution. Pour finir ce chapitre I, une description des différents types de structures de filaments en allant de la plus générale à la plus simple est donnée, grâce à quoi on peut mieux préciser les hypothèses qui sont alors faites suivant les études.

Dans *le chapitre II*, on s'est servi de *notre* écriture de l'équation de Biot et Savart en trois dimensions sur les coordonnées curvilignes locales donnée au chapitre I (équation qui n'est pas donnée dans la littérature), pour calculer proprement la limite extérieure et intérieure du champ de vitesse d'un anneau tourbillon dont on connaît le champ de vorticité. On a donné le premier ordre du développement extérieur, alors que d'habitude seul l'ordre principal est donné, et nous avons démontré que l'ordre principal correspond uniquement à un Dirac de vorticité tangentielle concentrée sur la fibre centrale. Le petit paramètre de développement est ici l'épaisseur réduite du filament tourbillon. Lorsque l'on s'approche du filet tourbillon, la limite du champ de vitesse due à ce Dirac fait apparaître une intégrale singulière, dont on a trouvé le développement à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés des intégrales singulières⁵. Le petit paramètre de développement est ici la distance au filet tourbillon. On retrouve le même résultat que dans la littérature en précisant en plus les expressions des termes intégraux globaux à l'ordre r , où r est la distance au filet tourbillon. L'intérêt de cette méthode est qu'elle est systématique et qu'on peut être soulagé d'un grand nombre de calculs fastidieux en s'aidant d'un calculateur formel. Le calcul de la limite intérieure dans l'équation de Biot et Savart, qui est très rarement faite dans la littérature, est déterminée dans ce chapitre dans un cadre très général. Celle-ci fait apparaître une intégrale singulière, dont on calcul le développement par la même méthode et avec les mêmes outils que pour déterminer la limite, près d'un filet tourbillon, de sa vitesse induite. Le petit paramètre est désormais l'épaisseur du filament tourbillon. Ce calcul montre la forme des échelles asymptotiques qui interviennent dans le développement du champ de vitesse non relatif à la fibre. On trouve une échelle en $\ln \varepsilon$, où ε est l'épaisseur réduite initiale du filament. Nous avons aussi montré que le développement extérieur de la loi de Biot et Savart se raccorde bien avec son développement intérieur : *le développement près de la fibre*

centrale du développement extérieur de l'intégrale de Biot et Savart est égale au développement en l'infini du développement intérieur de cette intégrale. C'est ce développement qui donne les conditions aux limites en l'infini des équations aux dérivées partielles dont on a précédemment parlées.

Dans *le chapitre III*, nous avons obtenu *l'équation d'évolution* d'un anneau tourbillon en utilisant la démarche qui a été décrite succinctement au chapitre I. La limite en l'infini de la solution de la partie des équations en $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$ fait intervenir une intégrale singulière dont le développement peut être obtenu par la méthode systématique du développement asymptotique raccordé des intégrales singulières. C'est en identifiant le calcul de cette limite avec la condition aux limites en l'infini de ces équations que l'on obtient l'équation d'évolution de la fibre centrale de Callegari et Ting¹. On a également démontré que si on détermine la valeur en $\bar{r} = 0$ du développement intérieur de l'intégrale de Biot et Savart et que l'on se sert de la solution de la partie des équations en $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$, on peut retrouver également l'équation d'évolution de la fibre centrale de Callegari et Ting¹. Cependant, cette méthode nous semble moins adéquate que la précédente, car elle nécessite plus de calculs. On a aussi donné une équation d'évolution de l'ordre 1 de la fibre centrale qui rectifie celle donnée par Fukumoto et Miyazaki⁶. A la formule de ces auteurs, il se rajoute une contribution qui avait été oubliée et qui provient de la limite près du filament de l'ordre ε du développement extérieur. Ce terme est proportionnel au débit axial dans le filament et est non nul si ce débit axial existe. Des équations d'évolution pour la partie axisymétrique du champ de vitesse à l'ordre 1 sont données, ce qui ferme rigoureusement le système d'équations à l'ordre 1, au lieu de faire des fermetures approchées comme l'avaient fait les auteurs^{6,27} précédents. Le fait d'obtenir les équations à l'ordre 1 a permis également de réfléchir sur le déroulement de la résolution asymptotique *en montrant comment le calcul se passe ordre par ordre*. On constate qu'à chaque ordre apparaît des équations de compatibilité pour la partie axisymétrique du champ de vitesse et on vérifie que les ordres supérieurs *n'apportent pas d'incohérences* sur les calculs qui ont été menés à l'ordre principal. Pour vérifier cette cohérence, il est important également *de vérifier le raccord asymptotique pour toutes les parties des équations* aux dérivées partielles intérieures et pas uniquement pour les équations en $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$, qui donnent l'équation d'évolution de la fibre centrale. On souligne que *seule la partie axisymétrique du champ de vitesse à tous les ordres a des équations d'évolution temporelle. Les autres parties sont directement fonctions de tous les ordres de*

cette partie axisymétrique. Pour obtenir l'équation d'évolution d'un filament, un des calculs difficiles est le calcul des intégrales singulières que nous avons effectué dans notre chapitre II. Ce calcul n'est qu'un calcul de cinématique, mais il n'est pas simple et d'après nous, il a été souvent minimisé et effectué d'une façon pas forcément claire. Dans ce chapitre III, nous avons également donné des représentations graphiques du champ de vitesse relatif à l'ordre principal pour un anneau similaire et des simulations numériques de l'équation d'évolution du filament à l'ordre principal pour un filament elliptique, pour deux anneaux en situation de saute mouton et pour deux anneaux enlacés.

Dans *le chapitre IV*, nous avons déterminé les *développements des intégrales singulières de coupure* par rapport au petit paramètre qui la longueur de coupure. La comparaison du résultat obtenu avec l'équation asymptotique d'évolution d'un anneau tourbillon de Callegari et Ting¹, nous a permis de donner une justification des méthodes ad hoc de coupure. Nous avons ainsi trouvé l'expression de la longueur de coupure. Nous avons justifié des méthodes de coupure qui ne l'étaient pas et nous avons étendu la justification de celles qui l'étaient au cas d'un anneau visqueux avec vitesse axiale.

Dans *le chapitre V*, nous avons étudié *numériquement* l'évolution d'un anneau circulaire perturbé, que nous avons comparée avec une *étude linéaire analytique*. Nous avons montré que la période d'oscillation trouvée numériquement concorde avec l'expression de cette période trouvée par l'étude linéaire. L'expression que l'on a obtenue est valable pour tous les modes et prend en compte une contribution intégrale globale du filament. L'étude linéaire de Widnall et Sullivan³² est généralisée au cas visqueux et au cas d'un anneau avec vitesse axiale. Nous présentons des résultats pour les modes stables oscillants de l'anneau, alors que Widnall et Sullivan³² n'ont donné des résultats que pour les modes instables. Notre étude complète donc la leur.

Le chapitre VI donne, pour un filament ouvert, les résultats analogues aux chapitres II, III, IV, V. On a constaté que le lien entre la longueur de coupure et l'épaisseur du filament n'est pas affecté par le fait que le filament est ouvert. Cependant, on a observé que l'équation asymptotique d'évolution de la fibre centrale change légèrement par le fait qu'il faut faire intervenir une fonction d'Heaviside et qu'il n'y a plus la longueur de l'anneau dans cette expression qui devient :

$$\dot{\vec{X}} - (\vec{X} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau} = \left(\frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] + KC^* \right) \vec{b} + \vec{A} - (\vec{A} \bullet \vec{\tau}) \vec{\tau}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(a) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a'))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a')|^3} - H(1-|a'|) \frac{K(a)\vec{\mathbf{b}}(a)}{2|a'|} da'.$$

Cette équation est l'équivalent pour un filament infini de l'équation de Callegari et Ting¹. Klein et Majda¹⁰ ont obtenu une équation d'évolution pour un filament tourbillon, dont la géométrie est un cas particulier de la géométrie générale des filaments que peut aborder l'équation précédente. On l'a appelé le filament de Klein et Majda. Leur équation fait intervenir également une fonction d'Heaviside et on a montré par un calcul assez court que pour ce filament particulier l'équation ci-dessus se réduit bien à la leur. Pour des filaments de Klein et Majda ultra-fins tels que $1/\left(\ln \frac{d}{\varepsilon}\right) - 1 \ll 1$, où ε est l'épaisseur du filament et d

l'amplitude de la perturbation, on a vu que (suivant l'ordre de grandeur de la perturbation) on peut être soit dans le régime linéaire, soit dans celui de Klein et Majda¹⁰, soit dans celui de l'induction locale. On a également vu que l'on retrouve bien la résolution bidimensionnelle lorsque l'on annule la courbure dans l'analyse tridimensionnelle dans le cas où il n'y a pas d'étirement³¹ tangentiel du filament, puis dans le cas où il y en a un²⁶. Pour finir, nous avons donné les diagrammes de stabilité de deux filaments tourbillons parallèles contrarotatifs.

Soulignons que les programmes de calcul formel, qui ont été écrits, représentent un *potentiel* intéressant. En effet, si on veut reprendre l'étude qui a été faite pour un filament tourbillon plus général, il faut refaire bon nombre de calculs. Si l'on n'avait pas ces programmes de calcul formel, cela nous prendrait beaucoup de temps, alors qu'avec les programmes, qui ont été écrits, on peut aller beaucoup plus rapidement. Il suffit d'affaiblir une hypothèse que l'on avait faite dans le programme, ce qui est presque instantané à faire, et le calculateur refait pour nous rapidement bon nombre des calculs. Pour l'instant, nous n'avons malheureusement encore pas eu le temps de profiter pleinement de ces programmes, sauf pour l'obtention d'un ordre de plus dans les équations d'évolution d'un filament tourbillon.

Pour finir, *vis-à-vis du travail qui a été présenté dans ce mémoire, nous présentons les différentes perspectives d'études qui s'offrent à nous.*

L'anneau circulaire *sans débit* axial est un problème axisymétrique dans des coordonnées cylindriques liées à la géométrie circulaire de la fibre centrale. Des études ont été menées dans ce cadre particulier par plusieurs auteurs, dont Fraenkel⁴ pour l'ordre principal et récemment Fukumoto⁷ pour les ordres supérieurs. Nos résultats étant valables pour une fibre de géométrie plus générale, il serait intéressant de voir ce qu'ils donnent pour

ce cas circulaire et de les confronter avec les leurs. Il serait bien également de trouver un exemple simple pour lequel les équations à l'ordre 1 se résolvent.

L'Hélicité H est un invariant non visqueux de l'écoulement qui est défini par la relation : $H = \int \bar{\omega} \cdot \bar{v} dv$ où l'intégration porte sur tout le domaine de l'écoulement. Moffatt^{23,24} a relié cet invariant à la topologie de la vorticité de l'écoulement en montrant par exemple que pour deux anneaux enlacés, on a : $H = -2\Gamma_1\Gamma_2$ où Γ_1, Γ_2 sont les circulations de chacun des anneaux. Puis, ce résultat a été rectifié²⁵ et précisé par des termes complémentaires qui avaient initialement été oubliés.

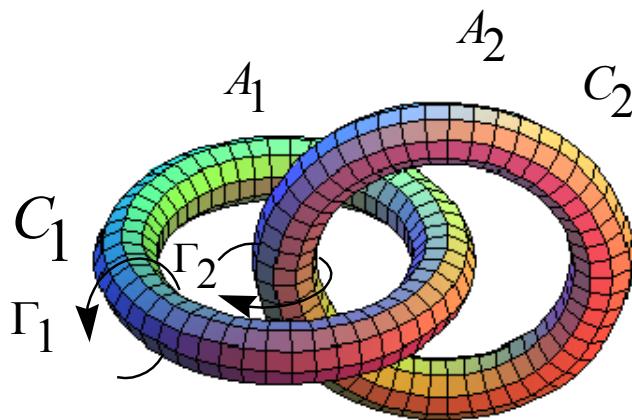


Figure 1. Représentation de deux anneaux enlacés

Pour cette configuration, le domaine d'intégration de l'intégrale de l'Hélicité se réduit aux deux anneaux tourbillons. La résolution qui a été faite^{24,25} par ces auteurs passe sous silence le fait que si l'on suppose les anneaux tourbillons sans épaisseur, la vitesse qui intervient dans cette intégrale est infinie avec tous les problèmes de couche limite qui sont associés et dont on a amplement parlés dans ce mémoire. Les auteurs précédents ont obtenu leur résultat en intégrant cette vitesse infinie, ce qui fait que leur démonstration nous semble un peu délicate à comprendre et que l'on pourrait l'améliorer pour éliminer toute ambiguïté et en faciliter la compréhension. Lorsque l'on a résolu le problème de couche limite et que l'on connaît l'expression asymptotique du champ de vitesse en fonction de son épaisseur, il est plus facile de déterminer rigoureusement l'expression de cette Hélicité. Nous pouvons également obtenir son développement en fonction de l'épaisseur du filament et avoir un filament qui possède un débit axial. Comme la viscosité peut être introduite dans l'étude, on peut obtenir la valeur de l'Hélicité et son évolution dans le cas visqueux. Il semble alors intéressant de regarder si la dérivée temporelle de l'Hélicité passe continûment de sa valeur dans le cas visqueux à sa

valeur nulle du cas non visqueux. On a déjà réalisé une partie de ce travail. On l'a mis uniquement en annexe (Annexe 17), car nous n'avons pas eu le temps de commenter nos résultats en les confrontant et les reliant à ceux des précédents auteurs.

Lors de l'étude d'un anneau circulaire perturbé, seul le régime linéaire pour un anneau de faible épaisseur ou un anneau ultra fin a été présenté dans ce mémoire. Il serait intéressant de faire apparaître le lien en ordre de grandeur, entre l'amplitude de la perturbation et l'épaisseur de l'anneau ultra fin, pour lequel on aurait un régime semblable au régime de Klein et Majda pour un filament droit et de trouver comment l'équation de la perturbation s'écrit alors dans ce régime, pour ensuite l'étudier.

Les filaments tourbillons, que l'on a étudiés dans ce mémoire, ont une structure principale indépendante de l'abscisse le long du filament et n'ont pas d'ondes courtes. On les a appelés des filaments à structure normale simple dans notre chapitre I. Il paraît intéressant d'avoir également une équation d'évolution pour un filament à structure normale (i.e. un filament sans ondes courtes) qui pourrait avoir des variations selon l'abscisse tout en vérifiant des conditions de compatibilité initiales (Figure 2).

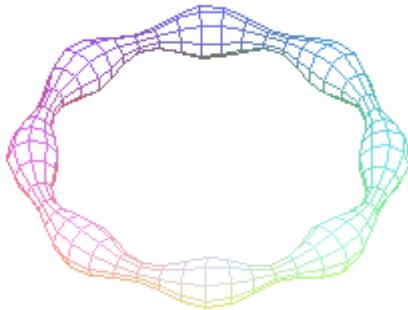


Figure 2. Anneau avec variations axiales

Dans un article, Lundgren²⁰ a simulé des équations de filament avec variation de l'abscisse. Ces équations ont été obtenues à partir de l'article de Moore et Saffman²⁷. Lors de la dérivation de l'équation d'évolution d'un filament avec un ordre principal axisymétrique, Moore et Saffman²⁷ ont écrit des termes qui dépendent de l'abscisse, termes qu'ils ont éliminés par la suite. Ils n'ont cependant pas écrit tous les termes qui dépendent de l'abscisse et en ont oubliés qui étaient du même ordre de grandeur que ceux qu'ils ont écrits. Mais cela ne dérangeait pas, car leur but était d'éliminer ces termes par la suite puisqu'ils ne s'intéressaient qu'à une structure axisymétrique indépendante de l'abscisse. Dans leur article, il apparaît donc des équations intermédiaires qui dépendent de l'abscisse et c'est ces

équations que Lundgren²⁰ a reprises pour faire ces simulations. Il serait donc intéressant de refaire une recherche systématique de tous les termes qui dépendent de l'abscisse. D'autres auteurs^{18,21,22} s'intéressent aussi à un filament avec variation de l'abscisse, mais d'une façon également ad hoc. Par contre, Klein et Ting¹² ont écrit un système d'équations obtenu par une résolution asymptotique pour un filament à structure normale avec variation de l'abscisse à l'ordre principal. Ils ont montré que si ce champ de vitesse vérifie les conditions de compatibilité à l'instant initial, alors il les vérifiera à tous temps et ont les équations d'évolution de ce champ, ainsi que de la fibre centrale. Les équations obtenues sont un peu compliquées. Il serait intéressant de trouver un exemple simple d'utilisation de celles-ci ou d'avoir des simulations numériques de ces équations équivalentes à celles de Lundgren²⁰. Il sera nécessaire également d'interpréter physiquement, dans ce cas, les conditions de compatibilité sur le champ de vitesse.

Les filaments tourbillons que l'on a étudiés dans ce mémoire ont une structure axisymétrique à l'ordre principal. Il paraît intéressant d'avoir également une équation d'évolution pour un filament à structure non axisymétrique (Figure 3).

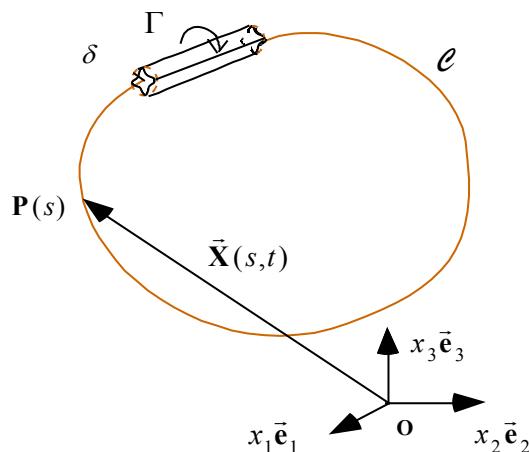


Figure 3. Anneau de section non axisymétrique

Lundgren¹⁹ a étudié une structure non axisymétrique en spirale pour un filament droit étiré. Comme au la vu au paragraphe VI.6, cet auteur a utilisé la même transformation du temps sous forme d'une intégrale que Callegari et Ting¹ et il serait peut-être possible de combiner ces deux études en rajoutant de la courbure dans le modèle de Lundgren¹⁹ ou, ce qui revient au même de la non axisymétrie dans le modèle de Callegari et Ting¹.

Les filaments tourbillons que l'on a étudiés dans ce mémoire ont une structure qui ne dépend pas d'un temps court en t/ε^2 . On les a appelés des filaments à structure normale au

chapitre I. Un modèle à double échelles de temps a déjà été développé en deux dimensions pour un filament droit par Ting et Tung³¹. Ce travail n'a jamais été généralisé en trois dimensions ou apparaît en plus le problème des courtes longueurs d'onde en s/ε . D'après Moore et Saffman²⁷, ces petites longueurs d'ondes doivent se déplacer très rapidement le long du filament sur des temps en t/ε^2 , mais ils ne l'ont pas vérifié. Cette vérification nécessiterait une étude à l'aide d'une méthode d'échelles multiples à double échelles de temps et d'espace. La non axisymétrie, dont on a parlé précédemment doit également intervenir sur des temps en t/ε^2 , mais il faudrait le vérifier.

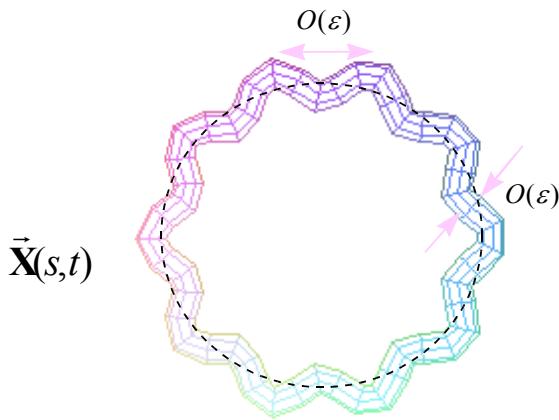


Figure 4. Filament avec des ondes de petites longueur d'onde

La stabilité *linéaire* d'un anneau tourbillon a été étudiée sur un temps normal pour des grandes longueurs d'ondes par Widnall et Sullivan³², en ne perturbant que la fibre centrale et pas le champ des vitesses relatif, alors qu'elle a été étudiée sur un temps court en t/ε^2 pour des courtes longueurs d'onde en $\bar{s} = \frac{s}{\varepsilon}$ (Figure 4) par Widnall et Tsai³³. Un modèle non linéaire à double échelles de temps et d'espace permettrait de faire la synthèse de ces deux études. Dans ce mémoire, on n'a pas fait la synthèse sur les études de stabilité des ondes sur les anneaux et les filaments tourbillons, qui sont étudiées dans bon nombre d'articles (Annexe 18).

Fort de notre connaissance des développements asymptotiques sur des courbes, et de nos programmes de calcul formel, il serait possible de faire une étude (du même type que celle qui a été faite dans ce mémoire) pour déterminer l'évolution d'une concentration linéique de dipôles sur une courbe tridimensionnelle. Le problème ne serait plus caractérisé

par une circulation, mais par l'intensité du dipôle. En deux dimensions, une telle étude a déjà été entreprise par Ting et Bauer³⁰.

Le phénomène d'éclatement tourbillonnaire, qui a été présenté en introduction (Figure 14), correspond à une déstructuration d'un jet tournant ou d'un filament tourbillon avec débit axial. Il est étudié d'une part par les personnes qui s'intéressent à l'étude de jets et d'autre part par celles qui étudient les filaments tourbillons. Même si les chercheurs arrivent de mieux en mieux à le simuler numériquement, son mécanisme d'apparition n'est encore pas bien compris. Sur la figure 5, on a représenté une coupe méridienne d'un éclatement tourbillonnaire axisymétrique de type bulle. Dans ce plan de coupe, qui passe par l'axe de symétrie, on a représenté les lignes de courant des composantes axiales et radiales du champ de vitesse dans les coordonnées cylindriques associées à l'axe de symétrie. La composante orthoradiale de la vitesse se rajoute à ces vitesses et n'est pas représentée ici.

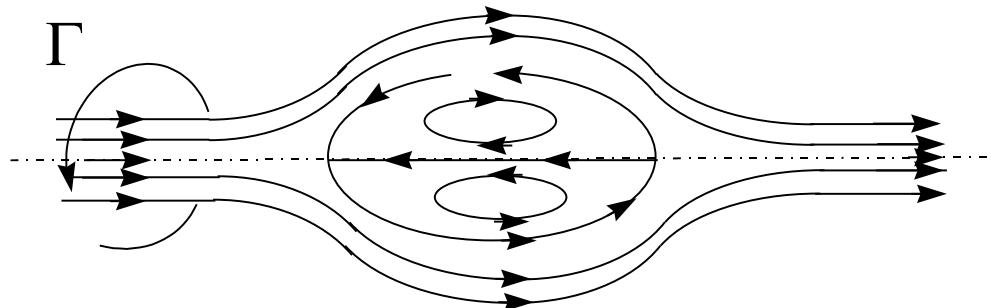


Figure 5. Coupe méridienne d'un éclatement tourbillonnaire axisymétrique de type bulle

Du point de vu des personnes qui étudient les filaments tourbillons et vis-à-vis de notre chapitre I, cet écoulement correspond à un filament tourbillon avec variation de l'épaisseur du filament et donc avec variation selon l'abscisse. La théorie des filaments de faibles épaisseurs peut être sûrement étendue pour étudier cette configuration. Dans cette voie, nous pouvons citer les travaux de Sychev²⁹ et de Schmitz²⁸. Pour notre part, on a été troublé par certaines ressemblances qui existent entre l'article de Leibovich, Brown et Patel¹⁵ et celui de Callegari et Ting¹, sans que ni l'un ni l'autre de ces auteurs ne se fasse alors référence dans ces articles ni dans ceux qui ont suivi. En effet, tous deux s'intéressent aux grandes longueurs d'onde de perturbation de la fibre centrale du filament. Les premiers utilisent une longueur caractéristique liée à l'épaisseur du filament et écrivent des développements en fonction de l'inverse de la longueur d'onde sur le filament, qui est alors un petit paramètre. Les seconds, eux, utilisent une longueur caractéristique liée à la grande longueur d'onde sur le filament et

écrivent des développements en fonction de l'épaisseur du filament, qui est alors un petit paramètre. Il y a donc une dualité, entre ces deux études, qui se concrétise par le fait que les deux utilisent un développement asymptotique raccordé suivant la distance radiale à la fibre centrale. Les premiers font intervenir une variable radiale extérieure et les seconds une variable radiale intérieure. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps de nous étendre plus longuement sur ce sujet.

Nous ne pouvons pas finir cette présentation des différentes perspectives d'études, sans rappeler l'intérêt que peut avoir ces études de filaments tourbillons pour étudier la stabilité des filaments tourbillons^{3,9,14,16,32,33}, pour développer des méthodes numériques du type éléments tourbillons^{8,11,13,17}, pour comprendre les mécanismes de certains écoulements en modélisant le champ de vorticité associé et en expliquant la dynamique de son évolution, et même pour aider à modéliser les écoulements turbulents^{23,26} ou pour arriver à généraliser en trois dimensions ce qui a été fait pour la turbulence en deux dimensions² avec toutes les difficultés liées à la courbure des filaments que l'on a essayé de présenter modestement dans ce mémoire.

Bibliographie de la conclusion

1. CALLEGARI,A.J. et TING,L. 1978 Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Appl. Math.***35** (1), 148-175
2. CHORIN, A.J. 1994 *Vorticity and turbulence*, Springer
3. CROW,S.C. 1970 Stability theory for a pair of trailing vortices, *AIAA J.* **8**, 2172-2179
4. FRAENKEL,L.E. 1970 On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid, *Proc. Roy. Soc. London. A* **316**, 29-62
5. FRANCOIS,C. 1981 Les méthodes de perturbation en mécanique. ENSTA. Paris, 98-104
6. FUKUMOTO,Y. et MIYAZAKI,T. 1991 Three dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity, *J. Fluid Mech.* **222**, 369-416
7. FUKUMOTO,Y. et MOFFATT,H.K. 1997 Motion of a Thin Vortex Ring in a Viscous Fluid : Higher-Order Asymptotics, *Iutam Symposium on Dynamics of Slender Vortices, RWTH Aachen, Germany, August 31-3 September (Proceedings to appear with Kluwer Academic Publishers)*
8. GUSTAFSON,K. et SETHIAN,J. 1991 Vortex Methods and Vortex motion (*ed. K.Gustafsson & J.Sethian*), SIAM
9. KELVIN 1880 Vibration of a columnar vortex, *Philos. Mag.* **10**, 152-165
10. KLEIN,R. et MAJDA,A.J. 1991 Self-stretching of a perturbed vortex filament I: the asymptotic equation for derivations from a straight line, *Physica D* **49**, 323-352
11. KLEIN,R. et KNIO,O.M. 1995 Asymptotic vorticity structure and numerical simulation of slender vortex filaments, *J. Fluid Mech.* **284**, 257-321
12. KLEIN,R. et TING,L. 1992 Vortex filaments with axial core structure variation, *Appl.Math.Lett.* **5**, 99-103
13. KLEIN,R., KNIO, O.M. et TING,L. 1996 Representation of Core dynamics in slender vortex filament simulations, *Phys. Fluids.*,8, pp.2415
14. KOPIEV,V.F. et CHERNYSHEV,S.A. 1997 Vortex ring eigen-oscillations as a source of sound, *JFM* **341**, pp. 19-57
15. LEIBOVICH,S. et BROWN,S.N. et PATEL,Y. 1986 Bending waves on inviscid columnar vortices, *J. Fluid Mech.* **173**, pp. 595-624
16. LE DIZES,S., ROSSI,M. et MOFFATT,H.K. 1996 On the three-dimensional instability of elliptical vortex subjected to stretching, *Phys.Fluid* **8** (8)
17. LEONARD, A. 1985 Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements, *Ann.Rev.Fluid Mech.* **17**,pp.523
18. LEONARD,A. 1994 Nonlocal theory of area-varying waves on axisymmetric vortex tubes,*Phys.Fluids A6/2* pp. 765-777
19. LUNDGREN, T.S. 1982 Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, *Phys.Fluids*,**25**,(12) pp.2193-2203

20. LUNDGREN, T.S., ASHURST, W.T. 1989 Area-varying waves on curved vortex tubes with application to vortex breakdown, *J. Fluid Mech.* 200, pp. 283-307
21. MARSHALL,J.S. 1991 A general theory of curved vortices with circular cross-section and variable core area,*J. Fluid Mech.* 229,pp.311-338
22. MARSHALL,J.S. 1992 Buckling of a columnar vortex,*Phys.Fluids A4/12*,pp.2620-2627
23. MOFFATT,H.K. 1995 Dynamique des Fluides, *Cours de l'X*
24. MOFFATT,H.K. 1969 The degree of knottedness of tangled vortex lines, *J. Fluid Mech.* **35**, 117-129
25. MOFFATT,H.K et RICCA,R.L. 1992 Helicity and the Calugareanu invariant, *Proc. R. Soc. London. A* **439**, 411-429
26. MOFFATT, H.K., KIDA, S., OHKITANI, K. 1994 Stretched vortices-the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics, *J.Fluid Mech.* 259,pp.241-264
27. MOORE,D.W. et SAFFMAN,P.G. 1972 The motion of a vortex filament with axial flow, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **226** (272), 403-429
28. SCHMITZ,M. 1996 Axiale Entwicklung der Kernstruktur schlanker Wirbelfäden, *PhD Thesis ,Aachen*
29. SYCHEV,V.V. 1993 Asymptotic theory of vortex breakdown,*Fluid dynamics*, 28(3) pp.356-364
30. TING,L. et BAUER,F. 1993 Viscous Vortices in two- and three-Dimensional Space, *Computer Fluids Vol 22 N.4/5*,pp 565-588
31. TING,L. et TUNG,C. 1965 Motion and decay of a vortex in a non-uniform Stream, *The Physics of Fluids* **8** (6), 1039-1051
32. WIDNALL,S.E. et SULLIVAN,J.P. 1973 On the stability of vortex rings, *Proc. R. Soc. London A* **332**, 335-353
33. WIDNALL,S.E. et TSAI,C.Y. 1977 The Instability of the Thin Vortex Ring of Constant Vorticity, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **287**, pp. 273-305

Annexe 1

A.1. Obtention des équations sur les coordonnées locales

Cette annexe montre comment s'écrivent les équations dynamiques et l'équation de conservation de la masse sur les coordonnées curvilignes locales à la courbe $\vec{\mathbf{X}}(s,t)$ définies au paragraphe I.2.2 et sur la figure 1.2.

La transformation entre les coordonnées Cartésiennes orthogonales $\mathbf{M}(x_1, x_2, x_3)$ avec les vecteurs de base associés $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ et les coordonnées locales $\mathbf{M}(r, \varphi, s)$ avec les vecteurs de base associés $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$ satisfait :

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{OM}} = \vec{\mathbf{X}}(s,t) + r\vec{\mathbf{r}}(\varphi, s, t)} \quad (\text{A.1.1})$$

Cette transformation dépend du temps. Ce n'est pas qu'une transformation spatiale, comme lorsque l'on fait un changement de coordonnées entre des coordonnées cartésiennes et des coordonnées cylindriques ou sphériques, ...

La vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ en tout point du fluide est décomposée selon la formule :

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}(r, \varphi, s, t) = \dot{\vec{\mathbf{X}}}(s, t) + \vec{\mathbf{V}}(r, \varphi, s, t)} \quad (\text{A.1.2})$$

où $\dot{\vec{\mathbf{X}}}(s, t)$ est la vitesse de la courbe $\vec{\mathbf{X}}(s, t)$ et $\vec{\mathbf{V}}$ la vitesse du fluide relativement à cette courbe. Cette *vitesse relative par rapport à la courbe* est projetée sur les vecteurs de base $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$ des coordonnées curvilignes :

$$\vec{\mathbf{V}} = u\vec{\mathbf{r}} + v\vec{\theta} + w\vec{\tau} \quad (\text{A.1.3})$$

A l'aide de (A.1.2), l'équation de conservation de la masse

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\mathbf{v}} = 0} \quad (\text{A.1.4})$$

devient

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{V}} + \operatorname{div} \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{X}}} = 0 \quad (\text{A.1.5})$$

Comme l'opérateur divergence n'est qu'un opérateur spatial, la dépendance de la transformation (A.1.1) avec le temps n'intervient pas pour transformer l'équation (A.1.4).

Si Θ est la coordonnée angulaire définie par Callegari et Ting (1978) :

$$\Theta = \varphi - \Theta_0 \quad (\text{A.1.6a})$$

$$d\Theta_0 = \sigma T ds, \quad (\text{A.1.6b})$$

alors (r, Θ, s) sont des coordonnées curvilignes orthogonales dont la métrique a été précisée au paragraphe I.2.3. A l'aide d'un formulaire sur les expressions des opérateurs dans des coordonnées orthogonales quelconques, on trouve :

$$rh_3 \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}} = (urh_3)_r + (h_3 v)_\Theta + rw_s \quad (\text{A.1.7a})$$

$$rh_3 \operatorname{div} \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{X}}} = r \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{X}}}_s \bullet \vec{\tau} \quad (\text{A.1.7b})$$

Finalement, à l'aide de la relation (A.1.7a-b) et après un changement de variables de Θ en φ , l'équation (A.1.5) devient :

$$\boxed{(urh_3)_r + (h_3 v)_\varphi + rw_s - \sigma Tr w_\varphi + r \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{X}}}_s \bullet \vec{\tau} = 0} \quad (\text{A.1.8})$$

Notons \mathcal{R} le référentiel Galiléen. On définit la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{\mathbf{f}} = f_i \vec{\mathbf{e}}_i$ dans ce référentiel \mathcal{R} par :

$$\boxed{\frac{d^{\mathcal{R}} \vec{\mathbf{f}}}{dt} = \frac{df_i}{dt} \vec{\mathbf{e}}_i}. \quad (\text{A.1.9})$$

Dans ce référentiel \mathcal{R} , les vecteurs $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ ne dépendent pas du temps, la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ est la vitesse du fluide et $\vec{\mathbf{a}}$ son accélération.

On veut trouver la transformée de l'équation de Navier-Stokes

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} = -grad p + \nu \Delta \vec{\mathbf{v}}} \quad (\text{A.1.10})$$

par le changement de coordonnées (A.1.1). Ici, p est la pression divisée par la masse volumique. Les termes $grad p$ et $\Delta \vec{\mathbf{v}}$ de cette équation sont des opérateurs spatiaux. Ils sont transformés à l'aide de (A.1.2), de la même façon qu'on a transformé l'opérateur divergence

de l'équation (A.1.4). Par contre, comme l'accélération

$$\vec{a} = \frac{d^{\mathcal{R}}\vec{v}}{dt} = \left(\frac{\partial^{\mathcal{R}}\vec{v}}{\partial t} \right)_{x_1, x_2, x_3} + \vec{v} \bullet \text{grad}\vec{v} \quad (\text{A.1.11})$$

fait apparaître une dérivée temporelle, on doit prendre en compte la dépendance par rapport au temps de la transformation (A.1.1) pour modifier cette accélération. Ici, $(\partial / \partial t)_{x_1, x_2, x_3}$ est la dérivation partielle par rapport au temps t à x_1, x_2, x_3 fixés.

Notons $\hat{\mathcal{R}}$ le référentiel pour lequel les coordonnées curvilignes (r, φ, s) et les vecteurs de base associés $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$ ne dépendent pas du temps. On dit qu'ils sont fixes. On définit la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{f} = f_r \vec{r} + f_\theta \vec{\theta} + f_\tau \vec{\tau}$ dans ce référentiel $\hat{\mathcal{R}}$ par :

$$\boxed{\frac{d^{\hat{\mathcal{R}}}\vec{f}}{dt} = \frac{df_r}{dt} \vec{r} + \frac{df_\theta}{dt} \vec{\theta} + \frac{df_\tau}{dt} \vec{\tau}} \quad (\text{A.1.12})$$

La vitesse $\hat{\vec{v}}$ est *la vitesse relative du fluide dans ce référentiel $\hat{\mathcal{R}}$* et $\hat{\vec{a}}$ *son accélération relative* :

$$\hat{\vec{a}} = \frac{d^{\hat{\mathcal{R}}}\hat{\vec{v}}}{dt} = \left(\frac{\partial^{\hat{\mathcal{R}}}\hat{\vec{v}}}{\partial t} \right)_{r, \varphi, s} + \hat{\vec{v}} \bullet \text{grad}\hat{\vec{v}} \quad (\text{A.1.13})$$

Ici, $(\partial / \partial t)_{r, \varphi, s}$ est la dérivation partielle par rapport au temps t à r, φ, s fixés.

Soit \vec{v}_e le champ de vitesse du référentiel $\hat{\mathcal{R}}$ par rapport \mathcal{R} . On l'appelle '*le champ de vitesse d'entraînement*' de $\hat{\mathcal{R}}$. Les définitions de \vec{v} et $\hat{\vec{v}}$ associées à la transformation (A.1.1) conduisent à la loi de composition des vitesses :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_e + \hat{\vec{v}}} \quad (\text{A.1.14})$$

où

$$\boxed{\vec{v}_e = \dot{\vec{X}} + r \vec{r}} \quad (\text{A.1.15})$$

On applique la loi de dérivation des fonctions composées et (A.1.11) devient :

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial^{\mathcal{R}}\vec{v}}{\partial t} \right)_{r, \varphi, s} + \hat{\vec{v}} \bullet \text{grad}\vec{v} \quad (\text{A.1.16})$$

A l'aide des relations (A.1.11), (A.1.14) et (A.1.16), ou à l'aide de la loi de dérivation des fonctions composées, on trouve que :

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \right)_{x_1,x_2,x_3} + \vec{v}_e \bullet grad \quad (A.1.17a)$$

On passe de la dérivée temporelle dans \vec{R} à celle dans $\hat{\vec{R}}$ par la relation :

$$\left(\frac{\partial \vec{R} \vec{V}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} = \left(\frac{\partial \hat{\vec{R}} \vec{V}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} + \vec{V} \bullet grad \vec{v}_e, \quad (A.1.17b)$$

car on a :

$$u \dot{\vec{r}} + v \dot{\vec{\theta}} + w \dot{\vec{\tau}} = \vec{V} \bullet grad \vec{v}_e \quad (A.1.18)$$

A partir de (A.1.16) et (A.1.17b), on obtient la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \hat{\vec{a}} \quad (A.1.19)$$

où

$$\vec{a}_e = \left(\frac{\partial \vec{R} \vec{v}_e}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} = \left(\frac{\partial \vec{R} \vec{v}_e}{\partial t} \right)_{x_1,x_2,x_3} + \vec{v}_e \bullet grad \vec{v}_e \quad (A.1.20)$$

est l'accélération d'entraînement,

$$\vec{a}_c = 2 \hat{\vec{v}} \bullet grad \vec{v}_e \quad (A.1.21)$$

est l'accélération de Coriolis et $\hat{\vec{a}}$ est l'accélération relative donnée par (A.1.13).

A l'aide de (A.1.14) et (A.1.19), la transformation de l'équation de Navier-Stokes (A.1.10) est :

$$\vec{a} = -grad p + \nu \Delta \vec{V} + \nu \Delta \dot{\vec{X}} \quad (A.1.22a)$$

avec :

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial \hat{\vec{R}} \vec{V}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} + u \dot{\vec{r}} + v \dot{\vec{\theta}} + w \dot{\vec{\tau}} + \ddot{\vec{X}} + (\vec{V} - r \dot{\vec{r}}) \bullet grad (\vec{V} + \dot{\vec{X}}) \quad (A.1.22b)$$

A l'aide d'un formulaire sur les expressions des opérateurs dans des coordonnées orthogonales quelconques, on trouve :

$$\Delta \dot{\vec{X}} = \frac{1}{h_3} \left(\frac{1}{h_3} \dot{\vec{X}}_s \right)_s \quad (A.1.23a)$$

$$(\vec{V} - r \dot{\vec{r}}) \bullet grad \dot{\vec{X}} = \frac{\dot{\vec{X}}_s}{h_3} (w - r \dot{\vec{r}} \bullet \vec{\tau}) \quad (A.1.23b)$$

Finalement, l'équation de Navier-Stokes (A.1.22) devient :

$$\boxed{\vec{a} = -gradp + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{h_3} \left(\frac{1}{h_3} \dot{\vec{X}}_s \right)_s} \quad (\text{A.1.24a})$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}} \vec{V}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} + u \dot{\vec{r}} + v \dot{\vec{\theta}} + w \dot{\vec{\tau}} + \ddot{\vec{X}} + (\vec{V} - r \vec{r}_t) \bullet grad \vec{V} + \frac{\dot{\vec{X}}_s}{h_3} (w - r \dot{\vec{r}} \bullet \vec{\tau})} \quad (\text{A.1.24b})$$

où l'on rappelle que :

$$\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}} \vec{V}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{\partial w}{\partial \tau} \vec{\tau} \quad (\text{A.1.24c})$$

A l'aide d'un formulaire sur les expressions des opérateurs dans des coordonnées orthogonales quelconques, on trouve les expressions des opérateurs $gradp$, $grad\vec{V}$ et $\Delta\vec{V}$ sur les coordonnées curvilignes.

L'équation

$$div \vec{\omega} = 0 \quad (\text{A.1.25})$$

vérifiée par la vorticité

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{r} + \omega_2 \vec{\theta} + \omega_3 \vec{\tau} \quad (\text{A.1.26})$$

s'écrit

$$\boxed{(\omega_1 r h_3)_r + (h_3 \omega_2)_\varphi + r \omega_3_s - \sigma Tr \omega_3_\varphi = 0} \quad (\text{A.1.27})$$

et l'équation de la vorticité

$$\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}} \vec{\omega}}{\partial t} \right)_{x1,x2,x3} + \vec{v} \bullet grad \vec{\omega} - \vec{\omega} \bullet grad \vec{v} = \nu \Delta \vec{\omega} \quad (\text{A.1.28})$$

devient :

$$\boxed{\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}} \vec{\omega}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} + \omega_1 \dot{\vec{r}} + \omega_2 \dot{\vec{\theta}} + \omega_3 \dot{\vec{\tau}} + (\vec{v} - \dot{\vec{X}} - r \dot{\vec{r}}) \bullet grad \vec{\omega} - \vec{\omega} \bullet grad \vec{v} = \nu \Delta \vec{\omega}} \quad (\text{A.1.29})$$

La relation entre la vorticité et la vitesse :

$$\vec{\omega} = rot \vec{v} \quad (\text{A.1.30})$$

devient :

$$\boxed{\vec{\omega} = rot \vec{V} + \frac{\bar{\tau}}{h_3} \wedge \dot{\vec{X}}_s}, \quad (\text{A.1.31})$$

car

$$\text{rot} \vec{\mathbf{X}} = \frac{\vec{\tau}}{h_3} \wedge \dot{\vec{\mathbf{X}}}_s \quad (\text{A.1.32})$$

A l'aide d'un formulaire sur les expressions des opérateurs dans des coordonnées orthogonales quelconques, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{\mathbf{V}} = & \left[\frac{w_\varphi}{r} + \frac{\sigma w}{h_3} K \sin \varphi - \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \sigma T \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{h_3} \right] \vec{\mathbf{r}} \\ & + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \sigma T \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{h_3} - \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sigma w}{h_3} K \cos \varphi \right] \vec{\theta} \\ & + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial vr}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] \vec{\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.1.33})$$

Si nous utilisons

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1 \vec{\mathbf{r}} + v_2 \vec{\theta} + v_3 \vec{\tau}, \quad (\text{A.1.34})$$

au lieu de la vitesse $\vec{\mathbf{V}}$, les équations (A.1.8) et (A.1.24) du champ de vitesse ont les expressions plus simples suivantes :

$$(v_1 r h_3)_r + (h_3 v_2)_\varphi + r v_{3_s} - \sigma T r v_{3_\varphi} = 0 \quad (\text{A.1.35a})$$

$$\vec{\mathbf{a}} = -\text{grad} p + \nu \Delta \vec{\mathbf{v}} \quad (\text{A.1.35b})$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} \right)_{r, \varphi, s} + v_1 \dot{\vec{\mathbf{r}}} + v_2 \dot{\vec{\theta}} + v_3 \dot{\vec{\tau}} + (\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{X}} - r \vec{\mathbf{r}}) \bullet \text{grad} \vec{\mathbf{v}} \quad (\text{A.1.35c})$$

Annexe 2

A.2. Les développements extérieurs des champs de vorticité et de vitesse

On considère un anneau tourbillon dont le champ de vorticité est :

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a)} \quad (\text{A.2.1})$$

où $\bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}$ est un champ *décroissant* exponentiellement ou d'extension finie. Ici, (r, φ, a) sont les coordonnées curvilignes locales à la fibre centrale $\vec{\mathbf{X}}(a)$ et $\bar{r} = r/\varepsilon$ est la variable radiale dilatée. Ces coordonnées et la fibre centrale sont définies au paragraphe I.2.2 et sur la figure 1.2. La projection de la vorticité sur les vecteurs de bases associées à ces coordonnées est donnée par :

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} = \omega_1 \vec{\mathbf{r}} + \omega_2 \vec{\boldsymbol{\theta}} + \omega_3 \vec{\boldsymbol{\tau}} \quad (\text{A.2.2})$$

Cette annexe détermine le développement extérieur $\bar{\boldsymbol{\omega}}^{\text{out}}$ du champ de vorticité $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, ainsi que le développement extérieur $\bar{\mathbf{v}}^{\text{out}}$ du champ de vitesse $\bar{\mathbf{v}}$ induit par cette vorticité connue $\bar{\boldsymbol{\omega}}$. Le développement extérieur est défini par la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ à r fixé.

