

Sélection des ondes spirales twistées des milieux excitables tridimensionnels.

D. Margerit et D. Barkley
University of Warwick
IMFT Toulouse

<http://www.maths.warwick.ac.uk/~dmargeri>

<http://www.maths.warwick.ac.uk/~barkley>

<http://www.imft.fr>

Plan

Introduction

1. Solutions numériques et asymptotiques connues et leurs problèmes
2. Amélioration et généralisation de la résolution asymptotique
3. Confrontation Asymptotique / Numérique

Conclusion et Perspectives

Introduction: Équations des milieux excitables

Deux équations de réaction-diffusion couplées:

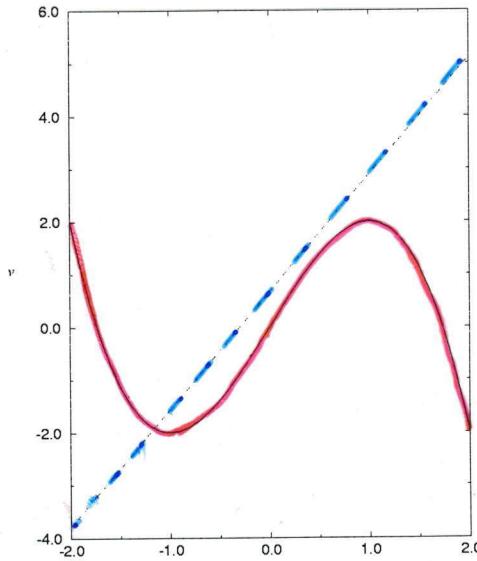
$$\begin{aligned}\epsilon \partial u / \partial t &= \epsilon^2 \nabla^2 u + f(u, v) \\ \partial v / \partial t &= g(u, v)\end{aligned}$$

avec $\epsilon \ll 1$

f et g sont les termes réactifs •

- FitzHugh-Nagumo(FHN)

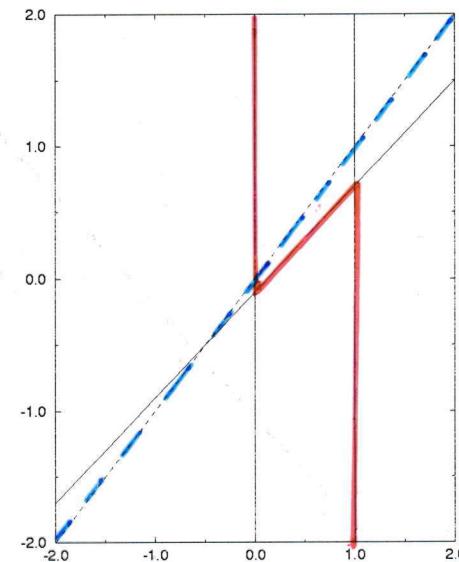
$$\begin{aligned}f(u, v) &= 3u - u^3 - v \\ g(u, v) &= u - \underline{\delta} - \underline{\gamma}v\end{aligned}$$



Courbes $f(u, v) = 0$ et $g(u, v) = 0$

- Modèle de Barkley

$$\begin{aligned} f(u, v) &= u(1-u)(u - (v + b)/a) \\ g(u, v) &= u - v \end{aligned}$$



Courbes $f(u,v)=0$ et $\underline{g(u,v)=0}$

- Modèle de Nobel (1979) : Dynamique des potentiels électriques des membranes des cellules cardiaques

$$\begin{aligned} f(u, v) &= -(I_i(u, v) + I_o(u, v)) / C_m \\ g(u, v) &= (v_\infty(u) - v) / \tau_v(u) \quad \text{où } v = m, h, n \end{aligned}$$

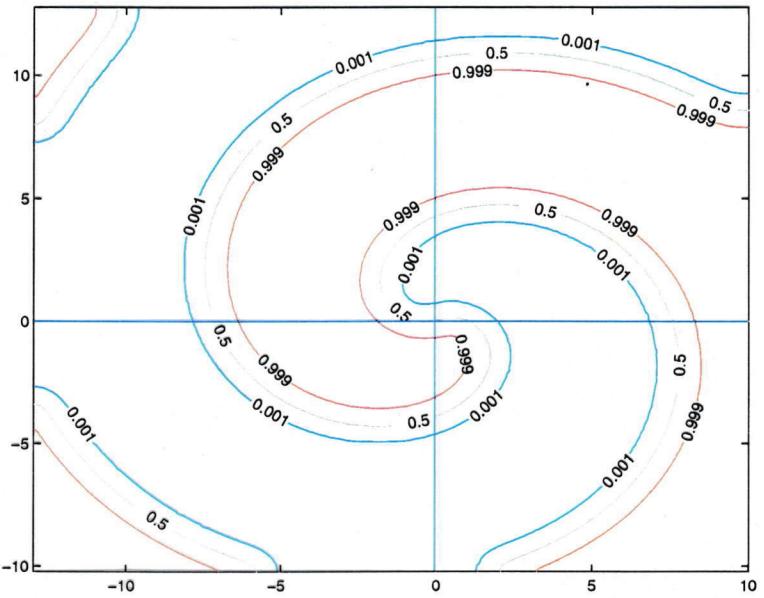
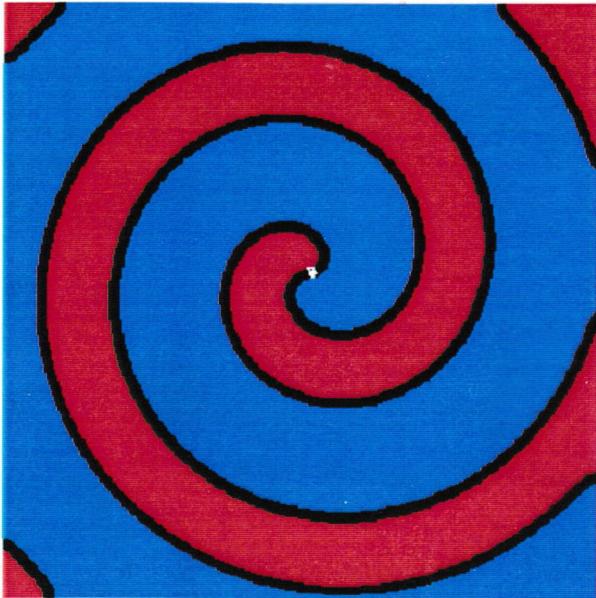
$$\begin{aligned} I_i(u, v) &= (400m^3h + g_{N_a}) (u - 40) \\ I_o(u, v) &= (g_K(u) + 1.2n^4) (u + 100) \end{aligned}$$

