Notas de formas cuadráticas

Índice

Parte I

Formas bilineales

1 Definiciones y ejemplos

Definición 1.1. Sea F un cuerpo y sea V un espacio vectorial sobre F. Una *forma bilineal* en V es una función $B : V \times V \to F$, lineal en cada coordenada, es decir, para todo $c \in F$ y $v, v_1, w \in V$,

$$B(v + v_1, w) \;=\; B(v, w) \;+\; B(v_1, w) \quad \text{y} \quad B(cv, w) \;=\; c\,B(v, w)$$

y, para todo $c \in F$, $v, w, w_1 \in V$,

$$B(v, w + w_1) \;=\; B(v, w) \;+\; B(v, w_1) \quad \text{y} \quad B(v, cw) \;=\; c\,B(v, w)\ .$$

Un *espacio bilineal* es un par (V, B), donde V es un espacio vectorial y B es una forma bilineal en V.

Alginas formas bilineales reciben nombres especiales.

Definición 1.2. Una forma bilineal B en V se dice *simétrica*, si

$$B(v, w) \;=\; B(w, v)\ , \text{ para todo } v, w \in V\ .$$

La forma B e dice *antisimétrica*, si

$$B(v, w) \;=\; -B(w, v)\ , \text{ para todo } v, w \in V$$

y sea dice *alternada*, si

$$B(v, v) \;=\; 0\ , \text{ para todo } v \in V\ .$$

Ejemplo 1.3. El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ es una forma bilineal.

Ejemplo 1.4. En $\mathbb{R}^2$, la función

$$B((x, y), (x_1, y_1)) \;=\; xy_1 \;-\; x_1y \;=\; \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix}$$

es bilineal, es antisimétrica y alternada.

Teorema 1.5. *Toda forma alternada es antisimétrica. En característica distinta de* 2*, las nociones de forma alternada y forma antisimétrica coinciden; en característica* 2*, las nociones de forma antisimétrica y de forma simétrica coinciden.*

Demostración. Considerar la identidad

$$B(v + w, v + w) \;-\; B(v, v) \;-\; B(w, w) \;=\; B(v, w) \;+\; B(w, v)\ , \tag{1}$$

válida para todo $v, w \in V$. En característica impar, 2 es una unidad, mientras que, en característica 2, $-1 = 1$. $\square$

Observación 1.6. Sea $m \geq 4$ un entero (par) y sea

$$B(v,w) \;=\; v \cdot \begin{bmatrix} m/2 & 1 \\ -1 & m/2 \end{bmatrix} w \;,$$

para $v, w \in \big(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\big)^2$. La función B es $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-bilineal en el $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-módulo $\big(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\big)^2$, es antisimétrica pero no es ni simétrica, ni alternada.

Teorema 1.7. *En característica distinta de* 2*, toda forma bilineal se escribe, de manera única, como suma de una forma simétrica con una forma alternada.*

Demostración. La función $B(v,w)+B(w,v)$ es simétrica, mientras que $B(v,w)-B(w,v)$ es alternada (incluso en característica 2). □

Teorema 1.8. *En característica distinta de* 2*, las formas simétricas quedan determinadas por sus valores* en la diagonal*, es decir, por* $B(v,v)$ *con* $v \in V$*.*

Demostración. Recordar la identidad (1).[1] □

El hecho de que, para una forma simétrica B, la función de dos variables $B(v,w)$ se puede recuperar a partir de la función de una sola variable $B(v,v)$ recibe el nombre de *polarización.*

Ejemplo 1.9. La forma bilineal en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$B((x,y),(x_1,y_1)) \;=\; xx_1 \;-\; yy_1$$

es simétrica. Comparar con la forma del Ejemplo 1.4. En la diagonal, $B((x,y),(x,y)) = x^2 - y^2$.

Ejemplo 1.10. La forma bilineal

$$B((x,y),(x_1,y_1)) \;=\; xy_1 + yx_1$$

es simétrica. En la diagonal, $B((x,y),(x,y)) = 2xy$. En particular, en los vectores de la base canónica, $B((1,0),(1,0)) = B((0,1),(0,1)) = 0$. Sin embargo, B no es idénticamente cero; no es cierto que $B(v,v) = 0$ para *todo* $v \in \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.11. Sea V un F-e.v. de dimensión finita. Las t.l. $L : V \to V$, los endomorfismos, conforman un F-e.v., denotado $\mathsf{End}_F(V)$. En este espacio, definimos

$$B(L, L_1) \;=\; \mathsf{Tr}(LL_1) \;.$$

Esta función es una forma bilineal en $\mathsf{End}_F(V)$, denominada la *forma traza.* Es una forma bilineal simt́rica. Esto se deduce de la identidada característica:

$$\mathsf{Tr}(LL_1) \;=\; \mathsf{Tr}(L_1L) \;. \tag{2}$$

[1] Esta misma identidad implica que, si B es *antisimétrica*, entonces $B(v,v)$ es lineal en v.

Ejemplo 1.12. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $V^\vee$ su espacio dual. En $V \oplus V^\vee$, definimos[2]

$$B((v,\varphi),(w,\psi)) \;=\; \psi(v) \;-\; \varphi(w) \;.$$

Es una forma alternada.

Ejemplo 1.13. En el espacio de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, la función

$$B(f,g) \;=\; \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

es bilineal y simétrica. Si $k:\,[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ es continua,

$$B_k(f,g) \;=\; \int_{[0,1]^2} f(s)\,g(t)\,k(s,t)\,ds\,dt$$

es bilineal ¿Qué condiciones sobre k permiten deducir que B_k es simétrica o antisimétrica?

Observación 1.14. Sea $H:\,\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$H(z,w) \;=\; \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \;.$$

Esta función es *biaditiva* y "saca escalares afuera", siempre y cuando consideremos únicamente escalares *reales*.[3] Si $c \in \mathbb{C}$, entonces

$$B(cv,w) \;=\; c\,B(v,w) \quad \text{y} \quad B(v,cw) \;=\; \bar{c}\,B(v,w) \;,$$

es decir, es $\mathbb{C}$-lineal en la primera coordenada, pero "conjugada lineal" en la segunda (saca los escalares conjugados). En particular, H *no es* $\mathbb{C}$-bilineal. Además, H verifica

$$H(w,v) \;=\; \overline{H(v,w)} \;,$$

con lo cual, incluso considerándola como una forma $\mathbb{R}$-lineal, restrngiendo escalares a $\mathbb{R}$, H *no es* simétrica; es "conjugada simétrica". Estas funciones de variable compleja se denominan *formas hermitianas.*

Sobre el cuerpo de números reales (o más en general, sobre cuerpos *formalmente reales*), hay otra noción importante.

Definición 1.15. En un espacio vectorial real V, una forma bilineal B se dice *semidefinida positiva,* si $B(v,v) \geq 0$. Si, además, $B(v,v) = 0 \Rightarrow v = 0$, entonces B se dice *definida* positiva.

[2] Comparar con el Ejemplo 1.4. Interpretar dicho ejemplo en términos de esta construcción. El espacio $\mathbb{R}^2$ es *autodual.* Mejor dicho, vía la forma bilineal dada por el producto escalar, $\mathbb{R}^2 \simeq (\mathbb{R}^2)^\vee$.

[3] O sea, es $\mathbb{R}$-lineal, aunque el codominio no es el cuerpo de base.

Definición 1.16. En un espacio bilineal (V, B), dos vectores v y w se dicen *perpendiculares* u *ortogonales*, si $B(v, w) = 0$. Escribimos $v \perp w$ para indicar que se verifica dicha igualdad. Si $W_1, W_2 \subset V$ son subespacios (o, más en general, subconjuntos), escribimos $W_1 \perp W_2$ para indicar que $w_1 \perp w_2$ para todo $w_1 \in W_1$ y todo $w_2 \in W_2$.

La relación de perpendicularidad es lineal en cada argumento, pero podría no ser simétrica.

Observación 1.17. Podría ocurrir que $W_1 \perp W_2$, pero $W_1 \cap W_2 \neq 0$.

Ejemplo 1.18. En $\mathbb{R}^2$, con respecto a la forma $B((x, y), (x_1, y_1)) = xx_1 + xy_1 - yx_1 - yy_1$, se verifica que

$$(1, 0) \perp (1, -1) \quad \text{pero} \quad (1, -1) \not\perp (1, 0)$$

Teorema 1.19. *La relación de perpendicularidad en (V, B) es simétrica, si y sólo si B es simétrica o alternada.*

Observación 1.20. Fijados $u, v, w \in V$, existe una combinación de v y de w que es perpendicular a u, es decir, existen $a, b \in F$ tales que $av + bw \perp u$. Esto es lo mismo que decir que existen $a, b \in F$ tales que

$$a\,B(v, u) + b\,B(w, u) = 0 \ .$$

Podemos elegir, por ejemplo, $a = B(w, u)$ y $b = -B(v, u)$.

Demostración. Si $B(w, v) = \pm B(v, w)$, entonces $B(v, w) = 0 \Leftrightarrow B(w, v) = 0$ y $\perp$ es una relación simétrica.

Recíprocamente, supongamos que $v \perp w \Leftrightarrow w \perp v$. Sean $u, v, w \in V$ y $x := av + bw$ con $a, b \in F$ como en la Observación 1.20. Entonces, $B(x, u) = 0$. Por hipótesis, $B(u, x) = 0$, también. Esto quiere decir que, para todo $u, v, w \in V$,

$$B(w, u)\,B(u, v) = B(v, u)\,B(u, w) \ . \tag{3}$$

En particular, eligiendo $w = u$ en (3),

$$\big(B(u, v) - B(v, u)\big)\,B(u, u) = 0 \ .$$

Así, se deduce que, para todo $u, v \in V$,

$$B(u, v) \neq B(v, u) \Rightarrow B(u, u) = 0 \ . \tag{4}$$

Supongamos, ahora, que B no es simétrica. Esto significa que existen $u_0, v_0 \in V$ tales que

$$B(u_0, v_0) \neq B(v_0, u_0) \ . \tag{5}$$

De (4), $B(u_0, u_0) = B(v_0, v_0) = 0$. Queremos deducir que $B(w, w) = 0$ para todo $w \in V$. Para ello, podemos asumir que

$$B(u_0, w) = B(w, u_0) \quad \text{y que} \quad B(v_0, w) = B(w, v_0) \ . \tag{6}$$

De (3), con $u = u_0$ y $v = v_0$,

$$B(w,u_0)\,B(u_0,v_0) \;=\; B(v_0,u_0)\,B(u_0,w)\ .$$

Pero, por (6),

$$B(u_0,w)\,\big(B(u_0,v_0)\;-\;B(v_0,u_0)\big) \;=\; 0\ .$$

El paréntesis no es cero, por (5), con lo cual $B(u_0,w) = 0$. Intercambiando los roles de u_0 y de v_0, se deduce que $B(v_0,w) = 0$, también. De nuevo, por (6),

$$B(u_0,w) \;=\; B(w,u_0) \;=\; 0 \quad \text{y} \quad B(v_0,w) \;=\; B(w,v_0) \;=\; 0\ . \tag{7}$$

La primera de las ecuaciones en (7) implica que

$$B(u_0,v_0+w) \;=\; B(u_0,v_0) \quad \text{y} \quad B(v_0+w,u_0) \;=\; B(v_0,u_0)\ .$$

Como los términos de la derecha son distintos, por (4),

$$B(v_0+w,v_0+w) \;=\; 0\ .$$

De esto, de que $B(v_0,v_0)$ y de la segunda ecuación en (7), se deduce, por bilinealidad,[4] que $B(w,w) = 0$. $\square$

Definición 1.21. Si $W \subset V$ es un subespacio (o, más en general, un subconjunto), los subconjuntos

$$W^{\perp_{\mathrm{L}}} := \big\{v \in V \,:\, v \perp W\big\} \quad \text{y} \quad W^{\perp_{\mathrm{R}}} := \big\{v \in V \,:\, W \perp v\big\}$$

son subespacios de V. Los llamaremos *subespacios de vectores ortogonales a* W (a izquierda o a derecha, según corresponda).

Si la relación $\perp$ es simétrica, no hay distinción entre estos subespacios y escribimos, directamente, $W^\perp$ para referirnos al mismo. Escribimos v en lugar de $\{v\}$ o de $\langle v\rangle$ para referirnos a los vectores perpendiculares a un vector v.

Ejemplo 1.22. En el espacio del Ejemplo 1.9, se cumple $(1,1) \perp (1,1)$, pero $(1,1) \neq 0$. Más aun, $(1,1)^\perp = \langle(1,1)\rangle$. A diferencia de lo que ocurre con el producto escalar en $\mathbb{R}^2$, $W + W^\perp \neq \mathbb{R}^2$. El mismo fenómeno se ve en el espacio del Ejemplo 1.4.

Definición 1.23. Si (V,B) es un espacio bilineal y $W \subset V$ es un subespacio, la restricción de B a W es una forma bilineal. Denotamos dicha forma por $B|_W$ (en lugar de $B|_{W\times W}$). El par $(W, B|_W)$ es un espcio bilineal denominado, *subespacio* de (V,B).

Definición 1.24. Dados espacios bilineales (V_1,B_1) y (V_2,B_2), denotamos por $B_1 \oplus B_2$ la forma bilineal en $V_1 \oplus V_2$ definida por

$$\big(B_1 \oplus B_2\big)(v_1+v_2,w_1+w_2) \;=\; B_1(v_1,w_1) \;+\; B_2(v_2,w_2)$$

es bilineal. Dicha forma se denomina *suma* de B_1 y de B_2. El espacio bilineal $(V_1 \oplus V_2, B_1 \oplus B_2)$ se denomina *suma ortogonal*.

[4] Biaditividad es suficiente para este paso.

Ejemplo 1.25. El espacio del Ejemplo 1.18 es la suma de los espacios de los Ejemplos 1.4 y 1.9.

