Álgebras de Hopf y grupos afines

Contenidos

Contenidos

Definición y algunas construcciones

k: anillo conmutativo (con unidad).

Definición

Una k-álgebra es un anillo A junto con un morfismo de anillos $\eta_A : k \to A$.

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(A, B) = \left\{ f : A \to B \text{ de anillos}, f \circ \eta_A = \eta_B \right\}$$

A es k-módulo con $(\lambda, a) \mapsto \eta_A(\lambda)\, a$ y $\mu_A : A \times A \to A$ es k-bilineal.

El álgebra libre

Dado un conjunto X, una *palabra* en X es $x_1 \cdots x_n$ o $\varnothing$. Definimos $k\{X\}$, el k-módulo libre en las palabras en X. Es un álgebra con

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_n})(x_{i_{n+1}} \cdots x_{i_m}) = x_{i_1} \cdots x_{i_n} x_{i_{n+1}} \cdots x_{i_m} \ .$$

Ejemplos

- $k\{x\} = k[x]$, *polinomios en una variable;*
- $k\{x, y\} \neq k[x, y]$, *pues* $xy \neq yx$.

Proposición

Dados un conjunto X*, una* k*-álgebra* A *y una función* $f : X \to A$*, existe un único morfismo* $\tilde{f} : k\{X\} \to A$ *tal que* $\tilde{f}(x) = f(x)$*, si* $x \in X$.

El álgebra libre (cont.)

Existe una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}\left(k\{X\}, A\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\left(X, UA\right) .$$

En particular, $\mathrm{Hom}_{k-alg}\left(k\{x,y\}, A\right) = A^2$, vía $f \mapsto (f(x), f(y))$.
Un poco más en general,

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}\left(k\{X\}/I, A\right) \simeq \left\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\left(X, UA\right) \;:\; \tilde{f}(I) = 0\right\} .$$

Ejemplo

Para el álgebra $k[x,y] \simeq k\{x,y\}/\langle xy - yx\rangle$,

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}\left(k[x,y], A\right) \simeq \left\{(a,b) \in A^2 \;:\; ab = ba\right\} .$$

Contenidos

La recta y el plano afines

Asumimos A conmutativa. Existen biyecciones

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{k-alg}\big(k[x],A\big) &\simeq A\ , \\ \mathrm{Hom}_{k-alg}\big(k[x',x''],A\big) &\simeq A^2 \quad \text{y} \\ \mathrm{Hom}_{k-alg}\big(k,A\big) &\simeq \{0\} \quad (\ = \{\eta_A\}\ )\ . \end{aligned}$$

Queremos expresar las leyes de grupo abeliano de A de manera universal:

$$+ : A \times A \to A \quad , \quad 0 : \{0\} \to A \quad \text{y} \quad - : A \to A\ .$$

La recta y el plano afines (cont.)

Proposición

Vía las biyecciones, los morfismos $\Delta : k[x] \to k[x', x'']$, $\varepsilon : k[x] \to k$ *y* $S : k[x] \to k[x]$, *determinados por*

$$\Delta(x) = x' + x'' \quad , \quad \varepsilon(x) = 0 \quad y \quad S(x) = -x \; ,$$

se corresponden con $+$, 0 *y* $-$, *respectivamente.*

Demostración.

Δ induce $\Delta^* : \mathrm{Hom}_{k-alg}\big(k[x', x''], A\big) \to \mathrm{Hom}_{k-alg}\big(k[x], A\big)$ dada por $\Delta^*(f) = f \circ \Delta$. Vale

$$\big(\Delta^* f\big)(x) = f(x' + x'') = f(x') + f(x'') \; .$$

$\square$

La recta y el plano afines (cont.)

Dados $f, g : k[x] \to A$, definimos la "suma" $\Delta^*(f,g) : k[x] \to A$: si $f(x) = a$ y $g(x) = b$,

$$\Delta^*(f,g)(x) \;=\; a + b \;.$$

La suma satisface:

- $\Delta^*(f, \Delta^*(g,h)) = \Delta^*(\Delta^*(f,g), h)$;
- $\Delta^*(f, \varepsilon^*(\eta_A)) = \Delta^*(\varepsilon^*(\eta_A), f) = f$;
- $\Delta^*(f, S^*(f)) = \Delta^*(S^*(f), f) = \varepsilon^*(\eta_A)$;
- $\Delta^*(f,g) = \Delta^*(g,f)$.

$$\Delta^*(f, \Delta^*(g,h))(x) \;=\; f(x) + g(x) + h(x) \;=\; \Delta^*(\Delta^*(f,g),h)(x) \;.$$

La recta y el plano afines (cont.)