- u : membrane potential
- $v = m, h, n$: gate variables
- I_i, I_o : inward and outward currents

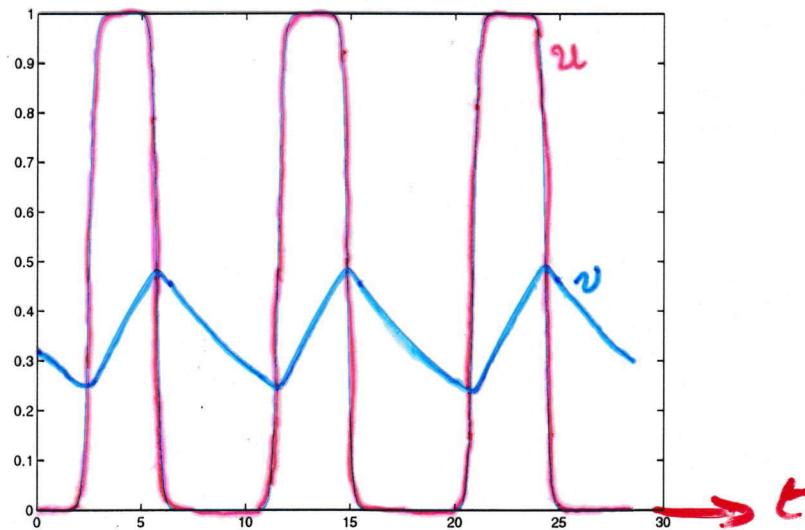
1 Solutions numériques et asymptotiques connues et leurs problèmes