Puisque la vorticité *décroît* au moins exponentiellement, le développement extérieur du champ de vorticité donné par (A.2.1) est nul partout, sauf sur la courbe \mathcal{C} où il est infini. Ce champ limite n'est pas une fonction, mais une distribution au sens mathématique. Définissons alors par

$$\langle \mathbf{T}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}}, \phi \rangle = \iiint \bar{\boldsymbol{\omega}} \phi(\bar{\mathbf{x}}) dx = \iiint \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a)}{\varepsilon^2} \phi(r, \varphi, a) r h_3 dr d\varphi da, \quad (\text{A.2.3})$$

la distribution $\mathbf{T}_{\vec{\omega}}$ canoniquement associée au champ de vorticité $\vec{\omega}$. Ici, ϕ est une fonction test régulière :

$$\phi(\vec{x}) \in D(R^3) = \left\{ \text{fonctions tests usuelles } \phi, C^\infty \text{ et à support compact} \right\}$$

Après un changement de variables, l'intégrale (A.2.3) devient :

$$\langle \mathbf{T}_{\vec{\omega}}, \phi \rangle = \iiint \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a) \phi(\bar{r}, \varphi, a) \bar{r} h_3 d\bar{r} d\varphi da \quad (\text{A.2.4})$$

Le développement extérieur $\mathbf{T}_{\vec{\omega}}^{\text{out}}$ de $\mathbf{T}_{\vec{\omega}}$ est alors de la forme suivante :

$$\langle \mathbf{T}_{\vec{\omega}}^{\text{out}}, \phi \rangle = \iiint \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, \varphi, a) \phi(a) \bar{r} d\bar{r} d\varphi da + O(\varepsilon) \quad (\text{A.2.5})$$

que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}_{\vec{\omega}}^{\text{out}}, \phi \rangle &= \left[\int \phi(a) \vec{\tau}(a) \iint \omega_3 \bar{r} d\bar{r} d\varphi da \right. \\ &\quad \left. + \int \phi(a) \iint (\vec{\omega}^{(0)} - [\vec{\omega}^{(0)} \bullet \vec{\tau}] \vec{\tau}) \bar{r} d\bar{r} d\varphi da \right] + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

Sur des variables dimensionnelles, la définition de la circulation Γ est :

$$\Gamma = \iint \omega_3 \bar{r} d\bar{r} d\varphi, \quad (\text{A.2.7a})$$

et devient

$$\iint \omega_3 \bar{r} d\bar{r} d\varphi = 1 \quad (\text{A.2.7b})$$

sur des variables adimensionnelles. Lorsque cette relation est remplacée dans (A.2.6), nous trouvons le développement extérieur suivant de la vorticité :

$$\mathbf{T}_{\vec{\omega}}^{\text{out}} = \delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau} + \delta_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{D}}(a) + O(\varepsilon) \quad (\text{A.2.8})$$

$$\text{où } \vec{\mathbf{D}}(a) = \iint (\vec{\omega}^{(0)} - [\vec{\omega}^{(0)} \bullet \vec{\tau}] \vec{\tau}) \bar{r} d\bar{r} d\varphi \quad (\text{A.2.9})$$

et $\delta_{\mathcal{C}}$ est la distribution de Dirac définie sur \mathcal{C} par

$$\langle \delta_{\mathcal{C}}, \phi \rangle = \int_{\mathcal{C}} \phi(r, \varphi, a) da \quad (\text{A.2.10})$$

En fait, on va montrer que $\vec{\mathbf{D}}(a) = 0$. Pour cela, la relation :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^{(0)} - [\vec{\omega}^{(0)} \bullet \vec{\tau}] \vec{\tau} &= \omega_1 \vec{r} + \omega_2 \vec{\theta} \\ &= (\omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi) \vec{n} \\ &\quad + (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{A.2.11})$$

est remplacée dans la définition (A.2.10) de $\vec{\mathbf{D}}(a)$, qui devient :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{D}}(a) &= \bar{\mathbf{n}} \iint (\omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi) \bar{r} d\bar{r} d\varphi + \bar{\mathbf{b}} \iint (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \bar{r} d\bar{r} d\varphi \\
&= \frac{\bar{\mathbf{n}}}{K} \iint \omega_{3a} \bar{r} d\bar{r} d\varphi + \bar{\mathbf{b}} \iint (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \bar{r} d\bar{r} d\varphi \\
&= \frac{\bar{\mathbf{n}}}{K} \mathbf{1}_a + \bar{\mathbf{b}} \iint (\omega_{1\varphi} \cos \varphi - (\omega_1 \bar{r})_{\bar{r}} \sin \varphi) \bar{r} d\bar{r} d\varphi \\
&= \bar{\mathbf{b}} \iint (\omega_{1\varphi} \cos \varphi - (\omega_1 \bar{r})_{\bar{r}} \sin \varphi) \bar{r} d\bar{r} d\varphi
\end{aligned} \tag{A.2.12}$$

où nous avons utilisé la relation (2.3b) :

$$-K[\omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi] + \omega_{3a} - T\omega_{3\varphi} = 0 \tag{A.2.13}$$

du paragraphe II.1. Si on développe ω_1 en série de Fourier :

$$\omega_1 = \sum_1^\infty \omega_{1n1} \cos n\varphi + \omega_{1n2} \sin n\varphi, \tag{A.2.14}$$

l'expression (A.2.12) de $\bar{\mathbf{D}}(a)$ devient

$$\bar{\mathbf{D}}(a) = \bar{\mathbf{b}}\pi \int_0^\infty \left[\omega_{112} + \left(\omega_{112} \bar{r} \right)_{\bar{r}} \right] \bar{r} d\bar{r} \tag{A.2.15}$$

$$\text{où } \omega_{112} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega_1 \sin \varphi d\varphi \tag{A.2.16}$$

Après une intégration par parties, l'équation (A.2.15) devient :

$$\bar{\mathbf{D}}(a) = \bar{\mathbf{b}}\pi \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \omega_{112} \bar{r}^2 \tag{A.2.17}$$

$$\text{Or } \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \omega_{112} \bar{r}^2 = 0, \tag{A.2.18}$$

car la vorticité est à décroissance au moins exponentielle et

$$\omega_{112} \bar{r}^2 = \varepsilon^{-1} \bar{r} w_\varphi + \bar{r}^2 \frac{\sigma w}{h_3} K \sin \varphi - \bar{r}^2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \sigma T \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{h_3} \tag{A.2.19}$$

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} w \bar{r}^2 = 0 \tag{A.2.20}$$

Ainsi, nous avons toujours $\bar{\mathbf{D}}(a) = 0$ et finalement le développement extérieur de la vorticité est :

$$\boxed{\mathbf{T}_{\vec{\omega}}^{\text{out}} = \delta_{\vec{\ell}} \vec{\tau} + O(\varepsilon)} \tag{A.2.21}$$

A l'ordre principal, le développement extérieur $\bar{\boldsymbol{\omega}}^{\text{out}}$ du champ de vorticité (A.2.1) correspond donc exactement à la distribution de Dirac $\delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}$ sur \mathcal{C} .

La vitesse induite par le champ de vorticité (A.2.1) est donnée par la loi de Biot et Savart, qui après un changement de variables devient :

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}(\bar{r}', a', \varphi') \wedge [\bar{\mathbf{x}} - (\bar{\mathbf{X}}(a') + \varepsilon \bar{r}' \bar{\mathbf{r}}')]}{\left| \bar{\mathbf{x}} - (\bar{\mathbf{X}}(a') + \varepsilon \bar{r}' \bar{\mathbf{r}}') \right|^3} h_3 \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' da' \quad (\text{A.2.22})$$

Le développement extérieur $\bar{\mathbf{v}}^{\text{out}}$ de $\bar{\mathbf{v}}$ est alors :

$$\bar{\mathbf{v}}^{\text{out}}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}(\bar{r}', a', \varphi') \wedge [\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a')]}{\left| \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a') \right|^3} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' da' + O(\varepsilon) \quad (\text{A.2.23})$$

En se servant des relations (A.2.7b) et (A.2.10), l'expression (A.2.23) devient :

$$\bar{\mathbf{v}}^{\text{out}}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}(\bar{r}', a', \varphi') \wedge [\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a')]}{\left| \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a') \right|^3} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' da' + O(\varepsilon) \quad (\text{A.2.24})$$

Finalement, comme $\bar{\mathbf{D}}(a') = 0$, le développement extérieur $\bar{\mathbf{v}}^{\text{out}}$ de la vitesse induite par le champ de vorticité (A.2.1) est :

$$\bar{\mathbf{v}}^{\text{out}}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\bar{\tau}(a') \wedge (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a'))}{\left| \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(a') \right|^3} da' + O(\varepsilon) \quad (\text{A.2.25})$$

A l'ordre principal, le développement extérieur du champ de vitesse correspond à la vitesse induite par une distribution de Dirac $\delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}$ concentrée sur la fibre centrale. C'est un filet tourbillon.

Annexe 3

A.3. Calcul d'intégrales singulières et limite près du filament du développement extérieur de la vitesse

Dans cette annexe, nous déterminons le développement selon la coordonnée radiale r de l'ordre principal

$$\vec{v}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, a) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\tau}(a') \wedge ((\vec{X}(a) + r\vec{r}(a, \varphi)) - \vec{X}(a'))}{|(\vec{X}(a) + r\vec{r}(a, \varphi)) - \vec{X}(a')|^3} da' \quad (\text{A.3.1})$$

du développement extérieur du champ de vitesse.

Si nous posons brutalement $r = 0$ dans l'expression (A.3.1), une singularité apparaît lorsque $a' = a$. Le développement de cette intégrale par rapport au petit paramètre r est donc singulier. Pour le déterminer, nous appliquons la méthode des développements asymptotiques raccordés d'intégrales singulières dont le principe a été présenté au paragraphe II.4.

Avec le changement de variable $a^* = a' - a$, la singularité dans (A.3.1) passe de $a' = a$ à $a^* = 0$ et (A.3.1) devient :

$$\vec{v}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, a) = \frac{1}{4\pi} \int_{-S/2}^{S/2} \vec{K}(r, \varphi, a, a^*) da^* \quad (\text{A.3.2})$$

où l'on a posé :

$$\vec{K}(r, \varphi, a, a^*) = \frac{\vec{\tau}(a + a^*) \wedge ((\vec{X}(a) + r\vec{r}(a, \varphi)) - \vec{X}(a + a^*))}{|(\vec{X}(a) + r\vec{r}(a, \varphi)) - \vec{X}(a + a^*)|^3} \quad (\text{A.3.3})$$

Nous définissons un petit paramètre η tel que :

$$1 \gg \eta \gg r \quad (\text{A.3.4})$$

et séparons l'intégrale (A.3.2) comme suit :

$$\boxed{\vec{v}^{\text{out}(0)}(r, \varphi, a) = \vec{E} + \vec{I}} \quad (\text{A.3.5})$$

où

$$\vec{E} = \vec{E}^- + \vec{E}^+ \quad (\text{A.3.6a})$$

$$\vec{I} = \vec{I}^- + \vec{I}^+ \quad (\text{A.3.6b})$$

avec :

$$\vec{E}^- = \frac{1}{4\pi} \int_{-S/2}^{-\eta} \vec{K} da^* \quad (\text{A.3.7a})$$

$$\vec{E}^+ = \frac{1}{4\pi} \int_{+\eta}^{+S/2} \vec{K} da^* \quad (\text{A.3.7b})$$

$$\vec{I}^- = \frac{1}{4\pi} \int_{-\eta}^0 \vec{K} da^* \quad (\text{A.3.7c})$$

$$\vec{I}^+ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\eta} \vec{K} da^* \quad (\text{A.3.7d})$$

On fait alors la dilatation $\bar{a} = a^* / r$ dans les intégrales (A.3.7c-d) qui deviennent :

$$\vec{I}^- = \frac{1}{4\pi} r \int_{-\eta/r}^0 \tilde{\vec{K}}(r, \varphi, a, \bar{a}) d\bar{a} \quad (\text{A.3.8a})$$

$$\vec{I}^+ = \frac{1}{4\pi} r \int_0^{+\eta/r} \tilde{\vec{K}}(r, \varphi, a, \bar{a}) d\bar{a}, \quad (\text{A.3.8b})$$

où l'on a posé :

$$\tilde{\vec{K}}(r, \varphi, a, \bar{a}) = \vec{K}(r, \varphi, a, r\bar{a}) \quad (\text{A.3.9})$$

Sur $[-S/2, +S/2] \setminus [-\eta, +\eta]$, nous cherchons le développement extérieur ($r \rightarrow 0$ à a^* fixé) de l'intégrant \vec{K} , puis nous l'intégrons en utilisant (A.3.7a-b). Au contraire, sur $[-\eta, +\eta]$, nous cherchons le développement intérieur ($r \rightarrow 0$ à $\bar{a} = a^* / r$ fixé) de l'intégrant $\tilde{\vec{K}}$, puis nous l'intégrons en utilisant (A.3.8a-b).

Le développement extérieur de $\vec{\mathbf{K}}$:

Le développement extérieur de $\vec{\mathbf{K}}$ est :

$$\boxed{\vec{\mathbf{K}} = \vec{\mathbf{f}}(a^*, a) + \vec{\mathbf{g}}(a^*, a, r, \varphi) + \vec{\mathbf{h}}(a^*, a, r, \varphi) + O(r^2)} \quad (\text{A.3.10})$$

où :

$$\vec{\mathbf{f}}(a^*, a) = \vec{\tau}(a + a^*) \wedge \frac{(\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a + a^*))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a + a^*)|^3} \quad (\text{A.3.11a})$$

$$\vec{\mathbf{g}}(a^*, a, r, \varphi) = -\vec{r} \cdot \vec{\mathbf{r}} \wedge \frac{\vec{\tau}(a + a^*)}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a + a^*)|^3} \quad (\text{A.3.11b})$$

$$\vec{\mathbf{h}}(a^*, a, r, \varphi) = -3rh(a^*, a, \varphi) \vec{\tau}(a + a^*) \wedge [\vec{\mathbf{X}}(a + a^*) - \vec{\mathbf{X}}(a)] \quad (\text{A.3.11c})$$

$$h(a^*, a, \varphi) = \vec{\mathbf{r}}(\varphi, a) \bullet \frac{\vec{\mathbf{X}}(a + a^*) - \vec{\mathbf{X}}(a)}{|\vec{\mathbf{X}}(a + a^*) - \vec{\mathbf{X}}(a)|^5} \quad (\text{A.3.12})$$

L'intégration de ce développement :

Après avoir intégrer le développement (A.3.10) de $\vec{\mathbf{K}}$ avec la formule (A.3.7a-b), on obtient le développement suivant de $\vec{\mathbf{E}}$:

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi}(\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{G}} + \vec{\mathbf{H}}) + O(r^2)} \quad (\text{A.3.13})$$

avec :

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}^+ + \vec{\mathbf{F}}^- \quad (\text{A.3.14a})$$

$$\vec{\mathbf{G}} = \vec{\mathbf{G}}^+ + \vec{\mathbf{G}}^- \quad (\text{A.3.14b})$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}^+ + \vec{\mathbf{H}}^- \quad (\text{A.3.14c})$$

et :

$$\vec{\mathbf{F}}^+ = \int_{-\eta}^{S/2} \vec{\mathbf{f}}(a^*, a) da^* \quad (\text{A.3.15a})$$

$$\vec{\mathbf{F}}^- = \int_{-S/2}^{-\eta} \vec{\mathbf{f}}(a^*, a) da^* \quad (\text{A.3.15b})$$

$$\vec{\mathbf{G}}^+ = \int_{\eta}^{S/2} \vec{\mathbf{g}}(a^*, a, r, \varphi) da^* \quad (\text{A.3.15c})$$

$$\vec{\mathbf{G}}^- = \int_{-S/2}^{-\eta} \vec{\mathbf{g}}(a^*, a, r, \varphi) da^* \quad (\text{A.3.15d})$$

$$\bar{\mathbf{H}}^+ = \int_{\eta}^{S/2} \bar{\mathbf{h}}(a^*, a, r, \varphi) da^* \quad (\text{A.3.15e})$$

$$\bar{\mathbf{H}}^- = \int_{-S/2}^{-\eta} \bar{\mathbf{h}}(a^*, a, r, \varphi) da^* \quad (\text{A.3.15f})$$

Comme $r \ll \eta \ll 1$, d'après (A.3.4), nous développons alors (A.3.15) selon η :

$$\bar{\mathbf{F}} = 4\pi \bar{\mathbf{A}}(a) - K(a) \ln \frac{2\eta}{S} \bar{\mathbf{b}}(a) + O(\eta^2) \quad (\text{A.3.16a})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}} = & 4\pi r \bar{\mathbf{B}}(\varphi, a) + r \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{4}{S^2} + \frac{3}{4} K^2 \ln \frac{2\eta}{S} \right) \bar{\theta} \\ & + r(-\sin \varphi K_a + \cos \varphi K_T) \ln \frac{2\eta}{S} \bar{\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.3.16b})$$

$$\bar{\mathbf{H}} = -3r4\pi \bar{\mathbf{C}}(\varphi, a) - \frac{6}{4} r K^2 \cos \varphi \ln \frac{2\eta}{S} \bar{\mathbf{b}} + O(\eta r) \quad (\text{A.3.16c})$$

où :

$$\boxed{\bar{\mathbf{A}}(a) = \frac{1}{4\pi} \int_{-S/2}^{+S/2} \left[\frac{\bar{\tau}(a+a') \wedge (\bar{\mathbf{X}}(a) - \bar{\mathbf{X}}(a+a'))}{|\bar{\mathbf{X}}(a) - \bar{\mathbf{X}}(a+a')|^3} \right.} \\ \left. - \frac{K}{2} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{|a'|} \right] da'} \quad (\text{A.3.17a})$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{B}}(\varphi, a) = \bar{\mathbf{r}}(\varphi, a) \wedge \int_{-S/2}^{+S/2} \left[-\frac{\bar{\tau}(a+a')}{|\bar{\mathbf{X}}(a) - \bar{\mathbf{X}}(a+a')|^3} \right.} \\ \left. + \frac{1}{|a'|^3} (\bar{\tau}(a) + K(a) \bar{\mathbf{n}}(a) a' + \begin{pmatrix} K_a(a) \bar{\mathbf{n}}(a) \\ + K(a) T(a) \bar{\mathbf{b}}(a) \\ - \frac{3}{4} K^2(a) \bar{\tau}(a) \end{pmatrix} \frac{a'^2}{2}) \right] da'} \quad (\text{A.3.17b})$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{C}}(\varphi, a) = \int_{-S/2}^{+S/2} \left[\frac{\bar{\mathbf{r}}(\varphi, a) \bullet (\bar{\mathbf{X}}(a+a') - \bar{\mathbf{X}}(a))}{|\bar{\mathbf{X}}(a+a') - \bar{\mathbf{X}}(a)|^5} [\bar{\tau}(a+a') \wedge (\bar{\mathbf{X}}(a+a') - \bar{\mathbf{X}}(a))] \right.} \\ \left. + \frac{K^2(a)}{4} \frac{\bar{\mathbf{b}}(a) \cos \varphi}{|a'|} \right] da'} \quad (\text{A.3.17c})$$

Le développement intérieur de $\tilde{\mathbf{K}}$:

Le développement intérieur de $\tilde{\mathbf{K}}$ est :

$$\boxed{r \tilde{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{f}}' + \bar{\mathbf{g}}' + \bar{\mathbf{h}}' + O\left(\frac{r^2}{(1+\bar{a}^2)^{3/2}}\right)} \quad (\text{A.3.18})$$

où

$$\vec{f}' = \frac{\bar{\theta}}{r(1+\bar{a}^2)^{3/2}} \quad (\text{A.3.19a})$$

$$\vec{g}' = \frac{3}{2} \frac{K \bar{a}^2}{(1+\bar{a}^2)^{5/2}} \cos\varphi \bar{\theta} - \frac{K \bar{a}^2}{2(1+\bar{a}^2)^{3/2}} \vec{b} \quad (\text{A.3.19b})$$

$$\vec{h}' = r \left[\begin{array}{l} \frac{\bar{a}^4}{4} \frac{K^2}{(1+\bar{a}^2)^{5/2}} \bar{\theta} \\ + \frac{15}{8} K^2 \bar{a}^4 \frac{\cos^2 \varphi}{(1+\bar{a}^2)^{7/2}} \bar{\theta} \\ + \frac{K}{2} \frac{3\bar{a}^2}{2} \frac{K\bar{a}^2 \cos\varphi}{2(1+\bar{a}^2)^{5/2}} \vec{b} \\ - \frac{\bar{a}^2 (KT \cos\varphi - K_a \sin\varphi) \vec{t} + \bar{a}^2 K^2 \bar{\theta}}{2(1+\bar{a}^2)^{3/2}} \end{array} \right] \quad (\text{A.3.19c})$$

L'intégration de ce développement :

Après intégration du développement (A.3.18) de $\tilde{\vec{K}}$ avec la formule (A.3.8a-b), on obtient le développement suivant de \vec{I} :

$$\boxed{\vec{I} = \frac{1}{4\pi} (\vec{F}' + \vec{G}' + \vec{H}') + O(r^2)} \quad (\text{A.3.20})$$

avec :

$$\vec{F}' = \vec{F}'^+ + \vec{F}'^- \quad (\text{A.3.21a})$$

$$\vec{G}' = \vec{G}'^+ + \vec{G}'^- \quad (\text{A.3.21b})$$

$$\vec{H}' = \vec{H}'^+ + \vec{H}'^- \quad (\text{A.3.21c})$$

et :

$$\vec{F}'^+ = \int_0^{\eta/r} \vec{f}' d\bar{a} \quad (\text{A.3.22a})$$

$$\vec{F}'^- = \int_{-\eta/r}^0 \vec{f}' d\bar{a} \quad (\text{A.3.22b})$$

$$\vec{G}'^+ = \int_0^{\eta/r} \vec{g}' d\bar{a} \quad (\text{A.3.22c})$$

$$\vec{G}'^- = \int_{-\eta/r}^0 \vec{g}' d\bar{a} \quad (\text{A.3.22d})$$

$$\vec{H}'^+ = \int_0^{\eta/r} \vec{h}' d\bar{a} \quad (\text{A.3.22e})$$

$$\bar{\mathbf{H}}' = \int_{-\eta/r}^0 \bar{\mathbf{h}}' d\bar{a} \quad (\text{A.3.22f})$$

Comme $\eta/r \gg 1$, d'après (A.3.4), nous développons alors (A.3.22) selon η/r :

$$\bar{\mathbf{F}}' = \frac{2\bar{\theta}(a)}{r} - \frac{r}{\eta^2} \bar{\theta}(a) + \frac{3}{4} \frac{r^3}{\eta^4} \bar{\theta}(a) + O(\frac{r^5}{\eta^6}) \quad (\text{A.3.23a})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}' &= K \cos \varphi \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{\eta} \right)^2 \right] \bar{\theta}(a) \\ &\quad + K \left[-1 + \ln 2 + \ln \frac{\eta}{r} + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{\eta} \right)^2 \right] \bar{\mathbf{b}} + O(\frac{r^4}{\eta^4}) \end{aligned} \quad (\text{A.3.23b})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}' &= -2r \left\{ \begin{array}{l} \left[-\frac{K^2}{8} \bar{\theta}(a) - \frac{3}{4} K^2 \cos \varphi \bar{\mathbf{b}}(a) \right] \left(-\frac{4}{3} + \ln 2 + \ln \frac{\eta}{r} \right) \\ + \left[KT \cos \varphi - K_a \sin \varphi \right] \left(-1 + \ln \frac{\eta}{r} + \ln 2 \right) \frac{\bar{\tau}(a)}{2} \\ + \frac{K^2}{2} \left(-1 + \ln \frac{\eta}{r} + \ln 2 - \frac{3}{4} \cos^2 \varphi \right) \bar{\theta}(a) + O(\frac{r^5}{\eta^6}) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3.23c})$$

Le développement de $\vec{v}^{\text{out}}(0)(r, \varphi, a)$ près de l'anneau tourbillon :

Lorsque le développement de la partie extérieure (A.3.13) de l'intégrale est additionné au développement de la partie intérieure (A.3.20), tous les termes en η disparaissent et on obtient le développement suivant de $\vec{v}^{\text{out}}(0)(r, \varphi, a)$:

$$\begin{aligned} \vec{v}^{\text{out}}(0)(r \rightarrow 0, \varphi, a) &= \frac{1}{2\pi r} \bar{\theta} + \frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{r} - 1 \right] \bar{\mathbf{b}} + \frac{K}{4\pi} \cos(\varphi) \bar{\theta} \\ &\quad + \bar{\mathbf{A}} \\ &\quad + \frac{3}{16} \frac{K^2}{\pi} r \left\{ \begin{array}{l} (\bar{\mathbf{r}} \sin 2\varphi + \bar{\theta} \cos 2\varphi) \left[\ln \frac{S}{r} - \frac{4}{3} \right] + \frac{1}{2} \bar{\theta} \cos 2\varphi \\ + \frac{1}{18} \bar{\theta} + \frac{4}{3} (\bar{\mathbf{B}} - 3\bar{\mathbf{C}} - \frac{4}{S^2} \bar{\theta}) \end{array} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} r (K_a \sin \varphi - KT \cos \varphi) \left[\ln \frac{S}{r} - 1 \right] \bar{\tau} \\ &\quad + O(r^2 \ln r) \end{aligned} \quad (\text{A.3.24})$$

où les expressions de $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ et $\bar{\mathbf{C}}$ sont données par les formules (A.3.17a-c).

Le développement de $\vec{v}^{\text{out}}(0)(r, \varphi, a)$ près d'un filament non fermé :

Pour un filament tourbillon non fermé, on obtient le développement suivant de

$\vec{v}^{\text{out}}(0)(r, \varphi, a)$ pour r voisin de zéro :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}^{\text{out}}(0)(r \rightarrow 0, \varphi, a) = & \frac{1}{2\pi r} \vec{\theta} + \frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{\tilde{L}}{r} - 1 \right] \vec{b} + \frac{K}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta} + \vec{A} \\ & + \frac{3}{16} \frac{K^2}{\pi} r \left(\begin{aligned} & (\vec{r} \sin 2\varphi + \bar{\theta} \cos 2\varphi) \left[\ln \frac{\tilde{L}}{r} - \frac{4}{3} \right] + \frac{1}{2} \bar{\theta} \cos 2\varphi \\ & + \frac{1}{18} \bar{\theta} + \frac{4}{3K^2} (\bar{\mathbf{B}} - 3\bar{\mathbf{C}} - \frac{4}{\tilde{L}^2} \bar{\theta}) \end{aligned} \right) \\ & + \frac{1}{4\pi} r \vec{\tau} (K_a \sin \varphi - K T \cos \varphi) \left[\ln \frac{\tilde{L}}{r} - 1 \right] + O(r^2 \ln r)\end{aligned}} \quad (\text{A.3.25})$$

avec :

$$\vec{A}(a) = \frac{1}{4\pi} \left[\begin{aligned} & \int_{-\tilde{L}/2}^{+\tilde{L}/2} \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a'))}{|\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a')|^3} da' \\ & - \frac{K(a) \vec{b}(a)}{2|a'|} \end{aligned} \right] \quad (\text{A.3.26a})$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_I \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a'))}{|\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a')|^3} da'$$

$$\vec{B}(\varphi, a) = \vec{r}(\varphi, a) \wedge \left[\begin{aligned} & - \frac{\vec{\tau}(a+a')}{|\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a')|^3} \\ & + \int_{-\tilde{L}/2}^{+\tilde{L}/2} \left[\begin{aligned} & K_a(a) \vec{n}(a) \\ & + K(a) T(a) \vec{b}(a) \frac{a'^2}{2} \\ & - \frac{3}{4} K^2(a) \vec{\tau}(a) \end{aligned} \right] da' \end{aligned} \right] \quad (\text{A.3.26b})$$

$$+ \vec{r}(\varphi, a) \wedge \left[\int_I - \frac{\vec{\tau}(a+a')}{|\vec{X}(a) - \vec{X}(a+a')|^3} da' \right]$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{C}}(\varphi, a) = & \int_{-\tilde{L}/2}^{+\tilde{L}/2} \left[\frac{\vec{\mathbf{r}}(\varphi, a) \bullet (\vec{\mathbf{X}}(a + a') - \vec{\mathbf{X}}(a))}{|\vec{\mathbf{X}}(a + a') - \vec{\mathbf{X}}(a)|^5} [\vec{\tau}(a + a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a + a') - \vec{\mathbf{X}}(a))] \right. \\ & \left. + \frac{K^2(a)}{4} \frac{\vec{\mathbf{b}}(a) \cos \varphi}{|a'|} \right] da' \\ & + \int_I \left[\frac{\vec{\mathbf{r}}(a, \varphi) \bullet (\vec{\mathbf{X}}(a + a') - \vec{\mathbf{X}}(a))}{|\vec{\mathbf{X}}(a + a') - \vec{\mathbf{X}}(a)|^5} [\vec{\tau}(a + a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a + a') - \vec{\mathbf{X}}(a))] \right] da'\end{aligned}\quad (\text{A.3.26c})$$

où

$I =]-\infty, +\infty[/ [-\tilde{L}/2, +\tilde{L}/2]$ et \tilde{L} est une longueur de l'ordre 1 qui

permet d'éviter la singularité en l'infini.

Annexe 4

A.4. L'équation de conservation de la masse et de Navier Stokes aux différents ordres

Dans cette annexe, nous donnons les différents ordres du développement intérieur ($\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ fixé) de l'équation de conservation de la masse (A.1.8)

$$(urh_3)_r + (h_3v)_\varphi + rw_s - \sigma Trw_\varphi + r \vec{\dot{X}}_s \bullet \vec{\tau} = 0 \quad (\text{A.4.1})$$

et des équations de Navier Stokes (A.1.24)

$$\vec{a} = -gradp + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{h_3} \left(\frac{1}{h_3} \vec{\dot{X}}_s \right)_s \quad (\text{A.4.2a})$$

avec :

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial \hat{\vec{V}}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} + u \vec{\dot{r}} + v \vec{\dot{\theta}} + w \vec{\dot{\tau}} + \vec{\ddot{X}} + (\vec{V} - r \vec{r}_t) \bullet grad \vec{V} + \frac{\vec{\dot{X}}_s}{h_3} (w - r \vec{\dot{r}} \bullet \vec{\tau}) \quad (\text{A.4.2b})$$

$$\left(\frac{\partial \hat{\vec{V}}}{\partial t} \right)_{r,\varphi,s} = \frac{\partial u}{\partial t} \vec{r} + \frac{\partial v}{\partial t} \vec{\theta} + \frac{\partial w}{\partial t} \vec{\tau} \quad (\text{A.4.2c})$$

On remplace les développements asymptotiques (3.6) du champ de vitesse :

$$\begin{aligned} u^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \bar{u} = \varepsilon^{-1} u^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \\ v^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \bar{v} = \varepsilon^{-1} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \\ w^{\text{inn}} &= \varepsilon^{-1} \bar{w} = \varepsilon^{-1} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4.3a})$$

et (3.7) de la fibre centrale :

$$\vec{X}(s, t, \varepsilon) = \vec{X}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \vec{X}^{(1)}(s, t) + \dots \quad (\text{A.4.3b})$$

dans ces équations préalablement écrites sur la variable dilatée intérieure $\bar{r} = r / \varepsilon$.

Ces calculs sont réalisés à l'aide d'un calculateur formel. Les équations (A.4.1) et (A.4.2) sont entrées dans le calculateur en programmant les formules des opérateurs différentiels qui nous intéressent sur des coordonnées orthogonales générales, puis en indiquant la métrique (paragraphe I.2.3) de nos coordonnées. Une procédure fait alors la dilatation de la coordonnée radiale r . Nous remplaçons les développements (A.4.3a-b) sous forme de séries tronquées dans les équations, nous développons en séries de ε et nous rassemblons les termes suivant les ordres du petit paramètre ε . Nous obtenons alors les différents ordres des équations qui sont donnés dans ce qui suit.

Équations à l'ordre 0 :

A l'ordre 0, l'équation de continuité et les équation de Navier Stokes sur $(\bar{r}, \vec{\theta}, \vec{t})$ sont :

$$\boxed{\sigma^{(0)}(s, t) \frac{\partial}{\partial \varphi} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = 0} \quad (\text{A.4.4a})$$

$$\boxed{- \left[\frac{v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\bar{r}} \right]^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} p^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = 0} \quad (\text{A.4.4b})$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \right]^2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} p^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = 0} \quad (\text{A.4.4c})$$

$$\boxed{v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = 0} \quad (\text{A.4.4c})$$

où nous avons utilisé (3.8) : $u^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = 0$.

Équations à l'ordre 1 :

A l'ordre 1, l'équation de continuité et les équation de Navier Stokes sur $(\bar{r}, \vec{\theta}, \vec{t})$ sont :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{r} u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} = s_1^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)} \quad (\text{A.4.5a})$$

$$\boxed{- 2v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\ + v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} + \bar{r} \frac{\partial p^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} = s_2^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)} \quad (\text{A.4.5b})$$

$$\boxed{\frac{\partial [v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)]}{\partial \varphi} + u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \\ + \frac{\partial p^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} = s_3^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)} \quad (\text{A.4.5c})$$

$$\boxed{-r \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} = s_4^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)} \quad (\text{A.4.5d})$$

avec :

$$\begin{aligned} s_1^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) &= -\bar{r} K^{(0)}(s, t) \sin(\varphi) v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\ &+ \bar{r} \left(T^{(0)}(s, t) \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) - \frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial}{\partial s} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \right) \\ &+ \left(\bar{r} K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi) - \frac{\sigma^{(1)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \end{aligned} \quad (\text{A.4.6a})$$

$$s_2^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = -\bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)^2 K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi) \quad (\text{A.4.6b})$$

$$\begin{aligned} s_3^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) &= \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)^2 K^{(0)}(s, t) \sin(\varphi) \\ &+ \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) T^{(0)}(s, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \\ &- \frac{\bar{r}}{\sigma^{(0)}(s, t)} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial s} \end{aligned} \quad (\text{A.4.6c})$$

$$\begin{aligned} s_4^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) &= -\bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) K^{(0)}(s, t) \sin(\varphi) w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\ &+ \frac{\bar{r}}{2} \left(-\frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)^2}{\partial s} + T^{(0)}(s, t) \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)^2}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \bar{r} \left(-\frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial p^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial s} + T^{(0)}(s, t) \frac{\partial p^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.6d})$$

Équations à l'ordre 2 :

A l'ordre 2, l'équation de continuité et les équation de Navier Stokes sur $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\theta}, \bar{\tau})$ sont :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{r} u^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial v^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} = s_1^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t)} \quad (\text{A.4.7a})$$

$$\boxed{-2v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)v^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial u^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} + \bar{r} \frac{\partial p^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} = s_2^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t)} \quad (\text{A.4.7b})$$

$$\boxed{\begin{aligned} & \partial \left[v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) v^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \right] \\ & + u^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{r} v^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} = s_3^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \end{aligned}} \quad (\text{A.4.7c})$$

$$\boxed{\begin{aligned} & -\bar{r} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} u^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\ & + \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} v^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial w^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} = s_4^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \end{aligned}} \quad (\text{A.4.7d})$$

avec :

$$\begin{aligned} s_1^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = & -\bar{r} K^{(0)}(s, t) v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \sin(\varphi) \\ & - \left[-2\bar{r} K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi) + \frac{\sigma^{(1)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \right] \frac{\partial \bar{r} u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} \\ & - \left[-K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi) + \frac{\sigma^{(1)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \right] \frac{\partial v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \\ & + \bar{r} \left(T^{(0)}(s, t) \frac{\partial w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial s} \right) \\ & + \bar{r} \left[T^{(1)}(s, t) + \frac{\sigma^{(1)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} T^{(0)}(s, t) \right] \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \\ & - \left[-\bar{r} K^{(1)}(s, t) \cos(\varphi) \right. \\ & \left. - \bar{r} \frac{\sigma^{(1)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi) \right] \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \\ & + \frac{\sigma^{(2)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \\ & - \bar{r} \left(K^{(1)}(s, t) + \frac{\sigma^{(1)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} K^{(0)}(s, t) \right) v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \sin(\varphi) \\ & - \bar{r} \frac{\sigma^{(0)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \end{aligned} \quad (\text{A.4.8a})$$

$$\begin{aligned}
s_2^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = & -\frac{1}{2} \bar{r} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \bar{r}}^2(\bar{r}, \varphi, s, t) \\
& + \bar{r} \left(T^{(0)}(s, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \varphi}(\bar{r}, \varphi, s, t) - \frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial s}(\bar{r}, \varphi, s, t) \right) w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\
& + v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)^2 \\
& - 2 \bar{r} w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi) \\
& - 2 \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \left(\frac{\partial \vec{\tau}^{(0)}}{\partial t}(s, t) \bullet \vec{r}^{(0)}(s, \varphi, t) \right) \\
& - \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)^2 \left(K^{(1)}(s, t) + \bar{r} K^{(0)}(\bar{r}, s, t) \cos(\varphi) \right) \cos(\varphi) \\
& - \frac{2}{\bar{r}} \alpha^2 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \varphi}(\bar{r}, \varphi, s, t) \tag{A.4.8b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_3^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = & -\frac{\bar{r}}{\sigma^{(0)}(s, t)} \left(w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial v^{(1)}}{\partial s}(\bar{r}, \varphi, s, t) \right. \\
& \left. + v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial w^{(1)}}{\partial s}(\bar{r}, \varphi, s, t) \right) \\
& - u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial \bar{r} v^{(1)}}{\partial \bar{r}}(\bar{r}, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \varphi}^2(\bar{r}, \varphi, s, t) \\
& + \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) T^{(0)}(s, t) \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \varphi}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\
& + 2 \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) K^{(0)}(s, t) \sin(\varphi) \\
& + \bar{r} w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) T^{(0)}(s, t) \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \varphi}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\
& + \bar{r} \left[w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) T^{(1)}(s, t) \right. \\
& \left. + \bar{r} K^{(0)}(s, t) T^{(0)}(s, t) w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \cos(\varphi) \right] \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \varphi}(\bar{r}, \varphi, s, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \left(K^{(1)}(s, t) + \bar{r} K^{(0)}(\bar{s}, t) \cos(\varphi) \right) \sin(\varphi) \\
& - \frac{\bar{r}}{\sigma^{(0)}(s, t)} \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^{(1)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \\ + \bar{r} K^{(0)}(\bar{s}, t) \cos(\varphi) \end{pmatrix} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial s} \\
& - \bar{r} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial t} \\
& - 2 \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \left(\frac{\partial \bar{\tau}^{(0)}}{\partial t} \bullet \bar{\theta}^{(0)} \right) \\
& + \bar{r} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}^{(0)}}{\partial t} \bullet \bar{\theta}^{(0)} \right) \\
& + \bar{r} \alpha^2 \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} \\ + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi^2} - \frac{v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\bar{r}^2} \end{array} \right] \quad (\text{A.4.8c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_4^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = & \\
& + \bar{r} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial p^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial s} \\ + T^{(0)}(s, t) \frac{\partial p^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
& + \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial s} \\ + T^{(0)}(s, t) \frac{\partial w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
& - \bar{r} K^{(0)}(s, t) \sin(\varphi) \begin{bmatrix} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\ + v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \end{bmatrix} \\
& + \bar{r} K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi) w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\
& - \frac{\partial w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \\
& + \bar{r} \frac{\partial w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{r} \left[T^{(1)}(s, t) + \bar{r} T^{(0)}(s, t) K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi) \right] \left[\frac{1}{2} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \varphi}^2 (\bar{r}, \varphi, s, t) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \varphi} (\bar{r}, \varphi, s, t) \right] \\
& + \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \sin(\varphi) \left[K^{(1)}(s, t) \right. \\
& \quad \left. + \bar{r} K^{(0)}(s, t)^2 \cos(\varphi) \right] \\
& + \bar{r} \left(\frac{\sigma^{(1)}(s, t)}{\sigma^{(0)}(s, t)^2} - \frac{\bar{r} K^{(0)}(s, t) \cos(\varphi)}{\sigma^{(0)}(s, t)} \right) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial s}^2 (\bar{r}, \varphi, s, t) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} (\bar{r}, \varphi, s, t) \right] \\
& - \bar{r} w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \left(\frac{1}{\sigma^{(0)}(s, t)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial s} (\bar{r}, \varphi, s, t) \right. \\
& \quad \left. + T^{(0)}(s, t) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \varphi} (\bar{r}, \varphi, s, t) \right) \\
& - \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \left(\frac{\partial \vec{\theta}(s, t)}{\partial t} \bullet \vec{\tau}(s, t) \right) \\
& + \bar{r} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial t} \bullet \vec{\theta}(s, t) \right) \\
& - \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \frac{\frac{\partial \sigma^{(0)}(s, t)}{\partial t}}{\sigma^{(0)}(s, t)} + \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial t} \\
& + \alpha^2 r \left(\frac{\partial^2 w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial \bar{r}} \right)
\end{aligned} \tag{A.4.8d}$$

Annexe 5

A.5. Les équations de la vorticité et le rotationnel de la vitesse aux différents ordres

Dans cette annexe, nous donnons les différents ordres du développement intérieur

($\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ fixé) des équations $\operatorname{div}\vec{\omega} = 0$ (A.1.27) et de la vorticité (A.1.29) suivantes :

$$(\omega_1 rh_3)_r + (h_3 \omega_2)_\varphi + r \omega_{3_s} - \sigma Tr \omega_{3_\varphi} = 0 \quad (\text{A.5.1})$$

$$\left(\frac{\partial \hat{\vec{\omega}}}{\partial \vec{\tau}} \right)_{r, \varphi, s} + \omega_1 \dot{\vec{r}} + \omega_2 \dot{\vec{\theta}} + \omega_3 \dot{\vec{\tau}} + (\vec{v} - \vec{X} - r \vec{r}) \bullet \operatorname{grad} \vec{\omega} - \vec{\omega} \bullet \operatorname{grad} \vec{v} = \nu \Delta \vec{\omega} \quad (\text{A.5.2})$$

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{V} + \frac{\vec{\tau}}{h_3} \wedge \vec{X}_s \quad (\text{A.5.3})$$

où l'on rappelle que le champ de vorticité se décompose suivant la formule :

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{r} + \omega_2 \vec{\theta} + \omega_3 \vec{\tau} \quad (\text{A.5.4})$$

On remplace les développements asymptotiques (3.6) du champ de vitesse et du champ de vorticité :

$$u^{\text{inn}} = \varepsilon^{-1} \bar{u} = \varepsilon^{-1} u^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + u^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots$$

$$v^{\text{inn}} = \varepsilon^{-1} \bar{v} = \varepsilon^{-1} v^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + v^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots \quad (\text{A.5.5a})$$

$$w^{\text{inn}} = \varepsilon^{-1} \bar{w} = \varepsilon^{-1} w^{(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + w^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \dots$$

$$\vec{\omega}^{\text{inn}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\omega}^{\text{inn}(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \frac{1}{\varepsilon^1} \vec{\omega}^{\text{inn}(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \vec{\omega}^{\text{inn}(2)} + \dots, \quad (\text{A.5.5b})$$

ainsi que le développement (3.7) de la fibre centrale :

$$\vec{\mathbf{X}}(s, t, \varepsilon) = \vec{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t) + \varepsilon^1 \vec{\mathbf{X}}^{(1)}(s, t) + \dots \quad (\text{A.5.5c})$$

dans ces équations préalablement écrites sur la variable dilatée intérieure $\bar{r} = r / \varepsilon$.

On opère ici, comme dans l'annexe A.4 à l'aide d'un calculateur formel. Les différents ordres des équations que nous obtenons alors sont donnés dans ce qui suit.

Les équations de la vorticité

Équations à l'ordre 0 :

A l'ordre 0, l'équation de la divergence et les équations de la vorticité sur $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\theta}, \bar{\tau})$ sont :

$$\boxed{(\bar{r}\omega_1^{(0)})_{\bar{r}} + (\omega_2^{(0)})_{\varphi} = 0} \quad (\text{A.5.6a})$$

$$\boxed{(\omega_1^{(0)})_{\varphi} v^{(0)} = 0} \quad (\text{A.5.6b})$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\bar{r}}(\omega_2^{(0)})_{\varphi} + \frac{\omega_1^{(0)}}{\bar{r}} \right) v^{(0)} - \frac{1}{\bar{r}}(v^{(0)})_{\varphi} \omega_2^{(0)} - (v^{(0)})_{\bar{r}} \omega_1^{(0)} = 0} \quad (\text{A.5.6c})$$

$$\boxed{\frac{1}{\bar{r}}(\omega_3^{(0)})_{\varphi} v^{(0)} - \frac{1}{\bar{r}}(w^{(0)})_{\varphi} \omega_2^{(0)} - (w^{(0)})_{\bar{r}} \omega_1^{(0)} = 0}, \quad (\text{A.5.6d})$$

où nous avons utilisé : $u^{(0)} = 0$.