Todo morfismo de k-álgebras $\varphi : A \to B$ induce $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$. Esta *función* es morfismo de grupos:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x', x''], A) & \xrightarrow{\Delta^*} & \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], A) \\
{\scriptstyle\varphi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_*} \\
\mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x', x''], B) & \xrightarrow[\Delta^*]{} & \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], B)
\end{array}$$

$\Delta^* : \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x', x''], -) \stackrel{\cdot}{\to} \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], -)$ es una transformación natural. ε^* y S^* también.

La recta y el plano afines (cont.)

Existe G : $\mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Grp}$ tal que

$$U \circ G \;=\; \mathrm{Hom}_{k-alg}\big(k[x], -\big) \;.$$

La función $(f \mapsto f(x))$: $\mathrm{Hom}_{k-alg}\big(k[x], A\big) \to A$ es un isomorfismo de grupos τ_A : $G(A) \to (A, +)$ una t.n.:

$$\tau_B \circ \varphi_*(f) \;=\; (\varphi \circ f)(x) \;=\; \varphi(f(x)) \;=\; \varphi_* \circ \tau_A(f)$$

Si $(-, +)$: $\mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Grp}$ el grupo aditivo subyacente,

$$\tau \;:\; G \stackrel{\cdot}{\to} (-, +)$$

es un isomorfismo natural.

El grupo multiplicativo

$A^\times$: $\mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Grp}$ el grupo multiplicativo subyacente.

$$\times : A^\times \times A^\times \to A^\times \quad , \quad 1 : \{1\} \to A^\times \quad \text{y} \quad {}^{-1} : A^\times \to A^\times \ .$$

Existen biyecciones ($\tau_A : f \mapsto f(\bar{x})$)

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}\left(k[x, x^{-1}], A\right) \simeq A^\times$$
$$\mathrm{Hom}_{k-alg}\left(k[x', x'', x'^{-1}, x''^{-1}], A\right) \simeq A^\times \times A^\times \ ,$$

donde

$$k[x, x^{-1}] := k[x, y]/\left\langle xy - 1\right\rangle \ ,$$
$$k[x', x'', x'^{-1}, x''^{-1}] := k[x', y', x'', y'']/\left\langle x'y' - 1, x''y'' - 1\right\rangle \ .$$

El grupo multiplicativo (cont.)

Proposición

Los morfismos $\Delta : k[x, x^{-1}] \to k[x', x'', x'^{-1}, x''^{-1}]$, $\varepsilon : k[x, x^{-1}] \to k$ *y* $S : k[x, x^{-1}] \to k[x, x^{-1}]$ *determinados por*

$$\Delta(x) = x'x'' \quad , \quad \varepsilon(x) = 1 \quad y \quad S(x) = x^{-1}$$

se corresponden con $\times$, 1 *y* $^{-1}$.

Corolario

$\Delta^*, \varepsilon^*, S^*$ *son t.n. de funtores de tipo* $\mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Set}$ *y existe* $G : \mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Grp}$ *tal que*

$$U \circ G = \mathrm{Hom}_{k-alg}\left(k[x, x^{-1}], -\right) .$$

Las funciones τ_A *inducen un isomorfismo natural* $\tau : G \stackrel{.}{\to} (-, \times)$.

Producto de matrices

Sea $\mathrm{Mat}(2) = k[a,b,c,d]$. $f \mapsto f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix}$ induce

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}\big(\mathrm{Mat}(2), A\big) \simeq A^4 = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(A) \; .$$

Duplicamos las variables: $\mathrm{Mat}(2)^{\otimes 2} = k[a', b', c', d', a'', b'', c'', d'']$
y buscamos $\Delta : \mathrm{Mat}(2) \to \mathrm{Mat}(2)^{\otimes 2}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k-alg}\big(\mathrm{Mat}(2)^{\otimes 2}, A\big) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(A)^2 \\ {\scriptstyle \Delta^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \cdot} \\ \mathrm{Hom}_{k-alg}\big(\mathrm{Mat}(2), A\big) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(A) \end{array}$$

conmute.