Las formas bilineales están relacionadas con el espacio dual. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Si B es una forma bilineal en V, para cada $v \in V$, la función

$$\big(w \mapsto B(v,w)\big) : V \to F$$

es lineal. De esta manera, queda definida una apliacación

$$L_B : V \to V^\vee ,$$

que es lineal. Recíprocamente, dada una transformación lineal $L : V \to V^\vee$, la función

$$B_L(v,w) = L(v)(w)$$

es bilineal. Las aplicaciones $B \mapsto L_B$ y $L \mapsto B_L$ son inversas una de la otra y determinan una biyección (isomorfismo lineal) entre (los espacios de) formas bilineales en V y transformaciones lineales $V \to V^\vee$.

Esta correspondencia no es la única entre formas bilineales y transformaciones lineales. Dada una forma bilineal B en V, también podríamos definir $R_B(w)(v) = B(v,w)$. La función $R_B : V \to V^\vee$ es lineal y determina una correspondencia (isomorfismo lineal) entre (los espacios de) formas bilineales en V y transformaciones lineales $V \to V^\vee$. Ambas correspondencias están relacionadas.

Teorema 1.26. *Si (V,B) es de dimensión finita, entonces L_B y R_B son duales. Es decir, vía la identificación natural entre V y su doble dual $V^{\vee\vee}$, la* dualización[5] ${L_B}^\vee : V^{\vee\vee} \to V^\vee$ *de $L_B : V \to V^\vee$ coincide con $R_B : V \to V^\vee$.*

Corolario 1.27. *Sea B una forma bilineal en V. Si V es de dimensión finita,* $\dim V^{\perp_{\mathrm{L}}} = \dim V^{\perp_{\mathrm{R}}}$.

Demostración. La transformación $L_B : V \to V^\vee$ induce una transformación

$$V \to \left(V/V^{\perp_{\mathrm{R}}}\right)^\vee .$$

El núcleo de esta transformación es $V^{\perp_{\mathrm{L}}}$. De esto se deduce que

$$\operatorname{codim}_V V^{\perp_{\mathrm{L}}} \le \operatorname{codim}_V V^{\perp_{\mathrm{R}}} .$$

Análogamente, R_B induce una transformación lineal de V en $\left(V/V^{\perp_{\mathrm{L}}}\right)^\vee$ cuyo núcleo es $V^{\perp_{\mathrm{L}}}$, de lo que se deduce la desigualdad opuesta. En definitiva, las codimensiones de $V^{\perp_{\mathrm{L}}}$ y de $V^{\perp_{\mathrm{R}}}$ son iguales. Si V es de dimensión finita, sus dimensiones son iguales. $\square$

[5] La transformación *transpuesta*.

2 La matriz asociada

Generalizando el Ejemplo 1.3, sobre un cuerpo arbitrario F, si $n \geq 1$ es entero, definimos el *producto escalar* en F^n por:[6]

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ ,$$

si ${}^t x = (x_1, \ldots, x_n)$ e ${}^t y = (y_1, \ldots, y_n)$. Si $M \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$ es una matriz con coeficientes en el cuerpo F,

$$B(x, y) = x \cdot M\, y$$

también define una forma bilineal. Toda forma bilineal es de este tipo.

Sea (V, B) un espacio bilineal de dimensión $n \geq 1$ y sea $\{e^1, \ldots, e^n\}$ una base del espacio vectorial. Usando la bilinealidad de B,

$$B(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i\, B(e^i, e^j) \ , \tag{8}$$

si $v = x_i e^i$ y $w = y_j e^j$.

Definición 2.1. La *matriz* de B en la base $\{e^1, \ldots, e^n\}$ es

$$M_{ij} = B(e^i, e^j) \ .$$

Si $v \in V$, escribimos $[v]$ para referirnos a la representación del vector v en una base. Con esta notación, se verifica que

$$B(v, w) = [v] \cdot M\, [w] \ .$$

Ejemplo 2.2. Determinar las matrices asociadas a los espacios de los ejemplos de la sección § 1 en alguna base.

Teorema 2.3. *La elección de una base determina una correspondencia (isomorfismo) entre (los espacios de) formas bilineales en V y matrices en $\mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$.*

Ejemplo 2.4. En $\mathbb{R}^n$, si $p, q \geq 0$ y $p + q = n$, definimos

$$\langle x, y\rangle_{p,q} = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_n y_n \ .$$

La matriz asociada a $\langle\cdot,\cdot,\rangle_{p,q}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix} \ .$$

La forma, al igual que la matriz, es simétrica. Denotamos estos espacios por $\mathbb{R}^{p,q}$. El espacio del Ejemplo 1.9 coincide con $\mathbb{R}^{1,1}$. El espacio $\mathbb{R}^{3,1}$ se denomina *espacio de Minkowski*. El espacio $\mathbb{R}^{n,0}$ es $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar, usualmente llamado *espacio euclideo.*

[6] Como producto matricial, $x \cdot y = {}^t x\, y$.

Teorema 2.5. *Sea* (V, B) *un espacio bilineal y sea* $\mathcal{B} = \{e^1, \ldots, e^n\}$ *una base de* V*. La matriz asociada a* B *con respecto a* $\mathcal{B}$ *coincide con la matriz asociada a la t.l.* $R_B : V \to V^\vee$ *con respecto a* $\mathcal{B}$ *y su base dual.*

Demostración. Sea $[\cdot] : V \to F^n$ el isomorfismo dado por elegir la base $\mathcal{B}$ de V y sea $[\cdot]' : V^\vee \to F^n$ el isomorfismo correspondiente a elegir la base dual a $\mathcal{B}$ en $V^\vee$. Sea $\mathcal{B}^\vee = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ dicha base. La matriz de R_B con respecto a estas bases tiene *columnas* $[R_B(e^j)]'$. Si

$$R_B(e^j) = c^i \varepsilon_i \ ,$$

evaluando en e^i recuperamos los coeficientes:

$$c^i = R_B(e^j)(e^i) = B(e^i, e^j) = M_{ij} \ .$$

□

Observación 2.6. Podríamos haber definido la matriz de B por $N\, v \cdot w$. En ese caso, hubiésemos deducido que esta matriz coincide con la matriz de L_B.

Teorema 2.7. *Sea* (V, B) *un espacio bilineal y sea* M *la matriz asociada a* B *en alguna base. Entonces,*

- B *es simétrica, si y sólo si* ${}^tM = M$*;*
- B *es antisimétrica, si y sólo si* ${}^tM = -M$*;*
- M *es alternada, si y sólo si* ${}^tM = -M$ *y las coordenadas en la diagonal de* M *son nulas.*

Teorema 2.8. *Sea* (V, B) *un espacio bilineal y sean* $[\cdot]_1$ *y* $[\cdot]_2$ *dos bases en* V*. Sea* C *la matriz de cambio de base cuyas columnas representan los vectores de la segunda base en términos de la primera.*[7] *Si* M *es la matriz asociada a* B *en la base* $[\cdot]_1$*, entonces la matriz en la base* $[\cdot]_2$ *es* ${}^tCMC$*.*

Demostración. La demostración depende de la identificación $F^{n\vee} = F^n$ vía el producto escalar. □

Definición 2.9. Dos espacios bilineales (V, B_V) y (W, B_W) se dicen *equivalentes*, si existe un isomorfismo $A : V \to W$ tal que

$$B_W(A\, v, A\, v_1) = B_V(v, v_1) \ ,$$

para todo $v, v_1 \in V$.[8]

[7] $[v]_1 = C\,[v]_2$, para $v \in V$.

[8] En términos de las matrices asociadas, dos formas son equivalentes, si y sólo si existen bases de V y de W con respecto a las cuales las matrices correspondientes a B_V y a B_W, M y N, son equivalentes, es decir, existe C invertible tal que $M = {}^tC\,N\,C$.

Ejemplo 2.10. Las formas

$$v \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} w \quad \text{y} \quad v \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} w$$

en $\mathbb{R}^2$ son equivalentes vía el cambio de base

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Definición 2.11. El *discriminante* de una forma bilineal B se define como el determinante de cualquier representación de B como matriz.

Observación 2.12. Este valor está determinado a menos de cuadrados. Si M es la matriz de B en alguna base, entonces $\mathsf{disc}(B)$ es la clase de $\mathsf{det}(M)$ en $F/F^{\times 2}$.[9]

3 Formas bilineales no degeneradas

Teorema 3.1. *Sea (V, B) un espacio bilineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) con respecto a alguna base $\{e^1, \ldots, e^n\}$ de V, la matriz asociada $B(e^i, e^j)$ es invertible;

(ii) si $v \neq 0$, entonces $B(v_1, v) \neq 0$ para algún $v_1 \in V$;

(iii) todo elemento de $V^\vee$ es de la forma $B(-, v)$ para algún $v \in V$;

(iv) todo elemeneto de $V^\vee$ es de la forma $B(-, v)$ para un único $v \in V$.

En tal caso, toda *representación matricial de B es invertible.*

Demostración. Las condiciones (ii), (iii) y (iv) hacen referencia a la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad, respectivamente, de la transformación lineal $R_B : V \to V^\vee$. Como $\mathsf{dim}\, V < \infty$, éstas son equivalentes. La condición (i) significa que la matriz asociada a B en alguna base es invertible. Pero esto equivale a que R_B sea un isomorfismo. $\square$

Definición 3.2. Una forma bilineal B en un espacio V se dice *no degenerada*, si cumple cualquiera de las condiciones equivalentes enunciadas en el Teorema 3.1. En caso contrario, se dice que B es *degenerada*.

Observación 3.3. El Teorema 3.1 caracteriza las formas no degeneradas *a derecha*, aquellas tales que R_B es inyectiva (sobre o, equivalentemente, biyectiva). Ahora, si M es una matriz, entonces M es invertible, si y sólo si ${}^tM$ lo es. Si M es la matriz asociada a B en alguna base, $\mathcal{B}$, entonces M es la matriz de la transformación lineal $R_B : V \to V^\vee$,

[9] $\mathsf{disc}(B) := 0$, si $\mathsf{det}(M) = 0$ en alguna (y, por lo tanto, en toda) base, o bien $\mathsf{disc}(B)$ es la clase de $\mathsf{det}(M)$ en el grupo $F^\times/F^{\times 2}$.

con respecto a dicha base en V y su base dual en $V^\vee$, $\mathcal{B}^\vee$. Por otro lado, si $J : V \to V^{\vee\vee}$ es el isomorfismo canónico

$$J(v)(\varphi) \,=\, \varphi(v)\ , \tag{9}$$

la matriz ${}^tM$ es la matriz de la transformación transpuesta ${R_B}^\vee : V^{\vee\vee} \to V^\vee$, con respecto a $\mathcal{B}^\vee$ y a la base $J(\mathcal{B})$. Pero, vía la identificación (9), ${R_B}^\vee = L_B$. La codición (i) significa que R_B es biyectiva. Pero R_B es biyectiva, si y sólo si ${R_B}^\vee = L_B$ lo es. En definitiva, B es no degenerada a derecha, si y sólo si lo es a izquierda. El Teorema 3.1 garantiza que V parametriza $V^\vee$ vía R_B, si B es no degenerada a derecha; todo elemento de $V^\vee$ es de la forma $B(-,v)$. Pero, entonces, L_B también es un isomorfismo y todo elemento de $V^\vee$ se puede escribir de la forma $B(v,-)$ para algún $v \in V$.

Si V es de dimensión finita, $V^{\vee\vee} = V$ (naturalmente isomorfos). Además, por un argumento de dimensión, $V \simeq V^\vee$, es decir, *existe* un isomorfismo. Pero dicho isomorfismo no es canónico. Una forma bilineal es, esencialmente, una t.l. $V \to V^\vee$. Una forma bilineal no degenerada es una elección de isomorfismo entre estos espacios.

Si $V = \{0\}$, entonces $V^\vee \simeq V$, de manera única. Paralelamente, hay una única forma bilineal en V. Por esta razón, se considera que el espacio cero con su única forma bilineal es un espacio bilineal no degenerado. Sin embargo, dicha forma no admite una matriz que la represente, pues única base en $\{0\}$ es vacía.

Ejemplo 3.4. El producto escalar en $\mathbb{R}^n$, al igual que las formas $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,q}$ definidas en el Ejemplo 2.4, son no degeneradas; están representadas por matrices invertibles en la base canónica.[10] Todas ellas parametrizan el dual del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, el mismo espacio, pero de distintas maneras. Si $M = \left[\begin{smallmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{smallmatrix}\right]$, entonces, usando que $M^{-1} = {}^tM = M$,

$$\begin{aligned} \langle v,w\rangle_{p,q} \,&=\, v\,\cdot\,(M\,w) \,=\, (M\,v)\,\cdot\,w \quad \text{y} \\ v\,\cdot\,w \,&=\, \langle v, M^{-1}\,w\rangle_{p,q} \,=\, \langle v, M\,w\rangle_{p,q} \,=\, \langle M\,v, w\rangle_{p,q}\ . \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5. La forma bilineal alternada del Ejemplo 1.12 es no degenerada, pues $\varphi(v) = 0$, para todo $v \in V$ si y sólo si $\varphi = 0$, y para todo $\varphi \in V^\vee$, si y sólo si $v = 0$.

Ejemplo 3.6. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita y sea

$$\kappa(x,y) \,=\, \mathsf{Tr}(\mathsf{ad}_x\,\mathsf{ad}_y) \tag{10}$$

su *forma de Killing.* Es una forma bilineal simétrica. Si el cuerpo de base es de característica 0, $\mathfrak{g}$ es semisimple, si y sólo si κ es no degenerada.

Ejemplo 3.7. El espacio bilineal $\mathbb{R}^{2,1}$, por ejemplo, es no degenerado, como se mencionó en el Ejemplo 3.4. Sin embargo, el plano W generado por $v_1 = (1,0,1)$ y por $v_2 = (0,1,0)$ es degenerado con respecto a la restricción de la forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,1}$. Por ejemplo, $v_1 \in W^\perp$.

[10] Aunque podría ocurrir $\langle v,v\rangle_{p,q} = 0$, para algún $v \neq 0$.

Observación 3.8. Un espacio bilineal no degenerado, puede contener subespacios tales que la restricción de la misma forma bilineal a dicho subespacio es degenerada, como ocurre en el Ejemplo 3.7. Esto no ocurre, si el cuerpo de base es $\mathbb{R}$ y la forma es definida positiva. La propiedad de una forma bilineal real de ser (semi) definida positiva es hereditaria.