Équations à l'ordre 1 :

A l'ordre 1, l'équation de la divergence et les équations de la vorticité sur $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\theta}, \bar{\tau})$ sont :

$$\boxed{(\bar{r}\omega_1^{(1)})_{\bar{r}} + (\omega_2^{(1)})_{\varphi} = c_1^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)} \quad (\text{A.5.7a})$$

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{r}}(\omega_1^{(1)})_{\varphi} v^{(0)} + (\omega_1^{(0)})_{\bar{r}} u^{(1)} + \frac{1}{\bar{r}}(\omega_1^{(0)})_{\varphi} v^{(1)} \\ & - (u^{(1)})_{\bar{r}} \omega_1^{(0)} - \frac{1}{\bar{r}}(u^{(1)})_{\varphi} \omega_2^{(0)} = c_2^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \end{aligned}} \quad (\text{A.5.7b})$$

$$\boxed{\begin{aligned} & - (v^{(0)})_{\bar{r}} \omega_1^{(1)} + \frac{\omega_1^{(1)} v^{(0)}}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}}(v^{(0)})_{\varphi} \omega_2^{(1)} + \frac{1}{\bar{r}}(\omega_2^{(1)})_{\varphi} v^{(0)} \\ & + \frac{\omega_1^{(0)} v^{(1)}}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}}(\omega_2^{(0)})_{\varphi} v^{(1)} + (\omega_2^{(0)})_{\bar{r}} u^{(1)} \\ & - (v^{(1)})_{\bar{r}} \omega_1^{(0)} - \frac{1}{\bar{r}} \omega_2^{(0)} u^{(1)} - \frac{1}{\bar{r}}(v^{(1)})_{\varphi} \omega_2^{(0)} = c_3^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \end{aligned}} \quad (\text{A.5.7c})$$

$$\boxed{-(w^{(0)})_{\bar{r}} \omega_1^{(1)} + \frac{1}{r} (\omega_3^{(1)})_{\varphi} v^{(0)} - \frac{1}{r} (w^{(0)})_{\varphi} \omega_2^{(1)} \\ + \frac{1}{r} (\omega_3^{(0)})_{\varphi} v^{(1)} + (\omega_3^{(0)})_{\bar{r}} u^{(1)} \\ - \frac{1}{r} (w^{(1)})_{\varphi} \omega_2^{(0)} - (w^{(1)})_{\bar{r}} \omega_1^{(0)} = c_4^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t)} \quad (\text{A.5.7d})$$

avec :

$$c_1^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = \bar{r} \left(\omega_1^{(0)} + (\bar{r} \omega_1^{(0)})_{\bar{r}} + (\omega_2^{(0)})_{\varphi} \right) K^{(0)} \cos(\varphi) \\ - \bar{r} K^{(0)} \sin(\varphi) \omega_2^{(0)} + \bar{r} T^{(0)} (\omega_3^{(0)})_{\varphi} \\ - \frac{\bar{r}}{\sigma^{(0)}} (\omega_3^{(0)})_s - \left((\bar{r} \omega_1^{(0)})_{\bar{r}} + (\omega_2^{(0)})_{\varphi} \right) \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}} \quad (\text{A.5.8a})$$

$$c_2^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = \left(-\frac{1}{\sigma^{(0)}} (\omega_1^{(0)})_s + T^{(0)} (\omega_1^{(0)})_{\varphi} \right) w^{(0)} \quad (\text{A.5.8b})$$

$$c_3^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = - \left[\frac{1}{\sigma^{(0)}} (\omega_2^{(0)})_s - T^{(0)} (\omega_2^{(0)})_{\varphi} \right] w^{(0)} \\ + \left[\frac{1}{\sigma^{(0)}} (v^{(0)})_s - T^{(0)} (v^{(0)})_{\varphi} \right] \omega_3^{(0)} \quad (\text{A.5.8c})$$

$$c_4^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = - \left[\frac{(\omega_3^{(0)})_s}{\sigma^{(0)}} - T^{(0)} (\omega_3^{(0)})_{\varphi} \right] w^{(0)} \\ + \left[\frac{(w^{(0)})_s}{\sigma^{(0)}} - T^{(0)} (w^{(0)})_{\varphi} \right] \omega_3^{(0)} \\ + \omega_1^{(0)} K^{(0)} \cos(\varphi) w^{(0)} \\ - \omega_2^{(0)} K^{(0)} \sin(\varphi) w^{(0)} \\ + \omega_3^{(0)} K^{(0)} \sin(\varphi) v^{(0)} \quad (\text{A.5.8d})$$

Lorsque l'ordre principal est axisymétrique et indépendant de l'abscisse, ces équations se simplifient. Les équations à l'ordre 0 sont automatiquement vérifiées et $\omega_1^{(0)} = 0$.

Equations à l'ordre 1 :

A l'ordre 0, l'équation de la divergence et les équations de la vorticité sur $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\tau})$ sont :

$$(\bar{r}\omega_1^{(1)})_{\bar{r}} + (\omega_2^{(1)})_{\varphi} = c_1^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \quad (\text{A.5.9a})$$

$$(\omega_1^{(1)})_{\varphi} v^{(0)} - (u^{(1)})_{\varphi} \omega_2^{(0)} = 0 \quad (\text{A.5.9b})$$

$$\begin{aligned} & -\left(v^{(0)}\right)_{\bar{r}} \omega_1^{(1)} + \frac{\omega_1^{(1)} v^{(0)}}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} (\omega_2^{(1)})_{\varphi} v^{(0)} \\ & + (\omega_2^{(0)})_{\bar{r}} u^{(1)} - \frac{1}{\bar{r}} \omega_2^{(0)} u^{(1)} - \frac{1}{\bar{r}} (v^{(1)})_{\varphi} \omega_2^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5.9c})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{r}} (\omega_3^{(1)})_{\varphi} v^{(0)} - (w^{(0)})_{\bar{r}} \omega_1^{(1)} \\ & (\omega_3^{(0)})_{\bar{r}} u^{(1)} - \frac{1}{\bar{r}} (w^{(1)})_{\varphi} \omega_2^{(0)} = c_4^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) \end{aligned} \quad (\text{A.5.9d})$$

avec :

$$c_1^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = -\bar{r} K^{(0)} \sin(\varphi) \omega_2^{(0)} \quad (\text{A.5.10a})$$

$$\begin{aligned} c_4^{(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = & -\omega_2^{(0)} K^{(0)} \sin(\varphi) w^{(0)} \\ & + \omega_3^{(0)} K^{(0)} \sin(\varphi) v^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{A.5.10b})$$

Le rotationnel de la vitesse

Equations à l'ordre 0 :

A l'ordre 0, l'équation (A.5.3) qui lie le champ de vorticité au champ de vitesse donne sur $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\tau})$:

$$\omega_1^{(0)} = 0 \quad (\text{A.5.11a})$$

$$\omega_2^{(0)} = -\frac{(0)}{r} \quad (\text{A.5.11b})$$

$$\omega_3^{(0)} = \frac{1}{r} \left[\bar{r} v^{(0)} \right]_{\bar{r}} \quad (\text{A.5.11c})$$

Équations à l'ordre 1 :

A l'ordre 1, l'équation (A.5.3) qui lie le champ de vorticité au champ de vitesse donne sur $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$:

$$\omega_1^{(1)} = w^{(0)} K^{(0)} \sin(\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \varphi} \quad (\text{A.5.12a})$$

$$\omega_2^{(1)} = w^{(0)} K^{(0)} \cos(\varphi) - \frac{w_r^{(1)}}{r} \quad (\text{A.5.12b})$$

$$\omega_3^{(1)} = \frac{1}{r} \left[r v^{(1)} \right]_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \varphi} \quad (\text{A.5.12c})$$

Annexe 6

A.6. Détermination de $\Psi_{11}^{\infty(1)}(\bar{r})$

Dans cette annexe, on détermine la limite en l'infini de la fonction de courant $\Psi_{11}^{(1)}(\bar{r})$ soit par passage à la limite en l'infini dans l'équation (3.21) soit par calcul du développement d'une intégrale singulière dans l'équation (3.28b).

Par passage à la limite en l'infini dans l'équation :

Au paragraphe III.6.5.1, on obtient que la limite de $\Psi_{11}^{(1)}(\bar{r})$ en l'infini est donné par la formule (3.31b) :

$$\boxed{\Psi_{11}^{(1)\infty}(\bar{r}) = \bar{r}K^{(0)}C^*(t) + \frac{K^{(0)}}{4\pi}\bar{r}\ln(\bar{r}) + O\left(\frac{1}{\bar{r}}\right)} \quad (\text{A.6.1})$$

où :

$$C^*(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{h(\bar{r}, t) - \frac{1}{2}r^2 \ln(\bar{r})}{\frac{r^2}{\bar{r}}} \right] \quad (\text{A.6.2})$$

avec :
$$h(\bar{r}, t) = \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)}(z, t))^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)}(\xi, t) H(\xi, t) d\xi \right] dz \quad (\text{A.6.3})$$

$$H(\xi, t) = 2\xi \omega_3^{(0)}(\xi, t) + v^{(0)}(\xi, t) + \frac{2\xi w^{(0)}(\xi, t) \left(w^{(0)}(\xi, t) \right)_\xi}{v^{(0)}(\xi, t)} \quad (\text{A.6.4})$$

On simplifie l'expression (A.6.2) de $C^*(t)$ à l'aide de la règle de l'hôpital et de la limite :

$$v^{(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty, t) = \frac{1}{2\pi \bar{r}} \quad (\text{A.6.5})$$

A.6. Détermination de $\Psi_{11}^{\infty(1)}(\bar{r})$

On obtient :

$$\begin{aligned} C^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(h - \frac{1}{2} \bar{r}^2 \ln(\bar{r}) \right)' }{\left(\frac{1}{\bar{r}} \right)'} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{\bar{r}^2} \int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)} H d\xi - \bar{r} \ln(\bar{r}) - \frac{1}{2}}{2\bar{r}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6.6})$$

c'est à dire :

$$C^*(t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} &- \frac{1}{2} + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} \xi (v^{(0)})^2 d\xi - \ln(\bar{r}) \right) \\ &+ \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} \xi^2 (v^{(0)} \omega_3^{(0)} + w^{(0)} w \frac{(0)}{\bar{r}}) d\xi \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6.7})$$

Or une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \xi^2 w^{(0)} w \frac{(0)}{\bar{r}} d\xi \right) &= \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial(w^{(0)})^2}{\partial \bar{r}} d\xi \right) \\ &= - \int_0^{\infty} \xi (w^{(0)})^2 d\xi + \left[\frac{\xi^2}{2} (w^{(0)})^2 \right]_0^{\infty} \\ &= - \int_0^{\infty} \xi (w^{(0)})^2 d\xi \end{aligned} \quad (\text{A.6.8})$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \xi^2 v^{(0)} \omega_3^{(0)} d\xi \right) &= \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)} \frac{\partial(\xi v^{(0)})}{\partial \xi} d\xi \right) \\ &= \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{r}} \frac{1}{2} \frac{\partial(\xi v^{(0)})^2}{\partial \xi} d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\xi v^{(0)})^2 \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.6.9})$$

A.6. Détermination de $\Psi_{11}^{\infty(1)}(\bar{r})$

L'expression simplifiée de $C^*(t)$ qui remplace (A.6.2) est donc :

$$\boxed{C^*(t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} \xi (v^{(0)})^2 d\xi - \ln(\bar{r}) \right) \\ - 8\pi^2 \int_0^{\infty} \xi (w^{(0)})^2 d\xi \end{array} \right\}} \quad (\text{A.6.10})$$

Par le calcul de l'intégrale singulière :

Nous voulons faire la limite $\bar{r} \rightarrow \infty$ dans l'expression intégrale (3.28b) de $\Psi_{11}^{(1)}$:

$$\Psi_{11}^{(1)}(\bar{r}, t) = K^{(0)}(s, t) v^{(0)}(\bar{r}, t) \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)}(z, t))^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)}(\xi, t) H(\xi, t) d\xi \right] dz \quad (\text{A.6.11})$$

où :

$$H(\xi, t) = 2\xi w_3^{(0)}(\xi, t) + v^{(0)}(\xi, t) + \frac{2\xi w^{(0)}(\xi, t) \left(w^{(0)}(\xi, t) \right)_\xi}{v^{(0)}(\xi, t)} \quad (\text{A.6.12})$$

Cette intégrale est singulière par rapport au petit paramètre $1/\bar{r}$.

Comme le développement en l'infini de $v^{(0)}(\xi, t)$ est

$$\underset{\xi \rightarrow \infty}{dev} v^{(0)}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\xi}, \quad (\text{A.6.13})$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} \underset{z \rightarrow \infty}{dev} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] &= 4\pi^2 z \underset{z \rightarrow \infty}{dev} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] \\ &= 4\pi^2 z \left\{ \int_0^1 \xi v^{(0)} H d\xi + \underset{z \rightarrow \infty}{dev} \left[\int_1^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] \right\} \quad (\text{A.6.14}) \end{aligned}$$

A.6. Détermination de $\Psi_{11}^{\infty(1)}(\bar{r})$

On a séparé l'intégrale en deux pour distinguer ce qu'il se passe dans un voisinage de 0 d'une longueur de l'ordre 1, de ce qu'il se passe en l'infini. Comme le développement en l'infini de $\xi v^{(0)}(\xi, t)H(\xi, t)$ est :

$$\underset{\xi \rightarrow \infty}{\text{dev}} \xi v^{(0)}(\xi, t)H(\xi, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\xi}, \quad (\text{A.6.15})$$

la singularité en l'infini ne doit être traitée que en dehors de 0, car sinon on fait apparaître une singularité en 0. On traite alors la singularité en l'infini en écrivant :

$$\underset{z \rightarrow \infty}{\text{dev}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] = 4\pi^2 z \left[\begin{array}{l} \int_0^1 \xi v^{(0)} H d\xi \\ + \underset{z \rightarrow \infty}{\text{dev}} \left[\int_1^z \left(\xi v^{(0)} H - \underset{\xi \rightarrow \infty}{\text{dev}} \xi v^{(0)} H \right) d\xi \right] \\ + \underset{z \rightarrow \infty}{\text{dev}} \left[\int_1^z \left(\underset{\xi \rightarrow \infty}{\text{dev}} \xi v^{(0)} H \right) d\xi \right] \end{array} \right] \quad (\text{A.6.16})$$

qui à l'aide de (A.6.15) donne :

$$\boxed{\underset{z \rightarrow \infty}{\text{dev}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] = 4\pi^2 z \left\{ \frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} + \frac{1}{4\pi^2} \ln z + O(1/z) \right\}} \quad (\text{A.6.17})$$

où l'on a posé :

$$\boxed{\frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} = \int_0^1 \xi v^{(0)} H d\xi + \left[\int_1^\infty \left(\xi v^{(0)} H - \frac{1}{4\pi^2 \xi} \right) d\xi \right]} \quad (\text{A.6.18a})$$

que l'on peut également écrire :

$$\boxed{\frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} = \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)} H d\xi - \frac{1}{4\pi^2} \ln \bar{r} \right\}} \quad (\text{A.6.18b})$$

A l'aide de (A.6.11), il vient :

$$\begin{aligned} \underset{\bar{r} \rightarrow \infty}{\text{dev}} \Psi_{11}^{(1)} &= \frac{K^{(0)}}{2\pi \bar{r}} \underset{\bar{r} \rightarrow \infty}{\text{dev}} \left[\int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \right] \\ &= \frac{K^{(0)}}{2\pi \bar{r}} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz + \underset{\bar{r} \rightarrow \infty}{\text{dev}} \left[\int_1^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.6.19})$$

où l'on a séparé ce qui se passe proche de 0 afin de ne pas introduire une singularité en 0 en voulant traiter la singularité en l'infini. On traite alors la singularité en l'infini en écrivant :

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \frac{dev}{\bar{r}} \Psi_{11}^{(1)} = \frac{K^{(0)}}{2\pi \bar{r}} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \\ & + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left[\int_1^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \right] \\ & - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] \\ & + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left[\int_1^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6.20})$$

qui à l'aide de (A.6.17) donne :

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \frac{dev}{\bar{r}} \Psi_{11}^{(1)} = \frac{K^{(0)}}{2\pi \bar{r}} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \\ & + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left[\int_1^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \right. \\ & \left. - 4\pi^2 z \left[\frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} + \frac{1}{4\pi^2} \ln z \right] \right] \\ & + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left[\int_1^{\bar{r}} 4\pi^2 z \left[\frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} + \frac{1}{4\pi^2} \ln z \right] dz \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6.21})$$

c'est à dire :

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \frac{dev}{\bar{r}} \Psi_{11}^{(1)} = \frac{K^{(0)}}{2\pi \bar{r}} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \\ & + \left[\int_1^\infty \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \right. \\ & \left. - 4\pi^2 z \left[\frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} + \frac{1}{4\pi^2} \ln z \right] \right] \\ & + \frac{2\pi^2 \tilde{a}}{K^{(0)}} (\bar{r}^{-2} - 1) + \frac{1}{2} \bar{r}^{-2} \ln \bar{r} - \frac{1}{4} (\bar{r}^{-2} - 1) \\ & + O(1/\bar{r}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6.22})$$

A.6. Détermination de $\Psi_{11}^{\infty(1)}(\bar{r})$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \operatorname{dev} \Psi_{11}^{(1)} &= \frac{K^{(0)}}{2\pi r} \left\{ \tilde{b} + \frac{2\pi^2 \tilde{a}}{K^{(0)}} (\bar{r}^{-2} - 1) + \frac{1}{2} \bar{r}^{-2} \ln \bar{r} - \frac{1}{4} (\bar{r}^{-2} - 1) + O(1/\bar{r}) \right\} \\ &= -\frac{1}{8} \frac{\bar{r} K^{(0)}}{\pi} + \pi \bar{r} \tilde{a} + \frac{1}{4} \frac{\bar{r} K^{(0)}}{\pi} \ln \bar{r} + O(1/\bar{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.6.23})$$

où l'on a posé :

$$\tilde{b} = \int_0^1 \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz + \left[\int_1^\infty \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz \right] \quad (\text{A.6.24})$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\tilde{b} = \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \left[\int_0^z \xi v^{(0)} H d\xi \right] dz - \left(\frac{2\pi^2 \tilde{a}}{K^{(0)}} (\bar{r}^{-2} - 1) + \frac{1}{2} \bar{r}^{-2} \ln \bar{r} - \frac{1}{4} (\bar{r}^{-2} - 1) \right) \right\} \quad (\text{A.6.25})$$

Le résultat (A.6.23) que l'on a obtenu par ce calcul d'intégrale singulière est :

$$\boxed{\Psi_{11}^{(1)\infty}(\bar{r}) = \bar{r} K^{(0)} C^*(t) + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \bar{r} \ln(\bar{r}) + O(\frac{1}{\bar{r}})} \quad (\text{A.6.25})$$

avec :

$$\boxed{C^*(t) = -\frac{1}{8\pi} + \pi \frac{\tilde{a}}{K^{(0)}}} \quad (\text{A.6.26})$$

$$\boxed{\frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} = \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\bar{r}} \xi v^{(0)} H d\xi - \frac{1}{4\pi^2} \ln \bar{r} \right\}} \quad (\text{A.6.27})$$

où l'on a récrit la formule (A.6.18b). C'est le même résultat que (A.6.1) complété de (A.6.10).

Annexe 7

A.7. Détermination de $C(t)$

Dans cette annexe, l'expression (3.45c) de $C(t)$ en fonction du champ de vitesse est simplifiée. On a :

$$\boxed{C = -1 + 4\pi C^* = -\left\{ \frac{1}{2} + 2\pi \left(\int_0^\infty \left[\frac{\omega_{311}^{(1)}}{K^{(0)}} + \omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} \right] d\bar{r} \right) \right\}} \quad (\text{A.7.1a})$$

où d'après (3.39e), (3.34) et (3.36b) :

$$\omega_{311}^{(1)} = -\frac{(\omega_3^{(0)})_{\bar{r}}}{v^{(0)}} \Psi_{11}^{(1)} + K^{(0)} \bar{r} \left[-\omega_3^{(0)} - \frac{(w^{(0)})_{\bar{r}}^2}{v^{(0)}} \right] \quad (\text{A.7.1b})$$

et d'après (3.28b) :

$$\frac{\Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)} v^{(0)}} = \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)})^2} \int_0^z \xi v^{(0)} H^{(0)} d\xi dz \quad (\text{A.7.1c})$$

$$v^{(0)} H^{(0)} = 2\xi v^{(0)} \omega_3^{(0)} + (v^{(0)})^2 + 2\xi w^{(0)} (w^{(0)})_\xi \quad (\text{A.7.1d})$$

Pour effectuer cette simplification, on définit d'abord $I(R_\infty)$ par :

$$\boxed{I(R_\infty) = \int_0^{R_\infty} \left[\frac{\omega_{311}^{(1)}}{K^{(0)}} + \omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} \right] d\bar{r}} \quad (\text{A.7.2})$$

et on a alors :

$$C = -1 + 4\pi C^* = -\frac{1}{2} - 2\pi \lim_{R_\infty \rightarrow \infty} I(R_\infty) \quad (\text{A.7.3})$$

L'expression de $I(R_\infty)$ s'écrit :

$$I(R_\infty) = - \int_0^{R_\infty} \left(\omega_3^{(0)} \right)_r \left[\frac{\Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)} v^{(0)}} \right] d\bar{r} + \int_0^{R_\infty} \left[\omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} - \omega_3^{(0)} \bar{r} - r \frac{(w^{(0)})^2}{v^{(0)}} \right] d\bar{r} \quad (\text{A.7.4})$$

et on la simplifie à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{R_\infty} \omega_3^{(0)} \left[\frac{\Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)} v^{(0)}} \right]_r d\bar{r} - \left[\omega_3^{(0)} \frac{\Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)} v^{(0)}} \right]_0^{R_\infty} \\ &\quad + \int_0^{R_\infty} \left[\omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} - \omega_3^{(0)} \bar{r} - r \frac{(w^{(0)})^2}{v^{(0)}} \right] d\bar{r} \end{aligned} \quad (\text{A.7.5})$$

puis à l'aide de (A.7.1c-d) :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{R_\infty} \omega_3^{(0)} \frac{1}{\bar{r} v^{(0)}{}^2} \left[\int_0^{\bar{r}} z v^{(0)} H^{(0)} dz \right] d\bar{r} - \left[\omega_3^{(0)} \frac{\Psi_{11}^{(1)}}{K^{(0)} v^{(0)}} \right]_{R_\infty} \\ &\quad + \int_0^{R_\infty} \left[\omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} - \omega_3^{(0)} \bar{r} - r \frac{(w^{(0)})^2}{v^{(0)}} \right] d\bar{r} \end{aligned} \quad (\text{A.7.6})$$

Comme d'après (3.13c) :

$$\frac{\omega_3^{(0)}}{\bar{r} v^{(0)}{}^2} = \frac{(\bar{r} v^{(0)})_r}{\bar{r}^2 v^{(0)}{}^2} = - \left(\frac{1}{\bar{r} v^{(0)}} \right)_r, \quad (\text{A.7.7})$$

on peut refaire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{R_\infty} \frac{1}{\bar{r} v^{(0)}} \left[\int_0^{\bar{r}} z v^{(0)} H^{(0)} dz \right] d\bar{r} - \left[\frac{1}{\bar{r} v^{(0)}} \int_0^{\bar{r}} z v^{(0)} H^{(0)} dz \right]_0^{R_\infty} \\ &\quad + \int_0^{R_\infty} \left[\omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} - \omega_3^{(0)} \bar{r} - r \frac{(w^{(0)})^2}{v^{(0)}} \right] d\bar{r} \end{aligned} \quad (\text{A.7.8})$$

Une dernière intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{R_\infty} H^{(0)} d\bar{r} - \left[\frac{1}{\bar{r}v^{(0)}} \int_0^{\bar{r}} z v^{(0)} H^{(0)} dz \right]_{R_\infty} + \int_0^{R_\infty} \left[\omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} - \omega_3^{(0)} \bar{r} - \bar{r} \frac{(w^{(0)})^2}{v^{(0)}} \right] d\bar{r} \\ &= -2\pi \int_0^{R_\infty} \bar{r} v^{(0)} H^{(0)} d\bar{r} + \int_0^{R_\infty} \left[H^{(0)} + \omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} - \omega_3^{(0)} \bar{r} - \bar{r} \frac{(w^{(0)})^2}{v^{(0)}} \right] d\bar{r} \end{aligned}, \quad (\text{A.7.9})$$

ce qui s'écrit :

$$I(R_\infty) = J(R_\infty) + \int_0^{R_\infty} \left[\begin{array}{l} (2\omega_3^{(0)} \bar{r} + v^{(0)} + \bar{r} \frac{(w^{(0)})^2}{v^{(0)}}) \\ + \omega_3^{(0)} \bar{r} \ln \bar{r} - \omega_3^{(0)} \bar{r} - \bar{r} \frac{(w^{(0)})^2}{v^{(0)}} \end{array} \right] d\bar{r} \quad (\text{A.7.10})$$

où l'on a posé :

$$J(R_\infty) = -2\pi \int_0^{R_\infty} \bar{r} v^{(0)} H^{(0)} d\bar{r} \quad (\text{A.7.11})$$

L'expression précédente se simplifie :

$$\begin{aligned} I(R_\infty) &= J(R_\infty) + \int_0^{R_\infty} \left[(\bar{r} v^{(0)})_r (1 + \ln \bar{r}) + v^{(0)} \right] d\bar{r} \\ &= J(R_\infty) - \int_0^{R_\infty} \left[v^{(0)} \right] d\bar{r} + \left[\bar{r} v^{(0)} (1 + \ln \bar{r}) \right]_0^{R_\infty} + \int_0^{R_\infty} \left[v^{(0)} \right] d\bar{r} \\ &= J(R_\infty) + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln R_\infty \end{aligned} \quad (\text{A.7.12})$$

Or comme d'après (A.6.17) :

$$\lim_{R_\infty \rightarrow \infty} J(R_\infty) = -2\pi \left(\frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} + \frac{1}{4\pi^2} \ln R_\infty \right) \quad (\text{A.7.13})$$

avec :

$$\frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} = \int_0^1 \xi v^{(0)} H d\xi + \left[\int_1^\infty \left(\xi v^{(0)} H - \frac{1}{4\pi^2 \xi} \right) d\xi \right] \quad (\text{A.7.14})$$

il vient alors

$$\lim_{R_\infty \rightarrow \infty} \frac{dev}{I(R_\infty)} = -2\pi \frac{\tilde{a}}{K^{(0)}} + \frac{1}{2\pi} \quad (A.7.15)$$

Finalement d'après (A.7.3), on a :

$$\lim_{R_\infty \rightarrow \infty} C(t) = -\frac{1}{2} - 2\pi \frac{dev}{I(R_\infty)} = -\frac{3}{2} + (2\pi)^2 \frac{\tilde{a}}{K^{(0)}}, \quad (A.7.16)$$

c'est à dire :

$$C(t) = -\frac{3}{2} + 4\pi^2 \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^r \xi v^{(0)} H d\xi - \frac{1}{4\pi^2} \ln r \right\}, \quad (A.7.17)$$

que l'on écrit :

$$\boxed{C(t) = -\frac{1}{2} + 4\pi^2 \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^r \xi (v^{(0)})^2 d\xi - \frac{1}{4\pi^2} \ln r \right\} - 2 \int_0^\infty \xi (w^{(0)})^2 d\xi \right]} \quad (A.7.18)$$

Annexe 8

A.8. Le raccord sur une zone intermédiaire

Dans cette annexe, nous effectuons le raccord asymptotique aux ordres ε^{-1} et ε^0 . Ici, on utilise la loi de raccord sur une zone intermédiaire plutôt que la loi de raccord sous la forme (3.14) et (3.22).

On définit un petit paramètre η tel que :

$$1 \gg \eta \gg \varepsilon \quad (\text{A.8.1})$$

avec :

$$\eta = \eta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0 \quad (\text{A.8.2})$$

et une variable intermédiaire r^* par :

$$r^* = \frac{r}{\eta} = \frac{\bar{r}\varepsilon}{\eta} \quad (\text{A.8.3})$$

Le raccord à l'ordre ε^{-1} :

La loi de raccord asymptotique sur une zone intermédiaire à l'ordre ε^{-1} s'écrit :

$$\left(Dev_{r^*} [\vec{v}^{\text{out}}(r)] = Dev_r [\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r})] \right)_{\varepsilon^{-1}}, \quad (\text{A.8.4})$$

c'est à dire que les développements extérieur et intérieur du champ de vitesse écrits sur la variable intermédiaire r^* jusqu'à l'ordre ε^{-1} sont identiques.

Or :

$$\left(Dev_{r^*} [\vec{v}^{\text{out}}(r)] \right)_{\varepsilon^{-1}} = \left(\frac{1}{\eta} \frac{1}{2\pi} r^* \vec{\theta}^{(0)} \right)_{\varepsilon^{-1}} = 0 \quad (\text{A.8.5})$$

et :

$$\begin{aligned} \left(Dev_r^* [\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r})] \right)_{\varepsilon^{-1}} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(Dev_r^* [v^{(0)}(\bar{r})\vec{r} + w^{(0)}(\bar{r})\vec{\tau}] \right)_{\varepsilon^0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(Dev_r^* \left[v^{(0)}\left(\frac{r^* \eta}{\varepsilon}\right)\vec{r} + w^{(0)}\left(\frac{r^* \eta}{\varepsilon}\right)\vec{\tau} \right] \right)_{\varepsilon^0} \end{aligned} \quad (\text{A.8.6})$$

Nous en déduisons que :

$$\left(Dev_r^* \left[v^{(0)}\left(\frac{r^* \eta}{\varepsilon}\right)\vec{r} + w^{(0)}\left(\frac{r^* \eta}{\varepsilon}\right)\vec{\tau} \right] \right)_{\varepsilon^0} = 0, \quad (\text{A.8.7})$$

c'est à dire que :

$$v^{(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty, t) = 0 \quad (\text{A.8.8a})$$

$$w^{(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty, t) = 0 \quad (\text{A.8.8b})$$

Le raccord à l'ordre 1 :

La loi de raccord asymptotique sur une zone intermédiaire à l'ordre 1 s'écrit :

$$\boxed{\left(Dev_r^* [\vec{v}^{\text{out}}(r)] = Dev_r^* [\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r})] \right)_{O(1)}}, \quad (\text{A.8.9})$$

c'est à dire que les développements extérieur et intérieur du champ de vitesse écrits sur la variable intermédiaire r^* jusqu'à l'ordre 1 sont identiques.

Or d'après le résultat (2.11a) du chapitre II :

$$\begin{aligned} \left(Dev_r^* [\vec{v}^{\text{out}}(r)] \right)_{\varepsilon^0} &= \frac{1}{\eta} \frac{1}{2\pi r^*} \vec{\theta}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{\eta r^*} - 1 \right] \vec{b}^{(0)} \\ &\quad + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta}^{(0)} + \vec{A} \end{aligned}, \quad (\text{A.8.10})$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left(Dev_r^* [\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r})] \right)_{\varepsilon^0} &= \frac{1}{\eta} \frac{1}{2\pi r^*} \vec{\theta}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \ln \frac{1}{\eta} \vec{b}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{r^*} - 1 \right] \vec{b}^{(0)} \\ &\quad + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \cos(\varphi) \vec{\theta}^{(0)} + \vec{A} \end{aligned}, \quad (\text{A.8.11})$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \left(Dev_r * \left[\vec{\mathbf{v}}^{\text{inn}} \left(\frac{r^* \eta}{\varepsilon} \right) \right] \right)_{\varepsilon^0} &= \frac{1}{\eta} \frac{1}{2\pi r^*} \bar{\theta}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \ln \frac{1}{\eta} \bar{\mathbf{b}}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{r^*} - 1 \right] \bar{\mathbf{b}}^{(0)} \\ &\quad + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \cos(\varphi) \bar{\theta}^{(0)} + \bar{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (\text{A.8.12})$$

ce qui implique que :

$$\vec{\mathbf{v}}^{\text{inn}}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi \varepsilon r} \bar{\theta}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{\varepsilon r} - 1 \right] \bar{\mathbf{b}}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \cos(\varphi) \bar{\theta}^{(0)} + \bar{\mathbf{A}} \quad (\text{A.8.13})$$

Il vient alors :

$$v^{(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = \frac{1}{2\pi \bar{r}} \quad (\text{A.8.14a})$$

$$w^{(0)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = 0 \quad (\text{A.8.14b})$$

$$\vec{\mathbf{v}}^{\text{inn}(1)}(\bar{r} \rightarrow \infty) = \frac{K^{(0)}}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{\varepsilon \bar{r}} - 1 \right] \bar{\mathbf{b}}^{(0)} + \frac{K^{(0)}}{4\pi} \cos(\varphi) \bar{\theta}^{(0)} + \bar{\mathbf{A}} \quad (\text{A.8.14c})$$

Annexe 9

A.9. Les expressions de $H_{nj}^{(2)}$, de

$\Psi_{12}^{(2)}$ ***et*** $\Psi_{11}^{(2)}$

Dans cette annexe, nous donnons des expressions de $H_{12}^{(2)}$, $H_{11}^{(2)}$, $H_{21}^{(2)}$ qui interviennent dans la formule (3.60a) du paragraphe III.8.2 sur la résolution des équations à l'ordre 2.

$$\begin{aligned}
 H_{12}^{(2)} = & 2 \frac{\xi}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial}{\partial \xi} w^{(0)}(\xi, t) \left[\frac{\partial \vec{\tau}^{(0)}(s, t)}{\partial t} \bullet \vec{b}^{(0)}(s, t) \right] \\
 & - 2 \frac{\xi}{\sigma^{(0)}(s, t)} w^{(0)}(\xi, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s} \\
 & - \frac{\xi^2}{\sigma^{(0)}(s, t) v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial^2 w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi^2} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial s} \\
 & + 3 \frac{\xi w^{(0)}(\xi, t)}{\sigma^{(0)}(s, t) v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial \xi \partial s} \\
 & + \frac{\xi^2 w^{(0)}(\xi, t)}{\sigma^{(0)}(s, t) v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial^3 u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial \xi^2 \partial s} \\
 & - 3 \frac{\xi}{\sigma^{(0)}(s, t) v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial s}
 \end{aligned}$$

(A.9.1)

$$\begin{aligned}
H_{l1}^{(2)} = & 2 \frac{\xi}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial}{\partial \xi} w^{(0)}(\xi, t) \left[\frac{\partial \bar{\tau}^{(0)}(s, t)}{\partial t} \bullet \bar{n}^{(0)}(s, t) \right] \\
& + 2\xi K^{(0)}(s, t) \frac{\partial v_c^{(1)}(\xi, t)}{\partial \xi} + \xi \frac{v_c^{(1)}(\xi, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial \xi^2} \\
& + 3 \frac{v_c^{(1)}(\xi, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial \xi} - \frac{u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial v_c^{(1)}(\xi, t)}{\partial \xi} \\
& + 3v^{(0)}(\xi, t)K^{(1)}(s, t) + 6K^{(0)}(s, t)v_c^{(1)}(\xi, t) \\
& + 2K^{(1)}(s, t)\xi \frac{\partial v^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} - \frac{\xi u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial^2 v_c^{(1)}(\xi, t)}{\partial \xi^2} \\
& + 2\xi w^{(0)}(\xi, t)K^{(0)}(s, t)T^{(0)}(s, t) - 3 \frac{\xi w^{(0)}(\xi, t)T^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial \xi} \\
& + 2 \frac{\xi v_c^{(1)}(\xi, t)K^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial v^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} + 2 \frac{\xi w_c^{(1)}(\xi, t)K^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \\
& - \frac{\xi^2 w^{(0)}(\xi, t)T^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\xi w^{(0)}(\xi, t)K^{(1)}(s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \\
& + 3 \frac{\xi u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)T^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} + \frac{\xi^2 u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)T^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial^2 w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi^2} \\
& + 2 \frac{\xi w^{(0)}(\xi, t)K^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w_c^{(1)}(\xi, t)}{\partial \xi} + \xi \frac{v_c^{(1)}(\xi, t)}{v^{(0)}(\xi, t)} u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)
\end{aligned}$$

(A.9.2)

A.9. Les expressions de $H_{nj}^{(2)}$, de $\Psi_{l2}^{(2)}$ et $\Psi_{l1}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
H_{21}^{(2)} = & \frac{3}{2} \xi^2 K^{(0)2}(s,t) \frac{\partial v^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi} - \frac{3}{4} \frac{\xi u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{v^{(0)}(\xi,t)} \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi^2} \\
& + \frac{3}{4} \frac{u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{v^{(0)}(\xi,t)} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi} - \frac{1}{4} \frac{\xi^2 u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{v^{(0)}(\xi,t)} \frac{\partial^3 u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi^3} \\
& + \frac{3}{4} \xi^2 K^{(0)}(s,t) \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi^2} + 3\xi K^{(0)}(s,t) \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi} \\
& + 3 \xi v^{(0)}(\xi,t) K^{(0)2}(s,t) + \frac{1}{2} u_{11}^{(1)}(\xi,s,t) K^{(0)}(s,t) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\xi^2 K^{(0)}(s,t)}{v^{(0)}(\xi,t)} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi} \frac{\partial v^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi} - \frac{1}{4} \frac{\xi^2 u_{11}^{(1)}(\xi,s,t) K^{(0)}(s,t)}{v^{(0)}(\xi,t)} \frac{\partial^2 v^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\xi^2 K^{(0)}(s,t) u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{v^{(0)}(\xi,t)} \left(\frac{\partial w^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{\xi}{v^{(0)}(\xi,t)} \left(\frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi} \right)^2 \\
& - \frac{1}{2} \frac{\xi u_{11}^{(1)}(\xi,s,t) K^{(0)}(s,t)}{v^{(0)}(\xi,t)} \frac{\partial v^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi} + \frac{3}{2} \frac{\xi^2 K^{(0)2}(s,t) w^{(0)}(\xi,t)}{v^{(0)}(\xi,t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\xi^2}{v^{(0)}(\xi,t)} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi^2} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 w^{(0)}(\xi,t) u_{11}^{(1)}(\xi,s,t) K^{(0)}(s,t)}{v^{(0)3}(\xi,t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi} \frac{\partial v^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\xi^2 w^{(0)}(\xi,t) u_{11}^{(1)}(\xi,s,t) K^{(0)}(s,t)}{v^{(0)2}(\xi,t)} \frac{\partial^2 w^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\xi^2 w^{(0)}(\xi,t) u_{11}^{(1)}(\xi,s,t) K^{(0)}(s,t)}{v^{(0)2}(\xi,t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi,t)}{\partial \xi} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi,s,t)}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

(A.9.3)

D'après la formule (3.64b), les expressions de $\Psi_{12}^{(2)}$ et $\Psi_{11}^{(2)}$ sont :

$$\boxed{\Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) = v^{(0)}(\bar{r}, t) \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{[zv^{(0)}(z, t)]^2} \int_0^z \xi v^{(0)}(\xi, t) H_{12}^{(2)}(\xi, s, t) d\xi} \quad (\text{A.9.3a})$$

$$\boxed{\Psi_{11}^{(2)}(\bar{r}, s, t) = v^{(0)}(\bar{r}, t) \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{[zv^{(0)}(z, t)]^2} \int_0^z \xi v^{(0)}(\xi, t) H_{11}^{(2)}(\xi, s, t) d\xi} \quad (\text{A.9.3b})$$

Annexe 10

A.10. Partie axisymétrique des équations à l'ordre 3

Dans cette annexe, nous donnons la partie axisymétrique de l'équation de continuité et des équations du mouvement à l'ordre 3.

Le calculateur formel nous donne les équations à l'ordre 3, dans lesquelles nous remplaçons $w^{(2)}, p^{(2)}$ par leurs expressions (A.4.7b-c-d) en fonction de $u^{(2)}$ et $v^{(2)}$, puis $u^{(2)}$ et $v^{(2)}$ par leurs expressions (3.58a-b) en fonction de $\Psi^{(2)}$ et finalement $\Psi^{(2)}$ par son développement (3.59) en série de Fourier de φ . On remplace alors les expressions (3.50a-b) des dérivées par rapport au temps du champ de vitesse à l'ordre 0 dans les expressions obtenues et on linéarise selon φ les termes trigonométriques qui apparaissent. On obtient ainsi le développement en série de Fourier des équations à l'ordre 3 dont la partie axisymétrique nous donne les équations axisymétriques recherchées.

A l'ordre 3, l'équation de continuité s'écrit :

$$\boxed{\sigma^{(0)}(s,t) \frac{\partial \bar{r} u_c^{(3)}(\bar{r},\varphi,s,t)}{\partial \bar{r}} = s_1^{(3)}(\bar{r},\varphi,s,t)}, \quad (\text{A.10.1a})$$

c'est à dire :

$$\boxed{\sigma^{(0)}(s,t) u_c^{(3)}(\bar{r},\varphi,s,t) = \frac{1}{r} \int_0^{\bar{r}} f(\xi,s,t) d\xi} \quad (\text{A.10.1b})$$

et les équation de Navier Stokes sur $(\vec{\theta}, \vec{\tau})$ sont :

$$\boxed{\frac{\sigma^{(0)}(s,t)}{\bar{r}} u^{(3)}(\bar{r},\varphi,s,t) \frac{\partial \bar{r} v^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} = s_3^{(3)}(\bar{r},\varphi,s,t)} \quad (\text{A.10.1c})$$

$$\boxed{\sigma^{(0)}(s,t) \frac{\partial \bar{r} w^{(0)}(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} u_c^{(3)}(\bar{r},s,t) = s_4^{(3)}(\bar{r},\varphi,s,t)} \quad (\text{A.10.1d})$$

avec :

$$\begin{aligned}
s_1^{(3)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = & \\
& -\frac{\partial w_c^{(2)}(\bar{r}, \varphi, s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{1}{2} \sigma^{(0)}(s, t) K^{(0)}(s, t) \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \\
& - \frac{1}{4} \frac{\bar{r}^3}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{1}{4} \frac{\bar{r}^3}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\bar{r}^3}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\bar{r}^3}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial^2 w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}^2} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{\bar{r}}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{\bar{r}^3}{2} \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s} w^{(0)}(\bar{r}, t) \\
& + \frac{1}{2} \sigma^{(0)}(s, t) \bar{r} K^{(0)}(s, t) \frac{\partial \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} \\
& + \bar{r} \sigma^{(1)}(s, t) \frac{S^{(0)}(s, t)}{S^{(0)}(s, t)} + \bar{r} \sigma^{(1)}(s, t)
\end{aligned} \tag{A.10.2a}$$

$$\begin{aligned}
f(\xi, s, t) = & \\
& -\xi \frac{\partial w_c^{(2)}(\xi, \varphi, s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{1}{2} \sigma^{(0)}(s, t) K^{(0)}(s, t) \Psi_{12}^{(2)}(\xi, s, t) \\
& - \frac{1}{4} \frac{\xi^3}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{1}{4} \frac{\xi^3}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\xi^3 u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)^3} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v^{(0)}(\xi, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\xi^3 u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{v^{(0)}(\xi, t)^2} \frac{\partial^2 w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi^2} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\xi, s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{\xi}{v^{(0)}(\xi, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_{12}^{(2)}(\xi, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{\xi^3}{2} \frac{\partial K^{(0)}(s, t)^2}{\partial s} w^{(0)}(\xi, t) \\
& + \frac{1}{2} \sigma^{(0)}(s, t) \xi K^{(0)}(s, t) \frac{\partial \Psi_{12}^{(2)}(\xi, s, t)}{\partial \bar{r}} \\
& + \xi \sigma^{(1)}(s, t) \frac{\dot{S}^{(0)}(s, t)}{S^{(0)}(s, t)} + \xi \dot{\sigma}^{(1)}(s, t) \tag{A.10.2b}
\end{aligned}$$

$s_3^{(3)}(\bar{r}, \varphi, s, t) =$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sigma^{(0)}(s, t) u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial^2 \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}^2} \\
& - \frac{1}{2} \sigma^{(0)}(s, t) \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}^2} \\
& - \frac{1}{2} \sigma^{(0)}(s, t) K^{(0)}(s, t) \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \\
& - \frac{\sigma^{(0)}(s, t) K^{(0)}(s, t)}{\bar{r}} v^{(0)}(\bar{r}, t) \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \\
& - \frac{\sigma^{(0)}(s, t) K^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \\
& - \frac{3}{2} \frac{\sigma^{(0)}(s, t)}{\bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \\
& - \frac{1}{2} \frac{\sigma^{(0)}(s, t)}{\bar{r}^2} u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\sigma^{(0)}(s, t)}{r} u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} \\
& - r^2 \frac{K^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\bar{r}^2}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial^2 w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}^2} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& - r^2 \frac{K^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)^2} w^{(0)}(\bar{r}, t)^2 \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& - \frac{1}{4} r^2 w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial \bar{s}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} \\
& + \frac{3}{2} r w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial \bar{s}} u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \\
& - \frac{1}{4} r^2 w^{(0)}(\bar{r}, t) K^{(0)}(s, t) \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s} \partial \bar{r}} \\
& - r^2 \frac{u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)^2} w^{(0)}(\bar{r}, t)^2 \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& + w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial^2 \Psi_c^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s} \partial \bar{r}} \\
& - \frac{r^2}{2} v^{(0)}(\bar{r}, t) w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& + r \frac{u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& - r K^{(0)}(s, t) w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& - \frac{\sigma^{(0)}(s, t) r u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \vec{\tau}^{(0)}}{\partial t} \bullet \vec{\mathbf{b}}^{(0)} \right) \\
& - \sigma^{(0)}(s, t) \frac{\partial v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial t} \\
& + \alpha^2 \sigma^{(0)}(s, t) \left[\frac{\partial^2 v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} - \frac{v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{r^2} \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sigma^{(0)}(s, t)}{S^{(0)}} \frac{\partial \bar{r} v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{A.10.2c}$$

$$\begin{aligned}
s_3^{(3)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = & \frac{1}{2} \sigma^{(0)}(s, t) K^{(0)}(s, t) \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sigma^{(0)}(s, t) K^{(0)}(s, t)}{\bar{r}} v^{(0)}(\bar{r}, t) \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \\
& - \frac{\bar{r}^2}{r} \frac{K^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& - \frac{\bar{r}^2}{r} \frac{K^{(0)}(s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)^2} w^{(0)}(\bar{r}, t)^2 \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\bar{r}^2}{r} \frac{u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)^2} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& + w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial^2 \Psi_c^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s} \partial \bar{r}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\bar{r}^2}{r} \frac{w^{(0)}(\bar{r}, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial^3 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s} \partial \bar{r}^2} \\
& + \frac{3}{2} \frac{\bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s} \partial \bar{r}} \\
& - \frac{\bar{r}^2}{2} v^{(0)}(\bar{r}, t) w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& - \frac{1}{4} \frac{\bar{r}}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& - \bar{r} K^{(0)}(s, t) w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s}} \\
& - \frac{1}{4} \frac{\bar{r}^2}{r} w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial \bar{s}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} \\
& + \frac{1}{2} \bar{r} w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial \bar{s}} u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \\
& - \frac{1}{4} \frac{\bar{r}^2}{r} K^{(0)}(s, t) w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{s} \partial \bar{r}} \\
& - \sigma^{(0)}(s, t) \frac{\partial v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^{(0)}(s, t)}{S^{(0)}} \frac{\partial \bar{r} v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial t} \\
& + \alpha^2 \sigma^{(0)}(s, t) \left(\left[\frac{\partial^2 v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} - \frac{v_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\bar{r}^2} \right] \right)
\end{aligned} \tag{A.10.2d}$$

$$\begin{aligned}
s_4^{(3)}(\bar{r}, \varphi, s, t) = & -\frac{1}{8} \bar{r}^2 \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)^3} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)^2}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)^2}{\partial s} \\
& + \frac{1}{4} \bar{r}^2 v^{(0)}(\bar{r}, t) K^{(0)}(s, t) \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s \partial \bar{r}} \\
& + \frac{1}{4} \bar{r}^2 \frac{K^{(0)}(s, t) w^{(0)}(\bar{r}, t)}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{1}{4} \bar{r}^2 \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)^2} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)^2}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} \\
& - \frac{1}{4} \bar{r}^2 \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}^2} \\
& + \frac{1}{4} \bar{r}^2 v^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{3}{2} \bar{r} v^{(0)}(\bar{r}, t) u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{3}{4} \bar{r}^2 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial^3 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}^2 \partial s} \\
& + \frac{1}{8} \bar{r}^2 \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)^2} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)^2}{\partial \bar{r}} \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)^2}{\partial s \partial \bar{r}} \\
& - \frac{3}{8} \bar{r}^2 \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)^2}{\partial \bar{r}} u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{1}{2} \sigma^{(0)}(s, t) K^{(0)}(s, t) \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \\
& - \frac{1}{4} \bar{r} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{7}{8} \bar{r} \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s \partial \bar{r}} \\
& + \frac{1}{2} \bar{r}^2 v^{(0)}(\bar{r}, t)^2 \frac{\partial K^{(0)}(s, t)^2}{\partial s} \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)^2}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \Psi_{21}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& - v^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial^2 \Psi_{21}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s \partial \bar{r}} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial r v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \Psi_{21}^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \frac{-2}{r} \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial^2 v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}^2} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{3}{4} \frac{-2}{r} u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{3}{4} \frac{-}{r} \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{3}{8} \frac{-2}{r} \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{1}{2} \frac{-2}{r} \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial \bar{r}} \\
& + \frac{1}{4} \frac{-2}{r} \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial^2 u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s \partial \bar{r}} \\
& - \frac{1}{4} \frac{-2}{r} \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \left(\frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right)^2 \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{1}{4} \frac{-2}{r} \frac{1}{v^{(0)}(\bar{r}, t)} \left(\frac{\partial w^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right)^2 \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& + \frac{1}{4} \frac{-2}{r} K^{(0)}(s, t) \frac{\partial v^{(0)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial u_{11}^{(1)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& - w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial w_c^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& - \frac{\partial p_c^{(2)}(\bar{r}, s, t)}{\partial s} \\
& \sigma^{(0)}(s, t) r K^{(0)}(s, t) v^{(0)}(\bar{r}, t) \left(\frac{\partial \bar{\tau}^{(0)}(s, t)}{\partial t} \bullet \bar{\mathbf{b}}^{(0)}(s, t) \right) \\
& + \sigma^{(0)}(s, t) r K^{(0)}(s, t) v^{(0)}(\bar{r}, t) \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{X}}^{(0)}(s, t)}{\partial t^2} \bullet \bar{\tau}^{(0)}(s, t) \right) \\
& - \sigma^{(0)}(s, t) \frac{\partial \left[w_{cc}^{(1)}(s, t) + w_c^{(1)}(\bar{r}, t) \right]}{\partial t} \\
& - w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial \sigma^{(1)}(s, t)}{\partial t} \\
& + \alpha^2 \sigma^{(0)}(s, t) \left(\frac{\partial^2 w_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sigma^{(0)}(s, t)}{S^{(0)}} \frac{\partial w_c^{(1)}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial t} \\
& - \frac{\sigma^{(0)}(s, t)}{S^{(0)}} \left[w_{cc}^{(1)}(s, t) + w_c^{(1)}(\bar{r}, t) \right] \frac{\partial S^{(0)}}{\partial t} \\
& + \frac{\sigma^{(1)}(s, t)}{S^{(0)}} w^{(0)}(\bar{r}, t) \frac{\partial S^{(0)}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{A.10.2e}$$

Annexe 11

A.11. Partie axisymétrique et indépendante de s des équations à l'ordre 3

Dans cette annexe, on détermine la partie axisymétrique et indépendante de l'abscisse s des équations à l'ordre 3 à partir des équations axisymétriques de l'annexe A.10.