Solution numérique

- Instationnaire 2D : EZ-spiral



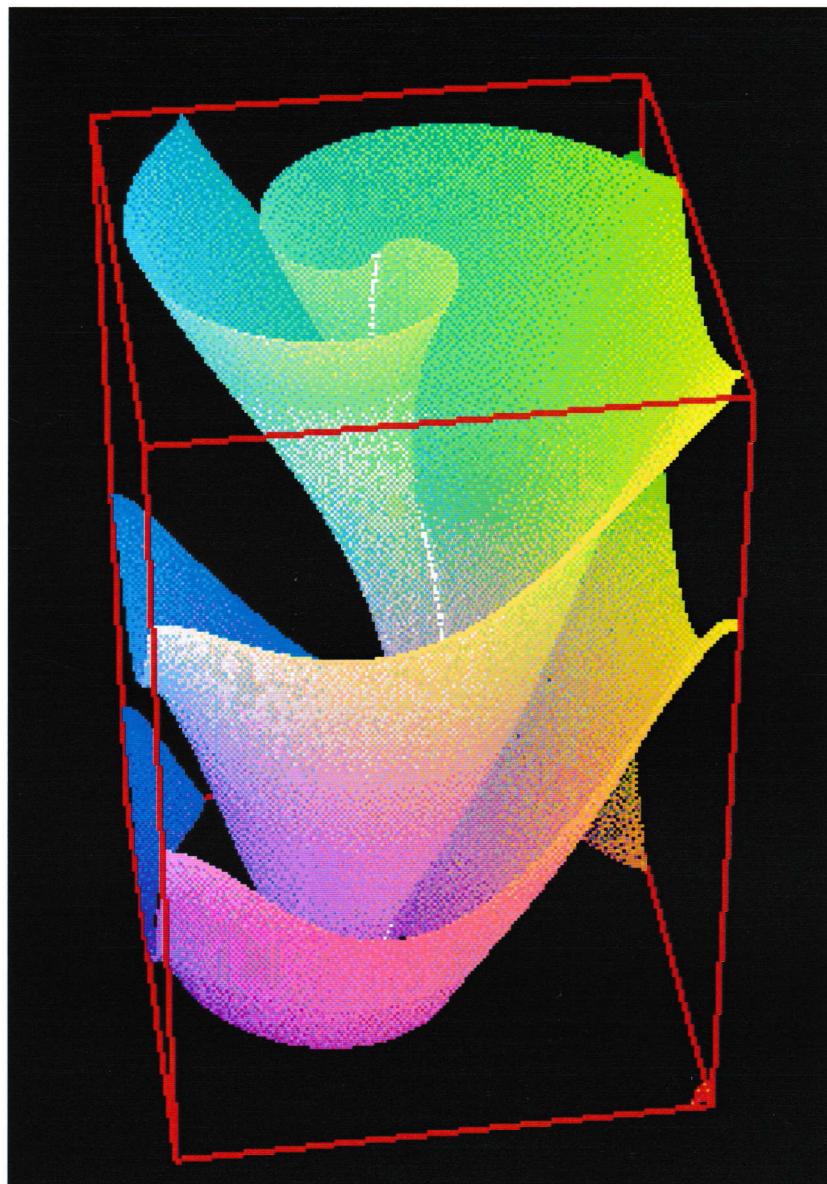
Spiral obtenue par EZ-spiral



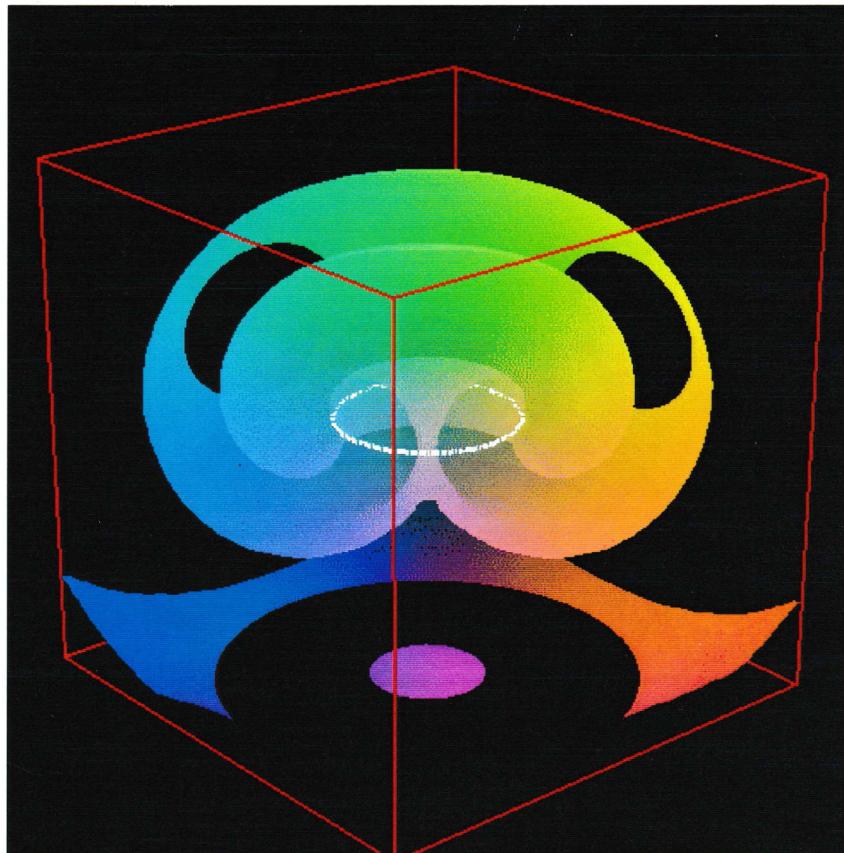
Évolution temporelle de \underline{u} et \underline{v} en un point fixe

Méthode de différences finies implicite (maillage fixe).

- Instationnaire 3D : EZ-scroll
Méthode de différences finies implicite (maillage fixe).



Filament twisté

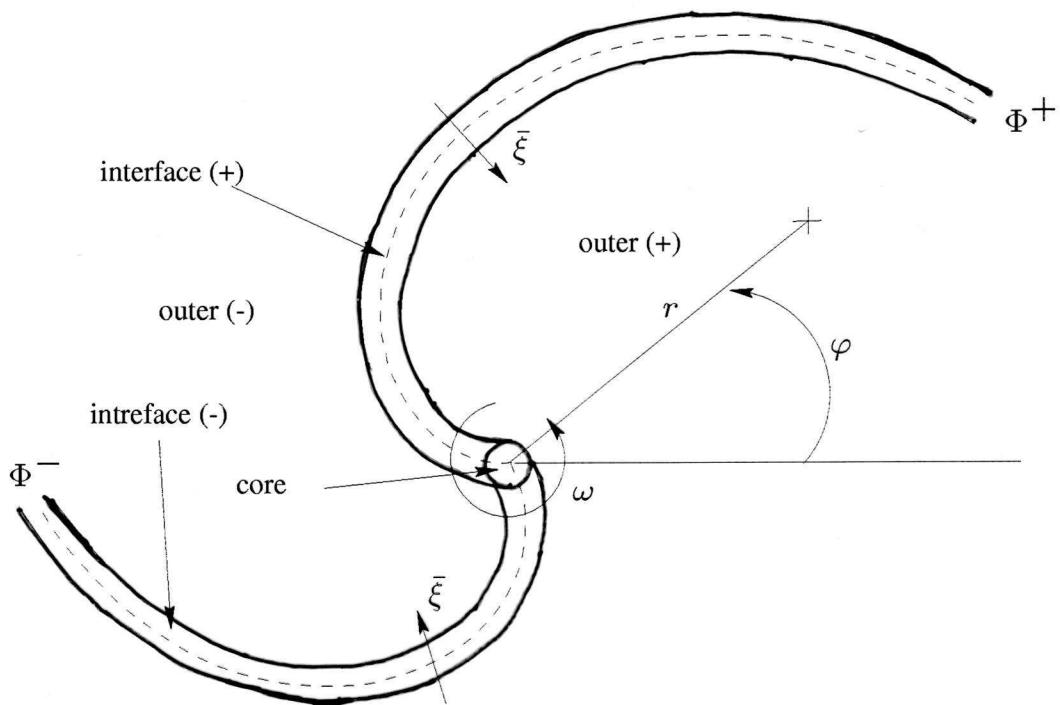


Anneau tourbillon



"Turbulence"

Solution asymptotique



Repérage des interfaces.

- Solution 2D instationnaire
 - Asymptotique dans l'interface
 - Mouvement de l'interface permis
 - Comportement singulier loin de l'interface
 - Alternative de Fredholm
Fife (Jour. Stat. Physics 1985)

$$c_N^\pm = -\frac{v^\pm}{\sqrt{2}} - \underline{\epsilon\kappa}$$

$$\partial v/\partial t = u^\pm - \delta - \gamma v$$

- c_N : vitesse normale
- $u^\pm = \pm\sqrt{3}$ (FHN)

- Solution 2D stationnaire: Karma (Phy.Rev.Lett.92)

$$\begin{aligned}\partial v/\partial t &= -\omega \partial v/\partial \varphi \\ \Psi^\pm &= r d\Phi^\pm/dr \\ \Delta\Phi &= \Phi^+ - \Phi^- = cst \\ v^\pm &= cst\end{aligned}$$

Karma définit:

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega \epsilon^{1/3} \\ \tilde{r} &= \sqrt{\Omega} \epsilon^{-2/3} r\end{aligned}$$

FiFe

Équation universelle de l'interface :

3/2
 $B = (\mu/\omega)$

$$\frac{d\Psi}{d\tilde{r}} + \frac{\Psi(1 + \Psi^2)}{\tilde{r}} = \tilde{r}(1 + \Psi^2) - \underline{B}(1 + \Psi^2)^{3/2},$$

Équations du Coeur: Kessler (Phys.Rev.Lett.92)

Le cœur n'est qu'une régularisation.