Teorema 3.9. *Sea (V, B) un espacio bilineal simétrico o alternado.*[11] [12]

(1) Si $W \subset V$ es un subespacio, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) el subespacio W es no degenerado;

(b) $W \cap W^{\perp} = 0$;

(c) $V = W \oplus W^{\perp}$.

(2) Si V es no degenerado, entonces $\mathsf{dim}\, W + \mathsf{dim}\, W^{\perp} = \mathsf{dim}\, V$ y $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

En particular, si V es no degenerado, un subespacio es no degenerado, si y sólo si $W^{\perp}$ lo es.

Demostración. Que B sea no degenerada a izquierda significa $w \neq 0 \Rightarrow B(w, w_1)$ para algún w_1. Esto implica $W \cap W^{\perp_{\mathrm{L}}} = 0$ (notar que $W^{\perp_{\mathrm{L}}}$ es un subespacio de V, no de W).

Ahora, vemamos que $W \cap W^{\perp_{\mathrm{L}}} = 0$ implica $W \oplus W^{\perp_{\mathrm{L}}} = V$. Dado que la intersección de los subespacios es cero, sólo resta probar que $W + W^{\perp_{\mathrm{L}}} = V$, es decir que todo elemento de V es suma de un elementon de W más uno en $W^{\perp_{\mathrm{L}}}$. Sea $L : W \to W^{\vee}$ la t.l. $L(w) = B(w, -)|_W$. Su núcleo, $W \cap W^{\perp_{\mathrm{L}}}$ es, por hipótesis, nulo. Por lo tanto, puesto que $\mathsf{dim}\, W < \infty$,[13] vale que $\mathsf{dim}\, W^{\vee} = \mathsf{dim}\, W$ y, entonces, L es sobreyectiva. Dado $v \in V$, $B(v, -)|_W = B(w, -)|_W$, para algún $w \in W$, y $v - w \in W^{\perp_{\mathrm{L}}}$.

Finalmente, si $V = W \oplus W^{\perp_{\mathrm{L}}}$, entonces $B(w, w_1) = 0$ para todo $w_1 \in W$ implica que $w \in W^{\perp_{\mathrm{L}}}$ y $w = 0$. En consecuencia, B es no degenerada a izquierda.

Para probar (2), supongamos que V es no degenerado, es decir $L_B : V \to V^{\vee}$ es un isomorfismo. Por Hahn-Banach (?), la restricción $V^{\vee} \to W^{\vee}$ es sobre. El núcleo de la composición es $W^{\perp_{\mathrm{L}}}$. Así,

$$V/W^{\perp_{\mathrm{L}}} \simeq W^{\vee} .$$

[11] Es decir, un espacio en donde la relación de perpendicularidad es simétrica (c.f. el Teorema 1.19).

[12] Si B es arbitraria, no necesariamente simétrica ni alternada, la relación $\perp$ deja de ser simétrica y distinguimos entre $W^{\perp_{\mathrm{L}}}$ y $W^{\perp_{\mathrm{R}}}$ en el ítem (1). Esto da lugar a versiones a izquierda y a derecha de (1b) y de (1c). Asumiendo dimensión finita, se puede probar que

$$\begin{aligned} &(1a) \Rightarrow \big((1b)_L \wedge (1b)_R\big) \quad \text{que} \\ &(1b)_L \Rightarrow (1c)_L \Rightarrow (1a) \quad \text{e, irónicamente, simétricamente, que} \\ &(1b)_R \Rightarrow (1c)_R \Rightarrow (1a) \end{aligned}$$

La razón es que no hay una distinción entre degeneración a derecha y degeneración a izquierda.

[13] Aquí usamos que W tiene dimensión finita, y no V.

Calculando dimensiones, $\dim V - \dim W^{\perp_{\mathrm{L}}} = \dim W$.[14] Ahora, $W \subset (W^{\perp_{\mathrm{L}}})^{\perp_{\mathrm{R}}}$. Por un argumento de dimensión, $W = (W^{\perp_{\mathrm{L}}})^{\perp_{\mathrm{R}}}$.[15] Por (1b) (su versión a izquierda y su versión a derecha), cuando V es no degenerado, $W = (W^{\perp_{\mathrm{L}}})^{\perp_{\mathrm{R}}} = (W^{\perp_{\mathrm{R}}})^{\perp_{\mathrm{L}}}$ y W es no degenerado, si y sólo si $W^{\perp_{\mathrm{L}}}$ lo es, si y sólo si $W^{\perp_{\mathrm{R}}}$ lo es. $\square$

Ejemplo 3.10. Siguiendo con el Ejemplo 3.7, si bien $W = \langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle$ es degenerado con respecto a la restricción de $\langle \cdot,\cdot\rangle_{2,1}$, se puede ver que

$$W^{\perp} \;=\; \langle (1,0,1)\rangle \;\subset\; W\;.$$

Entonces $\mathbb{R}^{2,1}$ no es suma directa de W y $W^{\perp}$. Sin embargo, $\dim W + \dim W^{\perp} = 3$. Esto es consistente con el hecho de que $\mathbb{R}^{2,1}$ es no degenerado pero la restricción de la forma al subespacio W sí lo es.

Ejemplo 3.11. En $V = \mathbb{R}^2$ con la forma $B((x,y),(x_1,y_1)) = xx_1$, el vector $(0,1)$ es perpendicular a todo el espacio. Es decir, $V^{\perp} \neq 0$ y la forma es degenerada. Sin embargo, el subespacio $W = \langle (1,0)\rangle$ es no degenerado con respecto a la restricción $B|_W$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^2 = W \oplus W^{\perp}$. Efectivamente, $W^{\perp} = \langle (0,1)\rangle$. Además, se verifica que $(W^{\perp})^{\perp} = \mathbb{R}^2 \neq W$, que W es no degenerado, pero $W^{\perp}$ es degenerado.

Teorema 3.12. *Sea (V,B) un espacio bilineal no degenerado. Entonces,*

(i) todo hiperplano en V es de la forma $\{w : w \perp v\}$ para algún $v \neq 0$ y de la forma $\{w : v_1 \perp w\}$ para algún $v_1 \neq 0$;

(ii) si $B(v,w) = B(v,w_1)$ para todo $v \in V$, entonces $w = w_1$;

(iii) si $B(v,A\,w) = B(v,A_1\,w)$ para todo $v,w \in V$, entonces $A = A_1$;

(iv) toda forma bilineal en V es de la forma $B(v,A\,w)$ para alguna t.l. $A : V \to V$.[16]

Demostración. Para i, usar que los hiperplanos son núcleos de funcionales lineales. $\square$

Si (V,B) es un espacio bilineal no degenerado y $A : V \to V$ es una transformación lineal, la función

$$\tilde{B}(v,w) \;=\; B(A\,v,w)$$

es una forma bilineal en V. Existe, por el Teorema 3.12, una *única* transformación lineal $A^* : V \to V$ tal que

$$B(A\,v,w) \;=\; B(v,A^*\,w)\;, \tag{11}$$

para todo $v,w \in V$.

Definición 3.13. Si (V,B) es un espacio bilineal no degenerado y $A : V \to V$ es una t.l., la única t.l. $A^* : V \to V$ que verifica (11) se denomina *adjunta* de A, con respecto a B.

[14] En particular, $\dim W^{\perp_{\mathrm{L}}} = \dim W^{\perp_{\mathrm{R}}}$.
[15] En particular, $(W^{\perp_{\mathrm{L}}})^{\perp_{\mathrm{R}}} = (W^{\perp_{\mathrm{R}}})^{\perp_{\mathrm{L}}}$.
[16] El hecho de que toda forma bilineal admite una representación matricial y que, tomando una base, se puede expresar en términos del producto escalar es un caso particular de este resultado.

Ejemplo 3.14. En F^n con el producto escalar, la adjunta de una transformación lineal representada por una matriz $A \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$ en la base canónica es la transformación representada por ${}^tA$ en la misma base.

Ejemplo 3.15. En $\mathbb{R}^2$ con la forma bilineal

$$B\Big(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Big) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & \\ & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} ,$$

la adjunta de una matriz está dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} a & -(2/3)\,c \\ -(3/2)\,b & d \end{bmatrix} .$$

Ejemplo 3.16. La forma del Ejemplo 3.11 es degenerada. Se verifica que, si $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$,

$$B\Big(A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big) = b \quad \text{y que} \quad B\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big) = 0 ,$$

para cualquier matriz A'. En particular, si $b \neq 0$, A no posee adjunta con respecto a B.

Teorema 3.17. *Sea (V, B) un espacio bilineal no degenerado y sea $A : V \to V$ una t.l. Fijemos una base $[\cdot] : V \to F^n$ de V. Sea M la matriz asociada a B con respecto a esta base y sean $[A]$ y $[A^*]$ las matrices de A y de A^*, respectivamente, en la base elegida. Entonces,*

$$[A^*] = M^{-1}\, {}^t[A]\, M .$$

Demostración. Comprobar que se cumple $R_B\, A^* = A^\vee\, R_B$ y pasar a la representación matricial. Se puede dar otra demostración, usando la identidad que define la adjunta, (11), pasando a la representación matricial de dicha identidad y usando que el producto escalar en F^n es una forma bilineal no degenerada. $\square$

La noción de transformación dual-transpuesta tiene sentido incluso para transformaciones lineales que no son endomorfismos (por ejemplo, en el caso $V \to V^\vee$). Si $A : V \to W$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales y cada uno de ellos tiene asociada una forma bilineal no degenerada, debería ser posible dar una noción de transformación adjunta $A^* : W \to V$, relacionándola con la transpuesta $A^\vee : W^\vee \to V^\vee$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "A"'] & V^\vee & V \arrow[l, "R"'] \\
W & W^\vee \arrow[u, "A^\vee"] & W \arrow[l, "R"] \arrow[u, dashed, "A^*"']
\end{tikzcd}$$

Definición 3.18. Si $A : V \to W$ es una transformación lineal entre espacios bilineales, decimos que A *preserva la relación de ortogonalidad*, si

$$v \perp v_1 \Rightarrow A\,v \perp A\,v_1 ,$$

para todo $v, v_1 \in V$.[17]

[17] No asumimos que $\dim V = \dim W$.

Teorema 3.19. *Dados espacios bilineales no degenerados, (V, B_V) y (W, B_W), y una t.l. $A : V \to W$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) A preserva la relación de ortogonalidad;

(ii) $B_W(A\,v, A\,v_1) = c\,B_V(v, v_1)$, para todo $v, v_1 \in V$, para cierta constante $c \in F$;

(iii) $A^*\,A = c\,\mathsf{id}_V$, para cierta constante $c \in F$.

Observación 3.20. En particular, del Teorema 3.19 se deduce que, si $A : V \to W$ preserva las formas bilineales, es decir, si $B_W(A\,v, A\,v_1) = B_V(v, v_1)$, para todo $v, v_1 \in V$, entonces A tiene inversa a izquierda; la inversa a izquierda está dada pro A^*. Además, si $W = V$, A^{-1} existe y es igual a A^* y, por el Teorema 3.17, si M es la matriz asociada a B en una base, $M = {}^t[A]\,M\,[A]$, es decir, $[A]$, como matriz de cambio de base, no afecta a M.

Lema 3.21. *Sea V un F-e.v. y sea $T : V \to V$ una t.l. Entonces,*

(1) si, para toda recta $L \subset V$ que pasa por el origen, $T(L) \subset L$, entonces T es una homotecia;

(2) si, para todo hiperplano $H \subset V$ que pasa por el origen, $T(H) \subset H$, entonces T es una homotecia.

Demostración del Teorema 3.19. Asumiendo (i), podemos afirmar que, para todo $v, v_1 \in V$, si $B_V(v, v_1) = 0$, entonces $B_W(A\,v, A\,v_1) = 0$ y $B_V(v, A^*\,A\,v_1) = 0$. En particular, la t.l. $A^*\,A : V \to V$ preserva todos los hiperplanos. Apelando al Lema 3.21, deducimos (ii).

Las afirmaciones (ii) y (iii) son equivalentes porque B_V es no degenerada. $\square$

Ejercicio 3.22. ¿Para qué t.l. A se cumple que $A^{**} = A$?

Ejercicio 3.23. Sea V un espacio simétrico o alternado y sea $W \subset V$ un subespacio tal que $\mathsf{dim}\,W + \mathsf{dim}\,W^{\perp} = \mathsf{dim}\,V$. Entonces, si $U \subset W^{\perp}$ es tal que $U + W = V$, $U = W^{\perp}$.

Ejercicio 3.24. Si $W \subset V$ es un subespacio ($\mathsf{dim}\,V < \infty$) y $W' = \{\varphi \in V^{\vee} : \varphi(W) = 0\}$, entonces $\mathsf{dim}\,W' + \mathsf{dim}\,W = \mathsf{dim} V$.

Ejercicio 3.25. Una función bilineal $B : V \times W \to F$ se dice *perfecta*,[18] si

$$\begin{aligned} \big(v \mapsto B(v, -)\big) &: V \to W^{\vee} \quad \text{y} \\ \big(w \mapsto B(-, w)\big) &: W \to V^{\vee} \end{aligned}$$

son isomorfismos. Dada una función bilineal B en $V \times W$ y dado un subespacio $U \subset V$, se define $U^{\perp} = \{w \in W : B(U, w) = 0\}$. Si B es perfecta, entonces la función inducida

$$U \times \big(W/U^{\perp}\big) \to F$$

es perfecta.

[18] O *pairing perfecto*.

Ejercicio 3.26. Si B es una forma bilineal no degenerada en V, entonces

- $(A_1 + A_2)^* = {A_1}^* + {A_2}^*$,
- $(c\,A)^* = c\,A^*$,
- ${\mathsf{id}_V}^* = \mathsf{id}_V$,
- $(A_1\,A_2)^* = {A_2}^*\,{A_1}^*$,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,
- $\det A^* = \det A$, $\mathsf{Tr}(A^*) = \mathsf{Tr}(A)$ y $\mathsf{c}_{A^*} = \mathsf{c}_A$.