La moyenne selon l'abscisse s de l'équation de conservation de la masse (A.10.1b) donne :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sigma^{(0)}(s, t) u_c^{(3)}(\bar{r}, s, t) ds = s_1^{(3)}(\bar{r}, s, t)} \quad (\text{A.11.1})$$

avec :

$$\boxed{s_1^{(3)}(\bar{r}, s, t) = -\frac{\bar{r}}{2} \left(\frac{\bullet S^{(1)}}{S^{(0)}} - \frac{\bullet S^{(0)}}{S^{(0)}} \right) + \frac{1}{\bar{r}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sigma^{(0)} K^{(0)} \int_0^{\bar{r}} \Psi_{12}^{(2)}(r', s, t) dr' ds \\ + \frac{1}{\bar{r}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sigma^{(0)} K^{(0)} \int_0^{\bar{r}} r' \frac{\partial \Psi_{12}^{(2)}(r', s, t)}{\partial r'} dr' ds} \quad (\text{A.11.2})$$

où l'on a posé :

$$\boxed{S^{(1)} = \int_0^{2\pi} \sigma^{(1)} ds} \quad (\text{A.11.3})$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{r}} \Psi_{12}^{(2)}(r', s, t) dr' + \int_0^{\bar{r}} r' \frac{\partial \Psi_{12}^{(2)}(r', s, t)}{\partial r'} dr' &= \left[r' \Psi_{12}^{(2)}(r', s, t) \right]_0^{\bar{r}} \\ &= \bar{r} \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) \end{aligned} \quad (\text{A.11.4})$$

d'où (A.11.2) devient :

$$s_1^{(3)}(\bar{r}, s, t) = -\frac{\bar{r}}{2} \left(\dot{S}^{(1)} - S^{(1)} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \right) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sigma^{(0)} K^{(0)} \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) ds \quad (\text{A.11.5})$$

Comme $\sigma^{(0)} \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t)$ est de la forme :

$$\sigma^{(0)} \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) = g(\bar{r}, t) \frac{\partial K^{(0)}(s, t)}{\partial s} + \sigma^{(0)} (\vec{\tau} \bullet \vec{b}^{(0)}) f(\bar{r}, t) \quad (\text{A.11.6})$$

avec :

$$f(\bar{r}, t) = 2v^{(0)}(\bar{r}, t) \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z(v^{(0)}(z, t))^2} \int_0^z \xi^2 \frac{\partial w^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi dz \quad (\text{A.11.7})$$

on a :

$$\int_0^{2\pi} K^{(0)}(s, t) \frac{\sigma^{(0)}}{2} \Psi_{12}^{(2)}(\bar{r}, s, t) ds = \left\{ \int_0^{2\pi} K^{(0)}(s, t) \frac{\sigma^{(0)}}{2} (\vec{\tau} \bullet \vec{b}^{(0)}) ds \right\} f(\bar{r}, t) \quad (\text{A.11.8})$$

d'où (A.11.5) devient :

$$s_1^{(3)}(\bar{r}, s, t) = -\frac{\bar{r}}{2} \left(\dot{S}^{(1)} - S^{(1)} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \right) + \left(\int_0^{2\pi} K^{(0)}(s, t) \frac{\sigma^{(0)}}{2} (\vec{\tau} \bullet \vec{b}^{(0)}) ds \right) f(\bar{r}, t) \quad (\text{A.11.9})$$

La moyenne selon l'abscisse s de l'équation l'équation de Navier Stokes sur $\vec{\theta}$ (A.10.1c) donne :

$$S^{(0)} \left(\frac{\partial v_c^{(1)}}{\partial t} - \alpha^2 \left[\frac{1}{r} (\bar{r} v_c^{(1)})_{\bar{r}} \right]_{\bar{r}} \right) - \frac{1}{2} \dot{S}^{(0)} (\bar{r} v_c^{(1)})_{\bar{r}} = s_3^{(3)}(\bar{r}, s, t) \quad (\text{A.11.10})$$

avec :

$$s_3^{(3)}(\bar{r}, s, t) = \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sigma^{(0)}}{2} K^{(0)} \Psi_{12}^{(2)} ds - \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} u_c^{(3)} ds \right) \omega_3^{(0)} \quad (\text{A.11.11})$$

Al'aide de (A.11.1) et (A.11.5), cette équation s'écrit :

$$s_3^{(3)}(\bar{r}, s, t) = \frac{\bar{r}}{2} \left(\dot{S}^{(1)} - S^{(1)} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \right) \omega_3^{(0)} \quad (\text{A.11.12})$$

La moyenne selon l'abscisse s de l'équation l'équation de Navier Stokes sur $\vec{\tau}$ (A.10.1d) donne :

$$\boxed{S^{(0)} \left(\frac{\partial w_c^{(1)}}{\partial t} - \alpha^2 \left[\frac{1}{r} (\bar{r} w_c^{(1)} \bar{r}) \bar{r} \right] \bar{r} \right) - \frac{1}{2} S^{(0)} \bar{r}^3 \left(\frac{w_c^{(1)}}{\bar{r}^2} \right) \bar{r} = s_4^{(3)}(\bar{r}, s, t) + s_5^{(3)}(s, t)} \quad (\text{A.11.13})$$

avec :

$$\boxed{s_5^{(3)}(s, t) = - \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} \frac{\partial w_{cc}^{(1)}(s, t)}{\partial t} ds - \frac{S^{(0)}}{S^{(0)}} \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} w_{cc}^{(1)}(s, t) ds = 0} \quad (\text{A.11.14})$$

$$\begin{aligned} s_4^{(3)}(\bar{r}, s, t) &= \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sigma^{(0)}}{2} K^{(0)} \Psi_{12}^{(2)} ds - \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} u_c^{(3)} ds \right) \left(w^{(0)} \right) \bar{r} \\ &\quad - w^{(0)} \left(\frac{\bullet^{(1)}}{S^{(1)}} - S^{(1)} \frac{\bullet^{(0)}}{S^{(0)}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11.15})$$

$$- \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} \left(\bullet \bullet^{(0)} \bullet \vec{\tau}^{(0)} \right) ds - \bar{r} v^{(0)} \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} K^{(0)} \left(\bullet \vec{\tau}^{(0)} \bullet \vec{b}^{(0)} \right) ds$$

On rappelle que :

$$w_c^{(1)}(\bar{r}, s, t) = w_{cc}^{(1)}(s, t) + w_c^{(1)}(\bar{r}, t) \quad (\text{A.11.16})$$

A l'aide de (A.11.1) et (A.11.5) l'équation (A.11.15) devient :

$$\boxed{s_4^{(3)}(\bar{r}, s, t) = + \frac{\bar{r}^3}{2} (w^{(0)} / \bar{r}^2) \bar{r} \left(\frac{\bullet^{(1)}}{S^{(1)}} - S^{(1)} \frac{\bullet^{(0)}}{S^{(0)}} \right) - \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} \left(\bullet \bullet^{(0)} \bullet \vec{\tau}^{(0)} \right) ds - \bar{r} v^{(0)} \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} K^{(0)} \left(\bullet \vec{\tau}^{(0)} \bullet \vec{b}^{(0)} \right) ds} \quad (\text{A.11.17})$$

L'équation d'évolution de la fibre centrale à l'ordre 1 est :

$$\bullet \vec{X}^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{S}{\varepsilon} \right) + C \right) K^{(0)} \vec{b}^{(0)} + \vec{A}(s, t) \quad (\text{A.11.18})$$

De (A.11.18), il vient alors:

$$\bullet \vec{X}^{(0)} \bullet \vec{\tau}^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{S}{\varepsilon} \right) + C \right) K^{(0)} \bullet \vec{b}^{(0)} \bullet \vec{\tau}^{(0)} + \vec{A}(s, t) \bullet \vec{\tau}^{(0)} \quad (\text{A.11.19})$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} \vec{\mathbf{X}}^{(0)} \bullet \vec{\tau}^{(0)} ds &= \frac{1}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{S}{\varepsilon}\right) + C \right) \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} K^{(0)} \vec{\mathbf{b}}^{(0)} \bullet \vec{\tau}^{(0)} ds \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} \vec{\mathbf{A}}(s, t) \bullet \vec{\tau}^{(0)} ds \end{aligned} \quad (\text{A.11.20})$$

De (A.11.18), il vient aussi :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\mathbf{X}}}_s^{(0)} &= \sigma^{(0)} \vec{\tau}^{(0)} + \sigma^{(0)} \dot{\vec{\tau}}^{(0)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{S}{\varepsilon}\right) + C \right) \left[K_s^{(0)} \vec{\mathbf{b}}^{(0)} + K^{(0)} \vec{\mathbf{b}}_s^{(0)} \right] + \vec{\mathbf{A}}_s(s, t) \end{aligned} \quad (\text{A.11.21})$$

et donc :

$$\int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} K^{(0)} \dot{\vec{\tau}}^{(0)} \bullet \vec{\mathbf{b}}^{(0)} ds = \int_0^{2\pi} K^{(0)} \vec{\mathbf{A}}_s(s, t) \bullet \vec{\mathbf{b}}^{(0)} ds \quad (\text{A.11.22})$$

A l'aide de (A.11.20) et (A.11.22), l'expression (A.11.17) de $s_4^{(3)}(\bar{r}, s, t)$ devient :

$$\begin{aligned} s_4^{(3)}(\bar{r}, s, t) &= \frac{\bar{r}^3}{2} (w^{(0)} / \bar{r}^2)_r \left(S^{(1)} - S^{(1)} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \right) - \int_0^{2\pi} \sigma^{(0)} \vec{\mathbf{A}}(s, t) \bullet \vec{\tau}^{(0)} ds \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{S}{\varepsilon}\right) + C - 4\pi \bar{r} v^{(0)} \right) \int_0^{2\pi} K^{(0)} \vec{\mathbf{A}}_s(s, t) \bullet \vec{\mathbf{b}}^{(0)} ds \end{aligned} \quad (\text{A.11.23})$$

Annexe 12

A.12. Description des algorithmes des programmes de calcul formel

Dans cette annexe, nous décrivons les algorithmes des programmes de calcul formel.

Les programmes de calcul formel :

- *Biot1* : ce programme permet de calculer la limite $\vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, a)$ proche de zéro du développement extérieur de Biot et Savart. C'est donc le calcul de l'annexe A.2 qui est réalisé ici par le calculateur formel.
- *Cut* : ce programme permet de calculer le développement $\overset{\rightarrow}{\text{Cut}}(s, t, s_c \rightarrow 0)$ de l'intégrale de la méthode de coupure par rapport à la longueur de coupure.
- *Biot2* : ce programme permet de calculer
 - la limite extérieure de l'intégrale de Biot et Savart $\vec{v}^{\text{out}}(r, \varphi, a, \varepsilon)$, puis ses limites $\vec{v}^{\text{out}(0)}(r \rightarrow 0, \varphi, a)$ et $\vec{v}^{\text{out}(1)}(r \rightarrow 0, \varphi, a)$ proche de zéro.
 - la limite intérieure de l'intégrale de Biot et Savart $\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon)$, puis $\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r} = 0, \varphi, a, \varepsilon)$ et $\vec{v}^{\text{inn}}(\bar{r} \rightarrow \infty, \varphi, a, \varepsilon)$ dans le cas général et dans le cas où la vorticité est de la forme $\vec{\omega} = \omega_2(\bar{r})\vec{\theta} + \omega_3(\bar{r})\vec{\tau}$.

■ *Curviline* : ce programme permet d'obtenir les différents ordres de l'équation de continuité et du mouvement (formules de l'annexe A.1) et d'entreprendre leur résolution. Ce programme fournit également le développement de la vorticité du

champ de vitesse obtenu par application de $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{V} + \frac{\vec{\tau}}{h_3} \wedge \dot{\vec{X}}_s$, puis celui de

l'hélicité. Un programme Matlab visualise le champ de vitesse obtenu dans le cas de l'anneau similaire.

■ *Vorticity* : ce programme permet d'obtenir les différents ordres de $\text{div} \vec{\omega} = 0$ et de l'équation de la vorticité (formule l'annexe A.1)

Avant de voir les algorithmes de ces programmes, présentons les quelques procédures préparatoires qui leur sont communes.

Les procédures préparatoires :

Le calculateur formel Maple donne des formules à l'écran comme elles peuvent être écrites à la main sur une feuille de calcul. Dans l'état actuel, il n'y a pas de bibliothèque d'instructions pour travailler en calcul formel sur des vecteurs (non projetés sur leur coordonnées) avec des opérations telles que *le produit scalaire* et *le produit vectoriel*. Nous avons résolu ce problème à l'aide des procédures suivantes, que nous nous sommes construites et qui ont donc été nos outils pour travailler en calcul formel dans la suite.

- Définition d'un *produit scalaire* noté *&o* et d'une procédure de développement notée *devs* qui développe une expression en distribuant le produit scalaire par rapport à l'addition.
- Définition d'un *produit vectoriel* noté *&V* et d'une procédure de développement notée *dev* qui développe une expression en distribuant le produit vectoriel par rapport à l'addition.
- Procédure *devInt* qui permet de sortir d'une intégrale une fonction indépendante de la variable d'intégration mais qui est en produit vectoriel avec une fonction dépendante.
- Procédure *idevInt* qui est la procédure inverse à la précédente : nous remettons dans l'intégrale un terme qui est en produit vectoriel avec celle-ci.

Il n'existe pas actuellement d'instructions qui permettent de travailler avec des coordonnées curvilignes orthogonales quelconques. Nous nous sommes redéfinis, pour des coordonnées curvilignes orthogonales quelconques, les opérateurs :

Curl pour le rotationnel d'un vecteur
Grad pour le gradient d'un scalaire
Gradv pour le gradient d'un vecteur
Diverge pour la divergence d'un scalaire
Laplacian pour le Laplacien d'un scalaire
Diverget pour la divergence d'un vecteur
Laplacianv pour le Laplacien d'un vecteur.

Ces opérateurs ont été générés en programmant leur formules qui sont données dans bon nombre d'ouvrages. A partir de ces procédures, on construit facilement les opérateurs dont on a besoin sur nos coordonnées curvilignes particulières et on les appelle : *grad*, *gradv*, *diverge*, *laplacian*, *diverget*, *laplacianv*.

Dans la suite, nous décrivons les différents algorithmes des programmes.

L'algorithme de *Curviligne* :

Procédures de <i>Curviligne</i>

- Procédures préparatoires
- Formules de Frenet- Produits scalaires et vectoriels des vecteurs de Frenet et des vecteurs de base.
- Développement de Taylor des vecteurs de la base de Frenet simplifiés par les formules de Frenet. Développement de Taylor selon l'abscisse s de la vorticité, de σ , de la courbure, de la torsion, de la fonction fibre et des vecteurs de base.
- Procédure d'intégration sur une section et de simplification de la circulation.

Programme principal de *curviline*

- Ecriture des équations de continuité et de Navier Stokes en coordonnées curvilignes orthogonales (r, Θ, s) , puis (r, φ, s) .
- Projection de l'équation du mouvement sur $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$, puis dilatation de la variable radiale (\bar{r}, φ, s) dans les équations.
- Substitutions des développements asymptotiques dans les équations et obtention des équations aux différents ordres.
- Simplification des équations avec un ordre principal axisymétrique.
- Développement en série de Fourier selon φ des champs à l'ordre 1 et obtention de la partie axisymétrique des équations à l'ordre 1. Ce sont les équations de compatibilité pour l'ordre 0.
- Simplification des équations avec un ordre principal indépendant de l'abscisse.
- Résolution des équations à l'ordre 1 :
 - écriture de l'équation pour la fonction de courant
 - développement en série de Fourier selon φ de la fonction de courant et obtention des équations différentielles pour les différents modes de cette fonction de courant
 - Résolution et limite en l'infini des modes $n=I$
 - Donnée complète de la partie non axisymétrique de l'ordre 1 en fonction de la seule fonction $u_{11}^{(1)}$ (fonction qui est connue)
- Développement en série de Fourier selon φ des champs à l'ordre 2 et obtention de la partie axisymétrique des équations à l'ordre 2. Ce sont les équations de compatibilité pour la partie axisymétrique de l'ordre 1. Développement en série de Fourier selon l'abscisse s des champs axisymétriques à l'ordre 2 et obtention des équations d'évolution de l'ordre principal pour les équations indépendantes de l'abscisse.
- Simplification des équations avec un ordre 1 axisymétrique indépendant de l'abscisse.

- Résolution des équations à l'ordre 2 :
 - écriture de l'équation pour la fonction de courant
 - développement en série de Fourier selon φ de la fonction de courant et obtention des équations différentielles pour les différents modes de cette fonction de courant.
 - Résolution et limite en l'infini des modes $n=1$
 - Donnée complète de la partie non axisymétrique de l'ordre 2 en fonction des seules fonction $u_{11}^{(2)}$ et $u_{12}^{(2)}$ (fonctions qui sont connues)
- Développement en série de Fourier selon φ des champs à l'ordre 3 et obtention de la partie axisymétrique des équations à l'ordre 3. Ce sont les équations de compatibilité pour la partie axisymétrique de l'ordre 2 et c'est ces résultats que l'on retrouve dans l'annexe A.10 et qui sont utilisés dans l'annexe A.11.
- Ecriture des différents ordres de la vorticité comme le rotationnel du développement du champ des vitesses et simplification pour le champ de vitesse précédent.
- Ecriture du développement de l'Hélicité.

L'algorithme de *Vorticity* :

Procédures de *Vorticity*

Ce sont les mêmes procédures que pour le programme *Curviligne*.

Programme principal de *Vorticity*

- Ecriture des équations de la vorticité et $\operatorname{div}\vec{\omega}=0$ en coordonnées curvilignes orthogonales (r, Θ, s) , puis (r, φ, s) .
- Projection de l'équation de la vorticité sur : $(\bar{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$, puis dilatation sur la variable radiale (\bar{r}, φ, s) des équations.
- Substitution des développements asymptotiques des champs de vitesse et de vorticité dans les équations et obtention des équations aux différents ordres.

L'algorithme de *BiotI* :

Procédures de *BiotI*

Ce sont les mêmes procédures que pour le programme *Curviligne*.

Programme principal de *BiotI*

- k = intégrant de l'équation de Biot et Savart pour un filet tourbillon
- Calcul du développement extérieur de k (développement limité lorsque $r \rightarrow 0$ à a^* fixé).

Puis, pour chacun des ordres de ce développement :

- intégration sur $[\eta, S/2]$ et $[-S/2, -\eta]$ de cet ordre privé de son développement pour $a^* \rightarrow 0$.
- calcul du développement de ce qui précède lorsque $\eta \rightarrow 0$.
- Calcul du développement intérieur de k (développement limité lorsque $r \rightarrow 0$ à a^*/r fixé). Nous faisons le changement de variable de a^* en $r\bar{a}$ et nous développons selon r . Les termes impairs en \bar{a} ne sont pas pris en compte. Puis, pour chacun des ordres de ce développement :
 - intégration sur $[0, \eta/r]$ et $[-\eta/r, 0]$ de cet ordre.
 - calcul du développement de ce qui précède lorsque $\eta/r \rightarrow \infty$.
- Addition de l'intégrale du développement extérieur et intérieur pour obtenir le développement recherché de k selon r .

L'algorithme de *Cut* :

Procédures de *Cut*

Ce sont les mêmes procédures que pour le programme *Curviligne*.

Programme principal de *Cut*

Même programme que *Biot 1* avec l'intégrale de Biot et Savart remplacée par l'intégrale de la méthode de coupure et le petit paramètre r remplacé par la longueur de coupure l .

L'algorithme de *Biot2* :

Procédures de *Biot2*

Ce sont les mêmes procédures que pour le programme *Curviligne*.

Programme principal de *Biot2*

- k = intégrant de l'équation de Biot et Savart en trois dimensions et écrit sur les coordonnées curvilignes locales (r,φ,s)
- Calcul du problème extérieur de Biot et Savart (développement limité lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ à r fixé). Puis, pour chacun des ordres de ce développement :
 - calcul du développement en $r \rightarrow 0$ par un calcul d'intégrale singulière du même type que le programme *Biot1*
 - simplification du résultat obtenu lorsque l'ordre principal du champ de vitesse est axisymétrique et indépendant de l'abscisse s .

- Calcul du développement intérieur de l'intégrale de Biot et Savart (développement limité lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{r} = r/\varepsilon$ fixé). Nous avons alors une intégrale singulière en le paramètre ε que nous développons comme dans le programme *Biot1* :
 - ◆ Calcul du développement extérieur de k (développement limité lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ à \bar{r} et a^* fixé). Puis, pour chacun des ordres de ce développement :
 - intégration sur $[\eta, S/2]$ et $[-S/2, -\eta]$ de cet ordre privé de son développement pour $a^* \rightarrow 0$.
 - calcul du développement de ce qui précède lorsque $\eta \rightarrow 0$.
 - ◆ Calcul du développement intérieur de k (développement limité lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ à \bar{r} et a^*/ε fixé). Nous faisons le changement de variable de a^* en $\varepsilon \bar{a}$ et nous développons selon ε . Les termes impairs en \bar{a} ne sont pas pris en compte. Puis, pour chacun des ordres de ce développement :
 - intégration sur $[0, \eta/\varepsilon]$ et $[-\eta/\varepsilon, 0]$ de cet ordre.
 - calcul du développement de ce qui précède lorsque $\eta/\varepsilon \rightarrow \infty$.
 - ◆ Addition de l'intégrale du développement extérieur et intérieur pour obtenir le développement recherché de k selon ε .
 - ◆ Pour chacun des ordres de ce développement :
 - calcul de la valeur en $\bar{r} = 0$
 - simplification du résultat obtenu lorsque l'ordre principal du champ de vitesse est axisymétrique et indépendant de l'abscisse s .

Puis,

- calcul du développement en $\bar{r} \rightarrow \infty$
- simplification du résultat obtenu lorsque l'ordre principal du champ de vitesse est axisymétrique et indépendant de l'abscisse s .
- ◆ Ecriture du développement de l'Hélicité à partir du développement du champ de vitesse.

Annexe 13

A.13. Expressions de $C_v(t)$ et $C_w(t)$

Dans cette annexe, nous déterminons les expressions de C_0 , D_0 , $C_v(t)$ et $C_w(t)$:

$$C_v(t) = \frac{1}{2} + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} v^2 d\bar{r} - \ln(\bar{r}) \right) \quad (\text{A.13.1a})$$

$$C_w(t) = -8\pi^2 \int_0^{\infty} \bar{r} w(\bar{r}, t)^2 d\bar{r} \quad (\text{A.13.1b})$$

pour un anneau similaire et dans le cadre général d'un anneau dont le champ de vitesse est de la forme (3.93) :

$$v^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{2\alpha^2}{\bar{r}} \left[D_0 (1 - e^{-\eta^2}) + e^{-\eta^2} \sum_1^{\infty} D_n \tau_1^{-n} (L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)) \right] \quad (\text{A.13.2a})$$

$$w^{(0)}(\bar{r}, t) = \frac{1}{S^{(0)}} e^{-\eta^2} \sum_n C_n \tau_1^{-n-1} L_n(\eta^2) \quad (\text{A.13.2b})$$

avec :

$$C_n = 2S_0 \tau_{10}^{n+1} \int_0^{\infty} w^{(0)}(\eta \sqrt{4\alpha^2 \tau_{10} / S_0}, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta \quad (\text{A.13.3a})$$

$$D_n = 2 \frac{\tau_{10}^{n+1}}{S_0} \int_0^{\infty} \omega_3^{(0)}(\eta \sqrt{4\alpha^2 \tau_{10} / S_0}, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta \quad (\text{A.13.3b})$$

$$L_n(\eta^2) = \sum_0^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{\eta^{2m}}{m!} \quad (\text{A.13.3c})$$

$$\tau_1 = \frac{S^{(0)} \bar{\delta}^2(t)}{4\alpha^2} \quad (\text{A.13.3d})$$

$$\eta = \frac{\bar{r}}{\bar{\delta}(t)} \quad (\text{A.13.3e})$$

$$\bar{\delta}(t) = \sqrt{\frac{4\alpha^2}{S^{(0)}} \left(\int_0^t S^{(0)}(t') dt' + \tau_{10} \right)} \quad (\text{A.13.3f})$$

Ici, τ_{10} est une constante arbitraire que l'on peut choisir.

Calcul de C_0 :

Par définition :

$$C_0 = 2S_0 \tau_{10} \int_0^\infty w^{(0)}(\eta \sqrt{4\alpha^2 \tau_{10} / S_0}, 0) \eta d\eta \quad (\text{A.13.4})$$

Or comme :

$$\bar{r} = \eta \sqrt{4\alpha^2 \tau_1 / S}, \quad (\text{A.13.5})$$

il vient :

$$C_0 = 2 \frac{S_0^2}{4\alpha^2} \int_0^\infty w^{(0)}(\bar{r}, 0) \bar{r} d\bar{r}, \quad (\text{A.13.6})$$

que l'on écrit :

$$\boxed{C_0 = \frac{S_0^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{4\pi}}, \quad (\text{A.13.7})$$

car le débit axial est défini par :

$$m(t) = 2\pi \int_0^\infty r w^{(0)}(t, \bar{r}) d\bar{r} \quad (\text{A.13.8})$$

et vérifie :

$$m(t) S^2(t) = m(0) S_0^2 \quad (\text{A.13.9})$$

Calcul de D_0 :

Par définition :

$$D_0 = 2 \frac{\tau_{10}^0}{S_0} \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\eta \sqrt{4\alpha^2 \tau_{10} / S_0}, 0) \eta d\eta \quad (\text{A.13.10})$$

Or la définition de la circulation écrite sous forme adimensionnelle donne :

$$2\pi \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\bar{r}, t) \bar{r} d\bar{r} = 1 \quad (\text{A.13.11})$$

d'où :

$$\boxed{D_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\alpha^2}} \quad (\text{A.13.12})$$

Calcul de τ_{10} optimum :

Nous cherchons le choix de τ_{10} , dit optimum, pour que $D_1 = 0$. Cette valeur vérifie :

$$D_1 = 2 \frac{(\tau_{10})^2}{S_0} \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\eta \sqrt{4\alpha^2 \tau_{10} / S_0}, 0) (1 - \eta^2) \eta d\eta = 0 \quad (\text{A.13.13})$$

On a donc :

$$\int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\bar{r}, 0) \eta d\eta = \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\bar{r}, 0) \eta^3 d\eta, \quad (\text{A.13.14})$$

c'est à dire :

$$\tau_{10} = \frac{2}{D_0} \frac{1}{10\alpha^2} S_0 \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\bar{r}, 0) \bar{r}^3 d\bar{r}. \quad (\text{A.13.15})$$

Il vient :

$$\boxed{\tau_{10} = \frac{S_0 \pi}{2\alpha^2} \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\bar{r}, 0) \bar{r}^3 d\bar{r}}. \quad (\text{A.13.16})$$

L'épaisseur est donnée par :

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \bar{\delta} = \sqrt{4\alpha^2 \tau_1 / S} \quad (\text{A.13.17a})$$

Si on prend l'épaisseur associée au champ de vitesse orthoradial δ ($t = 0$) comme petite longueur caractéristique l d'adimensionalisation, il vient :

$$\boxed{\tau_{10} = \frac{S_0}{4\alpha^2}} \quad (\text{A.13.17b})$$

Si on fait alors le choix d'une grande longueur caractéristique L d'adimensionalisation : $\frac{S_0}{2\pi}$

par exemple, alors la valeur de ε est déterminée par le rapport dimensionnel :

$$\boxed{\varepsilon = l / L = 2\pi\delta(t=0) / S_0} \quad (\text{A.13.18a})$$

La condition adimensionnelle :

$$\boxed{2\pi \int_0^{\infty} \omega_3^{(0)}(\bar{r}, 0) \bar{r}^3 d\bar{r} = 1} \quad (\text{A.13.18b})$$

est toujours vérifiée lorsque l'on a fait ce choix de la petite longueur caractéristique.

Calcul de τ_{10}^w optimum :

Nous supposons ici que le choix de la constante τ_{10} pour le profil de vitesse axiale, n'est pas le même que pour le profil orthoradiale et on appelle τ_{10}^w cette constante. Nous cherchons le choix de τ_{10}^w , dit optimum, pour que $C_1 = 0$. Cette valeur vérifie :

$$C_1 = 2S_0(\tau_{10}^w)^2 \int_0^{\infty} w^{(0)}(\eta\sqrt{4\alpha^2\tau_{10}^w / S_0}, 0)(1 - \eta^2)\eta d\eta = 0 \quad (\text{A.13.19})$$

On a donc :

$$\int_0^{\infty} w^{(0)}(\eta\sqrt{4\alpha^2\tau_{10}^w / S_0}, 0)\eta d\eta = \int_0^{\infty} w^{(0)}(\eta\sqrt{4\alpha^2\tau_{10}^w / S_0}, 0)\eta^3 d\eta, \quad (\text{A.13.20})$$

c'est à dire :

$$\frac{C_0}{2S_0\tau_{10}^w} = \frac{S_0^2}{4^2\alpha^2(\tau_{10}^w)^2} \int_0^{\infty} w^{(0)}(\bar{r}, 0)\bar{r}^3 d\bar{r} \quad (\text{A.13.21})$$

Il vient :

$$\tau_{10}^w = \frac{2S_0}{C_0} \frac{S_0^2}{16\alpha^2} \int_0^{\infty} w^{(0)}(\bar{r}, 0)\bar{r}^3 d\bar{r}, \quad (\text{A.13.22})$$

c'est à dire :

$$\boxed{\tau_{10}^w = \frac{S_0\pi}{2\alpha^2 m(0)} \int_0^{\infty} w^{(0)}(\bar{r}, 0)\bar{r}^3 d\bar{r}} \quad (\text{A.13.23a})$$

L'épaisseur est donnée par :

$$\frac{\delta^w}{\varepsilon} = \overline{\delta^w} = \sqrt{4\alpha^2\tau_{10}^w / S} \quad (\text{A.13.24})$$

Alors :

$$\tau_{10}^w = \tau_{10}^v \frac{2\pi}{m(0)} \int_0^\infty w^{(0)}(\bar{r}, 0) \bar{r}^3 d\bar{r} \quad (\text{A.13.25})$$

La solution similaire :

Pour un anneau similaire :

$$\delta^w = \delta \quad (\text{A.13.26})$$

d'où :

$$\tau_{10}^w = \tau_{10} \quad (\text{A.13.27})$$

Il faut donc :

$$\int_0^\infty w^{(0)}(\bar{r}, 0) \bar{r}^3 d\bar{r} = 2\pi m(0) \quad (\text{A.13.28})$$

Pour qu'un anneau soit similaire, il faut en plus que $w^{(0)}(\bar{r}, 0)$ et $\omega_3^{(0)}(\bar{r}, 0)$ soient tels

que :

$$C_n = D_n = 0 \text{ pour } n \geq 1 \quad (\text{A.13.29})$$

On a alors :

$$v^{(0)} = \frac{1}{2\pi r} (1 - e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}\right)^2}) \quad (\text{A.13.30a})$$

$$w^{(0)} = \frac{m_0}{\pi \bar{\delta}^2} \left(\frac{S_0}{S}\right)^2 e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}\right)^2} \quad (\text{A.13.30b})$$

$$\omega_3^{(0)} = \frac{1}{\pi \bar{\delta}^2} e^{-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}\right)^2} \quad (\text{A.13.30c})$$

En se servant de l'expression de la fonction Gamma :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \text{ pour } x > 0 \quad (\text{A.13.31})$$

et de la propriété associée :

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\text{A.13.32})$$

il vient :

$$\int_0^\infty x^{2p+1} e^{-2x^2} dx = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(p+1)}{2^p} = \frac{1}{4} \frac{p!}{2^p} \text{ pour } p \text{ entier} \quad (\text{A.13.33})$$

On obtient alors les expressions suivantes de $C_v(t)$ et $C_w(t)$ pour en anneau similaire :

$$\boxed{C_v(t) = \frac{1}{2} [1 + \gamma - \ln 2] - \ln(\bar{\delta})} \quad (\text{A.13.34a})$$

$$\boxed{C_w(t) = -2 \left(\frac{S_0}{S} \right)^4 \left(\frac{m_0}{\bar{\delta}} \right)^2} \quad (\text{A.13.34b})$$

où γ est le nombre d'Euler.

Expression générale de $C_w(t)$:

On cherche l'expression de :

$$C_w(t) = -8\pi^2 \int_0^\infty r' w(r', t)^2 dr', \quad (\text{A.13.35})$$

sachant que :

$$w^{(0)} = \frac{1}{S^{(0)}} e^{-\eta^2} \sum_n C_n \tau_1^{-n-1} L_n(\eta^2) \quad (\text{A.13.36})$$

avec :

$$\tau_1 = \int_0^t S(t') dt' + \tau_{10} \quad (\text{A.13.37a})$$

$$\tau_{10} = \frac{S_0}{4\alpha^2} \quad (\text{A.13.37b})$$

Il vient :

$$C_w(t) = -8\pi^2 \int_0^\infty r' \frac{1}{S^2} e^{-2\eta'^2} \left(\sum_0^N C_n L_n(\eta'^2) \tau_1^{-(n+1)} \right)^2 dr' \quad (\text{A.13.38})$$

où $N+I$ est le nombre de termes utilisés dans les expressions de $w^{(0)}$ et $\omega_2^{(0)}$ afin de satisfaire les profils initiaux de façon convenable.

Un calcul de dénombrement donne :

$$\left(\sum_0^N C_n L_n(\eta'^2) \tau_1^{-(n+1)} \right)^2 = \sum_{n,m=0}^N C_n C_m L_n(\eta'^2) L_m(\eta'^2) \tau_1^{-(n+1)} \tau_1^{-(m+1)} \quad (\text{A.13.39})$$

d'où :

$$C_w(t) = -16\pi^2 \frac{1}{S^3} \frac{\alpha^2}{\tau_1} \sum_{n,m=0}^N C_n C_m \tau_1^{-(n+m)} \left(2 \int_0^\infty e^{-2\eta'} L_n(\eta'^2) L_m(\eta'^2) \eta' d\eta' \right) \quad (\text{A.13.40})$$

Il vient :

$$C_w(t) = -16\pi^2 \frac{1}{S^3} \frac{\alpha^2}{\tau_1} \sum_{n,m=0}^N C_n C_m \tau_1^{-(n+m)} P_{m,n}, \quad (\text{A.13.41})$$

où l'on a posé :

$$P_{n,i} = 2 \int_0^\infty e^{-2\eta'} L_n(\eta'^2) L_i(\eta'^2) \eta' d\eta' \quad (\text{A.13.42})$$

Or, en jouant sur la double sommation, on a :

$$\sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq N}} C_n C_m \tau_1^{-(n+m)} P_{m,n} = \sum_{k=0}^{2N} \tau_1^{-k} \sum_{\substack{m+n=k \\ 0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq N}} C_n C_m P_{m,n} \quad (\text{A.13.43})$$

Sur la figure A.13.1, les points \bullet correspondent au domaine des indices $0 \leq n \leq N$ et $0 \leq m \leq N$. Les points à $n + m = k$ sont les différentes diagonales qui ont été tracées.

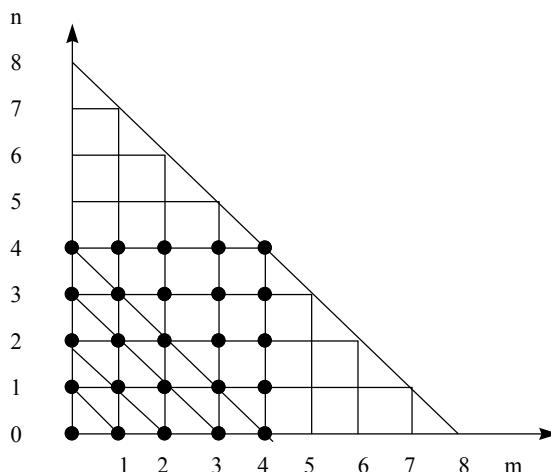


Figure A.13.1 Domaine des points tels que $n + m = k$

On a :

$$\sum_{\substack{m+n=k \\ 0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq N}} C_n C_m P_{m,n} = \sum_{m=0}^k C_m C_{k-m} P_{m,k-m}, \quad (\text{A.13.44})$$

où l'on a posé :

$$C_m = 0 \quad \text{pour } m > N \quad (\text{A.13.45})$$

d'où :

$$\sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq N}} C_n C_m \tau_1^{-(n+m)} P_{m,n} = \sum_{n=0}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=0}^n C_m C_{n-m} P_{m,n-m} \quad (\text{A.13.46})$$

et finalement (A.13.42) devient :

$$\boxed{C_w(t) = -\frac{16\pi^2\alpha^2}{S^3\tau_1} \sum_{n=0}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=0}^n C_m C_{n-m} P_{m,n-m}} \quad (\text{A.13.47})$$

avec :

$$C_n = 0 \quad \text{pour } n > N \quad (\text{A.13.48})$$

Si nous ne voulons pas faire intervenir des termes C_n avec des indices $n > N$, il faut limiter la sommation et on obtient :

$$C_w(t) = -\frac{16\pi^2\alpha^2}{S^3\tau_1} \left[\sum_{n=0}^N \tau_1^{-n} \sum_{m=0}^n C_m C_{n-m} P_{m,n-m} + \sum_{n=N+1}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=n-N}^n C_m C_{n-m} P_{m,n-m} \right] \quad (\text{A.13.49})$$

Ting et all¹ ne prennent pas en compte la sommation de $N+1$ à $2N$. Ils utilisent l'expression :

$$C_w(t) = -\frac{16\pi^2\alpha^2}{S^3\tau_1} \left[\sum_{n=0}^N \tau_1^{-n} \sum_{m=0}^n C_m C_{n-m} P_{m,n-m} \right], \quad (\text{A.13.50})$$

c'est à dire :

$$\boxed{C_w(t) = -\frac{16\pi^2\alpha^2}{S^3\tau_1} \sum_{n=0}^N \tau_1^{-n} w_n}, \quad (\text{A.13.51})$$

où l'on a posé :

$$\boxed{w_n = \sum_{m=0}^n C_m C_{n-m} P_{m,n-m}} \quad (\text{A.13.52})$$

Il nous reste à calculer l'expression de $P_{n,i}$. Par définition :

$$L_n(\xi) = \sum_{k=0}^n p_{n,k} \xi^k \quad (\text{A.13.53a})$$

avec

$$p_{n,k} = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \quad (\text{A.13.53b})$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P_{n,i} &= 2 \int_0^{\infty} e^{-2\eta^2} L_n(\eta^2) L_i(\eta^2) \eta^i d\eta \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-2\eta^2} \left(\sum_{l=0}^n p_{n,l} \eta^{2l} \right) \left(\sum_{k=0}^i p_{i,k} \eta^{2k} \right) \eta^i d\eta \\ &= \sum_{j=0}^i p_{i,j} \sum_{k=0}^n p_{n,k} \left(2 \int_0^{\infty} e^{-2\eta^2} \eta^j \eta^{2(k+j)} d\eta \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13.54})$$

d'où :

$$P_{n,i} = \sum_{j=0}^i p_{i,j} \sum_{k=0}^n p_{n,k} \frac{(j+k)!}{2^{j+k+1}} \quad (\text{A.13.55})$$

Obtention de l'expression de $C_v(t)$:

On cherche l'expression de :

$$C_v(t) = \frac{1}{2} + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} r v^2 dr - \ln(\bar{r}) \right), \quad (\text{A.13.56})$$

sachant que :

$$v^{(0)} = \frac{2\alpha^2}{\bar{r}} \left[D_0 (1 - e^{-\eta^2}) + e^{-\eta^2} \sum_1^\infty D_n \tau_1^{-n} (L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)) \right] \quad (\text{A.13.57})$$

Comme précédemment, nous limitons, les développements en série $w^{(0)}$, $\omega_3^{(0)}$ et $v^{(0)}$ aux $N+1$ premiers termes et alors en développant, on obtient :

$$\begin{aligned} C_v(t) &= \frac{1}{2} + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} \left[\left(\frac{2\alpha^2}{\bar{r}} \right) D_0 (1 - e^{-\eta^2}) \right]^2 \frac{dr}{\bar{r}} - \ln(\bar{r}) \right) \\ &+ \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} \left(\frac{2\alpha^2}{\bar{r}} \right)^2 2D_0 (1 - e^{-\eta^2}) e^{-\eta^2} \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{\tau_1^n} [L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)] \frac{dr}{\bar{r}} \right) \\ &+ \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} \left(\frac{2\alpha^2}{\bar{r}} \right)^2 e^{-2\eta^2} \left[\sum_{n=1}^N \frac{D_n}{\tau_1^n} [L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)] \right]^2 \frac{dr}{\bar{r}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13.58})$$

Or :

$$\frac{1}{2} + \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{4\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^{\bar{r}} \left(\frac{2\alpha^2}{\bar{r}} \right)^2 D_0^2 \left(1 - e^{-\eta^2/\bar{r}} \right)^2 d\bar{r} - \ln(\bar{r}) \right) = -\ln(\bar{\delta}) + \frac{1}{2}(1 + \gamma - \ln 2) \quad (\text{A.13.59})$$

comme il a été vu pour l'anneau similaire. Et comme $D_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\alpha^2}$, il vient :

$$\boxed{C_v = -\ln(\bar{\delta}) + \frac{1}{2}(1 + \gamma - \ln 2) + 4\pi\alpha^2 A + 8\pi^2\alpha^2 B} \quad (\text{A.13.60})$$

avec :

$$A = 2 \int_0^\infty (1 - e^{-\eta^2}) e^{-\eta^2} \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{\tau_1^n} [L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)] \frac{1}{\eta} d\eta \quad (\text{A.13.61a})$$

$$B = 2 \int_0^\infty e^{-2\eta^2} \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{\tau_1^n} [L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)]^2 \frac{1}{\eta} d\eta \quad (\text{A.13.61b})$$

Les expressions de A et B nous amènent à définir pour $n \geq 1$:

$$\boxed{G_n(\eta^2) = L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)} \quad (\text{A.13.62})$$

En se servant de (A.13.54a), il vient alors :

$$\begin{aligned} G_n(\eta^2) &= L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k} \eta^{2k} - \sum_{k=0}^n p_{n,k} \eta^{2k}, \\ &= \sum_{k=0}^n p_{n-1,k} \eta^{2k} - \sum_{k=0}^n p_{n,k} \eta^{2k} \end{aligned} \quad (\text{A.13.63})$$

où l'on a posé :

$$p_{n-1,n} = 0 \quad (\text{A.13.64})$$

Alors :

$$G_n(\eta^2) = \sum_{k=0}^n q_{n,k} \eta^{2k}, \quad (\text{A.13.65})$$

où l'on a posé pour $n \geq 1$:

$$\boxed{q_{n,k} = p_{n-1,k} - p_{n,k}} \quad (\text{A.13.66})$$

Il vient :

$$\boxed{G_n(\eta^2) = \sum_{k=1}^n q_{n,k} \eta^{2k}}, \quad (\text{A.13.67})$$

car $q_{n,0} = 0$.