Producto de matrices (cont.)

Debe cumplirse

$$f \circ \Delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = f\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \right) f\left(\begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} \right)$$
$$= f\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} \right) .$$

Proposición

Si $\Delta : \mathrm{Mat}(2) \to \mathrm{Mat}(2)^{\otimes 2}$ *es el morfismo determinado por*

$$\Delta \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} ,$$

el diagrama conmuta. $\Delta(ad - bc) = (a'd' - b'c')(a''d'' - b''c'').$

GL(2) y SL(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(2) &= \mathrm{Mat}(2)[t]/\left\langle (ad-bc)\,t-1\right\rangle \\ \mathrm{SL}(2) &= \mathrm{GL}(2)/\left\langle t-1\right\rangle = \mathrm{Mat}(2)/\left\langle ad-bc-1\right\rangle \ .\end{aligned}$$

Dada una k-álgebra conmutativa A, existen biyecciones

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{k-alg}\big(\mathrm{GL}(2),A\big) &\simeq \mathrm{GL}_2(A) \quad \text{y} \\ \mathrm{Hom}_{k-alg}\big(\mathrm{SL}(2),A\big) &\simeq \mathrm{SL}_2(A)\ ,\end{aligned}$$

pues, si $\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(A)$, existe único $f : \mathrm{Mat}(2)[t] \to A$ tal que

$$f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f(t) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}\ .$$

GL(2) y SL(2) (cont.)

Queremos

$$\Delta \;:\; \mathrm{GL}(2) \;\to\; \mathrm{GL}(2)^{\otimes 2} \;=\; \mathrm{Mat}(2)^{\otimes 2}[t', t'']/I \;,$$

donde $I = \langle (a'd' - b'c')\,t' - 1, (a''d'' - b''c'')\,t'' - 1\rangle$. Definimos $\Delta :\; \mathrm{Mat}(2)[t] \to \mathrm{Mat}(2)^{\otimes 2}[t', t'']$, extendiendo por

$$\Delta(t) \;=\; t'\,t'' \;.$$

Se cumple $\Delta((ad - bc)\,t - 1) = 0$ en $\mathrm{GL}(2)^{\otimes 2}$.

GL(2) y SL(2) (cont.)

Proposición

Δ, junto con $\varepsilon : \mathrm{GL}(2) \to k$ y $S : \mathrm{GL}(2) \to \mathrm{GL}(2)$ dados por

$$\varepsilon \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon(t) = 1 \ ,$$

$$S \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad - bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad , \quad S(t) = t^{-1} \ ,$$

se corresponden con el producto, la identidad y el inverso.

Contenidos

Producto tensorial de álgebras

Proposición

Sean A, B k-álgebras y sea $A \otimes_k B$ el k-módulo con producto

$$(a \otimes b)(a_1 \otimes b_1) = aa_1 \otimes bb_1 \ .$$

$A \otimes_k B$ es k-álgebra y

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(A \otimes_k B, C) \simeq \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{k-alg}(B, C) \ ,$$

para toda álgebra conmutativa C, dada por

$$(f, g) \mapsto (\mu_C \circ (f \otimes g) : (a \otimes b) \mapsto f(a)\, g(b)) \ .$$

Relación con Δ

Proposición

Sea $A = k\{X\}/I$. Sean X', X'' copias de X y sean $I' \triangleleft k\{X'\}$ e $I'' \triangleleft k\{X''\}$ los ideales correspondientes a I. Entonces

$$A \otimes_k A \simeq A^{\otimes 2} := k\{X' \sqcup X''\}/\left\langle I', I'', X'X'' - X''X' \right\rangle ,$$

vía $x' \mapsto x \otimes 1$ y $x'' \mapsto 1 \otimes x$.

Por ejemplo, $k[x', x''] \simeq k[x] \otimes k[x]$.

Observación

El "producto de matrices" Δ está caracterizado por

$$\Delta \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .$$

Relación con Δ (cont.)