4 Bases ortogonales

Fijamos un espacio bilineal *simétrico* (V, B) sobre un cuerpo F.

Definición 4.1. Decimos que un subconjunto $S \subset V$ es *ortogonal* con respecto a B, si $v \perp w$ para todo $v, w \in S$, $v \neq w$. En particular, una *base ortogonal* de V es una base $\{e^1, \ldots, e^n\}$ de V tal que $e^i \perp e^j$ si $i \neq j$.

Ejemplo 4.2. La base canónica de F^n es una base ortogonal para la forma bilineal simétrica dada por el producto escalar. En esta base, la matriz de la forma bilineal es la matriz identidad, que es diagonal.

Ejemplo 4.3. La forma $B(v, w) = v \cdot \left[\begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right] w$ en $\mathbb{R}^2$ es simétrica. La base $\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\}$ no es ortogonal. De hecho, no hay bases ortogonales para esta forma bilineal que contengan al vector $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. La base $\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]\}$ es ortogonal con respecto a B.

Estas mismas observaciones son ciertas, si se reemplaza $\mathbb{R}$ por un cuerpo de característica distinta de 2. Si el cuerpo de base es de característica 2, no hay base ortogonal para la forma B. En este último caso, B no sólo es simétrica, sino también es alternada.

Lema 4.4. *Si la característica de F es distinta de 2 y B no es idénticamente cero, entonces existe* algún *$v \in V$ tal que $B(v, v) \neq 0$.*

Demostración. Ejercicio. □

Lema 4.5. *Si $v \in V$ es tal que $B(v, v) \neq 0$, entonces $V = \langle v \rangle \oplus v^\perp$ y la suma es ortogonal. Si V es no degenerado, entonces $v^\perp$ es no degenerado.*

Demostración. Ejercicio. □

Notar que, si $B(v, v) \neq 0$ y $v_1 \in V$, entonces $B(v_1, v) = c\,B(v, v)$ para cierta constante $c \in F$ y $v_1 - c\,v \in v^\perp$. El Lema 4.5 es válido en cualquier característica.

Teorema 4.6. *Si la característica de F es distinta de 2, entonces existe una base ortogonal para (V, B).*

Demostración. Si $a = B(v, v) \neq 0$, entonces podemos elegir v como primer elemento de la base y buscar una base ortogonal para el complemento $v^{\perp}$. Con respecto a esta base,

$$[B] \;=\; \begin{bmatrix} a & \\ & [B|_{v^{\perp}}] \end{bmatrix} \;.$$

El valor a aparece como uno (el primero) de los coeficientes y el vector v hallado es el primer elemento de la base. $\square$

El Teorema 4.6 es válido incluso si el espacio no es no degenerado. Una base ortogonal es, esencialmente, una descomposición de V en suma ortogonal de subespacios de dimensión 1:

$$V \;=\; W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \;,$$

donde $W_i \perp W_j$, si $i \neq j$. La matriz asociada a una forma bilineal en una base ortogonal es diagonal (en particular, es simétrica y B es, *a fortiori*, simétrica). Si $\{e^1, \ldots, e^n\}$ es una base ortogonal, entonces V es no degenerado, si y sólo si $e^i \not\perp e^i$ para todo i.

5 Bases simplécticas

Fijamos un espacio bilineal *alternado* (V, B) sobre un cuerpo F.

Teorema 5.1. *Si (V, B) es un espacio bilineal alternado no degenerado, entonces* $\mathsf{dim}\, V$ *es par.*

Demostración. Asumiendo que B es alternada, si M es la matriz asociada a B en alguna base, por el Teorema 2.7, ${}^tM = -M$ (y las coordenadas de la diagonal son nulas). Tomando determinantes, $\mathsf{det}\, M = (-1)^{\mathsf{dim}\, V}\, \mathsf{det} M$. Si B es no degenerada, $\mathsf{det}\, M \neq 0$. Si $\mathsf{car}(F) \neq 2$, $-1 \neq 1$. De esto se deduce el resultado en el caso en que la característica del cuerpo de base es distinta de 2.

El siguiente argumento es válido en cualquier característica. Supongamos que B es alternada. Si $\mathsf{dim}\, V = 1$, entonces $B = 0$, con lo cual no puede ser no degenerada. Supongamos, entonces, que $\mathsf{dim}\, V > 2$ y que B es no degenerada.

Si $v \in V$ no es el vector cero, $B(v, -) \neq 0$ en $V^{\vee}$.[19] Entonces, $B(v, w) = 1$ para cierto $w \in V$.[20] Si $U = \langle v, w \rangle$, entonces $\mathsf{dim}\, U = 2$[21] y, con respecto a la base, $\{v, w\}$, $B|_U$ está representada por la matriz $\left[\begin{smallmatrix} & 1 \\ -1 & \end{smallmatrix}\right]$. Esta matriz tiene determinante 1, es invertible y $B|_U$ es no degenerada. Por el Teorema 3.9, $V = U \oplus U^{\perp}$. Además, como V es no degenerado y U es un subespacio no degenerado, $U^{\perp}$ también es no degenerado. Inducción. $\square$

Observaicón 5.2. Si (V, B) es un espacio bilineal simétrico no degenerado, el Lema 4.5 garantiza, dado cualquier $v \in V$ tal que $B(v, v) \neq 0$, la descomposición ortogonal $V = \langle v \rangle \oplus v^{\perp}$; los subespacios $\langle v \rangle$ y $v^{\perp}$ son no degenerados. Análogamente, si (V, B) es bilineal alternado no degenerado, la demostración del Teorema 5.1, muestra que, dado cualquier $v \in V$, existe otro vector $w \in V$ tal que

---

[19] L_B es inyectiva.

[20] Por linealidad. Toda funcional F-lineal $V \to F$ no nula es una función sobreyectiva.

[21] El subconjunto $\{v, w\}$ es l.i. por alternancia de B.

- $B(v, w) = 1$,
- $V = U \oplus U^{\perp}$, si $U = \langle v, w \rangle$, y
- U y $U^{\perp}$ son subespacios no degenerados.

Definición 5.3. Sea (V, B) una espacio alternado no degenerado. Si $\mathsf{dim}\, V = 2m \geq 2$, una *base simpléctica* es una base $\{e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m\}$ que cumple:

- $B(e_i, f_i) = 1$ y
- $U_i = \langle e_i, f_i \rangle$ son perpendiculares entre sí.

Observaicón 5.4. También se llama base simpléctica a cualquier base cuyos vectores cumplen con las dos propiedades de la Definición 5.3, aunque estén ordenados de otra manera. Hay dos o tres maneras estándar de ordenarlas:

(I) con el orden $e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m$, la matriz asociada a B es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

(II) con el orden $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m$, la matriz asociada es:

$$\begin{bmatrix} & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

(III) con el orden $e_1, \ldots, e_m, f_m, \ldots, f_1$, la matriz asociada es:

$$\begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \iddots & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ -1 & & & & & \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5.5. Hallar una fórmula para B en coordenadas en la base simpléctica con el orden (II) y relacionarla con la forma del Ejemplo 1.4.

Observaicón 5.6. En un espacio simétrico no degenerado, cualquier vector $v \in V$ no nulo que cumpla $B(v, v) \neq 0$ es parte de una base ortogonal. En un espacio alternado no degenerado, cualquier vector no nulo es parte de una base simpléctica.

Corolario 5.7. *Todo espacio alternado no degenerado admite una base simpléctica. Dos espacios alternados no degenerados de la misma dimensión son equivalentes.*

En general, si $V^\perp \neq 0$, elegimos un complemento directo arbitrario $W \subset V$, de manera que $V = W \oplus V^\perp$. Como $W \cap V^\perp = 0$, $B|_W$ es no degenerada. Eligiendo una base simpléctica para W y completando con una base arbitraria de $V^\perp$, la forma alternada B tiene asociada una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $2r = \mathsf{dim}\, W$. El valor de r no depende de la elección de complemento W: $\mathsf{dim}\, W = \mathsf{dim}(V/V^\perp)$ En definitiva, la clase de equivalencia de un espacio bilineal alternado está determinada por:

- la dimensión del espacio, $\mathsf{dim}\, V = n$, y
- su "grado de degeneración", $\mathsf{dim}\, V^\perp = n - 2r$.

Ejercicio 5.8. Hallar la adjunta de una matriz $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] \in \mathsf{Mat}_{2m\times 2m}(F)$ con respecto a la forma bilineal alternada en F^{2m} representada por (II).

Ejercicio 5.9. Sea B la forma alternada del Ejemplo 1.12 en $V \oplus V^\vee$. Probar que, si $\{e^1, \ldots, e^m\}$ es una base de V y $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ es la base dual en $V^\vee$, entonces $\{e^1, \varepsilon_1, \ldots, e^m, \varepsilon_m\}$ es una base simpléctica para B con respecto a la cual la matriz asociada es (I).

Ejercicio 5.10. Sea (V, B) un espacio bilineal simétrico no degenerado sobre un cuerpo de característica 2. Probar que (V, B) admite una base ortogonal, si y sólo si B *no es* alternada.[22]

[22]Hint: Sin pérdida de generalidad, asumir que $\mathsf{dim}\, V \geq 2$. De acuerdo con el comentario después del Teorema 4.6, la condición es necesaria. Para ver que es suficiente con no ser alternada, elegir $v_0 \in V$ tal que $a = B(v_0, v_0) \neq 0$. Notar que, por el Lema 4.5, $v_0^\perp$ es no degenerado. Si, en este subespacio, B no es alternada, el resultado se deduce por un argumento inductivo. Si, en cambio, B es alternada en $v_0^\perp$, existen $e, f \in v_0^\perp$ tales que $B(e, f) = 1$ y $B(e, e) = B(f, f) = 0$ (parte de una base simpléctica). Probar que $v_1 := v_0 + e + f$ verifica $B(v_1, v_1) \neq 0$ y que B no es alternada en $v_1^\perp$.

El *pfaffiano* Hay una manera genérica de determinar una raíz cuadrada del determinante de una matriz alternada.

Lema 5.11. *El determinante de una matriz alternada invertible con coeficientes en un cuerpo F es un cuadrado perfecto no nulo.*

Demostración. Si M es la matriz y es de tamaño $n \times n$, por el Corolario 5.7, $n = 2m$, $m \geq 1$, y ${}^tC\,M\,C = \left[\begin{smallmatrix} & I_m \\ -I_m & \end{smallmatrix}\right]$, para cierta C invertible. □

Ejemplo 5.12. Si $n = 2$, $\left|\begin{smallmatrix} & x \\ -x & \end{smallmatrix}\right| = x^2$. Si $n = 4$,

$$\begin{vmatrix} & x & y & z \\ -x & & a & b \\ -y & -a & & c \\ -z & -b & -c & \end{vmatrix} = (xc - yb + az)^2 \ .$$

Genéricamente, Si $M(x_{ij})$ denota la matriz alternada genérica de tamaño $n \times n$, $n = 2m$ par, sobre el cuerpo $\mathbb{Q}(x_{ij})$, su determinante es un polinomio no nulo con coeficientes en $\mathbb{Z}$.[23] En particular, $M(x_{ij}) \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}(x_{ij}))$ y, por el Lema 5.11, su determinante es un cuadrado en $\mathbb{Q}(x_{ij})$. Más aun, como $\mathbb{Z}[x_{ij}]$ es un DFU,

$$\mathsf{det}(M(x_{ij})) \;=\; (\mathsf{Pf}(x_{ij}))^2 \ , \tag{12}$$

donde $\mathsf{Pf}(x_{ij}) \in \mathbb{Z}[x_{ij}]$. Este polinomio está determinado a menos de un signo. Especializando las variables x_{ij}, se obtienen fórmulas para las raíces cuadradas de los determinantes de las matrices alternadas no degeneradas. Para fijar el signo de $\mathsf{Pf}(x_{ij})$, nuevamente, especializamos en una matriz conocida, por ejemplo la matriz (I).

Definición 5.13. El *polinomio pfaffiano* es el polinomio con coeficientes enteros $\mathsf{Pf}(x_{ij}) \in \mathbb{Z}[x_{ij}]$ determinado por (12) y $\mathsf{Pf}([B]) = 1$, donde $[B]$ denota la matriz (I). Si $M \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$, el *pfaffiano* de M es la especialización $\mathsf{Pf}(M)$.

El pfaffiano está definida para matrices alternadas no necesariamente invertibles. El tamaño tiene que ser $n \times n$ con $n \geq 2$ par.

Ejercicio 5.14. Si $n = 2m \geq 2$, dada una matriz alternada M (no necesariamente invertible),

(i) $\mathsf{Pf}({}^tC\,M\,C) = (\mathsf{det}\,C)\,\mathsf{Pf}(M)$, para toda C;

(ii) $\mathsf{Pf}({}^tM) = (-1)^{n/2}\,\mathsf{Pf}(M)$;

(iii) si M no es invertible ($\mathsf{det}\,M = 0$), entonces $\mathsf{Pf}(M) = 0$;

(iv) si M no es invertible y, mediante un cambio de base, ${}^tC\,M\,C$ es la matriz en (I), entonces $\mathsf{Pf}(M) = (\mathsf{det}\,C)^{-1}$.

[23] Especializar en la matriz (I), por ejemplo.

6 Formas sesquilineales

Sea K un anillo de división, al que vamos a llamar "cuerpo no necesariamente conmutativo". Supongamos, además, que contamos con un "antiautomorfismo" $\tau : K \to K$. Sea V/K un módulo a derecha.

Definición 6.1. Un *pairing generalizado* (o forma τ-sesquilineal) en V es una función biaditiva $B : V \times V \to K$ que verifica[24]

$$B(v, w\, a) = B(v, w)\, a \quad \text{y} \quad B(v\, a, w) = a^\tau\, B(v, w) \; .$$

El siguiente resultado generaliza el Teorema 1.19

Teorema 6.2. *La relación de perpendicularidad en (V, B) es simétrica, si y sólo si B es simétrica, alternada o* hermitiana.