L'expression (A.13.62a) de A devient alors :

$$\boxed{A = \sum_{n=1}^N \tau_1^{-n} \alpha_n} \quad (\text{A.13.68})$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 2D_n \int_0^\infty (1 - e^{-\eta^2}) e^{-\eta^2} G_n(\eta^2) \frac{1}{\eta} d\eta \\ &= D_n \sum_{k=1}^n q_{n,k} 2 \int_0^\infty (e^{-\eta^2} - e^{-2\eta^2}) \frac{1}{\eta} \eta^{2k} d\eta \end{aligned} \quad (\text{A.13.69})$$

Or :

$$\int_0^\infty \eta^{2k-1} e^{-2\eta^2} d\eta = \frac{(k-1)!}{2^{k+1}} \quad (\text{A.13.70a})$$

$$\int_0^\infty \eta^{2k-1} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{(k-1)!}{2} \quad (\text{A.13.71b})$$

d'où :

$$\boxed{\alpha_n = D_n \sum_{k=1}^n q_{n,k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) (k-1)!} \quad (\text{A.13.72})$$

Il nous reste à calculer B . Un calcul de dénombrement donne :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\tau_1^n} G_n(\eta^2) \right)^2 = \sum_{n,m=1}^N D_n D_m G_n(\eta^2) G_m(\eta^2) \tau_1^{-(n+m)}, \quad (\text{A.13.73})$$

d'où :

$$\boxed{B = \sum_{n,m=1}^N D_n D_m \tau_1^{-(n+m)} \beta_{n,m}}, \quad (\text{A.13.74})$$

où l'on a posé :

$$\boxed{\beta_{n,m} = 2 \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-2\eta^2} G_n(\eta^2) G_m(\eta^2) d\eta} \quad (\text{A.13.75})$$

Or en jouant sur la double sommation, on a :

$$\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq m \leq N}} D_n D_m \tau_1^{-(n+m)} \beta_{m,n} = \sum_{k=2}^{2N} \tau_1^{-k} \sum_{\substack{m+n=k \\ 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq m \leq N}} D_n D_m \beta_{m,n} \quad (\text{A.13.76})$$

Cette somme est du même type que la somme (A.13.44) calculée pour $C_w(t)$; si ce n'est qu'ici elle commence à $k=2$ et que $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Il vient donc :

$$B = \sum_{n=2}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=1}^{n-1} D_n D_{n-m} \beta_{m,n-m}, \quad (\text{A.13.77})$$

où l'on a posé :

$$D_n = 0 \text{ pour } n > N \quad (\text{A.13.78})$$

Si nous ne voulons pas faire intervenir des termes D_n avec des indices $n > N$, il faut limiter la sommation et on obtient :

$$B = \sum_{n=2}^N \tau_1^{-n} \sum_{m=1}^{n-1} D_n D_{n-m} \beta_{m,n-m} + \sum_{n=N+1}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=n-N}^N D_n D_{n-m} \beta_{m,n-m} \quad (\text{A.13.79})$$

Ting et all¹ ne prennent pas en compte la sommation de $N+1$ à $2N$. Ils utilisent l'expression :

$$B = \sum_{n=2}^N \tau_1^{-n} \gamma_n$$

(A.13.80)

avec :

$$\gamma_n = \sum_{m=1}^{n-1} D_n D_{n-m} \beta_{m,n-m}$$

(A.13.81)

Il nous reste à calculer l'expression de $\beta_{n,h}$. Par définition :

$$\beta_{n,h} = 2 \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-2\eta^2} G_n(\eta^2) G_h(\eta^2) d\eta \quad n \geq 1 \quad h \geq 1 \quad (\text{A.13.82})$$

A l'aide de (A.13.66), il vient :

$$\beta_{n,h} = 2 \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-2\eta^2} \left(\sum_{l=1}^n q_{n,l} \eta^{2l} \right) \left(\sum_{k=1}^h q_{h,k} \eta^{2k} \right) d\eta \quad (\text{A.13.83})$$

Or en jouant sur la double sommation, on a :

$$\beta_{n,h} = \sum_{l=1}^n q_{n,l} \sum_{k=1}^h q_{h,k} 2 \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-2\eta^2} \eta^{2(k+l)} d\eta, \quad (\text{A.13.84})$$

c'est à dire :

$$\boxed{\beta_{n,h} = \sum_{l=1}^n q_{n,l} \sum_{k=1}^h q_{h,k} \frac{(k+l-1)!}{2^{k+l}}} \quad (\text{A.13.85})$$

car :

$$2 \int_0^\infty \eta^{2p-1} e^{-2\eta^2} d\eta = \frac{(p-1)!}{2^p} \quad (\text{A.13.86})$$

Le système complet d'équations :

On donne ici, *sous forme adimensionnelle*, le système complet d'équations d'évolution de la fibre centrale d'un filament tourbillon dont le profil général de vitesse est donné par (A.13.2a-b).

$$\boxed{\dot{\vec{\mathbf{X}}}_s(s,t) = \vec{\mathbf{Q}}^* + \frac{K(s,t)}{4\pi} [-\ln \varepsilon + \ln(S) - 1 + C_v(t) + C_w(t)] \vec{\mathbf{b}}^{(0)}} \quad (\text{A.13.87})$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma(s,t) &= |\vec{\mathbf{X}}_s| \\ \vec{\tau} &= \vec{\mathbf{X}}_s / \sigma \\ K\vec{\mathbf{b}} &= \vec{\mathbf{X}}_s \wedge \vec{\mathbf{X}}_{ss} / \sigma^3 \end{aligned} \quad (\text{A.13.88a})$$

L'intervention globale est donnée par :

$$\vec{\mathbf{Q}}^* = (\vec{\mathbf{Q}}_2 + \vec{\mathbf{A}}(s,t)) - [\vec{\mathbf{Q}}_2 + \vec{\mathbf{A}}(s,t)] \bullet \vec{\tau}(s,t) \vec{\tau}(s,t) \quad (\text{A.13.88b})$$

$$\vec{\mathbf{A}}(s,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\begin{array}{c} -\sigma(s+s',t) \frac{\vec{\tau}(s+s',t) \wedge (\vec{\mathbf{X}}(s+s',t) - \vec{\mathbf{X}}(s,t))}{|\vec{\mathbf{X}}(s+s',t) - \vec{\mathbf{X}}(s,t)|^3} \\ -\frac{K(s,t)}{2} \frac{\vec{\mathbf{b}}(s,t) \sigma(s+s',t)}{|\lambda(s,s',t)|} \end{array} \right] ds' \quad (\text{A.13.88c})$$

$$\vec{\mathbf{Q}}_2 = grad\varphi + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nbra} \Gamma_j \oint_{C_j} \frac{\vec{\mathbf{X}}_j - \vec{\mathbf{X}}}{|\vec{\mathbf{X}}_j - \vec{\mathbf{X}}|^3} \wedge \vec{\mathbf{X}}_{j,s} ds, \quad (\text{A.13.88d})$$

où $nbra$ est le nombre d'anneaux et :

$$\lambda(s, s', t) = \int_s^{s+s'} \sigma(s^*, t) ds^* \quad (\text{A.13.89a})$$

$$S_{\pm}(t) = \lambda(s \pm \pi, s, t) \quad (\text{A.13.89b})$$

$$S(t) = S_+(t) + S_-(t) = \int_0^{2\pi} \sigma(s^*, t) ds^* \quad (\text{A.13.89c})$$

L'intervention locale est donnée par :

$$C_v(t) = -\ln(\bar{\delta}) + \frac{1}{2}(1 + \gamma - \ln 2) + 4\pi\alpha^2 \sum_{n=1}^N \alpha_n \tau_1^{-n}(t) + 8\pi^2 \alpha^2 \sum_{n=2}^N \gamma_n \tau_1^{-n}(t) \quad (\text{A.13.90a})$$

$$C_w(t) = -\frac{16\pi^2 \alpha^2}{S^3 \tau_1} \sum_{n=0}^N w_n \tau_1^{-n} \quad (\text{A.13.90b})$$

$$\delta(t) = \varepsilon \bar{\delta}(t) \quad (\text{A.13.91a})$$

$$\delta(t) = \varepsilon \sqrt{4\alpha^2 \tau_1(t) / S(t)} \quad (\text{A.13.91b})$$

où $N+1$ est le nombre de termes utilisés dans les expressions de $w^{(0)}$ et $\omega_3^{(0)}$ afin de satisfaire les profils initiaux de façon convenable. Ici, γ est le nombre d'Euler et :

$$\tau_1 = \int_0^t S(t') dt' + \tau_{10} \quad (\text{A.13.92a})$$

$$\tau_{10} = \frac{S_0}{4\alpha^2}, \quad (\text{A.13.92b})$$

où l'on a pris l'épaisseur $\delta(t=0)$ du champ de vitesse orthoradial comme petite longueur caractéristique d'adimensionalisation.

Le reste des constantes sont définies par :

$$\alpha_n = D_n \sum_{k=1}^n q_{n,k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) (k-1)! \quad (\text{A.13.93a})$$

$$\gamma_n = \sum_{m=1}^{n-1} D_m D_{n-m} \beta_{m,n-m} \quad (\text{A.13.93b})$$

$$w_n = \sum_{m=0}^n C_m C_{n-m} P_{m,n-m} \quad (\text{A.13.93c})$$

avec :

$$q_{n,k} = p_{n-1,k} - p_{n,k} \text{ pour } n \geq 1 \quad (\text{A.13.94a})$$

$$p_{n,k} = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \quad (\text{A.13.94b})$$

$$p_{n-1,n} = 0 \quad (\text{A.13.94c})$$

$$\beta_{n,h} = \sum_{l=1}^n q_{n,l} \sum_{k=1}^h q_{h,k} \frac{(k+l-1)!}{2^{k+l}} \quad (\text{A.13.94d})$$

$$P_{n,i} = \sum_{j=0}^i p_{i,j} \sum_{k=0}^n p_{n,k} \frac{(j+k)!}{2^{j+k+1}} \quad (\text{A.13.94e})$$

Les coefficients C_n et D_n sont définis à partir des profils initiaux par :

$$C_n = 2S_0 \tau_{10}^{n+1} \int_0^\infty w^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta \quad (\text{A.13.95a})$$

$$D_n = 2 \frac{\tau_{10}^{n+1}}{S_0} \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta \quad (\text{A.13.95b})$$

Afin de simplifier l'écriture de certaines des expressions précédentes, on définit \tilde{C}_n ,

\tilde{D}_n et τ_α par :

$$C_n = 2S_0 \tau_{10}^{n+1} \tilde{C}_n \quad (\text{A.13.96a})$$

$$D_n = 2 \frac{\tau_{10}^{n+1}}{S_0} \tilde{D}_n \quad (\text{A.13.96b})$$

$$\boxed{\tau_\alpha = 4\alpha^2 \int_0^t \frac{S^{(0)}(t')}{S_0} dt'} \quad (\text{A.13.96c})$$

Il vient alors :

$$\boxed{\tilde{C}_n = \int_0^\infty w^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta} \quad (\text{A.13.97a})$$

$$\boxed{\tilde{D}_n = \int_0^\infty \omega_3^{(0)}(\eta, 0) L_n(\eta^2) \eta d\eta} \quad (\text{A.13.97b})$$

$$\boxed{\tilde{C}_0 = \frac{m_0}{2\pi}} \quad (\text{A.13.98a})$$

$$\boxed{\tilde{D}_0 = \frac{1}{2\pi}} \quad (\text{A.13.98b})$$

Les expressions de α_n , γ_n et w_n deviennent :

$$\tau_1^{-n} \alpha_n = \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_{10}} \right)^{-n} \tilde{\alpha}_n \quad (\text{A.13.99a})$$

$$\tau_1^{-n} \gamma_n = \frac{1}{4\alpha^4} \left(\frac{\tau_1}{\tau_{10}} \right)^{-n} \tilde{\gamma}_n \quad (\text{A.13.99b})$$

$$\tau_1^{-n-1} w_n = \frac{S_0^3}{\alpha^2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_{10}} \right)^{-n-1} \tilde{w}_n \quad (\text{A.13.99c})$$

avec :

$$\boxed{\tilde{\alpha}_n = \tilde{D}_n \sum_{k=1}^n q_{n,k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) (k-1)!} \quad (\text{A.13.100a})$$

$$\boxed{\tilde{\gamma}_n = \sum_{m=1}^{n-1} \tilde{D}_m \tilde{D}_{n-m} \beta_{m,n-m}} \quad (\text{A.13.100b})$$

$$\boxed{\tilde{w}_n = \sum_{m=0}^n \tilde{C}_m \tilde{C}_{n-m} P_{m,n-m}} \quad (\text{A.13.100c})$$

Comme :

$$\frac{\tau_1}{\tau_{10}} = \tau_\alpha + 1 \quad (\text{A.13.101})$$

les expressions de $C_v(t)$ et $C_w(t)$ sont :

$$\boxed{C_v(t) = -\ln(\bar{\delta}) + \frac{1}{2}(1 + \gamma - \ln 2) + 2\pi \sum_{n=1}^N \tilde{\alpha}_n (1 + \tau_\alpha)^{-n} + 2\pi^2 \sum_{n=2}^N \tilde{\gamma}_n (1 + \tau_\alpha)^{-n}} \quad (\text{A.13.102a})$$

$$\boxed{C_w(t) = -16\pi^2 \frac{S_0^3}{S^3} \sum_{n=0}^N \tilde{w}_n (1 + \tau_\alpha)^{-n-1}} \quad (\text{A.13.102b})$$

Bibliographie :

1. LIU,C.H., TAVANTZIS,J. et TING L. 1986 Numerical studies of motion and decay of vortex filaments, AIAA Journal **24** (8), 1290-1297

Annexe 14

A.14. Deux expressions de $F(m)$

Dans cette annexe, on détermine le développement de

$$\boxed{F(m) = 2 \int_{\theta_c}^{\pi} \frac{\cos m\theta'}{\{2(1-\cos\theta')\}^{3/2}} d\theta'} \quad (\text{A.14.1})$$

par rapport à l'angle de coupure θ_c . On utilise pour cela soit un calcul de développement d'intégrale singulière, soit un calcul de dénombrement.

Par un calcul de développement d'intégrale singulière :

Nous remarquons que $F(m)$ est une intégrale singulière pour le petit paramètre θ_c et nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés d'intégrales singulières. Nous obtenons :

$$\boxed{F(m) = \frac{1}{\theta_c^2} + k(m) \ln \frac{4}{\theta_c} + l(m) + O(\theta_c^2)} \quad (\text{A.14.2})$$

avec :

$$\boxed{k(m) = \frac{1 - (2m)^2}{4}} \quad (\text{A.14.3})$$

$$\boxed{l(m) = -\frac{1}{\pi^2} + k(m) \ln \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi} \left[\frac{2 \cos(m\theta)}{\{2(1-\cos\theta)\}^{3/2}} - \frac{k(m)}{|\theta|} - \frac{2}{|\theta|^3} \right] d\theta} \quad (\text{A.14.4})$$

Par un calcul de dénombrement :

A l'aide de la littérature de base, on a :

$$\cos m\theta = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=\text{trunc}(\frac{m}{2})} g(m,i) (2 \cos \theta)^{m-2i} \quad (\text{A.14.4})$$

où trunc est la fonction de troncation (elle tronque un nombre en sa partie entière) et

$$g(m,i) = (-1)^i m \frac{(m-i-1)!}{i!(m-2i)!} \text{ si } m \neq 0 \quad (\text{A.14.5a})$$

$$g(0,0) = 2 \quad (\text{A.14.5b})$$

La substitution de cette formule (A.14.4) dans la définition (A.14.1) de $F(m)$ conduit à :

$$F(m) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\pi} g(m,i) \int_{\theta_c}^{\pi} \frac{(2\cos\theta')^{m-2i}}{(1-\cos\theta')^{3/2}} d\theta' \quad (\text{A.14.6})$$

Alors, à l'aide du changement de variables:

$$x = \cos\theta', \quad (\text{A.14.7})$$

il vient :

$$\int_{\theta_c}^{\pi} \frac{(2\cos\theta')^{m-2i}}{(1-\cos\theta')^{3/2}} d\theta' = \int_{-1}^{\cos\theta_c} \frac{(2x)^{m-2i}}{(1-x)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (\text{A.14.8})$$

Puis, à l'aide du changement de variables:

$$X = \sqrt{1-x}, \quad (\text{A.14.9})$$

l'équation (A.14.8) devient :

$$\int_{\theta_c}^{\pi} \frac{(2\cos\theta')^{m-2i}}{(1-\cos\theta')^{3/2}} d\theta' = -2^{m+1-2i} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1-\cos\theta_c}} \frac{(1-X^2)^{m-2i}}{X^3 \sqrt{2-X^2}} dX \quad (\text{A.14.10})$$

Dans tout formulaire standard, on trouve :

$$(1-X^2)^N = \sum_{k=0}^N C_N^k X^{2k} (-1)^k, \quad (\text{A.14.11})$$

où :

$$C_N^k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}. \quad (\text{A.14.12})$$

A l'aide de (A.14.10) et (A.14.11), l'expression (A.14.6) de $F(m)$ devient :

$$F(m) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\pi} g(m,i) \sum_{k=0}^{m-2i} (-1)^k C_{m-2i}^k \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1-\cos\theta_c}} \frac{X^{2k}}{X^3 \sqrt{2-X^2}} dX \quad (\text{A.14.13})$$

On définit alors :

$$L(j) = \int \frac{X^{2j}}{X^3 \sqrt{2-X^2}} dX \quad (\text{A.14.14})$$

$$K(n) = L(n+2) = \frac{1}{2} \int \frac{\alpha^n}{\sqrt{2-\alpha}} d\alpha \quad (\text{A.14.15})$$

Dans un formulaire standard, nous trouvons la formule récursive :

$$K(n) = -\frac{\alpha^n}{2n+1} \sqrt{2-\alpha} + \frac{4n}{2n+1} K(n-1), \quad (\text{A.14.16})$$

à l'aide de laquelle, nous obtenons :

$$L(j) = -\left(\sum_{k=0}^{j-2} A_k^j X^{2k} \right) \sqrt{2-X^2}, \quad (\text{A.14.17})$$

où les A_k^j sont définis récursivement par :

$$\begin{aligned} A_k^{j+1} &= \frac{4(j-1)}{2j-1} A_k^j \text{ si } k \leq j-2 \\ A_{j-1}^{j+1} &= \frac{1}{2j-1} \end{aligned} \quad (\text{A.14.18})$$

En fait, on peut montrer par récurrence que les A_k^j ont une expression explicite :

$$A_k^j = \frac{8^{j-2-k}}{2k+1} \left[\frac{(j-2)!}{k!} \right]^2 \frac{(2k+1)!}{(2j-3)!} \quad (\text{A.14.19})$$

En substituant (A.14.19) dans (A.14.17) et l'expression de $L(j)$ ainsi obtenue dans l'expression (A.14.13) de $F(m)$, il vient alors après avoir développer par rapport à θ_c :

$$F(m) = \frac{1}{\theta_c^2} + k(m) \ln \frac{4}{\theta_c} + l(m) + O(\theta_c^4) \quad (\text{A.14.20})$$

avec :

$$k(m) = \frac{1-(2m)^2}{4} \quad (\text{A.14.21})$$

$$l(m) = \sum_{i=0}^{\text{trunc}(\frac{m}{2})-1} \sum_{k=2}^{m-2i} h(m,i,k) = \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^{g(m,k)} h(m,i,k) \quad (\text{A.14.22})$$

où :

$$g(m,k) = \text{trunc}(m/2) - \text{trunc}\left(\frac{k+\frac{1}{2}+(-1)^m \frac{1}{2}}{2}\right) \quad (\text{A.14.23})$$

$$h(m,i,k) = 2^{m-2i} (-1)^i \frac{m}{i!} \frac{(m-i-1)!}{(m-2i)!} (-1)^k C_{m-2i}^k \left[4^{k-2} \frac{[(k-2)!]^2}{(2k-3)!} 2^{k-2} \right] \quad (\text{A.14.24})$$

Annexe 15

A.15. Description du schéma numérique et du code fortran

Dans cette annexe, nous donnons le schéma de la discréétisation numérique de l'équation d'évolution de l'anneau tourbillon, ainsi que l'algorithme du programme qui l'implémente sur machine.

Le schéma numérique :

Nous allons décrire la méthode numérique sur l'équation simplifiée :

$$\vec{X}_t = \alpha K \vec{b} = \alpha \frac{\vec{X}_s \wedge \vec{X}_{ss}}{|\vec{X}_s|^3} \quad (\text{A.15.1})$$

où

$$\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (\text{A.15.2})$$

$$\vec{X}(0, t) = \vec{X}(2\pi, t) \quad (\text{A.15.3})$$

L'espace est discréétisé en choisissant N points sur la fibre à l'aide d'un pas d'abscisse

$$ds = 2\pi/N \quad (\text{A.15.4})$$

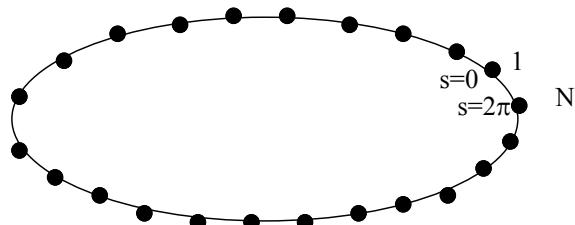


Figure A.15.1 Discréétisation spatiale de l'anneau

Les N points choisis sont :

$$\vec{\mathbf{X}}^i(t) = \vec{\mathbf{X}}((i-1)ds, t) \quad \text{pour } i = 1 \dots N \quad (\text{A.15.5})$$

Nous utilisons alors sur cette discréétisation un schéma spatial de différences finies en approximant les dérivées premières en un point i par

$$\frac{\partial a}{\partial x}(\vec{\mathbf{X}}^i) \approx \frac{a(\vec{\mathbf{X}}^{i+1}) - a(\vec{\mathbf{X}}^{i-1})}{2ds} \quad (\text{A.15.6})$$

et les dérivées secondes par

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(\vec{\mathbf{X}}^i) \approx \frac{a(\vec{\mathbf{X}}^{i+1}) - 2a(\vec{\mathbf{X}}^i) + a(\vec{\mathbf{X}}^{i-1})}{ds^2} \quad (\text{A.15.7})$$

Dans l'équation complète, les intégrales spatiales sont calculées par la méthode des trapèzes.

Pour $i = 2 \dots N-1$, l'équation discréétisée devient les $N-2$ relations

$$\vec{\mathbf{X}}_t^i = \alpha \frac{\left[\frac{\vec{\mathbf{X}}^{i+1} - \vec{\mathbf{X}}^{i-1}}{2ds} \wedge \frac{\vec{\mathbf{X}}^{i+1} - 2\vec{\mathbf{X}}^i + \vec{\mathbf{X}}^{i-1}}{ds^2} \right]}{\left| \frac{\vec{\mathbf{X}}^{i+1} - \vec{\mathbf{X}}^{i-1}}{2ds} \right|^3}, \quad (\text{A.15.8a})$$

auxquelles s'ajoutent les deux relations :

$$\vec{\mathbf{X}}_t^1 = \alpha \frac{\left[\frac{\vec{\mathbf{X}}^2 - \vec{\mathbf{X}}^N}{2ds} \wedge \frac{\vec{\mathbf{X}}^2 - 2\vec{\mathbf{X}}^1 + \vec{\mathbf{X}}^N}{ds^2} \right]}{\left| \frac{\vec{\mathbf{X}}^2 - \vec{\mathbf{X}}^N}{2ds} \right|^3} \quad (\text{A.15.8b})$$

$$\vec{\mathbf{X}}_t^N = \alpha \frac{\left[\frac{\vec{\mathbf{X}}^1 - \vec{\mathbf{X}}^{N-1}}{2ds} \wedge \frac{\vec{\mathbf{X}}^1 - 2\vec{\mathbf{X}}^N + \vec{\mathbf{X}}^{N-1}}{ds^2} \right]}{\left| \frac{\vec{\mathbf{X}}^1 - \vec{\mathbf{X}}^{N-1}}{2ds} \right|^3} \quad (\text{A.15.8c})$$

Nous sommes donc en présence d'un système différentiel en temps de N équations et de N fonctions inconnues. Il faut alors choisir un schéma de discréétisation temporelle. On utilise une méthode d'Euler implicite

$$\vec{\mathbf{X}}_t^i = \frac{\vec{\mathbf{X}}^{i,k+1} - \vec{\mathbf{X}}^{i,k}}{dt} \quad (\text{A.15.9})$$

où le pas de temps est : $dt = t / (k + 1)$ (A.15.10)

Dans l'équation complète, les intégrales sont calculées par la méthode des trapèzes.

Le schéma complet utilisé s'écrit donc

$$\frac{\vec{\mathbf{X}}^{i,k+1} - \vec{\mathbf{X}}^{i,k}}{dt} = \alpha \left[\frac{\vec{\mathbf{X}}^{i+1,k+1} - \vec{\mathbf{X}}^{i-1,k+1}}{2ds} \wedge \frac{\vec{\mathbf{X}}^{i+1,k+1} - 2\vec{\mathbf{X}}^{i,k+1} + \vec{\mathbf{X}}^{i-1,k+1}}{ds^2} \right] \left| \frac{\vec{\mathbf{X}}^{i+1,k+1} - \vec{\mathbf{X}}^{i-1,k+1}}{2ds} \right|^3 \quad (\text{A.15.11})$$

On résoudre alors ce système d'équations non linéaires par la méthode itérative de recherche de zéro suivante

$$\vec{\mathbf{X}}_{j=0}^i = \vec{\mathbf{X}}^{i,k} \quad (\text{A.15.12a})$$

$$\frac{\vec{\mathbf{X}}_{j+1}^i - \vec{\mathbf{X}}^{i,k}}{dt} = \alpha \left[\frac{\vec{\mathbf{X}}_j^{i+1} - \vec{\mathbf{X}}_j^{i-1}}{2ds} \wedge \frac{\vec{\mathbf{X}}_j^{i+1} - 2\vec{\mathbf{X}}_j^i + \vec{\mathbf{X}}_j^{i-1}}{ds^2} \right] \left| \frac{\vec{\mathbf{X}}_j^{i+1} - \vec{\mathbf{X}}_j^{i-1}}{2ds} \right|^3 \quad (\text{A.15.12b})$$

Il apparaît une suite $\vec{\mathbf{X}}_j$ que nous calculons jusqu'à avoir convergence. La limite obtenue est le zéro $\vec{\mathbf{X}}^{i,k+1}$ cherché. Cette résolution est de type Jacobi, car $\vec{\mathbf{X}}_{j+1}$ est calculé à partir de $\vec{\mathbf{X}}_j$. Dans le programme, nous avons utilisé une méthode de type Gauss-Seidel qui est une variante de la précédente. Lorsque l'on posséde $\vec{\mathbf{X}}_j$, le terme $\vec{\mathbf{X}}_{j+1}^1$ est calculé à partir de la formule (A.15.12b), puis nous faisons l'affectation $\vec{\mathbf{X}}_j^1 := \vec{\mathbf{X}}_{j+1}^1$ et nous continuons avec $\vec{\mathbf{X}}_{j+1}^2, \dots$. Cette méthode a l'avantage d'accélérer la convergence.

L'algorithme du programme :

Le programme est réparti en trois étages :

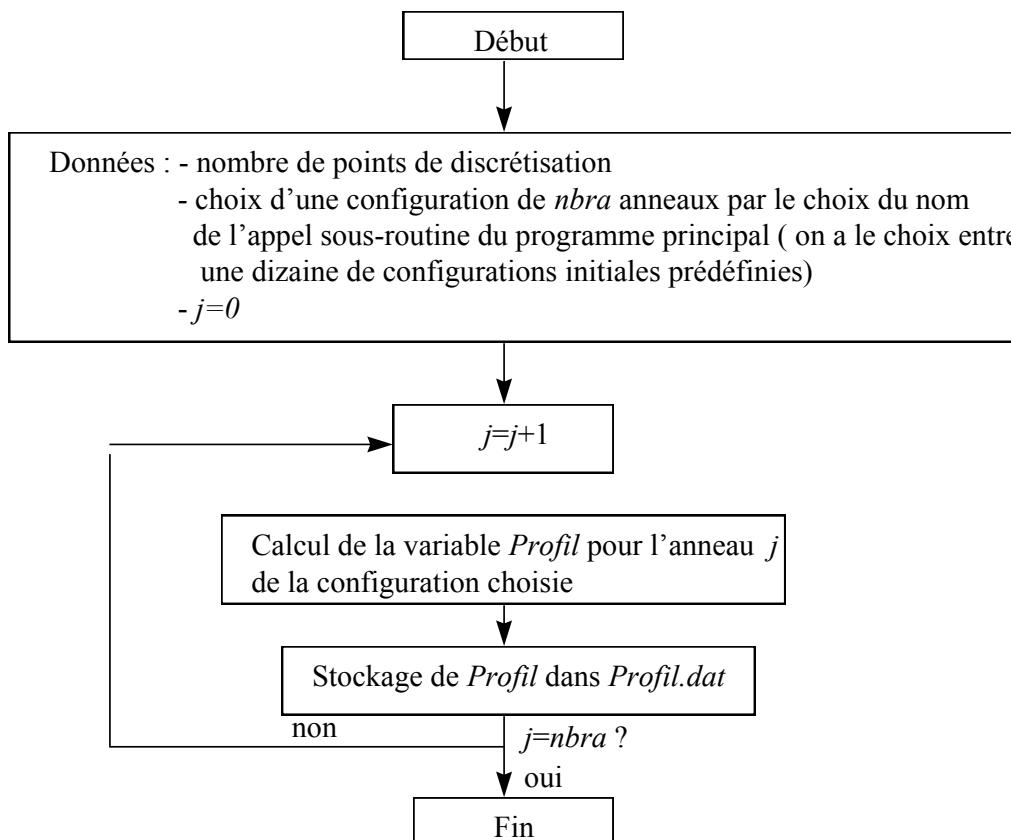
- *Préprocesseur* : le programme fortran *initial.f* crée une configuration de profils initiaux d'anneaux tourbillons et la range dans le fichier *profil.dat*.
- *Processeur* : le programme fortran *polair.f* utilise les données du fichier *profil.dat*, qui donne les différents anneaux de la configuration initiale, puis il calcule l'évolution de ces anneaux en enregistrant un certain nombre d'étapes dans les fichiers *passm.m* et *pass.m*.

- *Postprocesseur* : le programme Maple *tutu* exploite les données du fichier *tore.dat* (obtenu en appliquant le fichier *module.f* de conversion du fichier *passm.m*) et dessine les anneaux à l'écran. De même, le fichier Matlab *xpdessin* exploite les données du fichier *pass.m* pour avoir des sorties à l'écran.

étage	Programme	Entrée	Sortie
Préprocesseur	initial.f		profil.dat
Processeur	polair.f	profil.dat	passm.m et pass.m
Postprocesseur	modul.f tutu xpdessin	passm.m tore.dat pass.m	tore.dat visualisation par maple visualisation par matlab

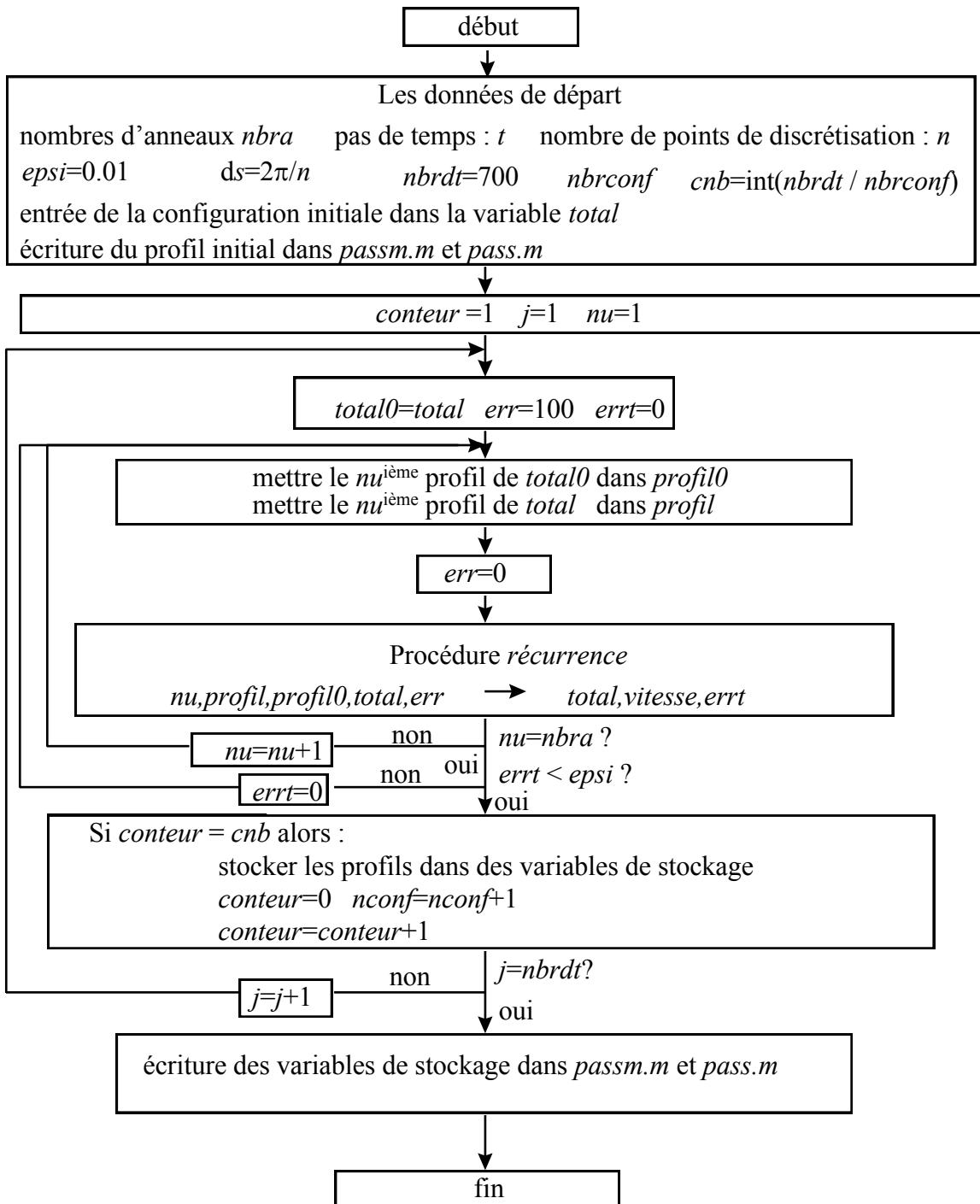
Algorithme de initial.f :

On appelle *Profil* le vecteur des points de discréttisation de la ligne centrale $\vec{X}(s,t)$ à un certain instant t .



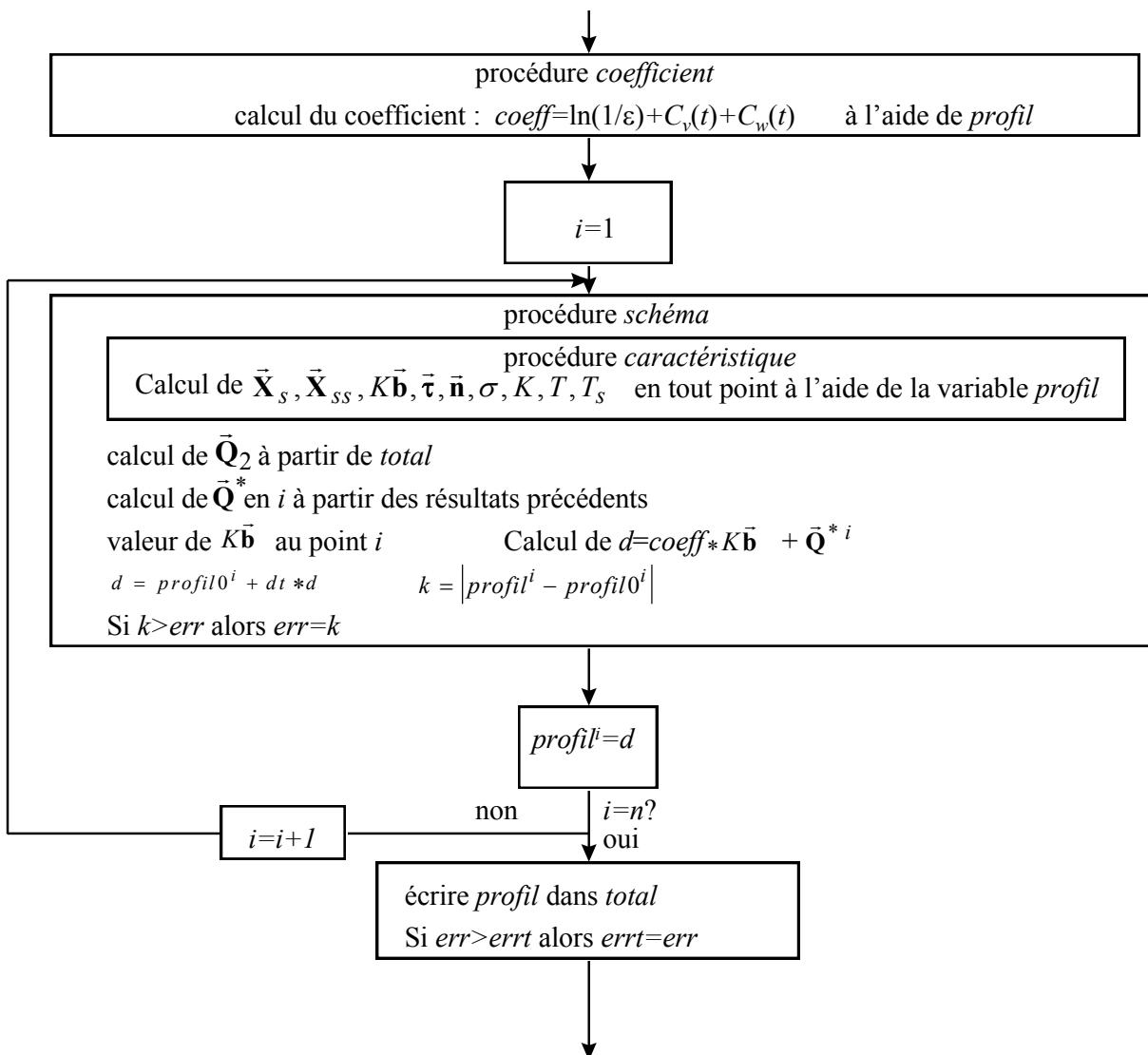
Ce programme calcule donc les $nbra$ profils des $nbra$ anneaux pour la condition initiale, qui est une expression analytique, et les range dans le fichier *profil.dat*.

Algorithme de polair.f :



Il ne nous reste plus qu'à décrire l'procédure *récurrence*.

Algorithme de la procédure Récurrence :



Annexe 16

A.16. Simplification de l'équation d'évolution pour le filament de Klein et Majda

Dans cette annexe, on simplifie l'équation (6.7) d'évolution du filament :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}} = \left(\frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{\tilde{L}}{\varepsilon} - 1 \right] + KC^* \right) \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{A}}, \quad (\text{A.16.1a})$$

lorsque nous nous limitons à des filaments de la forme suivante :

$$\vec{\mathbf{X}}(a, \bar{t}, d) = a \vec{\tau}_0 + d^2 \vec{\mathbf{X}}^{(2)} \left(\tilde{a} = a/d, \bar{t} = t/d^2 \right) + o(d^2), \quad (\text{A.16.2})$$

que l'on appellera le filament de Klein et Majda et dont la représentation est donnée sur la figure A.16.1. Ici, d'après (A.3.26a),

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}}(a) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\tilde{L}/2}^{+\tilde{L}/2} \left[\frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a'))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a')|^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{K(a)\vec{\mathbf{b}}(a)}{2|a'|} \right] da' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_I \frac{\vec{\tau}(a+a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a'))}{|\vec{\mathbf{X}}(a) - \vec{\mathbf{X}}(a+a')|^3} da' \end{aligned} \quad (\text{A.16.1b})$$

avec $I =]-\infty, +\infty[/ [-\tilde{L}/2, +\tilde{L}/2]$.

Pour un filament de la forme (A.16.2), l'équation (A.16.1a) devient :

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}} = \left(\frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{\tilde{L}}{\varepsilon} - 1 \right] + C^* \right) (K\vec{\mathbf{b}})(a = d\tilde{a}) + \vec{\mathbf{A}}(a = d\tilde{a}) \quad (\text{A.16.3})$$

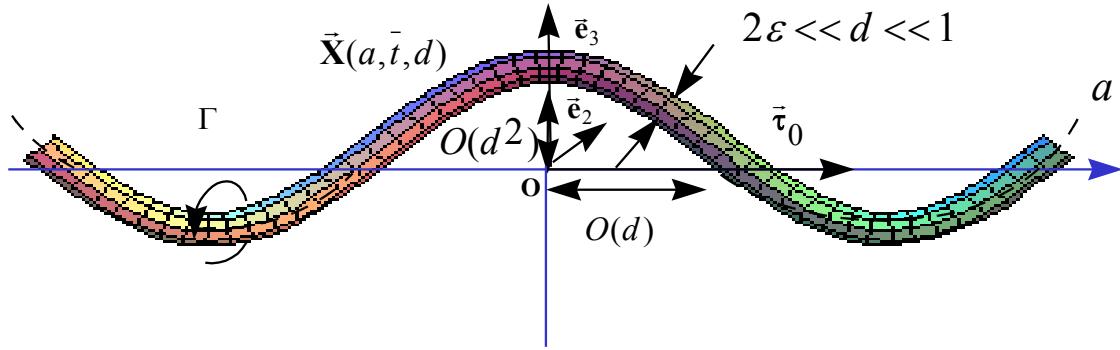


Figure A.16.1 Le filament de Klein et Majda

Or :

$$\vec{X}_a = \vec{\tau}_0 + d^2 \frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{a}} + o(d^2) = \vec{\tau}_0 + d \frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{a}} + o(d^2) \quad (\text{A.16.4})$$

$$\vec{X}_{aa} = d \frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{a} \partial \tilde{a}} + o(d^2) = \frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{a} \partial \tilde{a}} + o(d), \quad (\text{A.16.5})$$

d'où :

$$(K\vec{b})(a = d\tilde{a}) = \frac{\vec{X}_a \wedge \vec{X}_{aa}}{|\vec{X}_a|^3} = \vec{\tau}_0 \wedge \frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{a} \partial \tilde{a}} + O(d) \quad (\text{A.16.6})$$

Reste à calculer la limite $d \rightarrow 0$ à \tilde{a} fixé de

$$\begin{aligned} \vec{A}(a = d\tilde{a}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\tilde{L}/2}^{+\tilde{L}/2} \left[\frac{\vec{\tau}(d\tilde{a} + a') \wedge (\vec{X}(d\tilde{a} + a') - \vec{X}(d\tilde{a}))}{|(\vec{X}(d\tilde{a} + a') - \vec{X}(d\tilde{a}))|^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(K\vec{b})(d\tilde{a})}{2|a'|} \right] da' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_I \frac{\vec{\tau}(d\tilde{a} + a') \wedge (\vec{X}(d\tilde{a} + a') - \vec{X}(d\tilde{a}))}{|\vec{X}(d\tilde{a}) - \vec{X}(d\tilde{a} + a')|^3} da' \end{aligned} \quad (\text{A.16.7})$$

avec $I =]-\infty, +\infty[/ [-\tilde{L}/2, +\tilde{L}/2]$.