Observación

$\mathrm{Hom}_{k-alg}\big(k[x], A\big)$ *es abeliana:*

$$\Delta^*(f,g)(x) \;=\; \mu_A(f\otimes g)(x\otimes 1 + 1\otimes x) \;=\; f(x)+g(x)$$
$$\Delta^*(g,f)(x) \;=\; g(x)+f(x)\ ,$$

$\mathrm{Hom}_{k-alg}\big(\mathrm{GL}(2), A\big)$, *no:*

$$\Delta^*(f,g)(a) \;=\; \mu_A\circ(f\otimes g)(a\otimes a + b\otimes c) \;=\; f(a)\,g(a)+f(b)\,g(c)$$
$$\Delta^*(g,f)(a) \;=\; g(a)\,f(a)+g(b)\,f(c)\ .$$

Contenidos

Definición

Una k-coálgebra es un k-módulo C y morfismos $\Delta : C \to C \otimes_k C$ y $\varepsilon : C \to k$ tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta \otimes \mathrm{id}"'] \\ C \otimes C \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] & C \otimes k \\ & C \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

conmutan. (C, Δ, ε) es coconmutativa, si $\Delta \circ \tau = \Delta$, donde $\tau(c \otimes c') = c' \otimes c$. $f : C \to D$ es morfismo de coálgebras, si

$$\begin{aligned} \Delta_D \circ f &= (f \otimes f) \circ \Delta_C \quad \text{y} \\ \varepsilon_D \circ f &= \varepsilon_C \end{aligned}$$

Ejemplos

- (k, Δ, ε) con $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ y $\varepsilon(1) = 1$;
- en el k-módulo $k[x]$ (polinomios),

$$\Delta(x) \;=\; x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad \text{y} \quad \varepsilon(x) \;=\; 0\;;$$

- dado un conjunto G, en el k-módulo libre $k[G]$ con base G

$$\Delta(g) \;=\; g \otimes g \quad \text{y} \quad \varepsilon(g) \;=\; 1\;;$$

- dada (C, Δ, ε), $C^{\mathrm{cop}} = (C, \Delta^{\mathrm{op}}, \varepsilon)$, con $\Delta^{\mathrm{op}} = \tau \circ \Delta$.

Observación

$k[G]^{\mathrm{cop}} = k[G]$.

Coálgebra de matrices

$A = \mathrm{Mat}_{m\times m}(k)$ con base $\{E_{ij}\}_{ij}$. Sea $\{x_{ij}\}_{ij}$ la base dual en A^*. Los morfismos de k-módulos determinados por

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{m} x_{ik} \otimes x_{kj} \quad \text{y} \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$$

definen una coálgebra $(A^*, \Delta, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(x_{ij}) &= \sum_{k=1}^{m} x_{ik} \otimes \Delta(x_{kj}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} x_{ik} \otimes x_{kl} \otimes x_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{m} \Delta(x_{il}) \otimes x_{lj} = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x_{ij}) \,.\end{aligned}$$

Observación

$A^{*\mathrm{cop}} \neq A^*$.

Producto tensorial de coálgebras

Dadas coálgebras $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$, el k-módulo $C \otimes_k D$ es coálgebra con

$$\begin{aligned} \Delta &:= (\mathrm{id}_C \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \quad \text{y} \\ \varepsilon &:= \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D \end{aligned}$$

$(\tau(c \otimes d) = d \otimes c)$.

Ejemplo

Dados conjuntos G e H, el k-isomorfismo

$$k[G] \otimes_k k[H] \simeq k[G \times H] \;,$$

dado por $(g, h) \mapsto g \otimes h$, es isomorfismo de coálgebras.

Contenidos

La biálgebra k

Sobre el anillo k tenemos (k, μ, η) y (k, Δ, ε). Son “compatibles”: por ejemplo, evaluando en $1 \otimes 1$,

$$\Delta \circ \mu \; = \; (\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \; .$$

$\mu : \; k \otimes k \to k$ y $\eta : \; k \to k$ son morfismos de coálgebras;
$\Delta : \; k \to k \otimes k$ y $\varepsilon : \; k \to k$ son morfismos de álgebras.