[24] C.f. [1, p. 102]. Definimos una estructura *a izquierda* en V por

$$a\, v = v\, a^\tau \; .$$

Con esta estructura, $B(v, a\, w) = B(v, w\, a^\tau) = B(v, w)\, a^\tau$. Si a pertenece al centro de K, entonces a^τ también es central. Para elementos centrales, se verifica que $B(v, a\, w) = B(v\, a, w)$.

Parte II
Formas cuadráticas

7 Formas cuadráticas en característica impar

En su versión más concreta, las formas cuadráticas son polinomios homogéneos de grado 2. Por ejemplo,

(I) $x^2 + y^2 + z^2$

(II) $x^2 + 5xy - y^2$

(III) $2x^2 + 3y^2$

(IV) $x_1^2 + \cdots + x_n^2$

(V) $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$

Los ejemplos anteriores, salvo (II), son ejemplos de formas cuadráticas *diagonales*, dado que no aparecen términos cruzados. La forma (II) se puede *diagonalizar* completando cuadrados, mediante un cambio de variables:

$$x^2 + 5\,xy - y^2 = \left(x + \tfrac{5}{2}\,y\right)^2 - \tfrac{29}{4}\,y^2 \ .$$

Las formas (IV) y (V) provienen de formas bilineales simétricas que conocemos:

$$\begin{aligned} x_1^2 + \cdots + x_n &= v \cdot v \quad \text{y} \\ x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 &= \langle v, v\rangle_{p,q} \ , \end{aligned}$$

donde $v = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La forma (III) es diagonal y, sobre $\mathbb{R}$, es *equivalente* a $x^2 + y^2$; sobre $\mathbb{Q}$, no son equivalentes. Una razón suficiente que explica esta diferencia es que la ecuación

$$2\,x^2 + 3\,y^2 = 1$$

tiene solución en variable real, pero no tiene solución si x e y sólo pueden tomar valores racionales.

Sobre un cuerpo de característica distinta de 2, toda forma cuadrática es diagonalizable. Esto deja de ser cierto sobre un cuerpo de característica 2. Si, además, todo elemento no nulo del cuerpo de base es un cuadrado –en el cuerpo–, entonces toda forma es equivalente a (IV).

7.1 Definiciones y ejemplos

Sea F un cuerpo de característica impar y sea V un espacio vectorial sobre F.

Definición 7.1. Una *forma cuadrática* en V es una función $Q : V \to F$ que cumple:

(i) $Q(c\,v) = c^2\,Q(v)$, para todo $v \in V$ y toda $c \in F$, y

(ii) la función $B(v,w) := \frac{1}{2}\big(Q(v+w) - Q(v) - Q(w)\big)$ es bilineal.

La función $B = B_Q$ definida en (ii) se denomina *forma bilineal asociada* a la forma cuadrática Q.

Observación 7.2. La relación entre la forma cuadrática Q y su forma bilineal asociada B se puede expresar como:

$$Q(v+w) \;=\; Q(v) \;+\; Q(w) \;+\; 2\,B(v,w)\;. \tag{13}$$

La relación de perpendicularidad correspondiente a B se puede expresar en términos de Q:

$$B(v,w) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(v+w) \;=\; Q(v) \;+\; Q(w)\;. \tag{14}$$

Observación 7.3. Inductivamente, de la identidad (13), se deduce que

$$Q(v_1 + \;\cdots\; + v_r) \;=\; Q(v_1) \;+\; \cdots \;+\; Q(v_r) \;+\; 2\sum_{i<j} B(v_i, v_j)\;,$$

para todo $v_1, \ldots, v_r \in V$, $r \geq 2$. En particular, fijando una base y usando (i),

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; Q(x_1\,e^1 + \;\cdots\; + x_n\,e^n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a^i\,x_i^2 \;+\; \sum_{i<j} a^{ij}\,x_i\,x_j\;, \tag{15}$$

donde $a^i = Q(e^i)$ y $a^{ij} = 2\,B(e^i, e^j)$. Es decir, en coordenadas, Q está representada por un polinomio homogéneo de grado 2.

Recíprocamente, si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es un polinomio homogéneo de grado 2 con coeficientes a^i y a^{ij} ($i < j$), como en (15), la función $Q : V \to F$ definida por $Q(x_1\,e^1 + \cdots + x_n\,e^n) := f(x_1, \ldots, x_n)$ –una vez fijada una base– verifica (i) y la función asociada $B = B_Q$ está dada por

$$B(v,w) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a^i\,x_i\,y_i \;+\; \tfrac{1}{2}\sum_{i<j} a^{ij}\,\big(x_i\,y_j + x_j\,y_i\big) \;=\; [v]\;\cdot\;M\,[w]\;, \tag{16}$$

si $v = x_i\,e^i$, $w = y_i\,e^i$, donde M denota la matriz

$$M \;=\; \begin{bmatrix} a^1 & a^{12}/2 & \cdots & a^{1n}/2 \\ a^{12}/2 & a^2 & \cdots & a^{2n}/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{1n}/2 & a^{2n}/2 & \cdots & a^n \end{bmatrix}\;.$$

En particular, B es bilineal y Q es una forma cuadrática.

De acuerdo con la Observación 7.3, la elección de una base determina una correspondencia entre formas cuadráticas y polinomios homogéneos de grado 2, vía (15).

$$\begin{Bmatrix} \text{formas} \\ \text{cuadráticas} \end{Bmatrix} \longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{polinomios homogéneos} \\ \text{de grado 2} \end{Bmatrix}$$

Al mismo tiempo, la elección de una base determina una correspondencia entre formas bilineales y matrices.[25] A través de esta biyección, formas simétricas se corresponden con matrices simétricas, formas no degeneradas se corresponden con matrices no singulares, etc.[26]

$$\begin{Bmatrix} \text{formas bilineales} \\ \text{simétricas} \end{Bmatrix} \longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{matrices} \\ \text{simétricas} \end{Bmatrix}$$

Observación 7.4. Toda forma cuadrática se puede recuperar de su forma bilineal asociada evaluando en la diagonal:

$$Q(v) \;=\; B(v,v) \;. \tag{17}$$

Recíprocamente, dada una forma bilineal B, la función Q definida por (17) es una forma cuadrática y, si B es simétrica, la forma bilineal asociada a Q es $B_Q = B$, por polarización.[27]

La Observación 7.4 muestra que existe una correspondencia entre formas bilineales simétricas y formas cuadráticas.

$$\begin{Bmatrix} \text{formas bilineales} \\ \text{simétricas} \end{Bmatrix} \longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{formas} \\ \text{cuadráticas} \end{Bmatrix}$$

A través de esta correspondencia, $B(v,w) = 0$ para todo $v, w \in V$, si y sólo si $Q(v) = 0$ para todo $v \in V$. Además, la noción de perpendicularidad se puede expresar tanto en términos de B como en términos de Q, por (14). De esta manera, podemos asociar a toda forma cuadrática una matriz simétrica eligiendo una base del espacio. Llamaremos a esta matriz la *matriz asociada* a la forma cuadrática.

Ejemplo 7.5. La forma traza $Q(L) = \mathsf{Tr}(L^2)$ en $\mathsf{End}_F(V)$ es una forma cuadrática. Si $V = F^2$ y L está representada por la matriz $L = \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right]$, entonces

$$Q(L) \;=\; x^2 \,+\, 2\,y\,z \,+\, t^2 \;.$$

Ejemplo 7.6. Si $f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$, entonces $Q\big(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\big) = f(x,y)$ es una forma cuadrática *binaria*, en F^2. La forma Q está representada por la matriz simétrica $\left[\begin{smallmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{smallmatrix}\right]$ en la base canónica:

$$Q\Big(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Big) \;=\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;.$$

La forma Q también se puede expresar como $Q\big(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\big) = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ & c \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$, pero $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ & c \end{smallmatrix}\right]$ no es una matriz simétrica.

[25] Teorema 2.3.
[26] Teorema 2.7, Teorema 3.1.
[27] Teorema 1.8.

Definición 7.7. El *discriminante* de una forma cuadrática se define como el discriminante de su forma bilineal asociada. Equivalentemente, se define como el determinante de cualquiera de sus matrices asociadas. Este valor está bien definido módulo cuadrados del cuerpo y lo denotamos $\operatorname{disc} Q$.

Ejemplo 7.8. El discriminante de la forma $x^2 - y^2$ en F^2 es -1.

Definición 7.9. Un *espacio cuadrático* es un par (V, Q), donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo F y $Q : V \to F$ es una forma cuadrática en V.

Observación 7.10. Si (V, Q) es un espacio cuadrático y $W \subset V$ es un subespacio vectorial, el par $(W, Q|_W)$ es un espacio cuadrático.

7.2 Primeros resultados

Sea (V, Q) un espacio cuadrático de dimensión finita $n \geq 1$, sobre un cuerpo de característica distinta de 2.

Teorema 7.11. *Existe una base de V con respecto a la cual Q se diagonaliza. Es decir,*

$$Q\big(x_i\, e^i\big) \;=\; a^i\, x_i^2 \;,$$

donde $a^i = Q(e^i)$. El discriminante de Q es igual al producto $a^1 \,\cdots\, a^n$.

Teorema 7.12. *Si $V = W \oplus U$ con $W \perp U$, entonces $\operatorname{disc} V = \operatorname{disc} W \operatorname{disc} U$.*

Para diagonalizar una forma cuadrática, usamos los Lema 4.4 y 4.5.[28] El proceso eventualmente termina cuando se llega a un subespacio en donde la forma cuadrática es idénticamente cero (equivalentemente, la forma bilineal asociada es idénticamente cero; la condición $B(v, v) = 0$ es suficiente). Si dicho subespacio no es el subespacio nulo, entonces los vectores hallados, juntos con cualquier base del subespacio, conforman una base con respecto a la cual la forma es diagonal.

[28] Sea (V, B) un espacio bilineal no necesariamente simétrico, sobre un cuerpo arbitrario F no necesariamente de característica impar. Si $v_1, \ldots, v_r, w \in V$ cumplen

- $B(v_i, v_i) \neq 0$ para todo i,
- $B(v_i, v_j) = 0$ ($v_j \in v_i^{\perp_{\mathrm{R}}}$), si $j > i$, y
- $0 \neq w \in v_1^{\perp_{\mathrm{R}}} \cap \cdots \cap v_r^{\perp_{\mathrm{R}}}$,

entonces el subconjunto $\{v_1, \ldots, v_r, w\}$ es l.i. Si

$$b^i\, v_i \,+\, c\, w \;=\; 0 \;,$$

se deduce, inductivamente, que $b^i = 0$:

$$0 \;=\; B(v_i, b^j\, v_j + c\, w) \;=\; b^1\, B(v_i, v_1) \,+\, \cdots\, b^i\, B(v_i, v_i) \;.$$

El único término restante en la combinación es $c\, w = 0$. Como $w \neq 0$, $c = 0$ y el subconjunto era l.i. El problema es hallar w para proceder inductivamente.

Ejercicio 7.13. Diagonalizar $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$ ¿Cuál es su discriminante? Hallar un vector v tal que $Q(v) = 0$. Hallar otro vector w tal que $Q(w) = 0$ y $B(v, w) = 1$. Si $U = \langle v, w\rangle$, calcular el discriminante de $Q|_U$ y de $Q|_{U^\perp}$ ¿Se cumple $U \oplus U^\perp$ para los vectores elegidos?

Corolario 7.14. *Si $a \in F^\times$, entonces a es un coeficiente en alguna diagonalización de Q, si y sólo si $a \in Q(V)$.*[29]

Demostración. Si $Q = a\,x^2 + \cdots$, entonces $Q(1, 0, \ldots, 0) = a$. Si $Q(v) = a \neq 0$, entonces, aplicando el Lema 4.5, $V = \langle v\rangle \oplus v^\perp$. Eligiendo una base de $v^\perp$ y completándola con v, $Q = a\,x^2 + \cdots$. Diagonalizando $Q|_{v^\perp}$ se llega a una diagonalización de Q en la que a es uno de los coeficientes (el primero). □

Definición 7.15. Dos espacios cuadráticos (V, Q_V) y (W, Q_W) se dicen *isomorfos* y las formas cuadráticas se dicen *equivalentes*, si existe un isomorfismo $A : V \to W$ tal que $Q_W(A\,v) = Q_V(v)$ para todo $v \in V$.

Ejemplo 7.16. Las formas cuadráticas $x^2 - y^2$ y xy son equivalentes sobre cualquier cuerpo (de característica distinta de 2).

Ejemplo 7.17. Las formas cuadráticas $2\,x^2 + 3\,y^2$ y $x^2 + y^2$ son equivalentes sobre $\mathbb{R}$, pero no lo son sobre $\mathbb{Q}$.

Teorema 7.18. *Dos formas cuadráticas son equivalentes, si y sólo si las formas bilineales asociadas lo son.*

Definición 7.19. Una forma cuadrática se dice *no degenerada*, si su forma bilineal asociada es no degenerada. Respectivamente, si la forma bilineal es degenerada, se dice que la forma cuadrática de la que proviene es *degenerada.*

El siguiente resultado será relevante más adelante, pero hace uso de las nociones recién definidas.

Definición 7.20. Decimos que una forma cuadrática Q *representa* un valor a, si existe $v \in V$ tal que $Q(v) = a$. Decimos que Q *representa* 0 o, más precisamente, que *representa* 0 *de manera no trivial*, si existe $v \neq 0$ tal que $Q(v) = 0$.

Teorema 7.21. *Sea (V, Q) un espacio cuadrático de dimensión 2 sobre un cuerpo de característica distinta de 2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) en alguna base, $Q = x^2 - y^2$;

(ii) módulo cuadrados, $\mathsf{disc}\, Q = -1$;

(iii) la forma Q es no degenerada y representa 0 de manera no trivial.

[29] C.f. el Teorema 4.6.

Demostración. Si diagonalizamos Q, en alguna base $a\,x^2 + b\,y^2$. Si Q es no degenerada, $ab \neq 0$. Y, si $Q(x_0, y_0) = 0$, o bien $(x_0, y_0) = (0,0)$, o bien $x_0 y_0 \neq 0$. En tal caso, $b = -a\,\frac{x_0^2}{y_0^2}$ y $\operatorname{disc} Q = -\big(a\,\frac{x_0}{y_0}\big)^2$.