Comme :

$$\vec{\tau}(d\tilde{a} + a') = \frac{\vec{X}_a}{|\vec{X}_a|} = \frac{\vec{\tau}_0 + d \frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{a}} (\tilde{a} + \frac{a'}{d}) + o(d^2)}{\left| \vec{\tau}_0 + d \frac{\partial \vec{X}^{(2)}}{\partial \tilde{a}} (\tilde{a} + \frac{a'}{d}) + o(d^2) \right|} \quad (\text{A.16.8})$$

$$\vec{X}(d\tilde{a} + a') - \vec{X}(d\tilde{a}) = a' \vec{\tau}_0 + d^2 (\vec{X}^{(2)}(\tilde{a} + \frac{a'}{d}) - \vec{X}^{(2)}(\tilde{a})) + o(d^2), \quad (\text{A.16.9})$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\tau}(d\tilde{a} + a') \wedge (\vec{\mathbf{X}}(d\tilde{a} + a') - \vec{\mathbf{X}}(d\tilde{a}))}{|\vec{\mathbf{X}}(d\tilde{a}) - \vec{\mathbf{X}}(d\tilde{a} + a')|^3} = \\ \frac{-\vec{\tau}_0 d^2 \frac{\bar{a}}{d} \wedge \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(2)}}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a} + \frac{a'}{d}) + d^2 \vec{\tau}_0 \wedge (\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a} + \frac{a'}{d}) - \vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a})) + o(d^2)}{\left| \vec{\tau}_0 + d \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(2)}}{\partial \tilde{a}} + o(d^2) \right| \left| d \frac{a'}{d} \vec{\tau}_0 + d^2 (\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a} + \frac{a'}{d}) - \vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a})) + o(d^2) \right|^3} \end{aligned} \quad (\text{A.16.10})$$

Nous faisons alors le changement de variable $h = \frac{a'}{d}$ dans les intégrales (A.16.7) et il vient :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}}(a = d\tilde{a}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\tilde{L}/2d}^{+\tilde{L}/2d} \left[\frac{-\vec{\tau}_0 h \wedge \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(2)}}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a} + h) + \vec{\tau}_0 \wedge (\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a} + h) - \vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a}))}{|h|^3} \right. \\ \left. + \frac{(K\vec{\mathbf{b}})(d\tilde{a})}{2|h|} \right] dh \\ -\frac{1}{4\pi} \int_I \frac{-\vec{\tau}_0 h \wedge \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(2)}}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a} + h) + \vec{\tau}_0 \wedge (\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a} + h) - \vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a}))}{|h|^3} dh \\ + O(d) \end{aligned} \quad (\text{A.16.11})$$

avec $I =]-\infty, +\infty[/ [-\tilde{L}/2d, +\tilde{L}/2d]$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}}(a = d\tilde{a}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\tau}_0 \wedge \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a} + h) - \vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a})) - h \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(2)}}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a} + h)}{|h|^3} \right. \\ \left. + H(1 - |h|) \frac{\frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(2)}}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a})}{2|h|} \right] dh \\ -\frac{1}{4\pi} \ln(\frac{\tilde{L}}{2d})(K\vec{\mathbf{b}})(d\tilde{a}) + O(d) \end{aligned} \quad (\text{A.16.12})$$

où H est la fonction d'Heaviside. Finalement (A.16.3) devient :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial t}(\tilde{a}, t) = \left(\frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{2d}{\varepsilon} - 1 \right] + C^* \right) (K\vec{\mathbf{b}})(d\tilde{a}, t) - \vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{J}}(\tilde{a}, t)} \quad (\text{A.16.13})$$

avec

$$\boxed{(K\vec{\mathbf{b}})(d\tilde{a}, t) = \vec{\tau}_0 \wedge \vec{\mathbf{X}}_{\tilde{a}\tilde{a}}^{(2)}(\tilde{a}, t) + O(d)} \quad (\text{A.16.14})$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{J}}(\tilde{a}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a} + h, t) - \vec{\mathbf{X}}^{(2)}(\tilde{a}, t)) - h \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(2)}}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a} + h, t)}{|h|^3} + H(1 - |h|) \frac{\frac{\partial \vec{\mathbf{X}}^{(2)}}{\partial \tilde{a}}(\tilde{a}, t)}{2|h|} dh} \quad (\text{A.16.15})$$

Annexe 17

A.17. L'hélicité d'un ou de plusieurs anneaux

Dans cette annexe, nous nous proposons de donner l'expression de l'hélicité

$$H = \int \vec{\omega} \bullet \vec{v} dv \quad (\text{A.17.1})$$

et de son évolution pour des anneaux tourbillons enlacés. La figure A.17.1 représente deux anneaux enlacés.

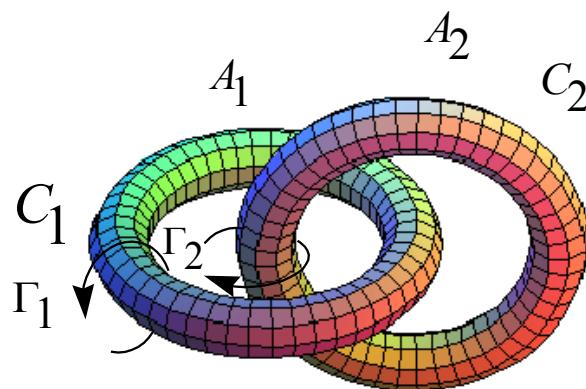


Figure A.17.1 Représentation de deux anneaux enlacés

La définition (A.17.1) de l'hélicité appliquée à deux anneaux donne

$$H = H_1 + H_2 \quad (\text{A.17.2})$$

où :

$$H_i = \int_{A_i} \vec{\omega} \bullet \vec{v} dv, \quad (\text{A.17.3})$$

c'est à dire que l'hélicité H est composée de l'hélicité H_1 due à l'anneau 1 et de celle H_2 due à l'anneau 2.

Pour un anneau tourbillon de faible épaisseur :

$$H_1(\varepsilon) = \iiint_{A_1} \varepsilon^2 \bar{\omega}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon) \bullet \bar{v}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon) h_3(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon) \bar{r} d\bar{r} d\varphi da \quad (\text{A.17.4})$$

La vitesse \bar{v} du fluide en tout point se compose de la vitesse auto-induite par l'anneau 1, de la vitesse induite par l'anneau 2 et de l'écoulement potentiel

$$\bar{v} = \bar{v}_{1\text{Biot}} + \bar{v}_{2\text{Biot}} + \bar{v}_{\text{back}} \quad (\text{A.17.5})$$

Dans l'anneau A_1 , on a

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_{1\text{Biot}}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon) + \bar{Q}_2(a) + \bar{v}_{\text{back}}(a) + O(\varepsilon)} \quad (\text{A.17.6})$$

où \bar{Q}_2 est la vitesse (3.116a) induite par l'anneau 2. La difficulté qui apparaît ici est que l'expression de $\bar{v}_{1\text{Biot}}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon)$ est une intégrale singulière par rapport au petit paramètre ε .

Calcul de l'hélicité à partir du développement intérieur de l'intégrale de Biot et Savart :

Nous nous placerons dans le cas où la vorticité n'est que tangente (cas étudié par

Moffatt et all¹⁻²⁾ :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_3(\bar{r})}{\varepsilon^2} \vec{\tau}$$

(A.17.7)

Avec (A.17.6), il vient alors :

$$\varepsilon^2 \bar{\omega} \bullet \bar{v} = \omega_3(\bar{r}) [\bar{\tau} \bullet (\bar{v}_{1\text{Biot}}(\bar{r}, \varphi, a, \varepsilon) + \bar{Q}_2(a) + \bar{v}_{\text{back}}(a))] \quad (\text{A.17.8})$$

et le développement (2.16) de $\bar{v}_{1\text{Biot}}$ du paragraphe II.5 donne :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1\text{Biot}} &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \iint \omega_3(\bar{r}') \frac{\bar{\theta}'}{k^2} \bar{r}'^2 d\bar{r}' d\varphi \\ &\quad + \frac{\bar{r}}{2\pi\varepsilon} \bar{\theta} \iint \omega_3(\bar{r}') \frac{1}{k^2} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\ &\quad + \bar{\mathbf{A}} + \frac{K}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{\varepsilon} - 1 \right] \bar{\mathbf{b}} \\ &\quad + \frac{K}{4\pi} \bar{\mathbf{b}} \iint \omega_3(\bar{r}') \ln \frac{1}{k^2} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{(\omega_3(\bar{r}')) [\bar{r}' \bar{\theta}' - \bar{r} \bar{\theta}]}{k^2} \left(\frac{K}{2} \right) \begin{bmatrix} -\bar{r}' \cos\varphi' \\ +\bar{r}' \cos\varphi' \end{bmatrix} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\ &\quad + O(\varepsilon \ln \varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{A.17.9})$$

où :

$$k^2 = \bar{r}^2 + \bar{r}'^2 - 2\bar{r}\bar{r}' \cos(\varphi - \varphi') \quad (\text{A.17.10})$$

et où l'on a omis de mettre l'indice 1 qui indique que les champs sont associés à l'anneau 1. L'expression (A.17.8) devient :

$$\varepsilon^2 \vec{\omega} \bullet \vec{v} = \omega_3(\bar{r}) [\vec{\tau} \bullet (\vec{A}_1(a) + \vec{Q}_2(a) + \vec{v}_{\text{back}}(a))] + O(\varepsilon \ln \varepsilon) \quad (\text{A.17.11})$$

et l'expression (A.17.4) de l'hélicité H_1 due à l'anneau 1 devient :

$$\begin{aligned} H_1 &= \iiint_{A_1} \omega_3(\bar{r}) [\vec{\tau} \bullet (\vec{A} + \vec{Q}_2 + \vec{v}_{\text{back}})] \bar{r} d\bar{r} d\varphi da \\ &= \Gamma_1 \int_{C_1} \vec{\tau} \bullet (\vec{A} + \vec{Q}_2 + \vec{v}_{\text{back}}) da \end{aligned} \quad (\text{A.17.12})$$

Or :

$$\int_{C_1} \vec{\tau} \bullet \vec{Q}_2(a) da = -\Gamma_2 \quad (\text{A.17.13})$$

$$\int_{C_1} \vec{\tau} \bullet \vec{v}_{\text{back}}(a) da = 0 \quad (\text{A.17.14})$$

d'où :

$$H_1 = \Gamma_1 \int_{C_1} \vec{\tau} \bullet \vec{A} da - \Gamma_1 \Gamma_2 \quad (\text{A.17.15})$$

A partir de (A.17.2) et (A.17.15), on obtient alors l'expression suivante de l'hélicité :

$$H = \boxed{\Gamma_1 \int_{C_1} \vec{\tau} \bullet \vec{A}_1(a) da + \Gamma_2 \int_{C_2} \vec{\tau} \bullet \vec{A}_2(a) da - 2\Gamma_1 \Gamma_2}, \quad (\text{A.17.16})$$

où l'on a omis de mettre les indices 1 et 2 qui indiquent les champs associés à l'anneau 1 et à l'anneau 2.

On pose alors

$$\boxed{W_i = \Gamma_i \int_{C_i} \vec{\tau} \bullet \vec{A}_i da} \quad (\text{A.17.17})$$

et on appelle ce terme *le Writhe de l'anneau i* en reprenant la terminologie de Moffatt et all.²

A partir de l'expression de \vec{A}_1 , il vient :

$$\begin{aligned} W_1 &= -\frac{\Gamma_1^2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_1} \vec{\tau}(a+a') \wedge \frac{\vec{X}_1(a+a') - \vec{X}_1(a)}{|\vec{X}_1(a+a') - \vec{X}_1(a)|^3} \bullet \vec{\tau}(a) da' da \\ &= \frac{\Gamma_1^2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_1} (\vec{\tau}(a+a') \wedge \vec{\tau}(a)) \bullet \frac{\vec{X}_1(a+a') - \vec{X}_1(a)}{|\vec{X}_1(a+a') - \vec{X}_1(a)|^3} da' da \end{aligned} \quad (\text{A.17.18})$$

A partir de l'expression (3.116a) de \vec{Q}_2 , remarquons que :

$$\begin{aligned}
-\Gamma_2 &= \int_{C_1} \vec{\tau} \bullet \vec{Q}_2 da = -\frac{\Gamma_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \vec{\tau}(a_2) \wedge \frac{\vec{X}_2(a_2) - \vec{X}_1(a_1)}{|\vec{X}_2(a_2) - \vec{X}_1(a_1)|^3} \bullet \vec{\tau}(a_1) da' da \\
&= \frac{\Gamma_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} [\vec{\tau}(a_2) \wedge \vec{\tau}(a_1)] \bullet \frac{\vec{X}_2(a_2) - \vec{X}_1(a_1)}{|\vec{X}_2(a_2) - \vec{X}_1(a_1)|^3} da_2 da_1
\end{aligned} \tag{A.17.19}$$

où $\vec{X}_i(a_i)$ est la représentation paramétrique de l'anneau i .

Il vient alors :

$$-2\Gamma_1\Gamma_2 = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} [\vec{\tau}(a_2) \wedge \vec{\tau}(a_1)] \bullet \frac{\vec{X}_2(a_2) - \vec{X}_1(a_1)}{|\vec{X}_2(a_2) - \vec{X}_1(a_1)|^3} da_2 da_1 \tag{A.17.20}$$

Calcul de l'hélicité à partir du champ de vorticité :

Une autre façon d'obtenir l'hélicité H est de remplacer la définition

$$\vec{v}_{\text{Biot}}(\vec{x}, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \iiint \vec{\omega}(\vec{x}', \varepsilon) \wedge \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|(\vec{x} - \vec{x}')|^3} dv' \tag{A.17.21}$$

de \vec{v}_{Biot} dans l'expression (A.17.1) de l'hélicité :

$$\begin{aligned}
H &= \int \vec{\omega} \bullet (\vec{v}_{\text{Biot}} + \vec{v}_{\text{back}}) dv \\
&= \int \vec{\omega} \bullet \vec{v}_{\text{Biot}} dv + \int \vec{\omega} \bullet \vec{v}_{\text{back}} dv \\
&= \iiint \vec{\omega} \bullet \frac{1}{4\pi} \iiint \vec{\omega}(\vec{x}') \wedge \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|(\vec{x} - \vec{x}')|^3} dv' dv + \int \vec{\omega} \bullet \vec{v}_{\text{back}} dv
\end{aligned} \tag{A.17.22}$$

L'hélicité est donc donnée par :

$$H = -\frac{1}{4\pi} \iiint \iiint \iiint [\vec{\omega}(\vec{x}') \wedge \vec{\omega}(\vec{x})] \bullet \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|(\vec{x} - \vec{x}')|^3} dv' dv + \iiint \vec{\omega} \bullet \vec{v}_{\text{back}} dv \tag{A.17.23}$$

Avec cette expression de l'hélicité, l'intégrale qui intervient n'est alors plus une intégrale singulière par rapport au petit paramètre ε . Il vient alors :

$$\begin{aligned}
H_1 &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{A_1} \iiint_{A_1} [\vec{\omega}(\vec{x}') \wedge \vec{\omega}(\vec{x})] \bullet \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|(\vec{x} - \vec{x}')|^3} dv' dv + \iiint_{A_1} \vec{\omega} \bullet \vec{v}_{\text{back}} dv \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \iiint_{A_1} \iiint_{A_2} [\vec{\omega}(\vec{x}') \wedge \vec{\omega}(\vec{x})] \bullet \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|(\vec{x} - \vec{x}')|^3} dv' dv
\end{aligned} \tag{A.17.24}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned}
H_1 = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{A_1} \iiint_{A_1} \left(\left[\vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}', a') \wedge \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}, a) \right] \right. \\
& \left. \bullet \frac{(\bar{\mathbf{X}}'_1 + \varepsilon \bar{r}' \bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{X}}_1 - \varepsilon \bar{r} \bar{\mathbf{r}})}{\left| (\bar{\mathbf{X}}'_1 + \varepsilon \bar{r}' \bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{X}}_1 - \varepsilon \bar{r} \bar{\mathbf{r}}) \right|^3} \right) h_3 h_3' \bar{r}' d\bar{r}' d\bar{r} d\varphi da da' \\
& + \frac{1}{4\pi} \iiint_{A_1} \iiint_{A_2} \left(\left[\vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}_2, a_2) \wedge \vec{\omega}^{(0)}(\bar{r}_1, a_1) \right] \right. \\
& \left. \bullet \frac{(\bar{\mathbf{X}}_2 + \varepsilon \bar{r}_2 \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{X}}_1 - \varepsilon \bar{r}_1 \bar{\mathbf{r}}_1)}{\left| (\bar{\mathbf{X}}_2 + \varepsilon \bar{r}_2 \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{X}}_1 - \varepsilon \bar{r}_1 \bar{\mathbf{r}}_1) \right|^3} \right) h_{3_1} h_{3_2} \bar{r}_2 \bar{r}_1 d\bar{r}_2 d\bar{r}_1 d\varphi_2 d\varphi_1 da_1 da_2
\end{aligned} \tag{A.17.25}$$

Dans le cas où la vorticité n'est que tangente $\vec{\omega} = \frac{\omega_3(\bar{r})}{\varepsilon^2} \vec{\tau}$, on réobtient alors l'expression (A.17.15) de H_1 complétée par (A.17.18) et (A.17.20).

Détermination de l'hélicité pour deux anneaux enlacés à partir de l'écoulement solution des équations dynamiques :

Une dernière façon d'obtenir l'hélicité H est de se servir de la définition (A.17.1) et du champ de vorticité et de vitesse trouvés au chapitre III.

Dans l'anneau A_1 , on a

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\bar{\mathbf{X}}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_1 + O(\varepsilon)}, \tag{A.17.26}$$

où $\vec{\mathbf{V}}_1$ est donné au chapitre III par les équations (3.34) à (3.37) et $\dot{\bar{\mathbf{X}}}_1$ est donnée par l'équation (3.33a). Il vient alors :

$$\begin{aligned}
H_1 &= \int_{A_1} \vec{\omega} \bullet \vec{v} dv \\
&= \iiint_{A_1} \vec{\omega} \bullet (\dot{\bar{\mathbf{X}}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_1) dv \\
&= \Gamma_1 \int_{C_1} \vec{\tau} \bullet \dot{\bar{\mathbf{X}}}_1 ds + \iiint_{A_1} \vec{\omega}^{(0)} \bullet \vec{\mathbf{V}}_1 h_3 \bar{r} d\bar{r} d\varphi da
\end{aligned} \tag{A.17.27}$$

et en remplaçant l'équation (3.33a) de la fibre centrale, on a

$$H_1 = \Gamma_1 \int_{C_1} \vec{\tau} \bullet (\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{Q}}_2) ds + \iiint_{A_1} \vec{\omega}^{(0)} \bullet \vec{\mathbf{V}}_1 h_3 \bar{r} d\bar{r} d\varphi da \tag{A.17.28}$$

Le terme

$$\iiint_{A_1} \vec{\omega}^{(0)} \bullet \vec{V}_1 h_3 \bar{r} d\bar{r} d\varphi da \quad (\text{A.17.29})$$

doit correspondre à la somme $T+N$ de la torsion totale normalisée et du paramètre de twist de l'article de Moffatt et all.². Il serait intéressant d'approfondir la comparaison entre ce qui est fait ici et leur article.

La vorticité $\vec{\omega}^{(0)}$ est donnée par (3.13). On trouve alors l'expression suivante de l'hélicité due à l'anneau 1 :

$$H_1 = -\Gamma_1 \Gamma_2 + W_1 + \frac{\tilde{H}_1^{(0)}}{\varepsilon} + \tilde{H}_1^{(1)} + O(\varepsilon) \quad (\text{A.17.30})$$

avec :

$$\tilde{H}_1^{(0)} = 4\pi S \int_0^\infty \left(-\bar{r} v^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \bar{r}} \right) d\bar{r} \quad (\text{A.17.31a})$$

$$\tilde{H}_1^{(1)} = -4\pi S \int_0^\infty \left(\bar{r} v_c^{(1)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \bar{r}} - v^{(0)} \frac{\partial w_c^{(1)}}{\partial \bar{r}} \right) d\bar{r} \quad (\text{A.17.31b})$$

Pour un anneau similaire :

$$\tilde{H}_1^{(0)} = \frac{\Gamma_1}{\pi} \frac{m_0 S_0}{1 + \tau_\alpha} \quad (\text{A.17.32})$$

avec :

$$\tau_\alpha = 4\alpha^2 \int_0^t \frac{S^{(0)}(t')}{S_0} dt' \quad (\text{A.17.33})$$

Détermination de la dérivée temporelle de l'hélicité à partir de l'écoulement solution des équations dynamiques :

La dérivée temporelle de l'hélicité est donné par la formule :

$$\frac{dH}{dt} = -2\alpha^2 \varepsilon^2 \iiint \vec{\omega} \bullet \text{rot} \vec{\omega} \varepsilon^2 h_3 \bar{r} d\bar{r} d\varphi da \quad (\text{A.17.34})$$

En se servant de du champ de vorticité et de vitesse trouvés au chapitre III et donnés par les formules (A.17.26), (3.34) à (3.37) et (3.13), il vient :

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dH^{(0)}}{dt} + \frac{dH^{(1)}}{dt} + O(\varepsilon)} \quad (\text{A.17.35})$$

avec :

$$\boxed{\frac{dH^{(0)}}{dt} = -2\alpha^2 S^{(0)} \int_0^\infty \left[-2 \frac{v^{(0)}}{r} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \bar{r}} - v^{(0)} \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \bar{r}^2} \right.} \\ \left. - r \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \bar{r}^2} + r \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \bar{r}^2} \right] d\bar{r}} \quad (\text{A.17.36a})$$

$$\boxed{\frac{dH^{(1)}}{dt} = -2\alpha^2 S^{(0)} \int_0^\infty \left[-2 \frac{v^{(0)}}{r} \frac{\partial w_c^{(1)}}{\partial \bar{r}} - 2 \frac{v_c^{(1)}}{r} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \bar{r}} \right.} \\ \left. - v_c^{(1)} \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \bar{r}^2} - v^{(0)} \frac{\partial^2 w_c^{(1)}}{\partial \bar{r}^2} \right.} \\ \left. - r \frac{\partial v_c^{(1)}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \bar{r}^2} - r \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial^2 w_c^{(1)}}{\partial \bar{r}^2} \right.} \\ \left. + r \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial^2 v_c^{(1)}}{\partial \bar{r}^2} + r \frac{\partial w_c^{(1)}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \bar{r}^2} \right] d\bar{r}} \quad (\text{A.17.36b})$$

Pour un anneau similaire :

$$\boxed{\frac{d\tilde{H}_1^{(0)}}{dt} = -4\alpha^2 \frac{\Gamma_1}{\pi} \frac{m_0 S^{(0)}(t)}{(1 + \tau_\alpha)^2}} \quad (\text{A.17.37})$$

Bibliographie :

1. MOFFATT,H.K. 1969 The degree of knottedness of tangled vortex lines, *J. Fluid Mech.* **35**, 117-129
2. MOFFATT,H.K et RICCA,R.L. 1992 Helicity and the Calugareanu invariant, *Proc. R. Soc. London. A* **439**, 411-429

Annexe 18

A.18. Bibliographie complémentaire

Dans cette annexe, on donne une liste bibliographique complémentaire à celles des différents chapitres du mémoire. On a utilisé le rangement suivant :

1 Mouvement d'un filament tourbillon	339
11 Articles de Ting et al.	339
12 Articles de Widnall et al.	340
13 Articles de Saffman et al.	340
14 Articles de Marshall et al.:	341
15 Articles de Moffatt et al.:	342
16 Articles de Fraenkel et al.	344
17 Articles Russes	344
18 Articles d'autres auteurs	345
2 Stabilité des Filaments	347
21 Articles de Widnall et al.	347
22 Articles de Saffman et al.	348
23 Articles de Maxworthy et al.	349
24 Articles d'autres auteurs	349
3 Eclatement tourbillonnaire	351
31 Articles de Leibovich et al.	351
32 Articles d'autres auteurs	353
4 Numérique	355
5 collapse	356
6 Nappes tourbillons	357
7 Divers	357
8 Ouvrages	359

1 Mouvement d'un filament tourbillon

11 Articles de Ting et al.

1. **Lu Ting, C. Tung** : Motion and Decay of a Vortex in a Nonuniform Stream, *The Physics of Fluids*, Vol.8 N.6, 1039-1051, 1965
2. **C. Tung,L. Ting** : Motion and Decay of a Vortex Ring, *The Physics of Fluids*, Vol.10 N.5, pp. 901-910, 1967
3. **L. Ting** : Studies in the motion and decay of vortices, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington*, 1971
4. **M. Gunzberger** : Motion of decaying vortex rings with non-similar vorticity distributions, *J. Engrg. Math.*, pp.53-61, 1972
5. **M. Gunzberger** : Long time behavior of a decaying vortex, *Z. Angew. Math. Mech.*, 53,pp. 751-760, 1973
6. **A.J.Callegari , L. Ting** : Motion of a Curved Vortex Filament With Decaying Vortical core and Axial Velocity, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 35 N. 1 ,1978
7. **L. Ting** : Studies on The Motion and Decay of a Vortex Filament : *Lecture Notes in Physics N.148 Advances in Fluid Mechanics Springer Verlag* ,Edited by E. Krause, 1981
8. **L. Ting** : On the Application of the Integral Invariants and Decay Laws of Vorticity Distributions, *J. Fluid Mech.*, Vol. 127,pp. 497-506,1983
9. **C.H. Liu, J. Tavantzis,L. Ting** : Numerical Studies of Motion of Vortex Filaments-Implementing the Asymptotic Analysis, *AIAA Paper 84-1542,June 1984*
10. **C.H.Liu,E.Krause,L.Ting** : Vortex Dominated Flow With Diffusive Core Structure, *AIAA Paper 85-1556,1985*
11. **C.H. Liu, J. Tavantzis, L. Ting**, Numerical Studies of Motion and Decay of Vortex Filalents, *AIAA Journal*,Vol. 24 N.8 pp.1290-1297,1986
12. **L.Ting** : Theoretical and numerical studies of vortex interaction and merging, *in Numerical methods in fluid dynamics I,ed.: K.Oshima,Japan Soc.Compu.Fluid Dynamics*, pp.218-229,1986
13. **A.J. Majda** : Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow, *Comm. Pure Appl. Math.* 39 S187-S220, 1986
14. **C.H.Liu, L. Ting** : Interaction of Decaying Trailing Vortices in Spanwise shear Flow, *Computers and Fluids Vol.15,N.1,pp.77_92, 1987*
15. **K.Ishii,C.H. Liu** : Motion and Decay of Vortex Rings Submerged in Rotational Flow, *AIAA paper*, Vol.87-0043,1987
16. **K.Ishii,F.Hussain,K.Kuwahara,C.H. Liu** : The Dynamics of Vortex Rings in an Unbounded Domain ,*in Advances in Turbulence 2,Ed.H.H.Fernholz, H.E.Fiedler,pp.51-56,Springer-Verlag,1989*
17. **R.Klein,L. Ting** : Far Field Potential Flow Induced by a rapidly decaying vorticity distribution, *ZAMP* 41,pp.395-418,1990
18. **Fukumoto, T. Miyazaki** : Three-Dimensional Distortions of a Vortex Filament With Axial Velocity, *J. Fluid Mech. Vol 222,pp. 369-416,1991*
19. **LuTing,R.Klein** : Viscous Vortical Flows,(Monograph),*Lecture Notes in Phisics,374,Springer, 1991*
20. **R.Klein,A.J.Majda**: Self-Stretching of a Perturbed Vortex Filament I: The Asymptotic Equation for derivations from a Straight Line,*Physica D*,49,pp.323-352, 1991
21. **R.Klein,A.J.Majda**: Self-Stretching of a Perturbed Vortex Filament II: The Structure of Solutions,*Physica D*,53,pp.267-294, 1991
22. **Z-S. She, E.Jackson,S.A.Orszag** : Structure and dynamics of homogeneous turbulence : models and simulations, *Proc.Roy.Soc.London.A* 434, pp. 101-124, 1991
23. **R.Klein,L.Ting**: Vortex Filaments with Axial Core Structure Variation, *Appl.Math.Lett.*,5,pp.99-103, 1992
24. **R.Klein,A.J.Majda**: Self-Stretching of a Perturbed Vortex Filament III/ The asymptotic equation for general geometries,*in preparation (from I) General background geometry(from II)*
25. **R.Klein,A.J.Majda,R.M.McLaughlin**: Asymptotic Equations for the Stretching of Vortex Filaments by a Background Flow Field,*Physics of Fluids* A,4,pp. 2271-2281, 1992
26. **R.Klein,A.J.Majda**:An Asymptotic Theory for the Nonlinear Instability of Anti-Parallel Pairs of

- Vortex Filaments,*Physics of Fluids A*,5,pp. 369-379, 1993
27. **L. Ting, F. Bauer** : Viscous Vortices in two- and three-Dimensional Space, *Computer Fluids Vol 22 N.4/5,pp 565-588,1993*
 28. **Ishii,Kuwahara,liu** : Navier Stokes Calculation for Vortex Rings in an Unbounded Domain,*Computers and Fluids, Vol. 22 N.4/5 pp.589-605,1993*
 29. **R.Klein** : Zur Dynamik schlanker Wirbel, *Habilitationsschrift,(ie On dynamic of a slender vortex,habilitation wrtting) submitted to the Dept. of Mechanical Engineering,RWTH Aachen,May 2nd,1994*
 30. **K.K. Damodaran** : Simplified equations for the nonlinear interaction of vortex filaments in 3-D,*Undergraduate Senior Thesis supervised by A.J.Majda,Princeton University,1994*
 31. **R.Klein,O.M. Knio** : Asymptotic Vorticity Structure and Numerical Simulation of Slender Vortex Filaments,*Jnl. Fluid Mech.,284, pp.257-321,1995*
 32. **R.Klein, Ting L.**: Theoretical and Experimental Studies of Slender Vortex Filaments, *Appl. Math. Lett., Vol. 8 No 2, pp. 45-50, 1995*
 33. **R.Klein, A.J. Majda, K.K. Damodaran** : Simplified Equations for the Interaction of Nearly Parallel Vortex Filaments,*J. Fluid Mech. 288,pp.201-248,1995*
 34. **R.Klein,O.M. Knio,L. Ting** : Representation of Core dynamics in slender vortex filament simulations, *Phys. Fluids.,8, pp.2415, 1996*
 35. **O.M. Knio, D. Juvé** : On noise emission during coaxial vortex ring collision, *CRAS Paris, t.322, Série II b, pp. 591-600,1996*
 36. **M. Schmitz** : Axiale Entwicklung der Kernstruktur schlanker Wirbelfäden, *PhD Thesis ,Aachen, 1996*
 37. **O.M.Knio,L.Ting** : Vortical flow outside a sphere and sound generation, to appear in SIAM J.Appl.Math., 57, 1997
 38. **Y.Fukumoto, H.K. Moffatt** : Motion of a Thin Vortex Ring in a Viscous Fluid : Higher-Order Asymptotics, *Iutam Symposium on Dynamics of Slender Vortices, RWTH Aachen, Germany, August 31-3 September (Proceedings to appear with Kluwer Academic Publishers) 1997*

12 Articles de Widnall et al.

39. **D.B. Bliss** : The dynamics of curved rotational vortex line, *M.S.thesis,Massachusetts Institute of Technology ,Cambridge, Mass, 1970*
40. **S.E. Widnall, D.B Bliss, A. Zalay** : Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington, 1971*
41. **S.E. Widnall, D.B Bliss** : Slender body analysis of the motion and stability of a vortex filament containing an axial flow,*J.Fluid Mech. 50,pp.335,1971*
42. **D.B. Bliss** : The dynamics of flows with high concentrations of vorticity, *Ph.D. thesis,Massachusetts Institute of Thechnology,1973*
43. **S.E. Widnall** : The structure and dynamics of vortex filaments, *Annual Review of Fluid Mechanics 7 pp. 141-165,1975*
44. **R.J.Epstein,D.B. Bliss** : Free vortex calculation using analytical numerical matching with solution pyramiding, *AIAA Journal Vol.33 N.5,pp.894-903,1995*

13 Articles de Saffman et al.

45. **H.E. Hall** : An experimental and theoretical study of torsional oscillations in uniformly rotating liquid helium II,*Proc. R. Soc. Lond.A245,pp.546,1958*
46. **M.G. Hall** : A Theory for the core of a Leading-Edge Vortex,*J.Fluid Mech.11,pp.209-228,1961*
47. **K.Stewartson,M.G. Hall** : The inner viscous solution for the core of a leading-edge vortex,*J.Fluid Mech. 15,pp.306-318,1963*
48. **H.E. Hall** : Dynamics of rectilinear vortex in liquid helium II,*J.Phys.C3,pp.1166,1970*
49. **P. G. Saffman** : The velocity of viscous vortex rings,*Studies Appl. Math. 49,pp. 371-380,1970*

50. **P. G. Saffman** : The velocity of viscous vortex rings, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington, 1971*
51. **D. W. Moore,P. G. Saffman** : The motion of a vortex filament with axial flow,*Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*,1226, N. 272, pp. 403-429, 1972
52. **D. W. Moore,P. G. Saffman** : Axial flow in laminar trailing vortices,*Proc.R.Soc. London Ser. A*,333, pp. 491-508, 1973
53. **P. G. Saffman** :The structure and decay of trailing vortices,*Arch.Mech.*26,pp.423-439,1974
54. **F.M.Hill** : Single hollow vortex in a strain field, *Ph.D.thesis, Imperial College London*,1975
55. **J.S.Sheffield** : Trajectories of an ideal vortex pair near an orifice ,*Phys.Fluids* 20,pp.543,1977
56. **J.S.Sheffield** : Topics in vortex motion ,*Ph.D.thesis, California Institute of Technology*,1978
57. **G.S. Deem,N.J. Zabusky** : ,*Phys.Rev.Lett.* 40,pp.859,1978
58. **P. G. Saffman ,G.R.Baker** : Vortex Interactions ,*Ann.Rev.Fluid Mech.*12,pp.95,1979
59. **D. W. Moore** : The velocity of a vortex ring with thin core of elliptical cross section,*Proc.R.Soc.London Ser.A*370,pp.407-415,1980
60. **P. G. Saffman** :Dynamics of vorticity,*J.Fluid Mech.*106,pp.49,1981
61. **P.G. Saffman** : Perspectives in Vortex Dynamics,*Lecture notes in physics*,1985
62. **D. W. Moore** : The effect of compressibility on the speed of propagation of a vortex ring,*Proc.R.Soc.London A* 397,pp.87-97,1985
63. **D. W. Moore** : The interaction of a diffusing line vortex and an aligned shear flow,*Proc.R.Soc.London A* 399,pp.367-375,1985
64. **P.G.Saffman, D.I.Meiron** : Difficulties with three-dimensional weak solutions for inviscid incompressible flows,*Phys.Fluids*,29,pp.2373-2375,1986
65. **G.S.Winckelmanns** : Topics in vortex methods for the computation of three- and two-dimensional incompressible unsteady flows,*Ph.D.thesis,California Institute of Technology,Pasadena,California*,1989
66. **D. W. Moore** : Dynamics of vortex filaments, *A lecture* ,1991
67. **G. Saffman** : Vortex Dynamics,*Cambridge University Press,Cambridge*,1992
68. **G.S.Winckelmanns, A.Leonard** : Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows,*J.Comput. Phys.*109,pp.247-273,1993
69. **M.F. Lough** : On the dynamics of ultrathin vortex filaments,*Phys. Fluids* 6/5,pp.1745-1751,May1994
70. **M.F. Lough** : The motion of thin-cored vortex filaments : the equations of motion and their solution for some special cases,*Ph.D.Thesis,California Institute of Technology*, 1995
71. **H. Zhou** : On the motion of slender vortex filaments, *Phys. Fluids* 9 (4), pp. 970-981,1997

14 Articles de Marshall et al.:

72. **T.S. Lundgren** : Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, *Phys. Fluid* 25(12), pp. 2193-2203, 1982
73. **W.T. Ashurst ,D.Meiron**: ,*Phys.Rev.Lett.*58,pp.1632,1987
74. **W.T. Ashurst ,A.Kerstein,R.Kerr,C.Gibson**: ,*Phys.Fluids* 30,pp.2343,1987
75. **T.S. Lundgren,W.T. Ashurst** : Area-varying waves on curved vortex tubes with application to vortex breakdown,*J. Fluid Mech.* 200,pp. 283-307,1989
76. **T.S. Lundgren,N.N. Mansour** : Vortex ring bubbles, *J. Fluid Mech.* 224,pp. 177-196,1991
77. **J.S.Marshall** : A general theory of curved vortices with circular cross-section and variable core area,*J. Fluid Mech.* 229,pp.311-338,1991
78. **J.S.Marshall** : Buckling of a columnar vortex,*Phys.Fluids A4/12*,pp.2620-2627,1992
79. **J.S.Marshall** : The effect of axial stretching on the three-dimensional stability of a vortex pair,*J. Fluid Mech.* 241,pp.403-419,1992
80. **J.S.Marshall** : The effect of axial pressure gradient on axisymmetrical and helical vortex waves,*Phys.Fluids A 5/3*,pp.588-599,1993
81. **M.R.Dhanak,M.P.Marshall** : Motion of an elliptical vortex under applied periodic strain,*Phys.Fluids A 5 (5)*,pp.1224-1230,1993
82. **J.S.Marshall ,J.R.Grant** : Evolution and breakup of vortex rings in straining and shearing flows,,*J.Fluid Mech.* 273,pp.285-321,1994

83. **A.Leonard** : Nonlocal theory of area-varying waves on axisymmetric vortex tubes,*Phys.Fluids A6/2 pp. 765-777,1994*
84. **D.I. Pullin, J.D. Buntine, P.G. Saffman** : On the spectrum of a stretched spiral vortex, *Phys. Fluids 6 (9), pp. 3010-3027, 1994*
85. **A.Prochazka, D.I.Pullin** : On the two-dimensional stability of the axisymmetric Burger vortex, *Phys. Fluids 7, pp. 1788-1790, 1995*
86. **T.S. Lundgren, N.N. Mansour** : Transition to turbulence in an elliptic vortex, *JFM 307,pp. 46-62, 1996*

15 Articles de Moffatt et al.:

87. **L.S.Da Rios** : On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape(in italian) ,*Rend.Circ.Mat.Palermo 22,pp.117-135,1906*
88. **T.Levi-Civita** : On the attraction by material line at neighboring points ,*Rend.R.Acc.Lincei 17,pp.3-15,1908*
89. **T.Levi-Civita** : ,*Rend.R.Acc.Lincei 17,pp.413-426,pp.535-551,1908*
90. **T.Levi-Civita** : ,*Rend.R.Acc.Lincei 18,pp.41-50,1909*
91. **L.S.Da Rios** : ,*Rend.R.Acc.Lincei 18,pp.75-79,1909*
92. **L.S.Da Rios** : ,*Rend.Circ.Mat.Palermo 29,pp.354-368,1910*
93. **T.Levi-Civita** : ,*Rend.Circ.Mat.Palermo 33,pp.357-374,1912*
94. **T.Levi-Civita** : Attrazione Newtoniana dei Tubi Sottili e Vorticiti Filiformi, *Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa. Zanichelli,Bologna,1932*
95. **Y.Murakami,H.Takahasi,Y.Ukita,S.Fujihara** : On the oscillations of a vortex filament(in Japanese) ,*Oyo Butsuri 6,pp.151-153, 1937*
96. **H.K. Moffatt** : The degree of knottedness of tangled vortex lines,*J. Fluid Mech.,35,pp. 117-129,1969*
97. **M. Lakshmanan,T.W.Ruijgrok,C.J.Thompson** : On the dynamics of a continuum spin system, *Physica A84,pp. 577-590,1976*
98. **M. Lakshmanan** : Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system, *Phys.Lett. A61,pp.53-54,1977*
99. **H.K. Moffatt** : Six lectures on general fluid dynamics and two on hydromagnetic dynamo theory, *In fluid dynamics(Les Houches lectures 1973) (ed. R.Balian,J.-L. Peube),pp.151-233,Gordon & Breach,1977*
100. **H.K. Moffatt ,D.W.Moore** : The response of Hill's spherical vortex to a small axisymmetric disturbance, *J.Fluid Mech.87,pp.749-60,1978*
101. **A.Friedman,B.Turkington** : Asymptotic estimates for an axisymmetric rotating fluid, *J.Funct.Anal.,37,pp.136-163,1980*
102. **A.Friedman,B.Turkington** : Vortex rings : existence and asymptotic estimates, *Trans.Amer.Math.Soc. 268,pp.1-37,1981*
103. **A.Friedman** : Variational principles and Free-Boundary Problems, *Wiley-Interscience,New York,1982*
104. **B.Turkington** : On steady vortex flow in two dimensions,I, *Commun.PDE,8,pp.999-1030,1983*
105. **B.Turkington** : On steady vortex flow in two dimensions,II, *Commun.PDE,8,pp.1031-1071,1983*
106. **M.Germano** : On the rediscovery of the Da Rios intrinsic equations describing the evolution of a filament vortex, *Proc.VII natn. Cong. Assoc. Ital. Aeronaut. Astronaut. 1,pp.163-170,1983 (ou Alti VII Congresso Nazionale AIDAA,Vol.1,pp.163-170), 1983*
107. **H.K. Moffatt** : Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology.Part 1.Fundamentals, *J.Fluid Mech. 159,pp.359-378,1985*
108. **L.Shtilman,E.Levich,S.A.Orszag,R.B.Pelz,A.Tsinober** : On the role of helicity in complex fluid flows, *Phys.Lett.113,pp.32-37,1985*
109. **K.W.Shwarz** : Three-dimensional vortex dynamics in superfluid He4:Line-line and line-boundary interactions, *Phys.Rev.B31,pp.5782-5803,1985*
110. **H.K. Moffatt** : Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology.Part 2.Stability considerations, *J.Fluid Mech. 166,pp.359-378,1986*

111. **H.K. Moffatt** : On the existence of localized rotational disturbances which propagate without change of structure in an inviscid fluid,*J.Fluid Mech.* 173,pp.289-302,1986
112. **C.Pozrikidis** : The nonlinear instability of Hill's vortex,*J.Fluid Mech.* 168,pp.337-367,1986
113. **A.Eydeland,B.Turkington** : A numerical study of vortex rings with swirl,*J.Fluid Mech.* (to appear) 1988
114. **H.K. Moffatt** : Generalised vortex rings with and without swirl,*Fluid Dyn.Res.* 3,pp.22-30,1988
115. **K.W.Shwarz** : Three-dimensional vortex dynamics in superfluid H4:Homogeneous superfluid turbulence,*Phys.Rev.B* 38,pp.2398-2417,1988
116. **F.R. Hama** : Genesis of the LIA,*Fluid Dynamics Research* 3,pp.149-150(North-Holland,Amsterdam,1988)
117. **B.Turkington** : Vortex rings with swirl : axisymmetric solutions to the Euler equations with nonzero helicity,*SIAM J.Math. Anal.* 20,pp.57-73,1989
118. **J.P. Keener** : Knotted vortex filaments in an ideal fluid,*J. Fluid Mech.* 211,pp.629-651,1990
119. **H.K. Moffatt** : Structure and stability of the solutions of the Euler equations : a lagrangian approach,*Phil.Trans.Roy.Soc.A* 333,pp.321-342,1990
120. **R.L. Ricca** : Rediscovery of Da Rios equations,*Nature*,Vol.352,1991
121. **R.L. Ricca** : Intrinsic equations for the kinematics of a classical vortex string in higher dimensions ,*Phys.Rev. A* 43N.8,pp.4281-4288,1991
122. **R.L. Ricca,H.K. Moffatt** : The helicity of a knotted vortex filament,*In Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas*(ed. H.K.Moffatt et al.),pp.225-236,Dordrecht:Kluwer,1992
123. **H.K. Moffatt ,R.L. Ricca**: Helicity and the Calugareanu invariant,*Proc.R. Soc.Lond.A* 439,pp.411-429,1992
124. **R.L. Ricca** : Physical interpretation of certain invariants for vortex filament motion under LIA,*Phys.Fluids A* 4 (5) .pp.938-944,1992
125. **R.L. Ricca** : Local dynamics of a twisted vortex filament ,*in XVIII Intl. Congr.Theor.Appl.Mech.-Abstracts*,pp.123 IUTAM,1992
126. **H.K. Moffatt ,A.Tsinober**: Helicity in laminar and turbulent flow,*Annu.Rev.Fluid Mech.* 24,pp.281-312,1992
127. **H.K. Moffatt** : Relaxation under topological constraints,*In Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas*,ed. H.K.Moffatt et al.,pp.3-28,Dordrecht,Kluwer,1992
128. **R.L. Ricca** : The effect of torsion on the local dynamics of a vortex filament, *in Euromech 305-Dynamics and geometry of Vortical Structures* ,pp.39-40,Universita di Roma "La Sapienza",1993
129. **R.L. Ricca** : Torus knots and polynomial invariants for a class of soliton equations, *Chaos* 3,pp. 83-91, (1995 Erratum 5,346) 1993
130. **H.K. Moffatt,S.Kida,K.Ohkitani** : Stretched vortices-the sinews of turbulence;large-Reynolds-number asymptotics,*J.Fluid Mech.* 259,pp.241-264,1994
131. **R.L. Ricca** : The effect of torsion on the motion of a helical vortex filament, *J.Fluid Mech.* 273,pp.241-259,1994
132. **R.L. Ricca** : Geometric and topological aspect of vortex filament dynamics under LIA, *in small-scale structures in three-dimensional hydro and magnetohydrodynamics turbulence* (ed. M. Meneguzzi et al.), pp. 99-104, *Lecture notes in Physics* 462, Springer,Berlin, 1995
133. **H.K. Moffatt** : Dynamique des Fluides,*Cours de l'X*, 1995
134. **A.Y.K. Chui, H.K. Moffatt** : The energy and helicity of knotted magnetic flux tubes, *Proc. R. Soc. Lond.A*, 451, pp. 609-629, 1995
135. **K.Ohkitani, S.Kishiba** : Non local nature of vortex stretching in an inviscid fluid, *Phys.Fluids* 7 (2) pp.411-421, 1995
136. **S.Le Dizès,M.Rossi,H.K.Moffatt** : On the three-dimensional instability of elliptical vortex subjected to stretching, *Phys.Fluid* 8 (8) 1996
137. **R.L. Ricca, M.A. Berger** : Topological ideas and fluid mechanics, *Physics Today*, December, pp. 28-34,1996
138. **R.L. Ricca** : The contribution of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics, *Fluid Dynamics Research* 18, pp. 245-268,1996
139. **K.Bajer, H.K. Moffatt** : On the effect of a central vortex on a stretched magnetic flux tube, *JFM* 339, pp. 121-142, 1997