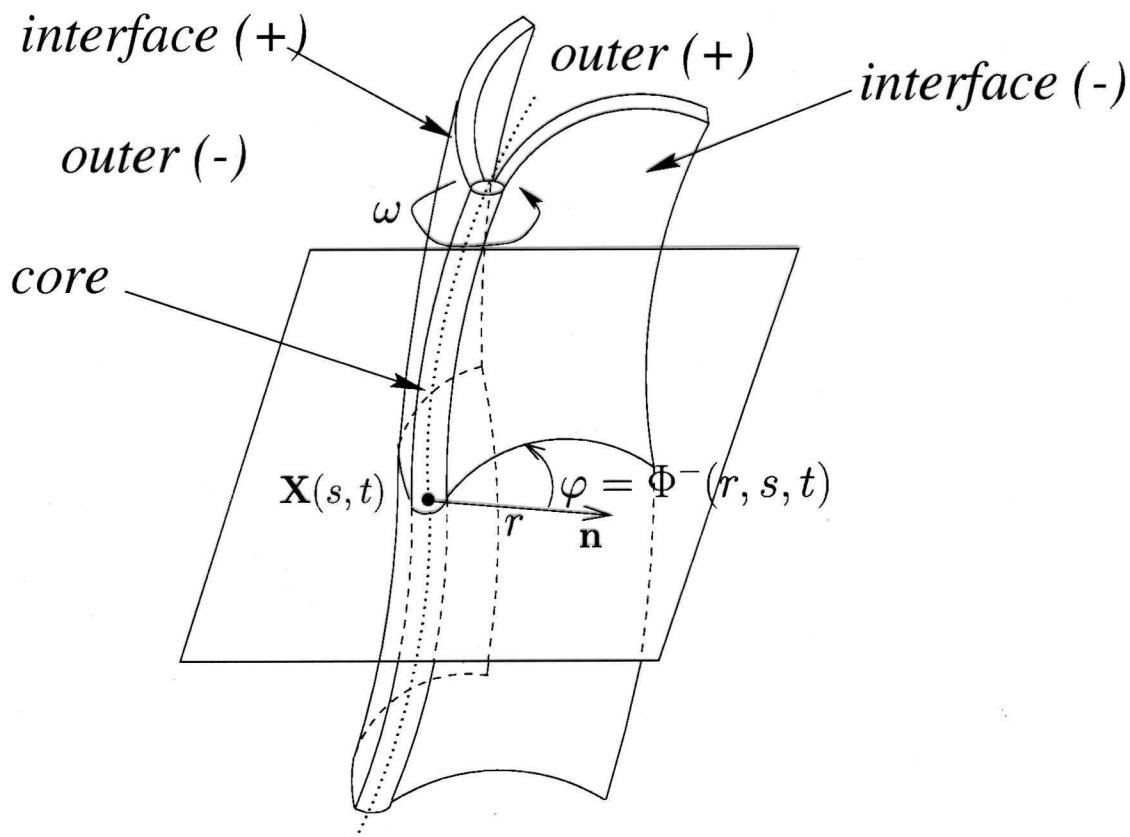
Inconvénients

- Solution 2D stationnaire:
 - Comparaison avec le numérique mauvaise
 - Loi d'échelles de Fife à moitié comprise:
 - * $v^\pm = O(\epsilon^{1/3})$
 - * terme $\epsilon\kappa$
 - * forme de l'équation initiale
- Solution 3D instationnaire: Mouvement du filament. Keener (SIAM Review 92) donne des équations 3D mais :
 - Ce n'est pas une généralisation des calculs 2D
 - Singularité des équations non montrée
 - Alternative de Fredholm invoquée
 - Équation du mouvement *postulées*
 - Ordre de la vitesse du mouvement en ϵ non précisé
 - Avantage de ϵ petit non utilisé pour simplifier

2 Amélioration et généralisation de la résolution asymptotique

Régions Asymptotiques/Géométrie 3D

- Région extérieure
- Région des interfaces : couche limite surfacique
- Région du filament : couche limite linéique



Régions asymptotiques

- Coordonnées polaires (r, φ)
- Interfaces ($u = 1/2$) : $\varphi = \Phi^\pm(r, s, t)$

Bonnes échelles de développement

Inconnues : $u(r, \varphi, s, t, \epsilon)$? $v(r, \varphi, s, t, \epsilon)$?
 $\mathbf{X}(s, t, \epsilon)$? $\Phi(r, s, t, \epsilon)$?

Loi d'échelles de Fife

$$\begin{aligned} t &= t/\epsilon^{1/3} \\ x &= x/\epsilon^{2/3} \\ \epsilon &= \underline{\epsilon^{1/3}} \end{aligned}$$

en plus

Nouvelle forme du système

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \partial u / \partial t &= \epsilon^2 \Delta^2 u + f(u, v) \\ \partial v / \partial t &= \epsilon g(u, v) \end{aligned} \text{ avec } \epsilon \ll 1$$

Les développements asymptotiques

- Courbe et surfaces :

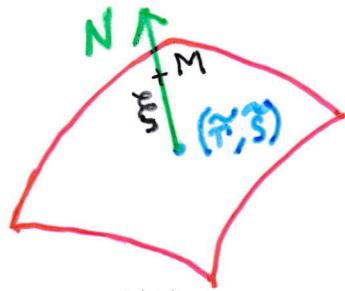
$$\begin{aligned} \Phi(r, s, t, \epsilon) &= \Phi^{(0)}(r, s, t) + \epsilon \Phi^{(1)}(r, s, t) + \dots \\ \mathbf{X}(s, t, \epsilon) &= \mathbf{X}^{(0)}(s, t) + \epsilon \mathbf{X}^{(1)}(s, t) + \dots \end{aligned}$$

- Région extérieure:

$$\begin{aligned} u(r, s, \varphi, t, \epsilon) &= u^{(0)}(r, s, \varphi, t) + \epsilon u^{(1)}(r, s, \varphi, t) + \dots \\ v(r, s, \varphi, t, \epsilon) &= v^{(0)}(r, s, \varphi, t) + \epsilon v^{(1)}(r, s, \varphi, t) + \dots \end{aligned}$$

- Région des interfaces :

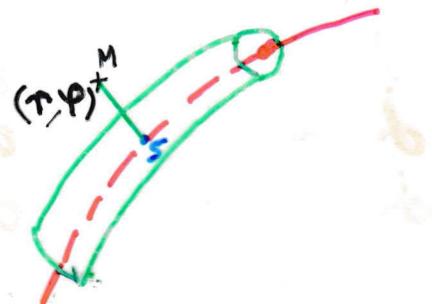
Coordonées (\tilde{r}, s, ξ)



$$\begin{aligned} u(\tilde{r}, s, \bar{\xi}, t, \epsilon) &= u^{i(0)}(\tilde{r}, \tilde{s}, \bar{\xi}, t) + \epsilon u^{i(1)}(\tilde{r}, \tilde{s}, \bar{\xi}, t) + \dots \\ v(\tilde{r}, s, \bar{\xi}, t, \epsilon) &= v^{i(0)}(\tilde{r}, \tilde{s}, \bar{\xi}, t) + \epsilon v^{i(1)}(\tilde{r}, \tilde{s}, \bar{\xi}, t) + \dots \end{aligned}$$

où $\bar{\xi} = \xi/\epsilon$.