Definición

Una biálgebra es un k-módulo B con estructuras (B, μ, η) y (B, Δ, ε) tales que μ, η son morfismos de coálgebras (equivalentemente, Δ, ε son morfismos de álgebras):

$$\begin{aligned} \Delta \circ \mu &= (\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \ , \\ \mu_k \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon) &= \varepsilon \circ \mu = \varepsilon \otimes \varepsilon \ , \\ (\eta \otimes \eta) \circ \Delta_k &= \Delta \circ \eta = \eta \otimes \eta \quad \text{y} \\ \eta_k &= \varepsilon \circ \eta = \varepsilon_k \ . \end{aligned}$$

Un morfismo de biálgebras es un morfismo $f : B \to B'$ de álgebras y coálgebras:

$$\begin{aligned} \Delta_{B'} \circ f &= (f \otimes f) \circ \Delta_B \quad , \quad \varepsilon_{B'} \circ f = \varepsilon_B \ , \\ f \circ \mu_B &= \mu_{B'} \circ (f \otimes f) \quad \text{y} \quad f \circ \eta_B = \eta_{B'} \ . \end{aligned}$$

Polinomios

En el álgebra $k[x]$,

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad \text{y} \quad \varepsilon(x) = 0$$

determinan morfismos de álgebras. $(k[x], \Delta, \varepsilon)$ es coálgebra:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\
&= (x \otimes 1 + 1 \otimes x) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x \ , \\
(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(x) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\
&= x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes (x \otimes 1 + 1 \otimes x) \ .
\end{aligned}$$

Polinomios (cont.)

En $k[x_1, \dots, x_n]$, $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$, $\varepsilon(x_i) = 0$.
$k[x_1, \dots, x_n]^{\mathrm{cop}} = k[x_1, \dots, x_n]$.

Observación

El isomorfismo de álgebras $k[x', x''] \simeq k[x] \otimes k[x]$ *dado por* $\phi(x') \mapsto x \otimes 1$, $\phi(x'') \mapsto 1 \otimes x$ *es isomorfismo de coálgebras:*

$$\begin{aligned}
(\phi \otimes \phi) \circ \Delta(x') &= \phi(x') \otimes \phi(1) + \phi(1) \otimes \phi(x') \\
&= x \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \\
\Delta \circ \phi(x') &= (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)(x \otimes 1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})((x \otimes 1 + 1 \otimes x) \otimes 1 \otimes 1) .
\end{aligned}$$

Biálgebra de matrices

En el álgebra de polinomios $\mathrm{Mat}(m) = k[x_{11}, \cdots, x_{mm}]$,

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{m} x_{ik} \otimes x_{kj} \quad \text{y} \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$$

determinan morfismos de álgebras. Pero $(\mathrm{Mat}(m), \Delta, \varepsilon)$ es coálgebra (análogo a coálgebra de matrices).

Observación

Como coálgebras $\mathrm{Mat}(m) \not\simeq k[x_{11}, \ldots, x_{mm}]$

Biálgebra de un monoide

Sea G un monoide con producto $\mu : G \times G \to G$ y unidad $e \in G$, $(k[G], \Delta, \varepsilon)$ la coálgebra del conjunto. $(k[G], \mu, e)$ es álgebra y μ y $1 \mapsto e$ son morfismos de coálgebras:

$$\begin{aligned} \Delta \circ \mu(x, y) &= \mu(x, y) \otimes \mu(x, y) = \mu_{\otimes}\big((x \otimes x), (y \otimes y)\big) \\ &= \mu(\Delta(x), \Delta(y)) \quad \text{y} \\ \varepsilon \circ \mu(x, y) &= 1 = \mu(\varepsilon(x), \varepsilon(y)) \ . \end{aligned}$$

Contenidos

Convolución y antípoda

Sean (A, μ, η), (C, Δ, ε). La *convolución* de $f, g \in \mathrm{Hom}_k(C, A)$, es

$$f * g \; := \; \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta \; \in \; \mathrm{Hom}_k(C, A) \; .$$

Si $\Delta(x) = \sum_i x_i' \otimes x_i''$, $f * g(x) = \sum_i f(x_i')\, g(x_i'')$

Definición

Una antípoda en $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *es* $S \in \mathrm{End}_k(H)$ *tal que*

$$S * \mathrm{id}_H \; = \; \mathrm{id}_H * S \; = \; \eta \circ \varepsilon \; .$$

$\sum_i x_i' S(x_i'') = \varepsilon(x) \cdot 1 = \sum_i S(x_i') x_i''$. *Si existe, es única.*

Definición

Un *álgebra de Hopf* es una biálgebra H con antípoda. Un morfismo de álgebras de Hopf es un morfismo de biálgebras.