Si $\operatorname{disc} Q = -1$, en alguna base $Q = a\,x^2 + b\,y^2$ con $ab = -1\,(\operatorname{mod}\,(F^\times)^2)$. Pero

$$a\,x^2 \;-\; \tfrac{1}{a}\,y^2 \;=\; \big(a\,x + y\big)\,\big(x - \tfrac{1}{a}\,y\big)\;,$$

que, después de un cambio de variables (en F), es equivalente a la forma del Ejemplo 7.16.

Si $Q = x^2 - y^2$, entonces $\operatorname{disc} Q = -1$. $\square$

7.3 Clasificación de formas cuadráticas

Teorema 7.22. *Toda forma cuadrática definida en un espacio vectorial complejo de dimensión n no degenerada es equivalente, sobre $\mathbb{C}$, a $x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Toda forma cuadrática definida en un espacio vectorial real de dimensión n no degenerada es equivalente, sobre $\mathbb{R}$, a $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$ para un único p entre 0 y n.*

En el caso real, el valor de p, o bien el par (p, q), se denomina *signatura* de la forma cuadrática real.

Demostración. Que toda forma compleja o real es equivalente a una de las formas mencionadas es consecuencia de que $\mathbb{C}^\times/(\mathbb{C}^\times)^2 = 1$ y de que $\mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^2 = \{\pm 1\}$.

Dado $0 \leq p \leq n$, sea $Q_p = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$. Veamos que $Q_p \sim Q_{p'}$ implica $p = p'$. La equivalencia de estas dos formas definidas en $\mathbb{R}^n$ significa que existen bases $\{e^1, \ldots, e^n\}$ y $\{f^1, \ldots, f^n\}$ con respecto a las cuales una única forma Q se representa por Q_p y por $Q_{p'}$, respectivamente. En ese caso, si $W = \big\langle e^1, \ldots, e^p \big\rangle$ y $W' = \Big\langle f^{p'+1}, \ldots, f^n \Big\rangle$, entonces $Q > 0$ en W y $Q < 0$ en W'. Esto implica que $W \cap W' = 0$ y que $\dim(W + W') = \dim W + \dim W' = p + (n - p')$. Pero $\dim(W + W') \leq n$, con lo que $p - p' \leq 0$.[30] $\square$

Ejercicio 7.23. Determinar el valor de la integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\,Q(x)}\,dx$, donde $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática definida positiva.[31]

Teorema 7.24. [32] *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito de característica impar y sea (V, Q) un espacio cuadrático no degenerado sobre $\mathbb{F}$. Si $\dim V \geq 3$, entonces Q representa 0 de manera no trivial.*

Demostración. Si $\dim V = 3$, diagonalizando, podemos suponer que $Q = a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2$. Como asumimos que Q es no degenerada, $abc \neq 0$. En esta situación, podemos hallar una solución a $Q(x, y, z) = 0$ con $z = 1$. $\square$

[30] La demostración depende únicamente de $\mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^2 = \{\pm 1\}$ y de la existencia de un orden en $\mathbb{R}$ compatible con la estructura algebraica.

[31] Hint: Todas las formas de grado n definidas positivas son equivalentes.

[32] C.f. el Lema 8.17.

Lema 7.25. *Si $a, b, c \in \mathbb{F}^\times$, la ecuación*

$$a\,x^2 \,+\, b\,y^2 \,+\, c \,=\, 0 \tag{18}$$

tiene solución en $\mathbb{F}$.

Demostración. Elevar al cuadrado, $(x \mapsto x^2) : \mathbb{F}^\times \to \mathbb{F}^\times$, es un morfismo cuyo núcleo tiene orden 2. Si $q = |\mathbb{F}|$, entonces $(\mathbb{F}^\times)^2 = (q-1)/2$. Si $ab \neq 0$, los subconjuntos $\{a\,x^2 \,:\, x \in \mathbb{F}\}$ y $\{-b\,y^2 - c \,:\, y \in \mathbb{F}\}$ están en correspondencia con los cuadrados, $(\mathbb{F}^\times)^2 \cup \{0\}$. En particular, tienen el mismo cardinal, que es $(q+1)/2$, se solapan y la ecuación (18) tiene solución. $\square$

Teorema 7.26. [33] *Sea F un cuerpo de característica distinta de 2. Si $Q : V \to F$ es una forma cuadrática no degenerada que representa 0 de manera no trivial, entonces $Q(V) = F$.*

Demostración. Sea $v \neq 0$ tal que $Q(v) = 0$ y sea $B = B_Q$ la forma bilineal asociada.[34] Como B es no degenerada y $v \neq 0$, existe $w \in V$ tal que $B(v, w) \neq 0$.[35] La expresión

$$Q(c\,w + v) \,=\, Q(w) \,+\, 2\,B(v, w)\,c$$

define una función afín en la variable $c \in F$. Como $2\,B(v, w) \neq 0$, la función es sobreyectiva. $\square$

Definición 7.27. Una forma cuadrática $Q : V \to F$ tal que $Q(V) = F$ se dice que es *universal.*

Corolario 7.28. [36] *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito de característica impar y sea (V, Q) un espacio cuadrático no degenerado sobre $\mathbb{F}$. Si $\mathsf{dim}\, V \geq 2$, entonces Q es universal.*

Teorema 7.29. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito de característica impar y sea $d \in \mathbb{F}^\times \setminus (\mathbb{F}^\times)^2$. Toda forma cuadrática definida en un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensión n no degenerada es equivalente, sobre $\mathbb{F}$, a*

$$x_1^2 \,+\, \cdots \,+\, x_{n-1}^2 \,+\, x_n^2 \quad \text{o a} \quad x_1^2 \,+\, \cdots \,+\, x_{n-1}^2 \,+\, d\,x_n^2 \;.$$

Estas dos formas no son equivalentes. En particular, la clase de equivalencia de una forma cuadrática no degenerada sobre $\mathbb{F}$ está determinada por su dimensión y su discriminante.

Demostración. El discriminante de la primera es 1, mientras que el de la segunda es d, que no es cuadrado en $\mathbb{F}$. En particular, estas formas no son equivalentes.

[33] C.f. el Lema 8.15.
[34] Notar que, como Q (es decir, B) es no degenerada y $Q|_{\langle v \rangle} = 0$, $\mathsf{dim}\, V \geq 2$.
[35] Necesariamente, $\{v, w\}$ es l.i.
[36] C.f. el Lema 8.18.

Sea $n = \mathsf{dim}\, Q$. Si $n = 1$, $Q(x) = a\, x^2$ (en alguna base) y la clase de equivalencia de Q depende únicamente de a, módulo cuadrados. Como $\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2 = \{1, d\}$, Q es equivalente a x^2, si $a \in (\mathbb{F}^\times)^2$, o bien a $d\, x^2$, si no.

Si $n \geq 2$, Q es universal y existe $v \in V$ tal que $Q(v) = 1$. Eligiendo una base $\{e^1, \ldots, e^n\}$ con respecto a la que Q es diagonal y $e^1 = v$, podemos asumir que

$$Q(x_i\, e^i) \;=\; x_1^2 \,+\, a^2\, x_2^2 \,+\, \cdots \,+\, a^n\, x_n^2 \;.$$

La forma $Q|_{v^\perp}$ es no degenerada y de dimensión $n-1$. Inductivamente, podemos asumir que $Q|_{v^\perp} = x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + a\, x_n^2$, donde $a = 1$, o bien $a = d$.[37] □

7.4 Un argumento geométrico

A continuación, introducimos algunas nociones "geométricas" y las aplicamos a la clasificación de formas cuadráticas sobre un cuerpo finito de característica impar.

Definición 7.30. La *suma directa ortogonal* de espacios cuadráticos (V_1, Q_1) y (V_2, Q_2) es el (V, Q), donde $V = V_1 \oplus V_2$ y $Q(v_1 + v_2) = Q_1(v_1) + Q_2(v_2)$.

Definición 7.31. Un *vector isotrópico* para una forma cuadrática Q es un vector $v \neq 0$ tal que $Q(v) = 0$. Un *espacio isotrópico* es un espacio cuadrático que contiene vectores isotrópicos, es decir, un espacio cuadrático cuya forma representa 0 de manera no trivial.

El Teorema 7.26 implica que, en característica impar, toda forma isotrópica es universal.

Definición 7.32. Un *plano hiperbólico* es un espacio cuadrático de dimensión 2 cuya forma cuadrática es equivalente a $x^2 - y^2$.[38]

Escribimos H para denotar un plano hiperbólico. Un plano hiperbólico es lo mismo que un espacio cuadrático de dimensión 2, no degenerado e isotrópico (Teorema 7.21).

Ejemplo 7.33. El espacio $\mathbb{R}^{2,1}$ es isomorfo a $\mathrm{H} \perp \mathbb{R}$ ¿Qué pasa con $\mathbb{R}^{p,q}$?[39]

Teorema 7.34. [40] *Sea F un cuerpo de característica distinta de 2 y sea (V, Q) un espacio cuadrático no degenerado. Si Q admite un vector isotrópico, entonces $V \simeq \mathrm{H} \perp W$ y $W \subset V$ es un subespacio no degenerado.*

Demostración. Sea $v \neq 0$ tal que $Q(v) = 0$. Veamos que existe $u \in V$ tal que $B(u, v) \neq 0$ y $Q(u) = 0$.[41] Si $Q(u) = 0$, listo. Si no, consideramos vectores de la forma $u + c\, v$, $c \in F$. Por un lado, $B(u + c\, v, v) = B(u, v) \neq 0$. Por otro,[42]

$$Q(u + c\, v) \;=\; Q(u) \,+\, 2\, B(u, v)\, c \;.$$

[37] La demostración depende de que $1 \in Q(V)$ y de que $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| = 2$.
[38] En característica impar, esto es lo mismo que decir equivalente a $x\, y$.
[39] Separar los casos $p > q$ y $p < q$.
[40] C.f. el Teorema 8.16.
[41] C.f. la demostración del Teorema 5.1.
[42] C.f. la demostración del Teorema 7.26.

Como esta expresión es afín en $c \in F$, existe c de manera que se cumpla lo pedido con $u + c\,v$ en lugar de u.

Con estas elecciones, $Q(x\,u + y\,v) = 2\,x\,y\,B(u, v)$. Si $U = \langle u, v\rangle$, reescalando, $Q|_U = x\,y$. Entonces, U es un plano hiperbólico contenido en V y, en consecuencia, es un subespacio no degenerado. Por el Teorema 3.9 (1), si $W = U^{\perp}$, $V = U \oplus W$ y, como V es no degenerado, por la parte (2), W es no degenerado. □

Si (V, Q) es un espacio cuadrático no degenerado y $\mathsf{dim}\, V \geq 1$, inductivamente, V es isomorfo a $\mathrm{H}^{\perp\, m} \perp V'$, donde $V' \subset V$ es un subespacio *anisotrópico*, es decir, tal que no existe $v' \in V'$ no nulo que satisface $Q(v') = 0$. La forma Q se puede expresar, en alguna base, de la siguiente manera:

$$x_1\,x_2 \;+\; \cdots \;+\; x_{2m-1}\,x_{2m} \;+\; Q' \;, \tag{19}$$

donde $Q' : V' \to F$ es una forma anisotrópica de grado $n - 2m$ ¿Qué se puede decir al respecto de m y de Q'? ¿El valor de $m \geq 0$ y la clase de equivalencia de Q' están unívocamente determinados por (la clase de) Q? Una cosa más o menos inmediata es la siguiente fórmula para el discriminante:

$$\mathsf{disc}\, V \;=\; (-1)^m\, \mathsf{disc}\, V' \;. \tag{20}$$

Volvamos al caso en que $F = \mathbb{F}$ es un cuerpo finito de característica impar. Fijamos un no cuadrado $d \in \mathbb{F}^{\times} \smallsetminus (\mathbb{F}^{\times})^2$ y un espacio cuadrático (V, Q) no degenerado de dimensión n sobre $\mathbb{F}$.

Teorema 7.35. *La forma cuadrática Q es equivalente, sobre $\mathbb{F}$, a*

$$x_1\,x_2 \;+\; \cdots \;+\; x_{n-3}\,x_{n-2} \;+\; \begin{cases} x_{n-1}\,x_n & \text{o a} \\ x_{n-1}^2 \;-\; d\,x_n^2 & , \end{cases}$$

si n es par, y a

$$x_1\,x_2 \;+\; \cdots \;+\; x_{n-2}\,x_{n-1} \;+\; \begin{cases} x_n^2 & \text{o a} \\ d\,x_n^2 & , \end{cases}$$

si n es impar.

Demostración. Si $n = \mathsf{dim}\, V \geq 3$, V posee un vector isotrópico y $V \simeq \mathrm{H} \perp W$. Si $\mathsf{dim}\, W \geq 3$, W posee un vector isotrópico. Repitiendo esto una cantidad finita de veces, hasta conseguimos un subespacio $V' \subset V$ de dimensión $\mathsf{dim}\, V' \leq 2$ tal que $V \sim \mathrm{H}^m \perp V'$. Si n es par, $\mathsf{dim}\, V' \in \{0, 2\}$. Si n es impar, $\mathsf{dim}\, V' = 1$. En ambos casos, V' es no degenerado. El resultado se reduce a clasificar las formas no degeneradas de grados 0, 1 y 2, sobre $\mathbb{F}$. □

Lema 7.36. *Si $\mathsf{dim}\, V = 1$, entonces Q es equivalente a*

$$x^2 \quad \text{o a} \quad d\,x^2 \;.$$

Si $\operatorname{dim} V = 2$*, entonces* Q *es equivalente a*

$$x\,y \quad o\ a \quad x^2 - d\,y^2\ .$$

En cada caso, las formas no son equivalentes.