- Dans le cœur :



$$\begin{aligned} u(\bar{r}, s, \varphi, t, \epsilon) &= u^{c(0)}(\bar{r}, s, \varphi, t) + \epsilon u^{c(1)}(\bar{r}, s, \varphi, t) + \dots \\ v(\bar{r}, s, \varphi, t, \epsilon) &= v^{c(0)}(\bar{r}, s, \varphi, t) + \epsilon v^{c(1)}(\bar{r}, s, \varphi, t) + \dots \end{aligned}$$

où $\bar{r} = r/\epsilon$.

Écriture des équations sur les coordonnées

- Fonction $\Psi \equiv r\partial\Phi/\partial r$
- Twist $\tau = |\partial \mathbf{X}/\partial s|T + \partial\Phi/\partial s$: taux de rotation de l'interface

Cascade d'équations

Extérieure:

- Ordre principal :

$$\begin{aligned} f(u^{(0)}, v^{(0)}) &= 0 \\ \partial v^{(0)} / \partial t &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow v^{(0)} = 0 \text{ ou } 1$$

- Premier ordre : $f_u = \partial f / \partial u$

$$\begin{aligned} \partial v^{(1)} / \partial t &= g(h^\pm(v^{(0)}), v^{(0)}) = g^\pm(v^{(0)}) \\ u^{(1)} &= -v^{(1)} \frac{f_v(u^{(0)}, v^{(0)})}{f_u(u^{(0)}, v^{(0)})} = 0 \end{aligned}$$

Coeur: ordre principal $\implies \dot{\underline{X}}^{(0)} = 0$

Interface:

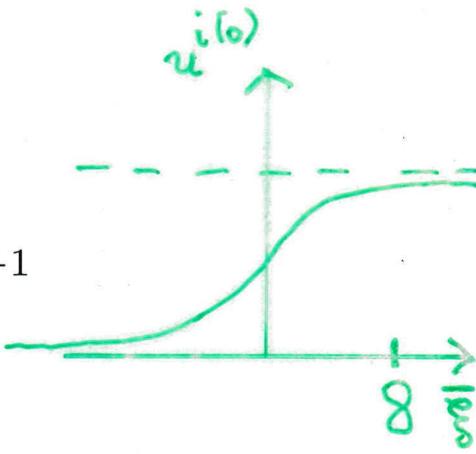
- Ordre principal :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{i(0)}}{\partial \bar{\xi}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u^{i(0)}}{\partial \bar{\xi}^2} + f(u^{i(0)}, v^{i(0)}) &= 0 \end{aligned}$$

La loi de raccord asymptotique donne

$$\begin{aligned} v^{i(0)} &= v^{(0)}(\xi = 0) \\ u^{i(0)}(\bar{\xi} = \pm\infty) &= u^{\pm(0)}(\xi = 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v^{i(0)} &= v^s = a/2 - b \\
 u^{i(0)} &= \left(1 + e^{-\bar{\xi}/\sqrt{2}}\right)^{-1} \\
 \implies v^{(0)} &= v^s.
 \end{aligned}$$



- Premier ordre :

$$\frac{\partial^2 u^{i(1)}}{\partial \bar{\xi}^2} + u^{i(1)} f_u(u^{i(0)}, v^s) = \mathcal{N}_h^{(1)}$$

$$\mathcal{N}_h^{(1)} = -v^{i(1)} f_v(u^{i(0)}, v^s) - r \dot{\Phi} \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{N} \frac{\partial u^{i(0)}}{\partial \bar{\xi}} + 2H \frac{\partial u^{i(0)}}{\partial \bar{\xi}}$$

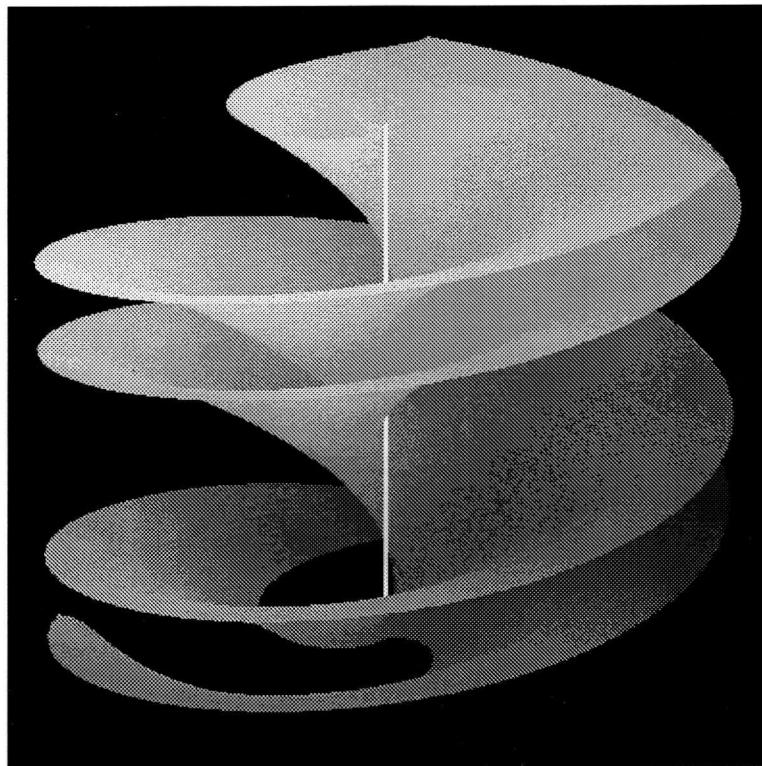
\mathbf{N} : normale à l'interface, $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$: base polaire, H : courbure moyenne de l'interface.

Solution (double var. cst.) et raccord asymptotique ($1/u$ et $1/(1-u)$) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} &= u^\pm - v^s \\
 -\frac{rh^\pm \dot{\Phi}^{(0)\pm}}{\sqrt{m^\pm}} &= 2H^\pm \mp \frac{\sqrt{2}}{a} v^{(1)\pm}
 \end{aligned}$$

avec $h^\pm \equiv |\partial \mathbf{X}/\partial s| (1 - rK \cos \Phi^{(0)\pm})$, m^\pm : déterminant du tenseur métrique, K : courbure du filament.