Observación

$S : H \to H^{\text{op cop}} = (H, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon)$ *es morfismo de biálgebras.*
Si $H = k\{X\}/I$ *es biálgebra, dado un morfismo de álgebras* $S : H \to H^{\text{op}}$*, basta verificar la condición de antípoda en* X*.*

El álgebra de un grupo

Sean G un grupo, $k[G]$ la biálgebra del monoide.

$$S(g) = g^{-1}$$

$g \in G$, define una antípoda: $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$.
Recíprocamente, si G es monoide y $S : k[G] \to k[G]$ es antípoda,

$$g\, S(g) = S(g)\, g = \varepsilon(g)\, 1 = 1$$

implica $S(g) \in G$ y es inverso de g.

Contenidos

GL(2) y SL(2)

GL(2) y SL(2) son biálgebras conmutativas con Δ, ε dados por

$$\Delta \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta(t) = t \otimes t \ ,$$

$$\varepsilon \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon(t) = 1 \ .$$

Δ no es coconmutativa:

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c \neq a \otimes a + c \otimes b = \tau \circ \Delta(a) \ .$$

La antípoda está dada por

$$S \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad - bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad , \quad S(t) = t^{-1} \ .$$

El grupo de un álgebra

Dada (H, Δ, ε),

$$\mathcal{G}(H) := \left\{x \in H \, : \, x \neq 0, \, \Delta(x) = x \otimes x\right\} .$$

Si H es biálgebra, es monoide con unidad $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ y

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\,\Delta(y) = (x \otimes x)\,(y \otimes y) = xy \otimes xy .$$

Si H es de Hopf, $x \mapsto S(x)$ define un inverso en $\mathcal{G}(H)$:

$$\tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S .$$

Si $H = k[G]$, entonces $\mathcal{G}(k[G]) = G$.

El grupo $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A)$ (cont.)

Teorema

Sean H un álgebra de Hopf y A un álgebra conmutativa. Los conjuntos $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A)$ *son grupos con la convolución heredada de* $\mathrm{Hom}_k(H, A)$*. El inverso de $\psi : H \to A$ está dado por $\psi \circ S$.*

Comprobar que

- $\psi * \varphi \in \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A)$,
- $c = \eta_A \circ \varepsilon_H \in \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A)$ es unidad,
- $\psi \circ S \in \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A)$ es inverso.

El grupo $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H,A)$ (cont.)

Si $\psi, \varphi \in \mathrm{Hom}_{k-alg}(H,A)$, como H es biálgebra,

$$\begin{aligned}(\psi * \varphi) \circ \mu_H &= \mu_A \circ (\psi \otimes \varphi) \circ \Delta_H \circ \mu_H \\ &= \mu_A (\psi \otimes \varphi)(\mu_H \otimes \mu_H)(\mathrm{id}_H \otimes \tau_H \otimes \mathrm{id}_H)(\Delta_H \otimes \Delta_H) \\ &= \mu_A ((\mu_A (\psi \otimes \varphi) \Delta_H) \otimes (\mu_A (\psi \otimes \varphi) \Delta_H)) \\ &= \mu_A((\psi * \varphi) \otimes (\psi * \varphi)) \ .\end{aligned}$$

Si $c = \eta_A \circ \varepsilon_H$,

$$\begin{aligned}\psi * c &= \mu_A (\psi \otimes \eta_A \varepsilon_H) \Delta_H \\ &= \mu_A (\mathrm{id}_A \otimes \eta_A)(\psi \otimes \mathrm{id}_k)(\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H) \Delta_H \\ &= \psi \otimes \mathrm{id}_k = \psi \ .\end{aligned}$$

El grupo $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A)$ (cont.)