Demostración. Si $\operatorname{dim} V = 1$, en alguna base $Q = a\,x^2$, $a \neq 0$. Si $a \in (\mathbb{F}^\times)^2$, entonces Q es equivalente a x^2. Si $a \notin (\mathbb{F}^\times)^2$, entonces $a \equiv d\,(\operatorname{mod}(\mathbb{F}^\times)^2)$ y Q es equivalente a $d\,x^2$.

Si $\operatorname{dim} V = 2$, entonces Q es universal, por el Corolario 7.28. En particular, Q representa 1 y, diagonalizando, es equivalente a $x^2 - a\,y^2$, $a \neq 0$. Si $a \in (\mathbb{F}^\times)^2$, entonces Q es equivalente a $x^2 - y^2$, que, en característica impar, es equivalente a $x\,y$. Si $a \notin (\mathbb{F}^\times)^2$, entonces Q es equivalente a $x^2 - d\,y^2$.

En ambos casos, $\operatorname{dim} V = 1$ y $\operatorname{dim} V = 2$, las dos representantes pertenecen a clases distintas, como se puede ver calculando sus discriminantes.[43] □

¿Cómo termina la demostración del Teorema 7.35? Hay que probar que las formas que aparecen en el enunciado no son equivalentes. Hemos clasificado las formas de dimensiones bajas –que corresponden a los términos que aparecen en la separación en casos. Intuitivamente, sería correcto "cancelar" las partes idénticas y comparar lo que queda.[44] Otra manera es apelar al discriminante. Si n es par, la primera forma tiene discriminante $(-1)^{n/2}$, mientras que la segunda tiene discriminante $(-1)^{n/2-1}(-d)$. Como $d \not\equiv 1\,(\operatorname{mod}(\mathbb{F}^\times)^2)$, las formas no son equivalentes. El caso con n impar es análogo.

En el siguiente resultado, volvemos al caso general de un cuerpo de característica impar y un espacio cuadrático (V, Q) sobre el mismo.

Teorema 7.37. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) la forma Q *es no degenerada, es decir,* $\operatorname{disc} Q \neq 0$*;*

(ii) si $n = \operatorname{dim} V$*, en ninguna base se puede expresar* Q *como un polinomio homogéneo de grado* 2 *en menos de* n *variables;*

(iii) con respecto a cualquier base, expresando a Q *como polinomio homogéneo de grado* 2*, la única solución común en* V *a las ecuaciones* $\partial Q/\partial x_i = 0$ *es* $v = 0$*.*

Demostración. La afirmación (i) y la afirmación (ii) son equivalentes: para un lado, diagonalizar; para el otro, diagonalizar en bloques (separar las variables superfluas). La afirmación (i) y la afirmación (iii) son equivalentes: el sistema de ecuaciones $\partial Q/\partial x_i = 0$ está representado por la matriz

$$\begin{bmatrix} 2\,a^1 & a^{12} & \cdots & a^{1n} \\ a^{12} & 2\,a^2 & \cdots & a^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{1n} & a^{2n} & \cdots & 2\,a^n \end{bmatrix} = 2\,M$$

[43] Otra manera de distinguirlas es por sus imágenes, por los valores que representan. La forma x^2 sólo representa cuadrados (todos), mientras que $d\,x^2$ sólo representa no cuadrados (todos). La forma $x\,y$ es isotrópica, mientras que $x^2 - d\,y^2$ no lo es.

[44] C.f. el Teorema 10.10

igual a dos veces la matriz M asociada a la forma bilineal asociada a Q. $\square$

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ sobre un cuerpo F de característica distinta de 2 y sea Q una forma cuadrática en V no nula. Fijando una base de V, la forma Q está representada por un polinomio homogéneo de grado 2 y determina una hipersuperficie proyectiva definida sobre F.

Corolario 7.38. *Si $n \geq 3$, entonces Q es no degenerada, si y sólo si la hipersuperficie $\{Q = 0\}$ en $\mathbb{P}^{n-1}(F^{\mathsf{a}})$ es irreducible y suave. Cuando $n = 2$, $\{Q = 0\}$ contiene dos puntos en $\mathbb{P}^1(F^{\mathsf{a}})$, si Q es no degenerada, y contiene un punto, si Q es degenerada.*

Ejercicio 7.39. Sea K/F una extensión cuadrática. Probar que la función norma $\mathsf{Nm}_{K/F}$ es una forma cuadrática no degenerada, sin vectores isotrópicos.

Ejercicio 7.40. Sea $K = \mathbb{Q}(\theta)$, donde θ es raíz de un polinomio irreducible cúbico de la forma $f = X^3 + a\,X + b$. Sea $Q(\alpha) = \mathsf{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha^2)$. Probar que Q es una forma cuadrática sobre $\mathbb{Q}$ cuya clase de equivalencia está determinada por el valor $4\,a^3 + 27\,b^2$.[45]

8 Formas cuadráticas en característica 2

Sea F un cuerpo de característica 2 y sea V un espacio vectorial sobre F.

Definición 8.1. Una *forma cuadrática* en V es una función $Q : V \to F$ que cumple:

(i) $Q(c\,v) = c^2\,Q(v)$, para todo $v \in V$ y toda $c \in F$, y

(ii) la función $B(v, w) := Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$ es bilineal.

La función $B = B_Q$ definida en (ii) se denomina *forma bilineal asociada* a la forma cuadrática Q.

Observación 8.2. La relación entre la forma cuadrática Q y su forma bilineal asociada B se puede expresar como:

$$Q(v + w) \;=\; Q(v) \;+\; Q(w) \;+\; B(v, w)\;. \tag{21}$$

La relación de perpendicularidad correspondiente a B se puede expresar en términos de Q:

$$B(v, w) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad Q(v + w) \;=\; Q(v) \;+\; Q(w)\;. \tag{22}$$

De (21), la forma B es simétrica. Más aun, como $2 = 0$,

$$B(v, v) \;=\; 0\;,$$

para todo $v \in V$. Es decir, la forma bilineal asociada a una forma cuadrática es siempre *alternada.*

[45] Interpretar.

Observación 8.3. Inductivamente, de la identidad (21), se deduce que

$$Q(v_1 + \cdots + v_r) = Q(v_1) + \cdots + Q(v_r) + \sum_{i<j} B(v_i, v_j) ,$$

para todo $v_1, \ldots, v_r \in V$, $r \geq 2$. En particular, fijando una base y usando (i),

$$f(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_1 e^1 + \cdots + x_n e^n) = \sum_{i=1}^{n} a^i x_i^2 + \sum_{i<j} a^{ij} x_i x_j , \tag{23}$$

donde $a^i = Q(e^i)$ y $a^{ij} = B(e^i, e^j)$. Es decir, en coordenadas, Q está representada por un polinomio homogéneo de grado 2.

Recíprocamente, si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es un polinomio homogéneo de grado 2 con coeficientes a^i y a^{ij} $(i < j)$, como en (23), la función $Q : V \to F$ definida por $Q(x_1 e^1 + \cdots + x_n e^n) := f(x_1, \ldots, x_n)$ –una vez fijada una base– verifica (i) y la función asociada $B = B_Q$ está dada por

$$B(v, w) = \sum_{i<j} a^{ij} \left(x_i y_j + x_j y_i \right) = [v] \cdot M [w] , \tag{24}$$

si $v = x_i e^i$, $w = y_i e^i$, donde M denota la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a^{12} & \cdots & a^{1n} \\ a^{12} & 0 & \cdots & a^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{1n} & a^{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix} .$$

En particular, B es bilineal y Q es una forma cuadrática.

Observación 8.4. Los coeficientes en la diagonal son todos cero. Esto no quiere decir que $B = 0$. De hecho, $B = 0$, si y sólo si los coeficientes de los términos cruzados a^{ij} son todos cero, es decir, cuando la forma Q se diagonaliza. En característica distinta de 2, siempre es posible hallar una base con respecto a la cual los coeficientes a^{ij} sean cero. En característica 2, es necesario (y suficiente) que estos coeficientes no sean cero para que la forma bilineal asociada (no la forma cuadrática) no sea idénticamente cero:

$$B_Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^{ij} = 0 \text{ para todo } i < j .$$

Observación 8.5. Una forma cuadrática se puede expresar, fijada una base del espacio vectorial subyacente, como un polinomio homogéneo de grado 2. También es posible expresar una forma cuadrática en términos de productos de matrices:

$$Q(v) = [v] \cdot N [v] , \tag{25}$$

donde N denota la matriz *triangular superior*

$$N = \begin{bmatrix} a^1 & a^{12} & \cdots & a^{1n} \\ 0 & a^2 & \cdots & a^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^n \end{bmatrix} .$$

A diferencia de lo que ocurre con la matriz M de la forma bilineal asociada, en esta matriz aparecen todos los términos: los $a^i = Q(e^i)$ y también los $a^{ij} = B(e^i, e^j)$. La matriz de la forma bilineal asociada es $M = N + {}^tN$.[46]

Ejemplo 8.6. En F^2, la matriz de la forma $Q(x, y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2$ es $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ & c \end{smallmatrix}\right]$. La forma bilineal asociada es

$$B((x, y), (x_1, y_1)) \,=\, Q(x + x_1, y + y_1) \,-\, Q(x, y) \,-\, Q(x_1, y_1) \,=\, b\,(xy_1 + yx) \;.$$

La matriz asociada a la forma bilineal es $\left[\begin{smallmatrix} & b \\ b & \end{smallmatrix}\right]$ y B es no degenerada, si y sólo si $b \neq 0$.

Ejemplo 8.7. Las formas cuadráticas $x^2 + x\,y$ y $x\,y$ están asociadas a la misma forma bilineal simétrica vía (21). La forma bilineal simétrica $B((x, y), (x_1, y_1)) = xx_1 + yy_1$ no es la forma bilineal asociada a ninguna forma cuadrática en característica 2.

Como se ve en el Ejemplo 8.7, la aplicación $Q \mapsto B_Q$, que a cada forma cuadrática le asigna su forma bilineal asociada, no es ni inyectiva, ni sobreyectiva en el espacio de formas bilineales simétricas. Ahora, una forma bilineal $B = B_Q$, proveniente de una forma cuadrática, no sólo es simétrica, sino que, más aun, es alternada. Si *correstringimos* la aplicación $Q \mapsto B_Q$ al espacio de formas alternadas, se ve que, entonces, es sobreyectiva, pues toda forma alternada está representada en una base por una matriz (anti) simétrica con ceros en la diagonal. Conocer la forma bilineal asociada no nos permite recuperar la forma cuadrática.

8.1 Un sustituto de la diagonalización

Sea (V, Q) un espacio cuadrático[47] y sea $B = B_Q$ la forma bilineal asociada. Si B es no degenerada, por el Corolario 5.7, $\dim V = 2m$ y existe una base simpléctica $\{e^1, f^1, \ldots, e^m, f^m\}$ para B. Es decir, $B(e^i, e^i) = B(f^i, f^i) = 0$, $B(e^i, f^i) = 1$ y los subespacios $\langle e^i, f^i \rangle$ son ortogonales entre sí. Con respecto a esta base,

$$\begin{aligned} Q(x_1\, e^1 + y_1\, f^1 + \,\cdots\, + x_m\, e^m + y_m\, f^m) \,&=\, \sum_{i=1}^{m} Q(x_i\, e^i + y_i\, f^i) \\ &=\, \sum_{i=1}^{m} (a^i\, x_i^2 + x_i y_i + b^i\, y_i^2) \;, \end{aligned} \tag{26}$$

[46] Podríamos haber definido esta matriz al introducir formas cuadráticas sobre un cuerpo de característica impar, pero, en aquella situación, la matriz contendría la misma información que la matriz de la forma bilineal asociada. La relación entre ambas matrices sería $M = \frac{1}{2}\,(N + {}^tN)$.

[47] La definición es análoga a la dada para cuerpos de característica impar.

donde $a^i = Q(e^i)$ y $b^i = Q(f^i)$.[48] La matriz de Q en esta base es

$$N = \begin{bmatrix} a^1 & 1 & & & \\ & b^1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a^m & 1 \\ & & & & b^m \end{bmatrix}.$$

Recíprocamente, si Q en cierta base se expresa como en (26), la matriz de B_Q en la misma base es la matriz simpléctica (I).

En característica distinta de 2, toda forma cuadrática se diagonaliza, incluso aquellas cuyas formas bilineales asociadas son degeneradas; el resultado es una descomposición

$$V = W_1 \perp \cdots \perp W_r \perp V^\perp , \tag{27}$$

donde $\mathsf{dim}\, W_i = 1$ y $Q|_{V^\perp} = 0$, que se obtiene buscando sucesivamente vectores ortogonales y anisotrópicos. En característica 2, si $B = B_Q$ no fuese no degenerada,[49] eso significa que $V^\perp \neq 0$. Asumiendo que B no es idénticamente cero,[50] $V^\perp \neq V$ y existe algún subespacio $0 \neq W \subset V$ tal que $V = W \oplus V^\perp$ (suma directa de espacios vectoriales). Ahora, independientemente de la elección de W, $B|_W$ es no degenerada.[51] Aplicando lo que sabemos del caso no degenerado, existe una base simpléctica para W. Esta base la completamos con una base de $V^\perp$ (arbitraria). En una base de este tipo, la forma Q tiene la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} (a^i\, x_i^2 + x_i y_i + b^i\, y_i^2) + \sum_{k=1}^{r} c^k\, z_k^2 ,$$

donde $\mathsf{dim}\, W = 2m$ y $\mathsf{dim}\, V^\perp = r$.

8.2 Formas cuadráticas no degeneradas

El Teorema 7.37 da condiciones equivalentes a la propiedad de una forma cuadrática de ser no degenerada, en característica impar. En característica 2, un resultado análogo nos permitirá *definir* la noción correspondiente. Sea (V, Q) un espacio cuadrático sobre un cuerpo de característica 2 y sea $B = B_Q$ la forma bilineal asociada.

Teorema 8.8. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) el único vector de V que cumple $Q(v) = 0$ y $B(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ es $v = 0$;

(ii) la función $Q : V^\perp \to F$ es inyectiva;[52]

[48] Los coeficientes a^i y b^i podrían ser cero. Eso no cambiaría el hecho de que B_Q es no degenerada.