Solution Stationnaire Twistée



Filament droit twisté

Ordre principal

Développements asymptotiques :

$$\begin{aligned}\omega &= \omega^{(0)} + \epsilon\omega^{(1)} + \dots \\ \Psi(r) &= \Psi^{(0)}(r) + \epsilon\Psi^{(1)}(r) + \dots\end{aligned}$$

On a alors :

$$\underline{\Delta\Phi}^{(0)} = \Phi^{(0)-} - \Phi^{(0)+} = \underline{2\pi(1-v^s)}$$

$$q \frac{d\Psi^{(0)}}{d\tilde{r}} + \frac{\Psi^{(0)}(1 + \Psi^{(0)})^2}{\tilde{r}} = \tilde{r}(q + \Psi^{(0)})^2 - B(q + \Psi^{(0)})^{3/2},$$

où $q \equiv 1 + \tilde{\tau}^2 \tilde{r}^2$, avec $\tilde{r} = \sqrt{\omega^{(0)}} r$, $\tilde{\tau} = \tau / \sqrt{\omega^{(0)}}$

et $B = (\mu/\omega^{(0)})^{3/2}$,

où $\mu^{3/2} = \sqrt{2\pi}v^s(1-v^s)/a$.

Ordre supérieur

$$\begin{aligned}-\epsilon^2 \omega \partial u / \partial \varphi &= \epsilon^2 \nabla_{\perp}^2 u + u(1-u) \left(u - \frac{v+b}{a} \right), \\ -\omega \partial v / \partial \varphi &= \epsilon(u-v),\end{aligned}$$

avec $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2 / \partial r^2 + (1/r) \partial / \partial r + (q/r^2) \partial^2 / \partial \varphi^2$.

Nouvelle cascade d'équations.

On a alors :

$$\underline{\Delta \Phi^{(1)}} = \underline{\Phi^{(1)-}} - \underline{\Phi^{(1)+}} = 0$$

$$q \frac{d\tilde{\Psi}^{(1)}}{d\tilde{r}} + l(\tilde{r}) \tilde{\Psi}^{(1)} = m(\tilde{r}) = Dm_1(\tilde{r}) + m_2(\tilde{r}),$$

où $\tilde{\Psi}^{(1)} \equiv a\omega^{(0)}\underline{\Psi^{(1)}}$, $\Psi^{(1)} = rd\Phi^{(1)\pm}/dr$, $D = a\omega^{(1)}$ et

$$l(\tilde{r}) = \frac{1}{\tilde{r}} + \tilde{r}\Psi^{(0)} + 3\Psi^{(0)} \left[\frac{\Psi^{(0)}}{\tilde{r}} - \tilde{r} + B\sqrt{q + \Psi^{(0)2}} \right],$$

$$m_1(\tilde{r}) = \tilde{r}(q + \Psi^{(0)2}) + B(q + \Psi^{(0)2})^{3/2},$$

$$m_2(\tilde{r}) = \frac{5}{3} \frac{(q + \Psi^{(0)2})^2}{\tilde{r}}.$$

Solution Générale :

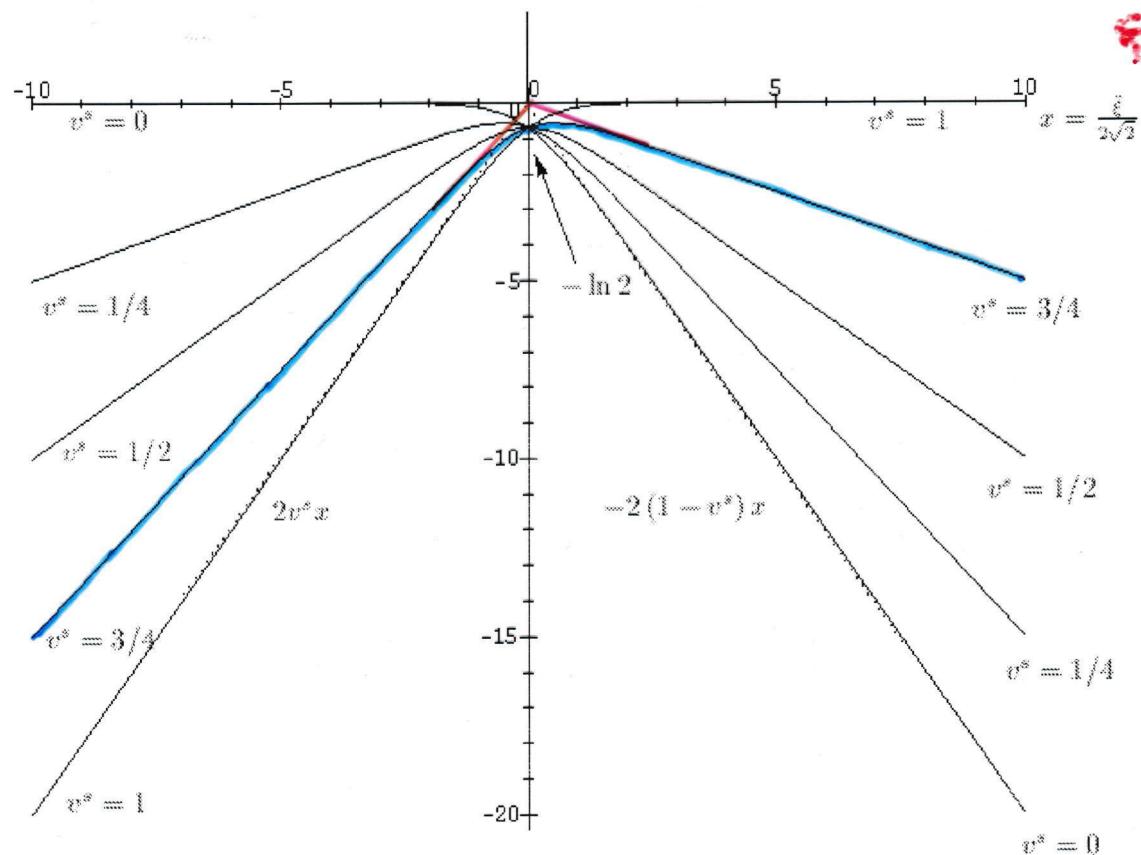
$$\tilde{\Psi}^{(1)}(r) = \tilde{\Psi}_h^{(1)}(r) \left(A + \int_0^r \frac{m(r^*)}{\tilde{\Psi}_h^{(1)}(r^*)} dr^* \right),$$

$$\tilde{\Psi}_h^{(1)} = \frac{(q + \Psi^{(0)2})^{3/2}}{qr} \exp \left(- \int_0^r \frac{\rho \Psi^{(0)}}{1 + \tau^2 \rho^2} d\rho \right).$$