$G = (\mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A), *, \eta_A \circ \varepsilon_H)$ es un monoide y podemos definir $(k[G], \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$. Sea S_H la antípoda en H y sea $S(\psi) = \psi \circ S_H \in \mathrm{Hom}_k(H, A)$. Se verifica que

$$\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta \;=\; \eta \circ \varepsilon \;=\; \mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$$

Por ejemplo, $\eta \circ \varepsilon(\psi) = \eta(1) = \eta_A \varepsilon_H$ y

$$\begin{aligned} \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(\psi) &= \mu(\psi \otimes S(\psi)) \;=\; \psi * S(\psi) \\ &= \mu_A (\psi \otimes \psi) (\mathrm{id}_H \otimes S_H) \Delta_H \\ &= \psi\, \mu_H (\mathrm{id}_H \otimes S_H) \Delta_H \;=\; (\psi\, \eta_H) \varepsilon_H \\ &= \eta_A \varepsilon_H \;. \end{aligned}$$

El grupo $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A)$ (cont.)

Resta verificar que $S(\psi) \in \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A)$:

$$\begin{aligned}(\psi\, S_H)\,\mu_H &= \psi\,(\mu_H\,\tau_H)\,(S_H \otimes S_H) = \mu_A\,(\psi \otimes \psi)\,\tau_H\,(S_H \otimes S_H) \\ &= (\mu_A\,\tau_A)\,((\psi\, S_H) \otimes (\psi\, S_H))\end{aligned}$$

Si $\mu_A \circ \tau_A = \mu_A$, entonces $\psi \circ S_H$ respeta productos. En cuanto a la unidad,

$$(\psi\, S_H)\,\eta_H = \psi\,\eta_H = \eta_H\ .$$

Contenidos

El grupo $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H, -)$

El producto, la unidad y el inverso en $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A)$ están dados por

$$\begin{aligned} {\Delta_H}^* &: \mathrm{Hom}_{k-alg}(H \otimes H, A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A) \ , \\ {\varepsilon_H}^* &: \mathrm{Hom}_{k-alg}(k, A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A) \quad \text{y} \\ {S_H}^* &: \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A) \ , \end{aligned}$$

si identificamos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{k-alg}(H \otimes H, A) &\simeq \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A) \times \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, A) \\ \mathrm{Hom}_{k-alg}(k, A) &= \{\eta_A\} \simeq \{1\} \end{aligned}$$

El grupo $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H,-)$ (cont.)

$G_A = \mathrm{Hom}_{k-alg}(H,A)$, $G_A^{\otimes i} = \mathrm{Hom}_{k-alg}(H^{\otimes i},A)$.

$$\begin{tikzcd} H\otimes H\otimes H & H\otimes H \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] \\ H\otimes H \arrow[u, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & H \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} G_A^{\otimes 3} \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\Delta)^*"] \arrow[d, "(\Delta\otimes\mathrm{id})^*"'] & G_A^{\otimes 2} \arrow[d, "\Delta^*"] \\ G_A^{\otimes 2} \arrow[r, "\Delta^*"'] & G_A \end{tikzcd}$$

Explícitamente, $f*(g*h)=(f*g)*h$.

El funtor $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H,-)$

Si $\varphi : A \to B$ es morfismo de álgebras, se obtiene una función $\varphi_* : G_A \to G_B$ que es, además, morfismo de grupos:

$$\begin{array}{ccc} G_A^{\otimes 2} & \xrightarrow{\Delta_A^*} & G_A \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ G_B^{\otimes 2} & \xrightarrow[\Delta_B^*]{} & G_B \end{array}$$

Corolario

Existe $G : \mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Grp}$ *tal que*

$$U \circ G = \mathrm{Hom}_{k-alg}(H,-)$$

Grupos en $\mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Set}$

En las categorías $\mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Set}$ y $\mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Grp}$ hay productos y objetos terminales:

$$\begin{aligned}(G \times G')(\varphi) = \ & G(\varphi) \times G'(\varphi) \ : \\ & G(A) \times G'(A) \to G(B) \times G'(B)\end{aligned}$$

$$t : G(A) \dot{\to} \mathbf{1}(A)$$

Podemos definir grupos.

El grupo $\mathrm{Hom}_{k-alg}(H,-)$ (cont.)