16 Articles de Fraenkel et al.

140. **L. Lichtenstein** : Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik(ie on an problem of existence in Hydrodynamic), *Math.Z.23,pp.89-154,1925*
141. **L. Lichtenstein** : Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik, *Math.Z.23, pp.310,1925*
142. **K.Maruhn** : Über zwei Gleichgewichtsfiguren rotierender inhomogener Flüssigkeit(ie on two balance solutions in an rotational inhomogene liquid),*Math.Zschr.39,pp.244,1934*
143. **L.E. Fraenkel** : On the flow of rotating fluid past bodies in pipe,*Proc.R.Soc.London A 233,pp.506-526,1956*
144. **J.S. Turner** : Buoyant vortex ring, *Proc.Roy.Soc.Lond. A 239,pp.61,1957*
145. **K.Maruhn** : Über die Existenz stationärer Bewegungen von Wirbelringen (ie On existence of steady vortex ring) ,*Proc.Ninth International Congress Appl.Mech.,University of Brussels,1,pp.173-176,1957*
146. **J.S. Turner** : The flow into an expanding spherical vortex,*J.Fluid Mech.18,pp.195,1964*
147. **L.E. Fraenkel** : The non-existence of suitable solution for inviscid flow of type A,Appendix to the paper :T.B.Benjamin and B.J.S.Barnard, *J.Fluid Mech.19,pp.193,1964*
148. **L.E. Fraenkel** : On the method of matched asymptotic expansions I, A matching principle,*Proc.Camb.Phil.Soc.65,pp. 209-231,1969*
149. **L.E. Fraenkel** : On the method of matched asymptotic expansions II Some applications of the composite series, *Proc.Camb.Phil.Soc.65,pp. 232-262,1969*
150. **L.E. Fraenkel** : On the method of matched asymptotic expansions III Two boundary value problems, *Proc.Camb.Phil.Soc.65,pp. 263,-284,1969*
151. **L.E. Fraenkel** : On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid, *Proc.Roy.Soc.Lond.A 316,pp.29-62,1970*
152. **L.E. Fraenkel** : Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid, *J. Fluid Mech. 51,pp. 119-135, 1972*
153. **J.Norbury** : A steady vortex ring, close to Hill's spherical vortex,*Proc.Cambridge Phil.Society,72,pp.253-284,1972*
154. **J.Norbury** : Asymptotic theory for steady vortex rings close to Hill's spherical vortex, *submitted to Proc.Roy.Soc.A in 1973*
155. **J.Norbury** : A family of steady vortex rings,*J.Fluid Mech. 57,pp.417-431,1973*
156. **L.E. Fraenkel ,M.S.Berger** : A Global theory of steady vortex rings in an ideal fluid,*Acta Math. 132,pp.13-51,1974*
157. **L.E. Fraenkel ,M.S.Berger** : A Global theory of steady vortex rings in an ideal fluid, (*sur un document paginé de 1 à 48*)
158. **Ambrosetti,Struwe** : Existence of steady vortex rings in an ideal fluid,*Archive for rotational mechanics and analysis 108 (2),pp.97-109,1989*

17 Articles Russes

159. **D.N.Goryachev** : On the Some Cases of motion of the rectilinear Vortices (*Moscow University Press,Mosccow,1898*)(*in Russian*)
160. **V.I.Yudovich** : Non-stationary flow of an ideal incompressible fluid, *Zh.Vychisl.Mati.Mat.Fiz.,3,pp.1032-1066* (*in russian*),1963, USSR Comput. Math. and Math.Phys.,3,pp.1407-1456,(*in english*),1963
161. **M.Lavrentiev,B.Chabat** : Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques, *ed. Mir-Moscou,1980* (*traduit du russe,1977*)
162. **V.N.Trigub** : The problem of breakdown of a vortex line,*Prik.Math.Mech. 49,pp.166,-71,1985*
163. **V.N.Trigub** : Vortex breakdown in an ideal fluid,*Uch.Zap.TsAGI,16,pp.100,1985*
164. **A.A.Berezovskii,F.B.Kaplanskii** : Diffusion of a vortex ring,*Izv.Akad.Nauk SSSR,Mekh.Zhidk.Gaza.N.6,pp.10-15,1987*(*translated by Diffusion of a ring vortex in Fluid Dynamics 22,pp.832-836,1988*)
165. **V.I.Boyariintsev,A.S.Savin**: Investigation of the motion of vortex rings in uniform and stratified media,*Preprint N.299(*in Russian*),Institute of Problems of mechanics of the USSR Academy of Sciences,Moscow,1987*

166. V.V.Sychev : Asymptotic theory of separated flows ,(in russian),Nauk,Moscow,1987
167. V.V. Gurzhii,M.Yu.Konstantinov,V.V.Meleshko: Interaction of coaxial vortex rings in an ideal fluid,*Izv.Akad.Nauk SSSR,Mekh.Zhidk.Gaza.N.2,pp.73,1988*
168. A.V.Zubtsov : Asymptotic model of the axisymmetric breakdown of a vortex filament in an incompressible fluid,*Fluid dynamics 24 (6) pp.862-7,1989*
169. A.B. Airapetov : Motion of an initially point vortex in a viscous flow,*Prikl.Mat.Mekh.54,pp.430,1990*
170. Kop'ev,Chennyshev : Small disturbances of steady vortices,*Fluid dynamics 26 (5),pp.719-29,1991*
171. A.A.Berezovskii,F.B.Kaplanskii : Dynamics of thin vortex rings in a low-viscosity fluid,*Fluid dynamics,N.27,Fasc.5,pp.643-9,Sep.1992,(translated from Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk,Mekhanika Zhidkosti i Gaza,N.5,pp.52-59,Sep.92)*
172. Pedrizzetti : Insight into singular vortex flows,*Fluid Dyn.Research 10 (2),pp.101-115,1992*
173. V.V.Sychev : Asymptotic theory of vortex breakdown,*Fluid dynamics, 28(3) pp.356-364,1993*
174. M. Konstantinov : Chaotic phenomena in the interaction of vortex rings, *Phys. Fluids 6 (5), pp. 1752-1767,1994*
175. V.N.Trigub,A.B.Blokhin,I.N.Simakin : The asymptotic study of dissipation and breakdown of a wing-tip vortex,*J.Fluid Mech. 274,pp.293-337,1994*

18 Articles d'autres auteurs

176. Sir W. Thomson : On vortex atoms, *Phil.Mag. 34,15-24,1867*
177. Lord Kelvin: The translatory velocity of a circular vortex ring,*Philos. Mag. 33,pp. 511,1867, Phil.Mag. 34,15-24,1867*
178. Lord Kelvin: On vortex motion,*Trans.Roy.Soc.Edin.25,pp.217-60,1869*
179. Lord Kelvin : Mathematical and physical papers, vol.4 Hydrodynamics and general dynamics ,*Cambridge University Press,1880 et 1910*
180. J.J. Thomson: A treatise on the motion of vortex rings, *London: MacMillan, 1883*
181. W.M.Hicks : On the steady motion and small vibrations of a hollow vortex, *Phil.Trans.Roy.Soc.London A 174, pp.161-195, 1884*
182. W.M.Hicks : Researches on the theory of vortex rings-Part II,*Phil.Trans.Roy.Soc.London A 175,pp.725-780,1885*
183. F.W.Dyson : The potential of an anchor ring-PtI,*Philos.Trans.R.Soc.London Ser.A184,pp.43-95,1893*
184. F.W.Dyson : The potential of an anchor ring-PtII,*Philos.Trans.R.Soc.London Ser.A184,pp.1041-1106,1893*
185. P.G. Tait : Scientific Papers I,*Cambridge University Press,1898*
186. W.M.Hicks : Researches in vortex motion -Part III On spiral or gyrostatic vortex aggregates, *Phil.Trans.Roy.Soc.London Ser.A 192,pp.33-101,1899*
187. Gray : Notes on Hydrodynamics, *Phil. Mag. 6 XXVIII pp. 13-18,1914*
188. W.M.Hicks : On the mutual threading of vortex rings, *Phil.Trans.Roy.Soc.London Ser.A CII, 1922, pp.111-131*
189. L. Rosenhead : The spread of vorticity in the wake behind a cylinder,*Proc. R. Soc. London Ser. A 127,pp.590,1930*
190. L. Rosenhead : The formation of vortices from a surface of discontinuity,*Proc.R.London Ser.A 134,pp.170-92,1931*
191. L.Prandtl,O.G.Tietjens : Fundamentals of Hydro and Aerodynamics,,*New York Mc GrawHill,(first edition 1890) 1934*
192. C.C.Lin : On the motion of vortices in two dimensions,*Univ.Toronto Appl.Math.Ser.N.5,Univ.Toronto Press,1943*
193. Sir H. Lamb.: Hydrodynamics.,*New York,Dover,1945*
194. C.Truesdell : Vorticity Averages,*Can.J.Math.,3,pp.69-86,1951*
195. J.B.Nuttall : Axial Flow in a Vortex ,*Nature,Vol.172,1953*
196. L.N. Howard : Divergence formulas Involving Vorticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol 1,N. 1,pp. 113-123, 1957*
197. R.R.Long : Vortex motion in viscous fluid,*J.Met. 15,pp.108-112,1958*
198. R.R.Long : A vortex in an infinite viscous fluid,*J.Fluid Mech.11,pp.611,1961*
199. F.R. Hama ,J.Nutant : Self-induced velocity on a curved vortex,*Phys.Fluids 4,pp.28-32,1961*

200. **F.R. Hama** : Progressive deformation of a curved vortex filament by its own induction,*Phys. Fluids* 5,pp.1156-1162,1962
201. **F.R. Hama** : Progressive deformation of a perturbed line vortex filament ,*Phys. Fluids* 6,pp.526-534,1963
202. **G.K.Batchelor** : Axial flow in trailing line vortices,*J.Fluid Mech.* 20,pp.645,1964
203. **D.Küchemann** : Report on the IUTAM Symposium on concentrated vortex motions in fluids,*J.Fluid Mech.* 21,pp.1-20,1965
204. **D.Küchemann ,J.Weber**: Vortex motions,*Z.Angew.Math.Mech.* 45,pp.457-474,1965
205. **R. J. Arms,F.R. Hama** : Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring,*Phys. Fluids* 8,pp.553-559,1965
206. **R. Betchov** : On the curvature and torsion of an isolated vortex filament,*J. Fluid Mech.* 22,pp. 471-479,1965
207. **M.G.Hall** : The structure of concentrated vortex cores,*Prog.Aeronaut.Sci.* 7,pp.53-110,1966
208. **G.K. Batchelor** : Introduction to fluid dynamics, *Cambridge University Press*, 1967
209. **P.C. Parks** : A new look at the dynamics of vortices with finite cores, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington*, 1971
210. **P.H.Roberts,R.J.Donnelly** : Dynamics of vortex rings,*Physics Letters* 31 A,pp.137-138,1970
211. **H. Hasimoto** : Motion of a vortex filament and its relation to elastica,*J.Phys. Soc. Japan* 31,pp.293-294,1971
212. **T.Kambe,T.Takao** : Motion of distorted vortex rings,*J.Phys.Soc.Japan*,31,pp.591-599,1971
213. **J.C.Wu, J.F.Thompson** : Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using integro-differential formulation,*Comp.Fluids* 1,pp.197-215,1973
214. **N.Riley** : Flows with concentrated vorticity : a report on EUROMECH 41,*J.Fluid Mech.* 62,pp.33-39,1974
215. **A.Fetter** : Translational velocity of a classical vortex ring,*Phys.Rev.A* 10,pp.1724-27,1974
216. **A. Adebiyi** : On the existence of steady helical vortex tubes of small cross section,*Q.J. Mech. Appl. Math.* 34,pp.153,1981
217. **M.R. Dhanak,B. de Bernardinis** : The evolution of an elliptic vortex ring,*J. Fluid Mech.* 109,pp. 189,1981
218. **S. Kida** : Motion of an elliptical vortex in an uniform shear flow,*J. Phys.Soc.Japan* 50,pp.3517-3520,1981
219. **J.C.Hardin** : The velocity field induced by a helical vortex filament,*Phys.Fluids* 25,pp.1949-1952,1982
220. **P.Genoux, G.L. Chahine** : Equilibre statique et dynamique d'un tore de vapeur tourbillonnaire, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Vol 2 N 5, pp. 829-857,1983
221. **A.H.Aref,E.P. Flinchem** : Dynamics of a vortex filament in a shear flow, *J. Fluid Mech.* 148,pp.477-497,1984
222. **T.Kambe** : Axisymmetric vortex solution of the Navier-Stokes equation,*J.Phys.Soc.Jpn.* 53, pp.13-15,1984
223. **J.H.B. Smith** : Vortex flows in aerodynamics , *Annu.Rev.Fluid Mech.* 18,pp.221-42,1986
224. **S. Kida** : ,*Proceedings of IUTAM Symposium on Fondamental Aspects of Vortex Motion,Tokyo,1987,Fluid Dyn.Res.* 3,pp.257,1988
225. **T.F.Buttke** : *J.Comput.Math.Phys.* 76,pp.301,1988
226. **K.G.Powell,E.M.Murman** : A model for the core of a slender viscous vortex,*AIAA Paper* 88-0503,1988
227. **H.Hasimoto** : Elementary aspects of vortex motion,*Fluid Dynamics Research*, 3,pp.1-12,1988
228. **P.Genoux** : Etude asymptotique du mouvement et des oscillations d'un tore de vapeur. Modélisation d'un jet cavitant oscillant, *PhD Thesis Université Paris 6* , 1988
229. **K.Shariff,A.Leonard,J.H.Ferziger** : Dynamics of a class of vortex rings,*NASA Tech.Memo.TM-102257* ,1989
230. **S.I . Green, A.J. Acosta** : Unsteady flow in trailing vortices, *JFM* 227, pp. 107-134,1991
231. **K.Shariff,A.Leonard** : Vortex rings, *Annu.Rev.Fluid Mech.* 24,pp.235,1992
232. **P.D. Weidman, N. Riley** : Vortex ring pairs : numerical simulation and experiment, *JFM* 257, pp. 311-337,1993
233. **N.N.Ostrikov,E.M.Zhulin** : Vortex dynamics of viscous fluid flows.Part1.Two-dimensional flows,*J.Fluid Mech.* 276,pp.81-111,1994
234. **M.V.Melander,F.Hussain** : Core dynamics on a vortex column,*Fluid dyn.Res.* 13,pp.1-37,1994
235. **P.N.Shankar,K.Manos** : Toroidal vortex ring, *Courant Science*, 66,(2),pp.151-153,1994
236. **Nishiyama,Tani** : Solvability of the localized induction equation for vortex motion,*Commun. in Math.*

- Physics, 162,pp.433-445,1994*
237. **Kuibin,Okulov** : Determination of the precession frequency of a helical vortex,*Technical Phys.Letters 20,(4),pp.274-5,1994*
238. **P.Orlandi,R.Verzicco** : Identification of zones in a free evolving vortex ring,*Applied Scientific Research 53,(3-4),pp.387-99,1994**J.Fluid Mech. 299,pp.367-388,1994*
239. **C.T Wang, C.C. Chu, C.C Chang** : Initial motion of a viscous vortex ring, *Proc. R. Soc. Lond.A, 446, pp 589-599, 1994*
240. **R.Verzicco,J.Jimenez,P.Orlandi** : On steady columnar vortices under local compression,*J.Fluid Mech. 299,pp.367-388,1995*
241. **S.I.Green.** (editor) : Fluid Vortices , 1995
242. **K.Marten, K. Shariff, S. Psarakos, D. White** : Ring Bubbles of Dolphins, *scientific American, August 1996*
243. **VPRO production** : Het Beeld van de dolfijn (The dolphin's image) -*The Netherlands, VPRO 1996*

2 Stabilité des Filaments

21 Articles de Widnall et al.

244. **S.E. Widnall** : The stability of a helical vortex filament,*J.Fluid Mech. 54,pp. 641-663,1972*
245. **C. duP. Donaldson,,R.D. Sullivan** : Behavior of solutions of the Navier-Stokes equations for a complete class of three-dimensional viscous vortices,*In Proc.1960 Heat Transfer Fluid Dyn.InstT.,pp.116-30,Stanford Univ. Press,1960*
246. **J.P. Sullivan** : *PhD thesis,MIT Dept. of Aeronautics and astronautics,1972*
247. **J.P. Sullivan ,S.E. Widnall,S.Ezekiel** : ,*AIAA J.11,pp.1384-89,1973*
248. **S.E. Widnall, J.P. Sullivan** : On the stability of vortex rings, *Proc. R. Soc. London A 332, pp.335-353, 1973*
249. **A.J.Bilanin** : Wave Mechanics of Line Vortices, *Ph.D.thesis,MIT, CCambridge, Mass,1973*
250. **H.C.Yuen** : Wave on vortex filaments,*Ph.D.dissertation,California Institute of Thechnology,1973*
251. **A.J.Bilanin,S.E. Widnall** : Aircraft wake dissipation by sinusoidal instability and vortex breakdown,*AIAA Pap.73-107,1973*
252. **S.E. Widnall, D.B Bliss, C.Y. Tsai** : The instability of short waves on a vortex ring, *J. Fluid Mech. 66, pp. 35-47, 1974*
253. **SL.V.Plobeck** : Stability calculations for rotating gas flows,*M.S.thesis,Department of aeronautics and Astronautics,Massachusetts Institute of Technology,1974*
254. **C.Y. Tsai** : The Short-wave Instability of Vortex Rings and Filaments,*Ph.D. thesis,Massachusetts Institute of Thechnology,1976*
255. **C.Y. Tsai , S.E. Widnall** : The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field, *J. Fluid Mech. 73, pp. 721-733 1976*
256. **S.E.Widnall, C.Y. Tsai** : The Instability of the Thin Vortex Ring of Constant Vorticity, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 287,pp. 273-305,1977*
257. **L.Hultgren** : ,*Ph.D.thesis ,Massachusetts Institute of Technology,1978*
258. **C.Y. Tsai , S.E.Widnall** : Examination of Group-Velocity Criterion for breakdown of Vortex Flow in a Diverging Duct, *Physics of Fluids Vol. 23, pp. 864-870,1980*
259. **R.T.Pierrehumbert** : A family of steady,translating vortex pairs with distributed vorticity,*J.Fluid Mech. 99,pp.129-44,1980*
260. **R.T.Pierrehumbert** : The structure and stability of large vortices in an inviscid flow,*Ph.D.thesis,Massachusetts Institute of Technology,1980*

- 261. R.T.Pierrehumbert,S.E. Widnall, : The structure of organized vortices in a free shear layer,*J. Fluid Mech.* 102,pp.401-313,1981
- 262. R.T.Pierrehumbert,S.E. Widnall, : The two and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer,*J. Fluid Mech.* 114,pp.59-82,1982
- 263. S.E.Widnall : Three-dimensional instability of vortices in separated flows,*Int.Symp.sep.flow.Norwegian Institute of Technology,Trondheim,1985*
- 264. R.T.Pierrehumbert : Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid,*Phys.Rev.Lett.* 57,pp2157-2159,1986

22 Articles de Saffman et al.

- 265. D. W. Moore,P. G. Saffman : Structure of a line vortex in an imposed strain, *Proc. Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington,1971*
- 266. D. W. Moore,P. G. Saffman : Long wave oscillations of a vortex with axial flow,(*To be published in Studies in Applied Math.*),1971
- 267. D.W.Moore : Finite amplitude waves on aircraft trailing vortices, *Aeronaut.Q.* 23,pp.307,1972
- 268. H.C.Yuen : Waves on vortex filaments, *Ph.D.thesis,California Institute of Technology,1973*
- 269. D. W. Moore,P. G. Saffman : A note on the stability of a vortex ring in of small cross-section *Proc. R. Soc. London. A* 338 pp. 535-537 1974
- 270. D. W. Moore,P. G. Saffman : The instability of a straight vortex filament in a stain field, *Proc. R. Soc. London. A* 346, pp. 415-425, 1975
- 271. D. W. Moore,P. G. Saffman : The density of organized vortices in turbulent mixing layer, *J.Fluid Mech.* 69,pp.465, 1975
- 272. P. G. Saffman : *Studies Appl. Math.* 45,pp. 261,1975
- 273. G.R.Baker,P.G.Saffman ,J.S.Sheffield : Structure of a linear array of hollow vortices of finite cross section,*J.Fluid Mech.* 74,pp.469-476,1976
- 274. P. G. Saffman : The number of waves on unstable vortex rings, *J. Fluid Mech.* 84,pp.625-639,1978
- 275. P.G.Saffman,R.Szeto : Equilibrium shapes of a pair of uniform vortice,*Phys.Fluids* 23,pp.2339-2342,1980
- 276. P.G.Saffman,R.Szeto : Structure of a linear array of uniform vortice,*Stud.App.Math.* 65,pp.223-248,1981
- 277. P.G. Saffman,J.C.Schatzman : Properties of a vortex streets of finite vortices,*SIAM J. Sci.Stat.Comp.* 2,pp.285-295,1981
- 278. P.G. Saffman,J.C.Schatzman : Stability of a vortex streets of finite vortices,*J.Fluid Mech.* 117,pp.171-185,1982
- 279. A.C.Robinson,P.G.Saffman : Three-dimensional stability of vortex arrays,*J.Fluid Mech.* 125,pp.411-427,1982
- 280. P.G.Saffman,S.Tanveer : The touching pair of equal and opposite uniform vortices,*Phys.Fluids* 25, pp.1929-1930,1982
- 281. A.C.Robinson,P. G. Saffman : Three-dimensional stability of an elliptical vortex in a straining field,*J.Fluid Mech.* 142,pp.451-66,1984
- 282. A.C.Robinson,P.G.Saffman : Stability and structure of Stretched Vortices, *Stud.Appl.Math.* 70,pp.163-81,1984
- 283. D.I.Meiron, P.G. Saffman,J.C.Schatzman : The linear two-dimensional stability of inviscid vortex streets of finite-cored vortices,*J.Fluid Mech.* 147,pp.187-212,1984
- 284. P.G.Saffman : The superharmonic instability of water waves,*J.Fluid Mech.* 159,pp.196-174,1985
- 285. R.S.MacKay,,P.G. Saffman : Stability of water waves,*Proc.Roy.Soc.A* 406,pp.115-125,1986
- 286. R.S.MacKay : Linear stability of vortex streets.Nonlinearity(to appear),1987
- 287. J.D.Pugh : Finite amplitude waves in plane Poiseuille flow,*Ph.D.thesis,California Institute of Technology,1987*
- 288. J.Kamm : Shape and stability of two-dimensional uniform-vorticity regions,*Ph.D.Thesis,California Institute of Technology,1987*
- 289. M.J.Landman,P.G. Saffman : The three-dimensional instability of stained vortices in a viscous fluid,*Phys.Fluid A* 30,pp.2339-2342,1987

290. **P.G. Saffman** : The stability of vortex arrays to two- and three-dimensional disturbances,*Fluid Dyn.Res.* 3, 13-21, 1988
291. **W.V.R.Malkus** : An experimental study of global instabilities due to the tidal(elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder,*Geophys.Astrophys.Fluid Dynamics.* V.48, pp. 123-134, 1989

23 Articles de Maxworthy et al.

292. **T.Maxworthy** : The structure and stability of vortex rings, *J. Fluid Mech.* 51, pp. 15-32, 1972
293. **T.Maxworthy** : Turbulent vortex rings, *J. Fluid Mech.* 64, pp. 227-239, 1974
294. **T.Maxworthy** : Some experimental studies of vortex rings, *Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Southern California, Los Angeles, 1976*
295. **T.Maxworthy** : Some experimental studies of vortex rings, *J. Fluid Mech.* 81, pp. 465, 1977
296. **T. Maxworthy** : The laboratory modelling of atmospheric vortices : a critical review. Intense atmospheric vortices, *In Intense Atmospheric Vortices*, eds. L.Bengtsson and J.Lighthill, New York: Springer, pp. 229-246, 1981
297. **M.P.Escudier, J.Bornstein, T .Maxworthy** : The dynamics of confined vortices, *Proc.R.Soc.Lond.A* 382, pp. 335-360, 1982
298. **T.Maxworthy ,M.Mory, J. Hopfinger** : Waves on vortex cores and their relation to vortex breakdown, *In Proc. AGARD Conf. on Aerodynamics of Vortical Type Flows in Three Dimensions: AGARD CPP-342, paper 29, 1983*
299. **T.Maxworthy** : On the Structure of Concentrated Columnar Vortices, *Astro.Acta* 17, pp. 363-374, (pas de date)
300. **T.Maxworthy ,E.J. Hopfinger, L.G.Redekopp** Wave motions on vortex cores, *J. Fluid Mech.* 151, pp. 141-165, 1985

24 Articles d'autres auteurs

301. **Lord Kelvin**: Vibration of a columnar vortex, *Phil. Mag.* 10, pp. 155, 1880
302. **W.A.Thomson**: Vibration of a columnar vortex, *Mathematical and physical papers, vol4.Cambridge,England:Cambridge University Press, 1880*
303. **W.M. Hicks** : On the steady motion and the small vibrations of a hollow vortex, *Phil. Trans.R. Soc.Lond. A* 175, pp. 183, 1884
304. **A.E.H.Love** : On the stability of certain Vortex Motions, *Proc.Lond. Math.Soc.(1),25,pp.18, 1893*
305. **H.C. Pocklington** : The complete system of the periods of a hollow vortex ring, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 186, pp. 603-619, 1895
306. **H.C. Pocklington** : The configuration of a pair of equal and opposite hollow straight vortices, of finite cross-section, moving steadily through fluid, *Proc.Cambridge Philos.Soc.* 8, pp 178-187, 1895
307. **H. Levy,A.G. Forsdyke** : The stability of an Infinite System of Circular Vortices, *Proc. R. Soc. Lond. A* 1214, pp. 594, 1927
308. **H. Levy,A.G. Forsdyke** : The vibration of an Infinite System of Vortex Rings, *Proc. R. Soc. Lond. A* 116, pp. 352, 1927
309. **H. Levy,A.G. Forsdyke** : The steady motion and stability of a helical vortex, *Proc. R. Soc. Lond. A* 120, pp. 670-690, 1928
310. **T.H.Havelock** : The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation, *Philos.Mag.* 7, 11, pp. 617-33, 1931
311. **A.Betz** : Verhalten von Wirbelsystemen (ie Behaviour of vortex systems) *Z.Angew.Math.Mech.* 12, pp. 11644-174, 1932
312. **J.S.Turner** : The Constraints Imposed on Tornado-Like Vortices by the Top and Bottom Boundary Conditions, *J.Fluid Mech.* 25, pp. 377-400, 1966
313. **V.Krishnamoorthy** : Vortex breakdown and measurements of pressure fluctuation over slender wings, *Southampton Ph.D.Thesis, 1966*

314. **K.H.Bergman** : On the dynamic instability of convective atmospheric vortices, *Ph.D.thesis, Department of Atmospheric Sciences, University of Washington, 1969*
315. **S.C. Crow** : Stability theory for a pair of trailing vortices, *AIAA J. 8,pp. 2172-2179,1970*
316. **H.Hasimoto** : A soliton on a vortex filament,*J. fluid Mech. 51,pp. 477-485,1972*
317. **J.Jimenez** : Stability of a pair of co-rotating vortices,*Phys.Fluids 18,pp.1580-1,1975*
318. **G.S.Deem,N.J.Zabusky** : Vortex waves; stationary V states ,interactions, recurrence and breaking, *Phys.Rev.Lett.40,pp859-862,1978*
319. **P.W.Duck,M.R.Foster** : The Inviscid Stability of a Trailing line vortex, *ZeitSchrift für Angewandte Mathematik und Physik,31,pp.523-530,1980*
320. **S. Kida** : A vortex filament moving without change of form,*J. Fluid Mech. 112,pp.397-409,1981*
321. **W.T.Ashurst** : Vortex ring instability,*Bull.Am.Phys.Soc.26,pp.1267,1981*
322. **M.R.Foster, P.W.Duck** : The Inviscid stability of Long's Vortex, *Phys.Fluids 25,pp.1715-1718,1982*
323. **S. Kida** : Stability of a steady vortex filament,*J. Phys. Soc.Japan 51,pp.1655-1662,1982*
324. **D. Levi,A. Sym,S. Wojciechowski** : N-Solitons on a vortex filament, *Phys. Lett. 94A,pp.408-411,1983*
325. **J. Neu** : The dynamics of stretched vortices,*JMathematical Sciences research Institute Report N. 004-83,Berkeley,Calif.,1983*
326. **J. Neu** : The dynamics of stretched vortices,*J. Fluid Mech. 143,pp.253,1984*
327. **J. Neu** : The dynamics of a columnar vortex in an imposed strain,*Phys.Fluids 27,pp.2397-2402,1984*
328. **H.Hasimoto,T. Kambe** : Simulation of invariant shape of a vortex filament, with an elastic rod.*J. Phys.Soc. Japan 54,pp.5-7,1985*
329. **D.Dritschel**: The stability and energetics of co-rotating uniform vortices,*J.Fluid Mech.157,pp.95-134,1985*
330. **Y.H.Wan,M.Pulvirenti** : Nonlinear stability of circular vortex Patches, *Comm.Math.Phys.99,pp.435-450,1985.*
331. **P.W.Duck** : The inviscid stability of swirling flows : Large wavenumber disturbances, *Z.Angew.Math.Phys.37,pp.310,1986*
332. **B.J.Bayly** : Three-dimensional instability of elliptical flow,*Phys.Rev.Lett.57,pp.2160-2163,1986*
333. **Y. Fukumoto,T. Miyazaki** : N-solitons on a curved vortex filament,*J. Phys.Soc.Japan 55,pp. 4152-4155,1986*
334. **Y. Fukumoto,T. Miyazaki** : N-solitons propagating on a thin curved vortex filament,*In Proc. 36th Japan Natl Congr. for Theoretical and Applied Mechanics,1986;Theoretical and applied Mechanics, Vol 36, Tokyo University Press,1988*
335. **T. Miyazaki ,Y. Fukumoto**, N-solitons on a curved vortex filament with axial flow,*J.Phys. Soc. Japan 57,pp. 3365-3370,1988*
336. **B.J.Bayly,S.Orzag,T.Herbert** : Instability mechanisms in shear-flow transition, *Annu.Rev.Fluid Mech.20,pp.359,1988*
337. **B.J. Bayly** : Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows, *Phys. Fluids 31 (1), pp. 56-64,1988*
338. **V.A.Vladimorov,K.II'in** : Three-dimensional instability of an elliptical Kirchhoff vortex,*Fluid Dynamics 3,pp.356-360,1988*
339. **F.Waleffe** : 3D instability of bounded elliptical flow,*WHOI GFD, Fellow's report,1988*
340. **F.Waleffe** : 3D instability of unbounded elliptical flow,*Phys.fluids,1988,submitted*
341. **B.J.Bayly** : Three-dimensional instabilities in quasi-two-dimensional inviscid flows, *ASME Symposium,1989,(to appear)*
342. **D.Dritschel** : ,*J.Fluid Mech. 206,pp.193,1989*
343. **F.Waleffe** : The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence,*PhD.thesis,Dept.of Maths,Mass.Inst.Tech.,1989*
344. **F.Waleffe** : On the three-dimensional instability of strained vortices,*Phys.Fluids A 2/1,pp.76-80,1990*
345. **D.G.Dritschel** : The stability of elliptical vortices in an external straining flow,*J.Fluid Mech.210,pp.223-261,1990*
346. **D.G.Dritschel,B.Legras** : The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics.II Disturbance equations ,*Phys.Fluids A 3 (5) pp.855-869,1991*
347. **A.QI** : *Ph.D. thesis, University of California at Berkeley,1991*
348. **M.R.Khorrami** : On the viscous modes of instability of a trailing line vortex,*J.Fluid Mech. 225,pp.197-212,1991*
349. **Inove** : Propagation of disturbances locally imposed on a vortex ring,*JSME inter. Journal series 2,1991*
350. **Konno,Mituhashi,Ichikawa** : Soliton on thin vortex filament, *Chaos, solitons, Fractals,1, (1),pp.55-*

- 65, 1991
351. D. Auerbach : Stirring properties of vortex rings, *Phys. Fluids A* 3 (5), pp. 1351-1355, 1991
352. Konno, Ichikawa : Solitons on a vortex filament with axial flow, *Chaos, solitons, Fractals*, 2, (3), pp. 237-50, 1992
353. P.W. Duck, M.R. Khorrami : A note on the effects of viscosity on the stability of a trailing-line vortex, *J. Fluid Mech.* 245, pp. 175-189, 1992
354. E.F. Hasselbrink : Breakdown and mixing in a viscous circular vortex ring, *BS thesis, Dept. of Mech. Eng., Univ. Houston*, 1992
355. E.W. Mayer, K.G. Powell : Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex, *J. Fluid Mech.* 245, pp. 91-114, 1992
356. E.W. Mayer, K.G. Powell : Similarity solutions for viscous vortex cores, *J. Fluid Mech.* 238, pp. 487-507, 1992
357. Cieslinski : 2 solitons on a thin vortex filament, *Physica Letters Sect. A*, 171 (5-6), pp. 323-326, 1992
358. A.QI : Numerical Study of Wave propagation on vortex filaments, *J. Compu. Phys.* 104, pp. 185-210, 1993
359. A. Lifschitz, E. Hameiri : Localized instabilities of vortex rings with swirl, *Comm. Pure Appl. Math.* 46, 1993, pp. 1379-1408
360. K. Shariff, R. Verzicco, P. Orlandi : A numerical study of three-dimensional vortex ring instabilities: viscous corrections and early nonlinear stage, *J. Fluid Mech.* 279, pp. 351-375, 1994
361. Konno, Ichikawa : Vortex soliton with axial flow, *Theoretical and mathematical physics*, 99, (2), pp. 622-8, 1994
362. T. Miyazaki, T. Imai, Y. Fukumoto : Three-dimensional instability of Kirchoff's elliptical vortex, *Phys. Fluid* 7 (1), pp. 195-202, 1995
363. A. Lifschitz : Instabilities of ideal fluids and related topics, *Zets. Angew. Math. und Mech.* Vol. 75, N. 6, pp. 411-422, 1995
364. V.F. Kopiev, S.A. Chernyshev : Long-wave instability of vortex ring, *Fluid Dynamics* 30, pp. 864-869, 1995
365. P.W. Duck : The effects of viscosity on the centre modes in the incompressible stability of a trailing line vortex, *Phys. Fluids*, 8 (6), pp. 1455-1463, 1996
366. V.F. Kopiev, S.A. Chernyshev : Vortex ring eigen-oscillations as a source of sound, *JFM* 341, pp. 19-57, 1997

3 Eclatement tourbillonnaire

31 Articles de Leibovich et al.

367. S. Leibovich : Axially-Symmetric Eddies Embedded in a Rotating Stream, *J. Fluid Mech.* 32, pp. 529-548, 1968
368. D.J. Benney : Long non-linear waves in fluid flows, *J. Math. Phys.* 45, pp. 52-63, 1966
369. S. Leibovich : , *Phys. Fluids* 12, pp. 1124-1125, 1969
370. S. Leibovich : Weakly non-linear waves in rotating fluids, *J. Fluid Mech.* 42, pp. 803-822, 1970
371. S. Leibovich, J.D. Randall : Solitary waves in concentrated vortices, *J. Fluid Mech.* 51, pp. 625-635, 1972
372. J.D. Randall : , *Ph.D. thesis, Cornell University*, 1972
373. S. Leibovich, J.D. Randall : Amplification and decay of long nonlinear waves, *J. Fluid Mech.* 53, pp. 481, 1973
374. J.D. Randall, S. Leibovich : The critical state : A trapped wave model of vortex breakdown, *J. Fluid Mech.* 58, pp. 495, 1973

375. **S. Leibovich, A.R.Seebass** : Nonlinear Waves ,*Cornell University Press, Ithaca,N.Y.,1974*
376. **J.H.Faler**: Some experiments in swirling flows : detailed velocity measurements of a vortex breakdown using a laser doppler anemometer,*Ph.D.thesis, Cornell Univ.Ithaca,225pp.Also NASA CR-135115,1977*
377. **A.K.Garg** : Oscillatory behaviour in vortex breakdown flows : an experimental study vortex breakdown using a laser doppler anemometer,*MS.thesis, Cornell Univ.Ithaca,255pp.,1977*
378. **J.H.Faler,S. Leibovich** : Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown,*Phys. Fluid 20,pp.1385,1977*
379. **S. Leibovich** : The structure of vortex breackdown,*Annu. Rev. Fluid Mech. 10,pp.234,1978*
380. **J.H.Faler,S. Leibovich** : An experimental map of the internal structure of a vortex breakdown,*J.Fluid Mech. 86,pp.313-335,1978*
381. **A.K.Garg,S. Leibovich** : Spectral characteristics of vortex breakdown flow fields,*Phys. Fluids 22,pp.2053-2070,1979*
382. **S. Leibovich** : Waves in parallel or swirling stratified shear flows,*J. Fluid Mech. 93,pp 401-412,1979.*
383. **S. Leibovich,P.Holmes** : Global stability of Burgers' vortex,*Phys.Fluids 24(3),pp.548-549,1981*
384. **K.Stewartson** : The stability of swirling flows at large Reynolds number when subjected to disturbances with large azimuthal wavenumber,*Phys. Fluids 25 (11),pp.1953-1957,1982*
385. **S.A.Maslowe,K.Stewartson** : On the Linear Inviscid Stability of Rotating Poiseuille Flow,*Physics of fluids,25,pp.1517-1523,1982*
386. **S. Leibovich** : Wave propagation,instability, and breakdown of vortices, *in Vortex Motion, edited by H.G.Hornung and E.A.Muller, Vieweg,Braunschweig,pp.50-67,1982*
387. **H.Y. Ma** : , *Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering Report FDA-82-10,Cornell University,1982*
388. **S. Leibovich,H.Y. Ma** : Soliton propagation on vortex cores and the Hasimoto soliton,*Phys. Fluids 26,pp.3173-3179,1983*
389. **S. Leibovich ,K.Stewartson** : A Sufficient Condition for the Instability of Columnar Vortices,*J.Fluid Mech. 126 .pp.335-356,1983*
390. **S. Leibovich** : Vortex stability and breakdown : Survey and extension,*In Aerodynamics of Vortical Type Flows in three dimensions ,AGARD CP342,1983*
391. **S. Leibovich** : Vortex stability and breakdown : Survey and extension,*AIAA J. 22,pp. 1192-1206,1984*
392. **K. Stewartson, S.N. Brown** : Near-neutral centre-modes as inviscid perturbations to a trailing line vortex,*J. Fluid Mech. 156,pp.387-399,1985*
393. **K. Stewartson, K.Capell** : On the stability of ring modes in a trailing line vortex : the upper neutral points ,*J.Fluid Mech.156,pp.369-386,1985*
394. **S. Leibovich** : Waves and bifurcations in vortex filaments, *In Studies of vortex Dominated Flows,Proc.Symp.July9-11,,1985,NASA Langley Research Center (eds M.Y. Hussaini,M.D. Salas) Springer,pp. 3-15, 1985*
395. **S. Leibovich , S.N. Brown,Y. Patel**: Bending waves on inviscid columnar vortices, *J. Fluid Mech. 173, pp. 595-624,1986*
396. **N. Mac Giolla Mhuiris** : Numerical calculations of the stability of some axisymmetric flows proposed as a model for vortex breakdown,*Ph.D.thesis,Cornell University,1986*
397. **N. Mac Giolla Mhuiris** : Calculations of the stability of some axisymmetric flows proposed as a model for vortex breakdown,*Appl.Numer.Maths 2,pp.273-290,1986*
398. **K. Stewartson, S. Leibovich** : On the stability of a columnar vortex to disturbances with large azimuthal wavenumber : the lower neutral points,*J.Fluid Mech.178,pp.549-566,1987*
399. **S. Leibovich** : Fully nonlinear structures, wavetrains, and solitary waves in vortex filaments, *In Nonlinear Wave Interactions in Fluids (ed. R.R.W.Miksad, T.R.Akylas,T.Herbert).pp.-67-70,ASME,1987*
400. **A.J.Szeri** : Nonlinear stability of axisymmetric swirling flow,*Ph.D.dissertation,Cornell University,Ithaca,NY,1988*
401. **A.J.Szeri,P.Holmes** : Nonlinear stability of axisymmetric swirling flow, *Phil.Trans.R.Soc.Lond.A 326,pp.327-354,1988*
402. **Z.Yang** : Two theoretical studies of stability of swirling flows,*Ph.D.thesis,Cornell University,1990*
403. **S. Leibovich , A.Kribus** : Large amplitude wavetrains and solitary waves in vortices *J. Fluid Mech. 216,pp. 459,1990*
404. **A.Kribus** : Large-amplitude waves, instabilities, and breakdown in vortex flows, *Ph.D.tesis, Cornell University,1991*
405. **S. Leibovich** : Vortex breakdown : a coherent transition trigger in concentrated vortices.*In Turbulence and coherent Structures,ed.M.Lesieur,O.Metais,pp.285-302.Dordrecht:Kluwer,1991*

406. **A.Kribus, S. Leibovich** : Instability of strongly nonlinear waves in vortex flows,*J.Fluid Mech.* 269,pp.247-264,1994

32 Articles d'autres auteurs

407. **S.L.Bragg,Hawthorne** : Some exact solutions of the flow through annular cascade actuator discs,*J.Aero.Sci.* 17,pp.243-249,1950
408. **T.B.Benjamin , M.J.Lighthill** : On cnoidal waves and bores,*Proc.R.Soc.London Ser. A* 224,pp.448,1954
409. **L. Talbot** : Laminar swirling pipe flow, *Journal of applied mechanics ASME*, 1954
410. **L.E.Frankel** : On the flow of rotating fluid past bodies in pipe, *Proc.Roy.Soc. A* 233,pp.506,1956
411. **H.B.Squire** : Analysis of vortex breakdown phenomenon,*Miszellaneen der Angewandten Mechanik(Akademiee-Verlag,Berlin,1960,pp.306*
412. **T.B.Benjamin** : Theory of the vortex breakdown phenomenon,*J.Fluid Mech.* 14,pp.593-629,1962
413. **L.N. Howard,A.S. Gupta** : On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows,*J. Fluid Mech.* 14,pp.463-476,1962
414. **R.W. Gore, W.E. Ranz** : Backflows in rotating fluids moving axially through expanding cross sections, *A.I.Ch.E. Journal Vol 10 N 1*, pp. 83-88, 1964
415. **F.Kreith, O.K. Sonju** : The decay of a turbulent swirl in a pipe, *JFM 22, part 2, pp. 257-271,1965*
416. **T.B.Benjamin** : Significance of the vortex breakdown phenomenon, *Trans.Am.Soc.Mech.Engrs J.Basic.Engng*, 87,pp.518, 1965
417. **V. Krishnamoorthy** : Vortex breakdown and mesurements of the pressure fluctuation over slender wing,*Ph.D.Thesis,Southampton University,1966*
418. **M.G.Hall** : A new approach to vortex breakdown,*Proc.1967,Heat Transfer Fluid Mech.Inst.* pp.319-340,*Stanford University Press,1967*
419. **T.B.Benjamin** : Some developments in theory of the vortex breakdown,*J.Fluid Mech.* 28,pp.65-84,1967
420. **L.E.Fraenkel** : On Benjamin's Theory of Conjugate Vortex Flows,*J.Fluid Mech.* 28,pp.85-96,1967
421. **W.G. Prichard** : A study of wave motions in rotating fluids, *Ph.D.dissertation,University of Cambridge,1968*
422. **W.G. Prichard** : Solitary waves in rotating fluids,*J.Fluid Mech.* 42,pp. 61-83,1970
423. **T.Sarpkaya** : On the stationary and travelling vortex breakdown,*J.Fluid Mech.* 45,pp.545-559,1971
424. **T.Sarpkaya** : Vortex Breakdown in Swirling Conical Flows,*AIAA Journal,Vol.9*,pp.1792-1799,1971
425. **M.G.Hall** : Vortex Breakdown, *Annu.Rev.Fluid Mech.* 4,pp.195,1972
426. **T.B.Benjamin** : The stability of solitary waves,*Proc.R.Soc.Lond. A* 328,pp.153-183,1972
427. **T.Sarpkaya** : Effect of the adverse pressure gradient on vortex breakdown,*AIAA J.* 12,pp.602-607,1974
428. **M. Lessen, P.J. Singh,F. Paillet** : The stability of a trailing line vortex.Part I.Inviscid theory,*J. Fluid Mech.* 63,pp.753-763,1974
429. **M. Lessen, P.J. Singh,F. Paillet** : The stability of a trailing line vortex.Part II.Viscous theory,*J. Fluid Mech.* 63,pp.769-779,1974
430. **T.B.Benjamin** : *Univ.Essex Fluid Mech.Res.Inst.Rep.N.67,1975*
431. **T.B.Benjamin** : The alliance of practical and analytical insights into the nonlinear problems of fluid mechanics,*in Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics,Lecture Notes in Mathematics 503 ,Springer Verlag,Berlin,pp.8-29,1976*
432. **W.J.Grabowski,S.A.Berger** : Solutions of the Navier-Stokes equations for vortex breakdown, *J.Fluid Mech.* 75,pp.525-544,1976
433. **J.J.Keller,M.P.Escudier** : Theory and observation of waves on hollow-core vortices,*J.Fluid Mech.* 99,pp.495,1980
434. **M.P.Escudier, J.J.Keller** : Vortex breakdown : a two stage transition,*In Proc. AGARD Conf. on Aerodynamics of Vortical Type Flows in Three Dimensions: AGARD CPP-342,paper 25,1983*
435. **Y.Nakamura,A.Leonard,P.R.Spalart** : Numerical simulation of vortex breakdown by the vortex-