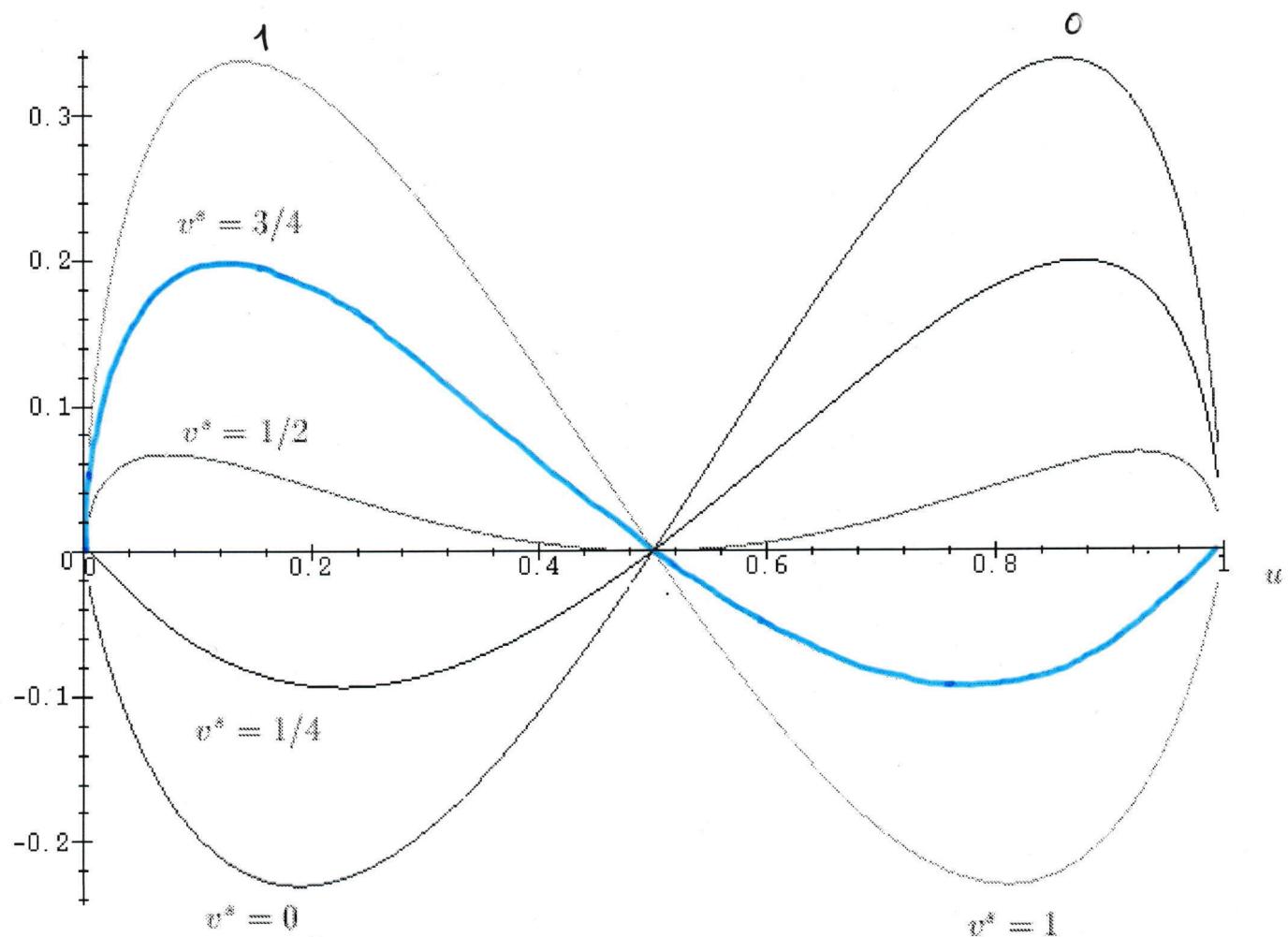
En fait $A = 0$ et le comportement en l'infini implique:

$$D = -\frac{c_2}{c_1} \quad \text{où} \quad c_i = \int_0^\infty \frac{m_i(r^*)}{\tilde{\Psi}_h^{(1)}(r^*)} dr^*.$$

Champs :



Variation de $v^{(2)}$ dans l'interface.



$u^{(2)}$ en fonction de u .

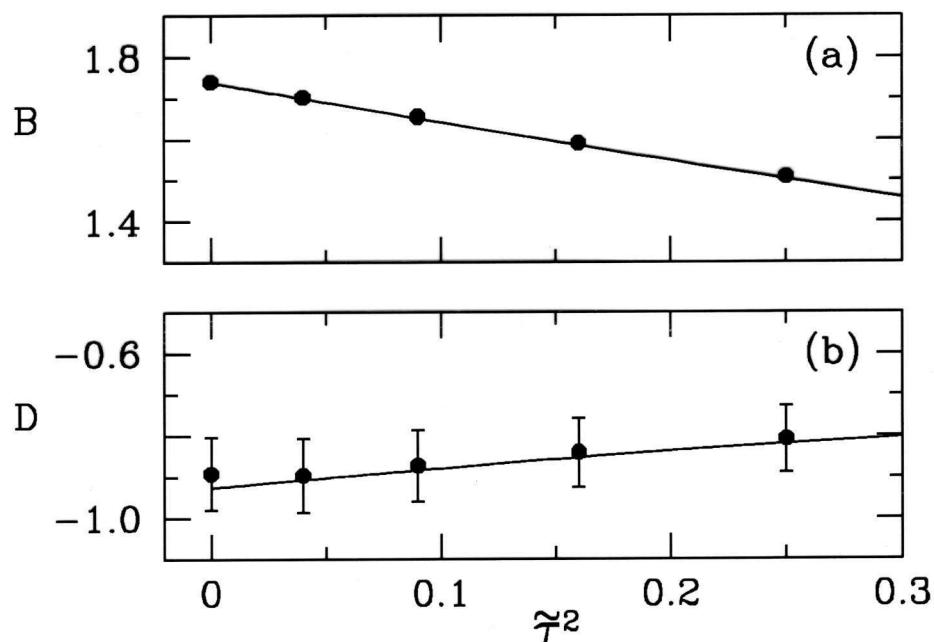
- ⇒ Déroulement des calculs sur Maple
- ⇒ Vérification finale indépendante de la solution (au niveau formel) sur Maple