Existen transformaciones naturales

$$\Delta^* : UG \times UG \stackrel{\cdot}{\to} UG \quad , \quad \varepsilon^* : U\mathbf{1} \stackrel{\cdot}{\to} UG \quad \text{y} \quad S^* : UG \stackrel{\cdot}{\to} UG$$

tales que

$$\begin{aligned} \Delta^* \circ (\mathrm{id} \times \Delta^*) &= \Delta^* \circ (\Delta^* \times \mathrm{id}) \\ \Delta^* \circ ((\varepsilon^* \circ t) \times \mathrm{id}) \circ \mathrm{diag} &= \mathrm{id} = \Delta^* \circ (\mathrm{id} \times (\varepsilon^* \circ t)) \circ \mathrm{diag} \\ \Delta^* \circ (\mathrm{id} \times S^*) \circ \mathrm{diag} &= \varepsilon^* \circ t = \Delta^* \circ (S^* \times \mathrm{id}) \circ \mathrm{diag} \end{aligned}$$

Contenidos

Representablidad

Sean $G, G' : \mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Grp}$, $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, $U_* : \mathbf{Grp}^{\mathbf{CommAlg}_k} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{CommAlg}_k}$.

- Dada $\tilde{\tau} : UG \stackrel{\cdot}{\to} UG'$, ¿existe $\tau : G \stackrel{\cdot}{\to} G'$ tal que $U_*\tau = \tilde{\tau}$?
- Dadas $\tau_1, \tau_2 : G \stackrel{\cdot}{\to} G'$ tales que $U_*\tau_1 = U_*\tau_2$, ¿$\tau_1 = \tau_2$?

Porque U es fiel, $U_*\tau_1 = U_*\tau_2$ implica $\tau_1 = \tau_2$.

Representabilidad (cont.)

$\tilde{\tau} : UG \stackrel{\cdot}{\to} UG'$ induce

$$\begin{tikzcd} U(G(A)) \arrow[r, "\tilde{\tau}_A"] \arrow[d, "U(G\varphi)"'] & U(G'(A)) \arrow[d, "U(G'\varphi)"] \\ U(G(B)) \arrow[r, "\tilde{\tau}_B"'] & U(G'(B)) \end{tikzcd}$$

Que $\tilde{\tau}_A$ sea morfismo de grupos significa que existe

$$\begin{tikzcd} UG(A) \times UG(A) \arrow[r, "m_A^G"] \arrow[d, "\tilde{\tau}_A \times \tilde{\tau}_A"'] & UG(A) \arrow[d, "\tilde{\tau}_A"] \\ UG'(A) \times UG'(A) \arrow[r, "m_A^{G'}"'] & UG'(A) \end{tikzcd}$$

La multiplicación debería ser natural en G, también.

Representabilidad (cont.)

$U \circ G = \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, -)$ y $U \circ G' = \mathrm{Hom}_{k-alg}(H', -)$, por el lema de Yoneda,

$$\mathbf{Nat}(U \circ G, U \circ G') \simeq U \circ G'(H) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(H', H)$$

(morfismos de *álgebras*) vía $\phi \mapsto \phi^*$

- Dada ϕ, ¿existe $\tau : G \stackrel{\cdot}{\to} G'$ tal que $U_*\tau = \phi^*$?

Representabilidad (cont.)

El diagrama

$$\begin{array}{ccc} UG(A)\times UG(A) & \xrightarrow{\phi^*\times\phi^*} & UG'(A)\times UG'(A) \\ {\scriptstyle \Delta_H^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{H'}^*} \\ UG(A) & \xrightarrow[\phi^*]{} & UG'(A) \end{array}$$

conmuta si y sólo si $\phi: H' \to H$ es morfismo de álgebras de Hopf.

Relación con grupos afines

La aplicación

$$H \mapsto \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, -) \quad , \quad \phi \mapsto \phi^*$$

define un funtor contravariante fiel y pleno de la categoría de álgebras de Hopf en la categoría de grupos afines, (G, m, u, σ) donde

- G : $\mathbf{CommAlg}_k \to \mathbf{Grp}$ es funtor,
- UG es representable: existe H tal que $UG \simeq \mathrm{Hom}_{k-alg}(H, -)$,
- m, u, σ son transformaciones naturales que hacen de UG un grupo en $\mathbf{Set}^{\mathbf{CommAlg}_k}$.