- filament method, *AGARD, 1983*
436. **E. Krause** : A contribution to the probleme of Vortex Breakdown, *Agard 1983*
437. **T.B.Benjamin** : Impulse,Flow force and variational principes,*IMA J.APPL.MATH. 32,PP.3-68,1984*
438. **J.J.Keller,W.Egli,J.Exley** : Force- and loss-free transitions between flow states,*Z.Angew.Math.Phys.36,pp.854-889,1985*
439. **M.P.Escudier,J.J.Keller** : Recirculation in swirling flow : a manifestation of vortex breakdown,*AIAA J. 23,pp.111,1985*
440. **M.P.Escudier** : Vortex breakdown : Observations and explanations, *Prog.Aerosp.Sci.25, pp.189,1988*
441. **J.T.Stuart**: A critical review of vortex-breakdown theory.*In 2nd colloq.in vortical flow,Baden,Switzeland,BBC SFB 25,1987*
442. **J.J.Keller,W.Egli,R.Althaus** : Vortex breakdown as a fundamental element of vortex dynamics,*Z. Angew.Math.Phys. 39,pp.404,1988*
443. **G.L.Brown,J.M.Lopez** : Axisymmetric vortex breakdown. Part 2. Physical Mechanisms, *ARL Aero.Rep.1174 AR-004-573,1988*
444. **J.M.Lopez** : Axisymmetric vortex breakdown. Part 1. Confined swirling flow *J. Fluid Mech.221,pp.533,1990*
445. **G.L.Brown,J.M.Lopez** : Axisymmetric vortex breakdown. Part 2. Physical Mechanisms, *J. Fluid Mech.221,pp.553,1990*
446. **R.E.Spall,T.B.Gatski,R.L.Ash** : The structure and dynamics of bubble-type vortex breakdown, *Proc. R.Soc.London Ser. A 429,pp.613-637,1990*
447. **Z.W. Lian, S.P. Lin** : Break up of a liquid jet in a swirling gas, *Phys. Fluids A 2 (12), pp. 2134-2139, 1990*
448. **C.Brücker, W.Althaus** : Study of vortex breakdown by particle tracking velocimetry (PTV). Part 1 : Bubble-type vortex breakdown, *Experiment in Fluids 13, pp. 339-349, 1992*
449. **C.Brücker** : Study of vortex breakdown by particle tracking velocimetry (PTV). Part 2 : Spiral-type vortex breakdown, *Experiment in Fluids 13, pp. 339-349, 1992*
450. **D.L.Darmofal** : A study of the axisymmetric vortex breakdown, *Ph.D.thesis, Massachusetts Institute of technology, 1993*
451. **R.A.Granger** : Some experimental observations of secondary motions in a confined vortex flow, *FFM 246, pp. 653-674, 1993*
452. **P.Billan** : Etude expérimentale de l'éclatement tourbillonnaire en milieu ouvert: typologie des états éclatés et phénomènes d'hystérésis, *stage LadHyX,1994*
453. **J.J.Keller** : The effects of non-uniform density and stagnation pressure on the breakdown characteristics of a vortex,*Z. Angew Math. Phys. 45,pp.347,1994*
454. **J.J.Keller** : On the practical application of vortex breakdown theory to axially symmetrical and three-dimensional compressible flows,*Phys.Fluids,pp.1515,1994*
455. **J.M.Lopez** : On the bifurcation structure of axisymmetric vortex breakdown in a constricted pipe,*Phys.Fluids 6,pp.3683,1994*
456. **J.J.Keller** : Entrainment effects in vortex flows,*Phys. Fluids 6,pp.3028,1994*
457. **J.J.Keller** : The critical cross-section of a vortex,*Z. Angew Math. Phys. 46,pp.122-148,1995*
458. **J.J.Keller** : On the interpretation of vortex breakdown,*Phys.Fluid 7 (7),pp.1695-1702,1995*
459. **P.Huerre,J.M.Chomaz** : Instabilités hydrodynamiques et éclatement tourbillonnaire, *Convention DRET 92-098,1995*
460. **I.Delbende** : Etude numérique de l'éclatement tourbillonnaire par la théorie de l'instabilité hydrodynamique, *Rapport de stage de magistère,1995*
461. **S.A. Berger, G. Erlebacher** : Vortex breakdown incipience : Theoretical considerations, *Phys. Fluids 7 (5), pp. 972-982, 1995*
462. **S.Wang, Z.Rusak** : On the stability of non-columnar swirling flows, *Phys. Fluids 8 (4), pp. 1017-1023,1996*

4 Numérique

463. **A. Leonard** : Numerical Simulation of Interacting three-dimensional Vortex Filaments,*Lecture Notes in Physics, V.35, Springer-Verlag, New York, pp. 245-250, 1974*
464. **T.E.Dushane** : Convergence for a vortex method for solving Euler's equations,*Math.Comput. 27, pp. 719-728, 1973*
465. **A. J. Chorin** : Numerical study of slightly viscous flow, *JFM. 57, pp. 785-796, 1973*
466. **K.C.R. Lo, L. Ting**: Studies of merging of two vortices,*Phys. Fluids 19, pp. 912-913, 1976*
467. **Y.Oshima, S. Asaka** : Interaction of multi-vortex rings, *Journal of the Physical society of Japan, 42, N 4, 1977, pp. 1391-1395*
468. **A. J. Chorin** : Vortex sheet approximation of boundary layers, *Journal of computational Physics 27, pp. 428-442, 1978*
469. **O.H.Hald**: Convergence of vortex methods for Euler's equations,II,*SIAM J.Numer.Anal.16,pp.726-755, 1979*
470. **A. Leonard** : Vortex methods for flow simulation,*J.Comput.Phys.37,pp.289-335, 1980*
471. **C.H. Liu,L. Ting** : Numerical solution of viscous flow in unbounded fluid,in *Proc. 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics,Aachen,Germany,28 June-2 July5 ed. E. Krause, Lecture Notes in Physics, V.170, Springer-Verlag, New York, pp.357-363 , 1982*
472. **T.B. Beale, A. Majda** : Vortex Methods I II,*Mathematics of computation, Vol. 39, N. 159,pp. 1-27,29-52 , July 1982*
473. **Y.Nakamura,A.Leonard,P.R.Spalart** : Numerical simulation of vortex breakdown by the vortex-filament method,*AGARD Conf.Proc.342,27-1,27-13,1983*
474. **J.P. Chamberlain,R.P. Weston**: Three-dimensional Navier-Stokes Calculations of Multiple Interacting Vortex Rings, *AIAA paper 84-1545 June 1984*
475. **T.B. Beale, A. Majda** : Vortex Methods for fluid flow in two or three dimensions *Contemp.Math.28,pp.221-229,1984*
476. **T.B. Beale, A. Majda** : *J.Comput.Math.Phys.58,pp.188,1985*
477. **J.P. Chamberlain,C.H. Liu** : Navier-Stokes Calculations for Unsteady Three-Dimensional Vortical Flows in Unbounded Domains,*AIAA Journal,V.23 ,pp. 868-874, June 1985*
478. **C. Anderson, C. Greengard** : On Vortex Methods, *SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 22,N.3, pp. 413-440,June 1985*
479. **A. Leonard** : Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements,*Ann.Rev.Fluid Mech. 17,pp.523,1985*
480. **C. Greengard** : Convergence of the Vortex filament Method, *Mathematics of computation, Vol. 47, N 176, pp. 387-398,1986*
481. **A.F. Ghoniem, K.K. Ng** : Numerical study of the dynamics of a forced shear layer, *Phys. Fluids 30 (3), pp. 706-721, 1987*
482. **S.Stanaway, .J.Cantwell, .R.Spalart** : A numerical study of viscous vortex rings using a spectral method,*NASA TM-101041,1988*
483. **S.Stanaway,B.J.Cantwell,P.R.Spalart** : Navier-Stokes simulation of axisymmetric vortex rings *,AIAA Pap. N.88-0318,1988*
484. **L.Reyna,S.Menne** : Numerical prediction of flow in slender vortices,*Comp. & Fluids, 16,pp. 239-256,1988*
485. **AK.Shariff,A Leonard,N.J.Zabusky,J.H.Ferziger** : Acoustics and dynamics of coaxial interacting vortex rings,*Fluid Dyn. Res. 3,pp.337-343,1988*
486. **AK.Shariff,A Leonard,N.J.Zabusky** : Dynamics of a class of vortex rings,*NASA TM-102257,1989*
487. **O.M.Knio,A.F.Ghoniem** : Numerical study of a three-dimensional vortex method, *.Comput.Phys.86,pp.75-106,1990*
488. **T.Y. Hou, J. Lowengrub** : Convergence of the point vortex method for the 3D Euler equations, *Communications on pure and applied mathematics, Vol. XLIII, pp. 965-981,1990*
489. **O.H.Hald** : Convergence of vortex methods.,*In Vortex Methods and Vortex motion(ed. K.Gustafsson & J.Sethian) pp.33-58,SIAM,1991*
490. **J.I.Sephian** : Abrief overview of vortex methods,*In Vortex Methods and Vortex motion(ed. K.Gustafsson & J.Sethian) pp.1-32,SIAM,1991*
491. **S.Kida,M.Takaoka,F.Hussain** : Collision of two vortex rings, *J.Fluid Mech.230,pp.583-643,1991*
492. **V.M.Fernandez** : Vortex intensification and collapse of the Lissajous-elliptic ring : Biot-Savart simulations and visiometrics,*Ph.D.thesis,Rutgers University,New Brunswick,New Jersey,1994*
493. **V.M.Fernandez,N.J.Zabusky,V.M.Gryanik** : Near-singular collapse and local intensification of a

- Lissajous-elliptic ring : Non-monotonic behavior and zero-approaching local energy densities,*Phys. Fluids A 6*, pp. 2242-2244, 1994
- 494.** **S.Kida, M. Tanaka :** Dynamics of vortical structures in a homogeneous shear flow, *JFM 274* pp. 43-68, 1994
- 495.** **S.Kida, M. Takaoka :** Vortex reconnection, *Annu. Rev. Fluid Mech. 26*, pp. 169-189, 1994
- 496.** **V.M.Fernandez,N.J.Zabusky,V.M.Gryanik :** Vortex intensification and collapse of the Lissajous-elliptic ring : single- and multi-filament Biot-Savart simulations and visiometrics, *J.Fluid Mech. 299*, pp. 289-331, 1995
- 497.** **Y.K. Chang, A.D. Vakili :** Dynamics of vortex rings in crossflow, *Phys. Fluids 7* (7), pp. 1583-1597, 1995
- 498.** **I.A.Min, I. Mezic, A. Leonard :** Levy stable distributions for velocity and velocity difference in systems of vortex elements, *Phys. Fluids 8* (5), pp. 1169-1180, 1996
- 499.** **S.James, C.K. Madnia :** Direct numerical simulation of a laminar vortex ring, *Phys. Fluids 8* (9), pp. 2400-2414, 1996
- 500.** **R.Verzicco, P. Orlandi, A.H.M.Eisenga,G.J.F.VanHeijst, G.F.Carnevale :** Dynamics of a vortex ring in a rotating fluid, *JFM. 317*, pp. 215-239, 1996
- 501.** **S.Pellerin, A.Giovannini :** Interactions dynamiques entre un tourbillon de Rankine et une couche limite de plaque plane, *CRAS Paris*, t.322,Série II b, pp. 793-800, 1996
- 502.** **J.E.Martin, E.Meiburg :** Nonlinear axisymmetric and three-dimensional vorticity dynamics in a swirling jet model, *Phys.Fluids 8*(7) pp.1917-1928, 1996
- 503.** **F.Kaplinski, U. Rudi, S.Tisler :** Model of a viscous vortex ring, *Proceedings of the Tenth Inter. Conf. Held in Swansae, UK, Numerical Methods in Laminar and turbulent flow Volume X* ed. C. Taylor J.C. Cross 21-25th, Pineridge press, July 1997

5 collapse

- 504.** **H.Aref,E.D. Siggia:** ,*J.Fluid Mech.100*,pp.705,1980
- 505.** **H.Aref,E.D. Siggia:** ,*J.Fluid Mech.109*,pp.435,1981
- 506.** **E.D. Siggia:** ,*Phys.Fluids 24*,pp.1934,1981
- 507.** **E.D. Siggia:** ,*J.Fluid Mech.107*,pp.357,1982
- 508.** **E.D. Siggia:** Collapse and Amplification of a Vortex filament, *Physics of fluids*, Vol. 28, pp. 794-805, March 1985
- 509.** **E Siggia,A. Pumir :** Incipient singularities in the Navier-Stokes equations ,*Phys.Rev.Lett.55*,pp.1749,1985
- 510.** **E Siggia,A. Pumir :** ,*J.Comput.Phys.72*,pp.498,1987
- 511.** **A. Pumir,E Siggia:** Vortex dynamics and the existence of solutions to the Navier-Stokes equations,*Phys.Fluids 30*,pp.1606,1987
- 512.** **A. Pumir,E Siggia:** Simulation of incipient singularities in the 3D Euler equations,*Physica D 37*,pp.539-541,1989
- 513.** **A. Pumir,E Siggia:** Collapsing solutions to the 3-D Euler equations,*Phys. Fluids A 2*,pp.220-241,1990
- 514.** **A.Fukuyu,T.Arai :** Singularity formation in three-dimensional inviscid flow,*Fluid Dyn.Res. 7*,pp.229-240,1991
- 515.** **A. Pumir,E Siggia:** Singular solution to the 3D axi-incompressible Euler equations,*Physica D 61*,(1-4),pp.240-245,1992
- 516.** **A. Pumir,E Siggia:** Developpement of singular solutions to axisymmetric Euler equations,*Phys.Fluid A 4* (7),1992
- 517.** **A. Pumir,E Siggia:** Finite-time singularities in the axisymmetric three-dimensional Euler equations,*Phys.Rev.Lett.68*,pp.1511-14,1992

6 Nappes tourbillons

- 518. **D.W.Moore** : A numerical study of the roll-up of a finite vortex sheet,*J.Fluid Mech.* 63,pp.225-235,1974
- 519. **H.Kaden** : Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche(ie Roll up of vortex sheet),*Ing.Arch.2*,pp.140-168,1931
- 520. **D.W.Moore,R.Griffith-Jones** : The stability of an expanding circular vortex sheet,*JMathematika21*,pp.128-133,1974
- 521. **D.W.Moore** : A numerical study of the roll-up of a finite vortex sheet,*J.Fluid Mech.* 63,pp.225-235,1974
- 522. **D.W.Moore** : The roll-up of a semi-finite vortex sheet,*JProc.R.Soc.London Ser. A*345,pp.417-430,1975
- 523. **D.W.Moore** : The stability of an evolving two-dimensional vortex sheet, *JMathematika23*,pp.35-44,1976
- 524. **J.P.Guiraud,R.Kh. Zeytounian** : A double-scale investigation of the asymptotic structure of rolled-up vortex sheets,*J.Fluid Mech.* 79,pp.93-112,1977
- 525. **D.W.Moore** : The equation of motion of a vortex layer of small thickness,*Stud.App.Math.*58,pp.119-140,1978
- 526. **D.I.Pullin** : The large-scale structure of unsteady self-similar rolled-up vortex sheets,*J.Fluid Mech.*88,pp.401-430,1978
- 527. **D.W.Moore** : The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet,*Proc.R.Soc.LondonA*3655,pp.105-119,1979
- 528. **A.I.Van der Vooren** : ,*Proc.Roy.Soc.A*373,pp.67,1980
- 529. **D.W.Moore** : On the point vortex method ,*SIAM J.Sci.Stat.Comp.*2,pp.65,1981
- 530. **J.P.Guiraud,R.Kh. Zeytounian** : Vortex sheets and Concentrated Vorticity.A variation on the Theme of Asymptotic Modeling in Fluid Mechanics,*ONERA T.P.N.*1982-124,1982
- 531. **D.I.Meiron,G.R.Baker,S.A.Orszag** : Analytic structure of vortex sheet dynamics,Part I,Kelvin-Helmholtz instability,*J.Fluid Mech.* 114,pp.283-98,1982
- 532. **D.W.Moore** : Numerical and analytical aspects of Helmholtz instability,in *Proc. XVI IUTAM Symp.,Lyngby,1984*,pp.263-274,1985
- 533. **C.Pozrikidis,J.J.L. Higdon** : Non-linear Kelvin-Helmholtz instability of a finite vortex layer,*J.Fluid Mech.*157,pp.225-263,1985
- 534. **D.G.Dritschel,P.H.Haynes,M.N.Juckes,T.G.Sherpherd** : The instability of a “two- dimensional vorticity filament” under uniform strain,*J.Fluid Mech.* 230,pp.647-665,1991
- 535. **M.Nitsche** : Axisymmetric vortex sheet roll-up,*Ph.D.thesis,Department of mathematics,The University of Michigan*,1992
- 536. **T.Ishihara,Y.Kaneda** : Singularity formation in three-dimensional motion of a vortex sheet,*J.Fluid Mech.* 300,pp.339-366,1995

7 Divers

- 537. **H. Helmholtz**: Über Integrale der Hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen, *translated by P.G. Tait in Phil. Mag.* 33,pp.485,1867(*ou J.Reine Angew.Math.* 55,p25,1858), 1858
- 538. **H. Helmholtz**: On integrals of the hydrodynamical equations which express vortex-motion, *Transl. P.G.Tait,1867 with a letter by Lord Kelvin, in London Edinburgh Dublin Phil. Mag.J.Sci.Fourth series* 33,pp485-512, 1858
- 539. **W.B. Rogers**: On the formation of rotating rings of air and liquids under certain conditions of discharge, *J. Sci. Instrum.. J. Phys. E°,(2)*, 2,pp. 55-58, 1858
- 540. **G. Kirchoff** : Über das gleichgewicht und die bewegung eines unendlich dünnen elastischen stabes (ie On balance and motion of an infinit slender elastic stick, *Jf.Math.(Crelle)Bd56*,1859

- 541.** **M.J.M.Hill** : On a spherical vortex, *Philos. Trans.R.Soc.London Ser.A*185,pp.213-45,1894
- 542.** **C.H. Krutzsch** : Über eine experimentell bei ihrer translatorischen Bewegung in wirklichen Flüssigkeiten (ie On an experiment on his translation motion in real fluid) ,*Ann.Physik*35,pp.497-523,1939
- 543.** **W.R.Hawthorne** : Some exact solutions of the flow through annular cascade actuator discs, *J.Aeron.Sci.*17,pp.243-249,1950
- 544.** **W.R.Hawthorne** : "formation of longitudinal vortices by the deformation of an originally two-dimensional vortex") ,*Proc.Roy.Soc.,London A* 206,pp.374,1951
- 545.** **W.R.Hawthorne** : *J.Aeron.Sci.*21,pp.588,1954
- 546.** **S.Kaplun** : The role of Coordinate systems in Boundary-Layer Theory, *Jour. Of Applied Math. And Physics (ZAMP)*, Vol.V, pp. 111-134, 1954
- 547.** **H.E.Moses** : Eigenfunctions of the curl operator, rationally invariant Helmholtz theorem and applications to electromagnetic theory and fluid dynamics, *SIAM J.Appl.Math.*21,pp.114,1971
- 548.** **H.Werlé** : Hydrodynamic flow visualisation , *Annu. Review of Fluid Mech.* 5,1973
- 549.** **C.R.Church,J.T.Snow,E.E.Agee** : Tornado vortex simulation at Purdue University, *Bull.Am.Met.Soc.*,58,pp.900,1977
- 550.** **F.Feuillebois, A.Lasek** : Computer aided application of the Principle of Least Degeneracy, *Jour. Of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* Vol 28,6, pp.1141-1146, 1977
- 551.** **L.Wilson,A.Pearson,F.P.Ostby** : Tornado!, *Weatherwise*,32,pp.27-33,1979
- 552.** **Church,Burgess,Doswell, and Davies-Jones** : The Tornado, Geophysical Monograph , *American Geophysical Union ISBN 0-87590-038-0*, 1979
- 553.** **J.J. Cornish,III** : Vortex Flows, Lockheed-Georgia Company, Marietta,GA,(Eighth quick-Goethert Lecture Series-Univ. Of Tennessee Space Inst.Tullahoma),1982
- 554.** **M. Mudry** : La théorie générale des nappes et filaments tourbillonnaires et ses applications à l'aérodynamique instationnaire, *These de doctorat d'état* , Paris 6, 1982
- 555.** **H.Werlé** : Visualisation des écoulements tourbillonnaires tridimensionnels, in *Proc. AGARD Conf. on Aerodynamics of Vortical Type Flows in Three Dimensions: AGARD CPP-342*,1983
- 556.** **B.B.Fiedler,R.Rotunno** : A theory for the maximum windspeeds in tornado-like vortices, *J.Atmos.Sci.*43,pp.2328-2340,1986
- 557.** **K.J. Russell** : Shape and stability of two-dimensional uniform vorticity regions, *Ph D thesis, California Institute of technology*, 1987
- 558.** **D.Auerbach** : Some open questions on the flow of circular vortex rings, *Fluid Dyn.Res.*3,pp.209-13,1988
- 559.** **P.G.Saffman** : A model of vortex reconnection, *J.Fluid Mech* 212,pp.395-402,1990
- 560.** **J.N.Dewynne, J.R.Ockendon,P.Wilmott** : A systematic derivation of the leading-order equations for extensional flows in slender geometries, *JFM* 244,pp. 323-338, 1992
- 561.** **Winckelmans** : Comment on a paper by Kida et al on the numerical simulation of pseudo elliptical vortex rings using the vortex particle method, *Fluid dyn. research* 12 (1),pp.57-60,1993
- 562.** **B.J.Hunton** : Vortex dynamics, *D.Phil. thesis, Oxford University*,1994
- 563.** **W.Eckhaus** : Fundamental concepts of matching, *SIAM review* 36 N3 pp. 431-439, 1994
- 564.** **S.J.Chapman** : A mean-field model of superconducting vortices in three dimensions, *SIAM J.Appl.Math Vol* 55, N5 pp. 1259-1274,1995
- 565.** **S.J.Chapman** : Superheating field of type II superconductors, *SIAM J.Appl.Math Vol* 55, N5 pp. 1233-1258,1995
- 566.** **S.J.Chapman, G.Richardson** : Motion of vortices in type II superconductors, *SIAM J.Appl.Math Vol* 55, N5 pp. 1275-1296,1995
- 567.** **N.M.Nouri** : Dynamique du tourbillon dans un écoulement potentiel avec surface libre, *PhD Thesis, INPL ,France*, 1995
- 568.** **B.Zafarmand** : Simulation numérique des écoulements turbulents et à bulles dans un canal simple et dans un Té par la méthode des vortex aléatoires, *PhD Thesis, INPL ,France*, 1996
- 569.** **J.J.Allen** : topic : formation of a vortex ring in front a piston as it moves through a cylinder, PhD thesis University of Melbourne 1997
- 570.** **A.Tsinober** : Is concentrated vorticity that important ?, *Euromech colloquium 364, Dynamics and Statistics of Concentrated Vortices in Turbulent Flows, Carry-le-Rouet, France, 24-27 June (to appear in a special issue of European Journal)* 1997

8 Ouvrages

571. **H. Poincaré** : Théorie des tourbillons, *ed. G. Carré, 1893*
572. **Sir H. Lamb.**: Statics, *Cambridge University Press, 1928*
573. **L. Lichtenstein** : Hydrodynamik, *Berlin : Springer, 1929*
574. **O.D. Kellogg**: Potential theory, *New York, Ungar, 1929*
575. **H.Villat** : Leçons sur la Théorie des Tourbillons, *Paris, Gauthier-Villars et Cie, éditeurs, 1930*
576. **L.Marty** : Contribution a l'étude expérimentale de l'écoulement des fluides.(Jets, Tourbillon circulaire, effet soupape) ,*Thèse de la faculté des sciences de Toulouse 1930*
577. **H.Bouasse** : Tourbillons (Forces acoustiques, Circulations diverses) *Tome 1, Paris ,Librairie Delagrave 1931*
578. **C.Sadron** : Etat actuel des recherches expérimentales sur les anneaux de tourbillons dans les gaz, *Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air,N.22,1933*
579. **L.Prandtl,O.G.Tietjens** : Fundamentals of Hydro and Aeromechanics, *Dover,(New York : Mc Graw-Hill),1934*
580. **Sir H. Lamb.**: Hydrodynamics., *New York,Dover,1945*
581. **SL.Onsager** : Stastistical hydrodynamics, *Nuovo Cimento Suppl.6,pp.279-287,1949*
582. **K.O. Friedrichs** : Special Topics in Fluid Dynamics, *New York University Press, New York ,1953*
583. **R. von Mises and Th. von Karman**: Advances in Applied Mechanics, *edited by R. von Mises and The. von Karman, academic Press, Inc. New York Vol. 3 , 1953*
584. **P.M.Morse,H.Feshbach** : Methods of Theoretical Physics, *New York,McGraw-Hill,1953*
585. **C. Truesdell** : The Kinematics of vorticity, *India University Press, 1954* (ou Bloomington:Ind .Univ. Press. 232pp.)
586. **C.C.Lin** : The theory of Hydrodynamic Stability ,*Cambridge University Press,1955*
587. **A. Erdelyei**: Asymptotic Expansions, *Dover, New York,1956*
588. **L.M. Milne-Thomson** : Theoretical Hydrodynamics, *The Mac Millan Company, New York, 1957, 3rd ed.*
589. **J.Stoker** : Water Waves, *New York , Interscience,1957*
590. **L.D.Landau,E.M.Lifshitz** : Fluid Mechanics, *Pergamon,London,1959*
591. **S. Goldstein** : Lectures on Fluid Mechanics, *Interscience, New York,1960*
592. **S. Chandrasekhar** : Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, *Oxford:Clarendon Press,1961*
593. **N. Bogoliubov and Y.A. Mitropolsky** : Asymptotic Method in the theory of Non-Linear Oscillations, *Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York,1961*
594. **R. Courant,D.Hilbert** : Methods of mathematical physics, *vol. II, New York : Wiley,1962*
595. **N.E. Kochin,I.A. Kibel, and N.V. Roze** : Theoretical Hydromechanics, *Interscience Publishers, Inc., New York, pp.202-207, 1964*
596. **M.Abramowitz , I.A. Stegun** : Handbook of Mathematical Functions, *NBS Applied Mathematics Series 55, pp.228-230, Dover, New York, 1964*
597. **S. Goldstein** : Modern development in fluid dynamics, *Dover 1965*
598. **G.K. Batchelor** : Introduction to fluid dynamics, *Cambridge University Press, 1967*
599. **N.M. Günter** : Potential theory, *New York, Ungar,1967*
600. **J.D. Cole** : Perturbation Methods in Applied Mathematics., *Waltham,Ma:Blaisdel,1968*
601. **L.M.Milne-Thompson** : Theoretical Hydrodynamics, *Macmillan,1968*
602. **H.P.Greenspan** : The theory of rotating fluids, *Cambridge University Press,1968*
603. **J.J.Stoker** : Differential Geometry, *Wiley-Interscience,1969*
604. **A.H.Nayfeh** : Perturbation Methods, *A Wiley- Interscience Publication,1973*
605. **G. Whitham** : Linear and nonlinear Waves, *Wiley-Interscience,1974*
606. **A.S.Monin,A.M.Yaglom** : Stastistical Fluid Mechanics, *Massachusetts Institute of Technology Press,1975*
607. **J.O.Hinze** : Turbulence, *New York:McGraw-Hill,1975*
608. **M. Van Dyke** : Perturbation Methods in Fluid Mechanics, *Parabolic Press, Palo alto 1975*
609. **D.D.Joseph** : Stability of fluid motions I, *Springer 1976*
610. **G.L. Lamb** : Solitons on moving space curves, *J.Math.Phys.18,pp.1654-1661,1977*
611. **C.M.Bender,S.A.Orszag** : Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, *McGraw-Hill, New York,1978*

612. **A.J. Chorin, J.E Marsden :** A mathematical Introduction to Fluid Dynamics, *Springer Verlag, New York 1979 (ou 1990)*
613. **C.S.Yih :** Fluid Mechanics, *West River Press, Ann Arbor, 1979*
614. **J.Pedlosky :** Geophysical Fluid Dynamics, *Springer Verlag, New York, 1979*
615. **G.Barenblatt :** Similarity, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics, *Consultant Bureau, New York, 1979*
616. **G.L. Lamb :** Elements of Soliton Theory, *Wiley-Interscience, New York, 1980*
617. **G.Iooss,D.D.Joseph :** Elementary Stability and Bifurcation Theory, *Springer-Verlag, New York, 1980*
618. **J. Kevorkian and J.D. Cole :** Perturbation Methods in Applied Mathematics. *Springer, New York, 1981*
619. **C.François :** Les méthodes de perturbation en mécanique, *Cours de l'ENSTA, 1981*
620. **M. Van Dyke :** An Album of Fluid Motion, *Parabolic Press, Stanford, 1982*
621. **H.G.Hornung,E.A.Müller :** Vortex Motion, *ed.H.G.Hornung, E.A.Müller, Braunschweig /Wiesbaden: Fried. Vieweg. & Sohn, 1982*
622. **C.Marchioro,M.Pulvirenti :** Hydrodynamics in two-dimensional flows and vortex theory, *Commun.Math.Phys.84,pp.483-503,1982*
623. **P.Drazin,W.Reid :** Hydrodynamic Stability, *Cambridge U.P., New York, 1982*
624. **A.Friedman :** Variational principles and Free-Boundary Problems, *Wiley-Interscience, New York, 1982*
625. **H.J.Lugt :** Vortex Flows in nature and technology, *New York, Wiley.-Interscience 297 pp., 1983 (Wirbelströmung in Nature und Technik, Braun, 1979)*
626. **R.Peyret,T.D.Taylor :** Computational methods for fluid flow, *Springer, 1983*
627. **R.Kh.Zeytounian :** Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides I et II, *Lecture notes in Physics 245, 1985*
628. **J.S.Darrozes,A.Monavon :** Analyse Phénoménologique des écoulements, *Cours de l'ENSTA, 1988*
629. **V.I.Arnold :** Mathematical Methods of Classical Mechanics, *Springer-Verlag, New York, 1989*
630. **D.I.Meiron,M.J.Schelly,W.T.Ashurst,S.A.Orszag :** Mathematical Aspects of Vortex Dynamics, *edited by R.Caflish (Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1989)*
631. **D.J.Acheson :** Elementary Fluid Dynamics, *Oxford University Press, 1990*
632. **H.K.Moffatt,A.Tsinober :** Topological fluid Mechanics, *Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990*
633. **J.Bousquet :** Méthode des singularités, Cepadues-Editions, 1990
634. **E.J.Hinch :** Perturbation Methods, *Cambridge University Press, 1991*
635. **E.G.Puckell :** Vortex methods : an introduction and survey of selected research topics, In Incompressible Computational Fluid dynamics Trends and Advances (ed. R.A.Nicolaides & M.D.Gunzburger), *Cambridge University Press, 1991*
636. **A. Majda :** Vorticity, turbulence and acoustics in fluid flow, *The 1990 John von Neumann Lecture, SIAM Review(September 1991)*
637. **K.Gustafsson, J.Sethian :** Vortex Methods and Vortex motion (ed. K.Gustafsson & J.Sethian), *SIAM, 1991*
638. **H.K.Moffatt:** Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas, *ed. H.K.Moffatt et al, Dordrecht: Kluwer, 1992*
639. **A.J.Chorin :** Vorticity and turbulence, *Springer, 1994*

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

000

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur KLEIN Rupert, Professeur, Université Wuppertal (Allemagne),
Monsieur VERGA Alberto, Directeur de Recherches, IRPHE Marseille.

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur MARGERIT Daniel

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Mouvement et dynamique des filaments et des anneaux tourbillons
de faible épaisseur".

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : "MÉCANIQUE & ÉNERGÉTIQUE"

Fait à Vandoeuvre le, 9 Octobre 1997

Le Président de l'I.N.P.L.,



Dynamics and Motion of Slender Vortex Filaments and Rings

by

*Daniel Margerit
Engineer ENSEM*

This thesis is aimed at extending and improving existing results of formal asymptotic analyses for slender vortex filaments. There is a considerable number of publications on topics in this area of science covering issues of vortex filament motion in space, the stability of these slender vortex structures, investigations of particularly elucidating cases, such as slightly perturbed, almost straight filaments, etc... The present work adds interesting improvement and/ or extensions to these earlier analyses.

Here is a list of the major points addressed in this work :

1. For the first time, the general equation of motion of a filament in three space dimensions is derived completely up to first order in the slenderness parameter.
2. A number of ad-hoc regularisation of the singular line Biot-Savart integral are scrutinised and compared with the results of a systematic matched asymptotic expansion. It is shown that each of these ad-hoc methods can be made to agree with the more fundamental theory by an appropriate choice of the relevant regularisation parameter.
3. The stability analysis of slender filaments, which has been pursued in the literature before, is completed by adding various missing facts and aspects that might be of considerable importance in future real-life applications. A particularly interesting aspect is the explicit exhibition of the detailed velocity field of a perturbed vortex ring.
4. A newly developed numerical simulation code that solves the full nonlinear filament evolution equations is validated against the extended results of the stability analysis.
5. A preliminary analysis for a yet unsolved issue in slender vortex theory is presented : The problem of a non-closed filament topology. The analysis given lays the foundation for further work by pointing out exactly which parts of the theory are affected by the closedness or periodicity assumptions used in practically all previous systematic asymptotic analyses. The open issues in this case are related to the temporal evolution of the leading order vortex core structure. Future work will have to focus on a satisfactory completion of the ansatz presented in this thesis.

By this impressive volume of work the candidate has shown that he is able to identify open scientific problems, to acquire the mathematical techniques needed to address these issues and to generate answers to the open questions found. An important part of the second step -acquiring the necessary mathematical techniques- in the present case involves making himself familiar with modern tools of computer-aided formal calculus. It is astonishing to see that this methodology allows a single person within a single thesis to add extremely complex details to almost any piece of analysis in a given area to be found in the literature. The candidate has obviously mastered this task and was careful to check all his results against existing theories with success. Therefore, even though I was obviously not able to check all the details presented, I have considerable trust in the validity of this work.

One word of caution is in order, though : The attractivity of asymptotic analysis derives to a large extend from the fact that one can obtain results on complex systems by hand. This allows one to control, understand and properly interpret every single step of the analysis. As a result, a lot of physical insight is gained almost automatically. Also, an asymptotic analysis is typically considered successful if at the end there is a simplified equation system that can be further analysed more easily than the original one. By employing computerised formal calculus to do asymptotic, the present work leaves this traditional and obviously useful range of applications of asymptotic analysis. The results shown are partly of tremendous complexity and is not clear whether they are any simpler or more elucidating than the original Navier-Stokes equations. Unfortunately, this thesis falls short of thoughtfully going over the results, say of the higher order accurate filament equation of motion, and to discuss their consequences. The reader is at some point left alone with these complex equations without a clue as to whether they are worthy of being studied or not.

A second point of critique and encouragement regards the presentation of the formal calculus procedures. These descriptions appear hidden in an appendix, which is not in balance with their importance for this work. I am sure that the candidate has invested quite some intelligence in making the calculus program do the asymptotics for him. Making the strategies developed and used in this process more transparent to the reader in a separate major section of the thesis would make for a valuable improvement of the script.

In conclusion, there is no doubt that the candidate has proven his scientific abilities and that this thesis should be accepted as a dissertation script. On a scale of (summa cum laude, magna cum laude, cum laude, rite, failed) I rate this work as

magna cum laude.

Wuppertal October 23,1997

Prof. Dr-Ing.Rupert Klein

Rapport sur le mémoire de thèse de doctorat de
L'Institut National Polytechnique de Lorraine, de
Daniel Margerit

**Mouvement et Dynamique des
Filaments et des Anneaux Tourbillons
de Faible Epaisseur**

par Alberto Verga

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre, *CNRS*, Universités de Aix-Marseille I & II, 12 avenue Général Leclerc; 13003 Marseille, France.
Mél :verga@marius.univ-mrs.fr, <http://www-irphe.univ-mrs.fr/>

La structure, la dynamique et les interactions de filaments tourbillons sont au coeur d'une grande variété d'écoulements. Le problème de la détermination du champ de vitesse généré par un anneau avait déjà été posé par Kelvin, et est devenu par la suite un sujet de recherche classique avec de multiples applications, depuis le mouvement des tornades, jusqu'aux vortex produits par les ailes d'avion. Le sujet central du mémoire de Daniel Margerit est le calcul de la vitesse d'un anneau tourbillon. Il s'agit d'un problème difficile, qui a fait l'objet depuis pratiquement un siècle d'un grand nombre de travaux. Il fait, d'une part, une synthèse des recherches sur le sujet, notamment avec une bibliographie très complète, et d'autre part, il apporte une série de nouveaux résultats qui complètent les calculs d'autres auteurs.

Dans une première partie de caractère général, Daniel Margerit utilise des méthodes asymptotiques pour calculer l'écoulement extérieur et intérieur du filament, il réussit notamment à faire le raccord entre les deux solutions, en tenant compte des termes divergeant logarithmiquement. Il refait, à l'aide d'un logiciel de calcul analytique, le calcul de Callegari et Ting de l'évolution du vortex. Il faut souligner la rigueur avec laquelle ces développements compliqués, long, ardu, ont été réalisés. Les algorithmes et les procédures Maple qu'il a écrits sont aussi d'un grand intérêt, et lui ont permis de corriger nombreuses erreurs ou omissions souvent rencontrées dans la littérature scientifique.

La deuxième partie est consacrée aux applications du formalisme à différents cas concrets. Sont particulièrement intéressants ses résultats sur les instabilités des anneaux tourbillons et des deux filaments droits. Daniel Margerit discute dans le détail la méthode de coupure qu'il applique ensuite à l'étude de l'instabilité de Widnall. Il illustre ses résultats par des calculs numériques (dont il a aussi écrit les codes nécessaires). Il s'est aussi intéressé aux filaments ouverts, en particulier dans le cas où la courbure est faible, et où il obtient les

équations de Klein-Majda. Les différents régimes, en fonction des valeurs de paramètres, sont brièvement évoqués.

On peut cependant regretter une présentation confuse, qui utilise un style trop succinct et schématique. Daniel Margerit se limite souvent à un bref commentaire des formules, sans discuter les motivations et les implications physiques des équations. On ne peut pas suivre les dérivations dans le texte principal puisqu'elles sont imbriquées avec le contenu des annexes. La mise en page ne satisfait pas aux standards de qualité de textes mathématiques. La notation est souvent incohérente, et des nombreuses répétitions alourdissent le texte. Ces éléments font que le mémoire est de lecture difficile. Par ailleurs, les approximations faites n'apparaissent pas clairement. La pertinence des résultats ainsi que leur porté ne sont pas mis en valeur, ils sont vaguement mentionnés à l'aide d'une argumentation incomplète. Il serait donc très souhaitable d'améliorer la présentation générale, dont les défauts nuisent à la compréhension. Il faudrait aussi étoffer le texte avec des discussions plus compétentes où les calculs et les résultats se dégagent clairement. Malgré ces quelques points faibles, il est important de souligner l'effort considérable fourni pour mener jusqu'au bout des calculs difficiles, qui ouvrent de nouvelles perspectives pour mener une recherche à long terme.

En conclusion, cette thèse contient des résultats scientifiques intéressants, et mérite d'être soutenue devant le jury.

Alberto D. Verga.

RAPPORT SUR LA SOUTENANCE

de Doctorat de Daniel MARGERIT

6 Novembre 1997

Sans rappeler les rapports écrits, le jury note l'ampleur du travail tant par sa quantité que par sa qualité. Monsieur D. Margerit a étendu, complété et corrigé des résultats sur un sujet difficile déjà très étudié. La bibliographie pratiquement exhaustive couvre tous les aspects du sujet et de ses applications. Le candidat a montré sa connaissance des articles cités et donc sa culture sur le sujet. Le jury pense que ce travail est une contribution non seulement à la Mécanique des Fluides mais à l'application du calcul formel aux méthodes asymptotiques. La systématisation et l'automatisation des longs calculs que nécessitent l'asymptotique permettront à D. Margerit d'envisager des perspectives fructueuses à son travail.

L'exposé, bien qu'un peu technique sur un sujet très calculatoire, a été clair ; le candidat a évité l'accumulation de relations mathématiques.

En conséquence, le jury décerne à Monsieur D. Margerit le grade de Docteur avec la mention très honorable avec félicitations.



NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDOEUVRE CEDE-

D. Verga *R. Klein* *J.P. Brachier* *M. Rossi* *O. Sers-Gillette*
D. Verga *R. Klein* *J.P. Brachier* *M. Rossi* *O. Sers-Gillette*
Freudenberg

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ADMISSION AU GRADE DE DOCTEUR



Les membres du Jury soussignés, désignés par le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine,
VU la loi 84-52 du 26 janvier 1984 sur l'Enseignement Supérieur

VU le décret 84-573 du 5 juillet 1984 relatif aux diplômes nationaux de l'Enseignement Supérieur

VU le décret 84-723 du 17 juillet 1984 fixant la classification d'Etablissements Publics à caractère scientifique, culturel et professionnel

VU l'arrêté interministériel du 30 mars 1992 relatif aux Etudes de 3^e cycle

VU l'autorisation d'inscription à la préparation du Doctorat délivrée le 1992/1993
par le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

VU le Diplôme d'Etudes Approfondies (D.E.A.) de Mécanique & Energétique
obtenu le 1993

ou (1) VU la dérogation accordée le _____

VU l'autorisation de soutenance accordée le 9 Octobre 1997

Suite à la soutenance par l'intéressé(e) de la thèse ou des travaux intitulés :

"Mouvement et dynamique des filaments et des anneaux tourbillons de faible épaisseur"

prononcent l'admission de M. MARGERIT Daniel
né(e) à MONTBELIARD (25) le 5 Octobre 1970

au titre de DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
Spécialité : "MÉCANIQUE & ÉNERGÉTIQUE"

et lui attribuent la mention :

HONORABLE - TRÈS HONORABLE - TRÈS HONORABLE AVEC FÉLICITATIONS (1)
Autres Etablissements dans lesquels ont été préparés la thèse ou les travaux :

Fait à Vandœuvre, le 6 Novembre 1997

Les Membres du Jury (2)

MKLEIN Rupert (Rap) M VERGA Alberto (Rap) M SERO-GUILIAUME (Président)

TITRE Professeur TITRE Directeur Recherches TITRE Directeur Recherches
Université Wuppertal IRPHE Marseille ENSEM/INPL
Rupert U. *Adrienne*

M BRANCHER J.Pierre (Dir.Rech) ROSSI Maurice M

TITRE Professeur TITRE Chargé de Recherches TITRE
ENSEM/INPL Université Paris 6
J.P.B. *Rossi*

M M M

TITRE TITRE TITRE

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Prix de Thèses

*Vu la délibération du Conseil des Études Doctorales en date du 16 septembre 1998
Vu la délibération du Conseil Scientifique de l'Institut en date du 1 octobre 1998*

Nous, Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Décernons à :

Daniel MARGERIT

Le Prix de Thèses de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Fait à Nancy, le 19 Octobre 1998



Joël HARDY
Président de l'Institut National
Polytechnique de Lorraine



inpl
nancy

Dynamique et mouvement des filaments et des anneaux tourbillons de faible épaisseur

Résumé :

Un *filament tourbillon* est un cas particulier d'écoulement rotationnel, pour lequel la vorticité se trouve uniquement autour d'une courbe tridimensionnel, dite *fibre centrale* du filament. Calculer l'écoulement, c'est déterminer l'évolution de cette zone de vorticité, dite *filament tourbillon*, c'est à dire trouver le mouvement de la fibre centrale. Cette thèse reprend la démarche de Callegari et Ting pour obtenir l'équation d'évolution de la fibre centrale d'un anneau tourbillon en la complétant avec divers remarques et commentaires et en donnant des ordres supérieurs du développement. Nous mettons en valeur le développement des intégrales singulières de Biot et Savart à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Puis, les résultats obtenus sont utilisés pour justifier des méthodes de coupure et pour les généraliser au cas visqueux et avec vitesse axiale. Nous complétons les résultats de Widnall et Sullivan sur l'étude linéaire d'un anneau circulaire perturbé en donnant la période d'oscillation des différents modes et en comparant ces résultats avec une simulation numérique de l'équation d'évolution. Enfin, nous étudions les oscillations d'un filament droit et la stabilité de filaments parallèles contrarotatifs.

Mots clés :

filament tourbillon, anneau tourbillon, vorticité, mécanique des fluides
développement asymptotiques, intégrales singulières
coupure, mouvement, stabilité

Dynamics and motion of slender vortex filaments and rings

Abstract :

A vortex filament is a particular rotationnel flow in which the vorticity is located only around a three dimensional curve called *central line* of the filament. Solving the flow means finding the evolution of this vorticity region, called *vortex filament*, that is to say finding the motion of the central line. This dissertation proceed as Callegari and Ting to obtain this equation of motion in adding some remarks and comments and in giving higher order terms of the expansion. We point out the importance of singular Biot and Savart integral expansions performed with matched asymptotic expansions. Then, these results are used to justify cut-off methods and to generalise them to the case with viscosity and axial velocity. We complete Widnall and Sullivan's linear study of a perturbed circular vortex ring in giving the oscillation period of the different modes and in comparing these results with a numerical simulation of the equation of motion . Finally, we study the oscillations of a straight vortex filament and the stability of parallel counter-rotating vortex filaments.

Key words :

vortex filament, vortex ring, vorticity, fluid mechanics
asymptotic expansions, singular integrals
cut-off, motion, stability