3 Comparaison avec la résolution numérique de l'EDP

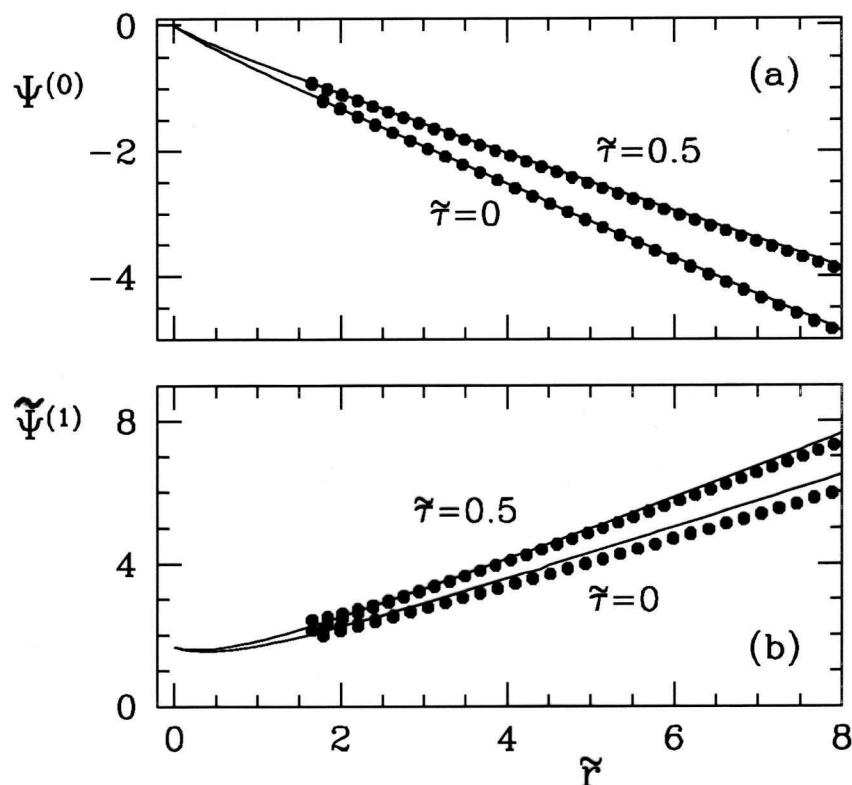
Méthode numérique

- Méthode spectrale en φ : 256 points
- Différences finies du 2^{ième} ordre en r : $\Delta r = 0.05$
- Méthode de Newton

Deux premiers ordres

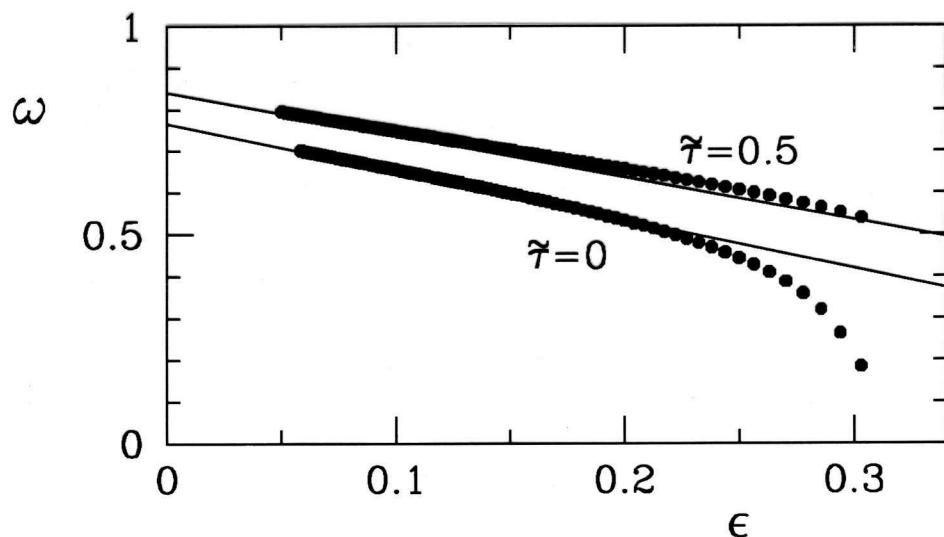


Sélection de la fréquence



Sélection de la forme de la spirale

A valeur de ϵ donnée



Sélection de la fréquence

L
e
a
d
i
n
g

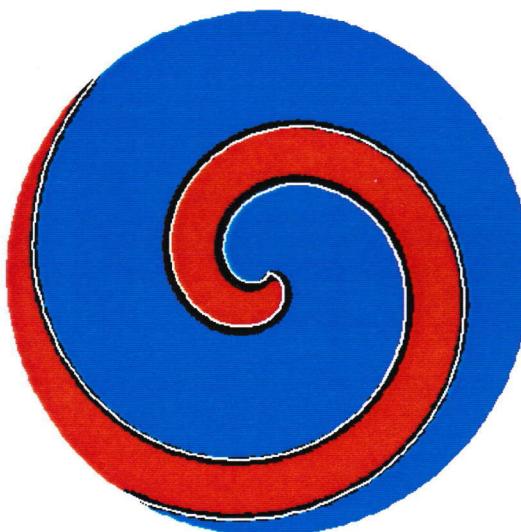
twist=0



twist=0.5



2
O
r
d
e
r
s



Sélection de la forme de la spirale : $\epsilon = 0.1$

Conclusion et Perspectives

- Confrontation quantitative Asymptotique/ Numérique pour un problème de couche limite
- Ordre principal et premier ordre du problème stationnaire avec twist
- Utilisation de Maple : gain de temps
- Vérification des résultats au niveau formel (Maple)
- Écriture de la cascade d'équations pour le problème 3D sur les bonnes échelles et résolution hors du coeur
- Écriture des équations pour le coeur
- Résolution ? et raccord asymptotique entre le coeur et l'extérieur ? \implies Équation du mouvement ?
Confrontation avec du numérique 3D?