[49] Aun no definimos lo que significa que Q sea no degenerada.

[50] Que alguno de los coeficientes fuera de la diagonal no son cero; en característica 2, una forma cuadrática es diagonal, si y sólo si su forma bilineal es idénticamente cero.

[51] Si $w_0 \in W^\perp$, entonces $B(w_0, w + v') = B(w_0, w) + B(w, v') = 0$ y $w_0 \in V^\perp$.

[52] En términos geométricos, $V^\perp \cap \{Q = 0\} = \{0\}$.

(iii) *si $n = \mathsf{dim}\, V$, en ninguna base se puede expresar Q como un polinomio homogéneo de grado 2 en menos de n variables;*

(iv) *con respecto a cualquier base, expresando a Q como polinomio homogéneo de grado 2, la única solución común en V a las ecuaciones $Q(v) = 0$ y $\partial Q/\partial x_i = 0$ es $v = 0$.*

Definición 8.9. La forma cuadrática Q se dice *no degenerada*, si verifica las condiciones del Teorema 8.8. Un *vector isotrópico* para Q es un vector $v \neq 0$ tal que $Q(v) = 0$. Decimos que Q es *universal*, si $Q(V) = F$. Dos formas $Q_1 : V_1 \to F$ y $Q_2 : V_2 \to F$ son *equivalentes*, si existe un isomorfismo $A : V_1 \to V_2$ tal que $Q_2(A\, v) = Q_1(v)$ para todo $v \in V_1$.

Las definiciones anteriores son, esencialmente, las mismas que para característica impar. Sin embargo, no todas se pueden interpretar en términos de la forma bilineal asociada.

8.3 Ejemplos

Ejemplo 8.10. En dimensión 1, todo espacio no nulo es no degenerado. En dimensión 2, la forma $a\, x^2 + b\, xy + c\, y^2$ es no degenerada, si

- $b \neq 0$, o bien
- $b = 0$ y $ac \notin (F^\times)^2$.

Por ejemplo, $x\, y$ es no degenerada, pero $x^2 - y^2 = x^2 + y^2$ es degenerada.

Ejemplo 8.11. En F^3, definimos $Q(x, y, z) = x^2 + x\, y + y^2 + z^2$. La forma bilineal asociada es $B = x\, y_1 + x_1\, y$. En particular, B es degenerada, pero Q no lo es: $V^\perp = \langle (0, 0, 1) \rangle$, pero $Q(0, 0, \gamma) = \gamma^2$.

Ejemplo 8.12. Sea $Q(x, y) = x^2 + c\, y^2$ en F^2, donde $c \notin (F^\times)^2$. Como Q es diagonal, $V^\perp = V$, pero $Q(x, y) = 0$ implica $x = y = 0$. Sin embargo, sobre F^{a},[53] c es un cuadrado y $Q(x, y) = 0$ tiene soluciones no triviales. En consecuencia, *Q es degenerada sobre F^{a}*.

Ejemplo 8.13. En F^4, definimos $Q(x, y, z, w) = x\, y + z^2 + c\, w^2$, donde $c \notin (F^\times)^2$. Esta forma no es degenerada sobre F, pero, en una clausura algebraica, podemos escribir Q como un polinomio en menos de cuatro variables, pues $z^2 + c\, w^2 = (z + \sqrt{c}\, w)^2$.

Observación 8.14. Si F es un cuerpo de característica impar, una forma $Q : V \to F$ es no degenerada, si y sólo si (Teorema 7.37) su discriminante es distinto de cero, es decir, si su matriz asociada (en cualquier base) es invertible. Esta propiedad no se ve afectada por extensiones de cuerpos. Es decir, si Q es no degenerada y K/F es una extensión de cuerpos, la forma cuadrática $Q_K : K \otimes_F V \to K$ definida por[54]

$$Q_K(c \otimes v) \;=\; c^2\, Q(v) \tag{28}$$

es no degenerada, pues su discriminante es distinto de cero. En característica 2, este hecho es falso.

[53] O en $F(\sqrt{c})$.

[54] Extender de manera que se preserve la homogeneidad, o bien, la bilinealidad.

8.4 Clasificación en característica 2

Teorema 8.15. [55] *Sea F un cuerpo de característica 2. Si $Q : V \to F$ es una forma cuadrática no degenerada que representa 0 de manera no trivial, entonces Q es universal.*

Demostración. Empezamos con un vector isotrópico v. Como Q no es idénticamente cero (es no degenerada) y $Q(c\,v) = c^2\,Q(v) = 0$, la dimensión del espacio debe ser, al menos, 2. Más aun, como Q es no degenerada, $v \notin V^\perp$ y existe $w \in V$ tal que $B(v,w) \neq 0$. El argumento es, ahora, idéntico al del Teorema 7.26, con la diferencia del factor 2. □

Teorema 8.16. [56] *Sea F un cuerpo de característica 2 y sea $Q : V \to F$ una forma cuadrática no degenerada. Si Q admite un vector isotrópico e, entonces existe un segundo vector isotrópico f tal que $B(e,f) = 1$ y B es no degenerada en el plano $\langle e, f\rangle$.*

Demostración. Como en la demostración del Teorema 8.15, dado que Q es no degenerada y $Q(e) = 0$, se deduce que $e \notin V^\perp$ y existe $w \in V$ tal que $B(e,w) \neq 0$. Reescalando, podemos suponer que $B(e,w) = 1$. Si $c = Q(w)$, entonces elegimos $f := c\,e + w$. □

La condición $Q(v) = 0$ que caracteriza vectores isotrópicos es más restrictiva que la condición $B(v,v) = 0$ en la construcción de una base simpléctica para B.

Lema 8.17. [57] *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito de característica 2 y sea (V,Q) un espacio cuadrático.*[58] *Si $\dim V \geq 3$, entonces Q representa 0 de manera no trivial.*

Demostración. Supongamos que $Q(v) \neq 0$. Como $B(v,-) : V \to \mathbb{F}$ es lineal, $\dim v^\perp \geq n-1 \geq 2$. En particular, existe $w \in v^\perp \smallsetminus \langle v\rangle$. Como $Q(v) \neq 0$, existe $a \in \mathbb{F}$ tal que $Q(w) = a\,Q(v)$. Si $a = b^2$, $Q(w) = Q(b\,v)$ pero $w \neq b\,v$. Ahora, $w \perp v$ implica

$$Q(w + b\,v) \;=\; Q(w) \;+\; Q(b\,v) \;=\; 0$$

y el vector no nulo $w + b\,v$ es isotrópico.[59] □

Lema 8.18. [60] *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito de característica 2 y sea (V,Q) un espacio cuadrático.*[61] *Si Q no es idénticamente 0, entonces es universal.*

Demostración. Si $Q(v_0) \neq 0$, como todo elemento de $\mathbb{F}$ es un cuadrado, $\bigl\{Q(c\,v_0) : c \in \mathbb{F}\bigr\} = \mathbb{F}$. □

Lema 8.19. *Si $Q : V \to \mathbb{F}$ es no degenerada, entonces $\dim V^\perp \leq 1$. De hecho, $\dim V^\perp = 0$, si $\dim V$ es par, y $\dim V^\perp = 1$, si $\dim V$ es impar.*

---

[55] C.f. el Teorema 7.26.
[56] C.f. el Teorema 7.34.
[57] C.f. el Teorema 7.24.
[58] No necesariamente no degenerado.
[59] La demostración usa que $\mathbb{F}$ es perfecto, no que es finito.
[60] C.f. el Corolario 7.28.
[61] No necesariamente no degenerado.

Demostración. La forma bilineal alternada $B = B_Q$ induce una forma bilineal alternada no degenerada en $V/V^\perp$. Entonces $\mathsf{dim}\, V/V^\perp$ es par.[62] Si $V^\perp \neq 0$, elegimos $v_0 \neq 0$ en $V^\perp$. Como Q es no degenerada, $Q(v_0) \neq 0$. Si $v \in V$, $Q(v) = a\,Q(v_0) = Q(b\,v_0)$, para cierto $b \in \mathbb{F}$. Si, más aun, $v \in V^\perp$, entonces

$$Q(v + b\,v_0) \;=\; Q(v) \;+\; Q(b\,v_0) \;=\; 0\ ,$$

por perpendicularidad. Como Q es no degenerada, $v + b\,v_0 = 0$. Como $v \in V^\perp$ era arbitrario, se deduce que $V^\perp = \langle v_0 \rangle$. Es decir, en general, $\mathsf{dim}\, V^\perp \leq 1$. El resultado es consecuencia de esto y de la observación general anterior. $\square$

Observación 8.20. Una consecuencia del Lema 8.19 es que, en característica 2, cuando $\mathsf{dim}\, V$ es par, Q es no degenerada, si y sólo si B es no degenerada ($V^\perp = 0$).

Observación 8.21. Los Lemas 8.17, 8.18 y 8.19, si bien fueron enunciados para formas cuadráticas defindas sobre un cuerpo finito de característica 2, son ciertos sobre un cuerpo *perfecto* de característica 2.

Sobre un cuerpo F de característica impar, el discriminante y el grupo $F^\times/(F^\times)^2$ juegan un papel importante en la clasificación de formas cuadráticas. En característica 2, especialmente cuando el cuerpo F es perfecto, como es el caso de los cuerpos finitos, el lugar del discriminante lo toma otra función; en un cuerpo finito de característica 2, todo elemento es un cuadrado.

Definición 8.22. Si F es un cuerpo de característica 2, la *función* $\wp$ es la función $\wp : F \to F$ dada por $\wp(a) = a^2 + a$.

Observación 8.23. Si F es un cuerpo finito de característica 2, la función $\wp$ es aditiva y su núcleo es $\{0, 1\}$. Si, además, $F = \mathbb{F}$ es un cuerpo finito, el cociente $\mathbb{F}/\wp(\mathbb{F})$ tiene orden 2. En particular, la suma de dos elementos que no están en la imagen de $\wp$ pertenece a la imagen, mientras que la suma de un elemento que está en la imagen con otro que no está, no pertenece a la imagen.

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito de característica 2. Fijamos un elemento $d \in \mathbb{F} \smallsetminus \wp(\mathbb{F})$ y un espacio cuadrático (V, Q) no degenerado de dimensión n sobre $\mathbb{F}$.

El siguiente resultado juega el rol del Lema 7.36.

Teorema 8.24. *La forma cuadrática Q es equivalente, sobre $\mathbb{F}$,*

(1) a x^2, si $\mathsf{dim}\, V = 1$,

(2) a $x\,y$ o a $x^2 + x\,y + d\,y^2$, si $\mathsf{dim}\, V = 2$, *y*

(3) a $x\,y + z^2$, si $\mathsf{dim}\, V = 3$.

Las dos formas en (2) *no son equivalentes.*

[62] Esto es cierto en general, sobre cualquier cuerpo de cualquier característica.

Demostración. Si $\dim V = 1$, Q es de la forma $a\,x^2$ en alguna base. Usando que $\mathbb{F}$ es perfecto, se deduce que $a\,x^2$ es equivalente a x^2.

Las formas $x\,y$ y $x^2 + x\,y + d\,y^2$ en $\mathbb{F}^2$ no son equivalentes: la primera admite un vector isotrópico, pero la segunda no.[63] Para probar que toda forma no degenerada en un espacio de dimensión 2 es equivalente a una de estas formas, por el Lema 8.18, $Q(v) = 1$ para cierto $v \in V$.[64] Por el Lema 8.19, $V^\perp = 0$ y $B = B_Q$ es no degenerada. Elegimos $w \in V$ tal que $B(v, w) = 1$. Entonces, $\{v, w\}$ es una base de V y

$$\begin{aligned} Q(x\,v + y\,w) \;&=\; x^2\,Q(v) \;+\; y^2\,Q(w) \;+\; x\,y\,B(v,w) \\ & x^2 \;+\; x\,y \;+\; Q(w)\,y^2 \;. \end{aligned}$$

Si $Q(w) = \wp(a)$ para cierto $a \in \mathbb{F}$, entonces,

$$x^2 \;+\; x\,y \;+\; Q(w)\,y^2 \;=\; (x + a\,y)\,(x + (a+1)\,y) \;.$$

Si $Q(w) \notin \wp(\mathbb{F})$, entonces $Q(w) + d = a^2 + a$ para algún $a \in \mathbb{F}$ y

$$x^2 \;+\; x\,y \;+\; Q(w)\,y^2 \;=\; (x + a\,y)^2 \;+\; (x + a\,y)\,y \;+\; d\,y^2 \;.$$

Si $\dim V = 3$, por el Lema 8.17, existe $e \neq 0$ tal que $Q(e) = 0$ y, por el Teorema 8.16, existe f tal que $Q(f) = 0$ y $B(e,f) = 1$. Como B es no degenerada en el plano $\langle e, f\rangle$,

$$V^\perp \,\cap\, \langle e, f\rangle \;=\; 0 \;.$$

En particular, eligiendo cualquier vector $g \in V^\perp \setminus \{0\}$, $\{e, f, g\}$ constituye una base de V. Ahora, como Q es no degenerada, $Q(g) \neq 0$. Como $\mathbb{F}$ es perfecto y $Q(b\,g) = b^2\,Q(g)$, podemos asumir que $Q(g) = 1$. Entonces,

$$Q(x\,e + y\,f + z\,g) \;=\; Q(x\,e + y\,f) \;+\; z^2\,Q(g) \;=\; x\,y \;+\; z^2 \;.$$

□

Observación 8.25. Si $U = \langle e, f\rangle$ es un plano como en el Teorema 8.16 con $F = \mathbb{F}$ finito, entonces, aplicando el Teorema 8.24, dado que U contiene vectores isotrópicos, la forma $Q|_U$ debe ser equivalente a $x\,y$.

Teorema 8.26. *Si $n \geq 2$, entonces Q es equivalente a*

$$x_1\,x_2 \;+\; \cdots \;+\; x_{n-3}\,x_{n-2} \;+\; \begin{cases} x_{n-1}\,x_n & \textit{o a} \\ x_{n-1}^2 \;+\; x_{n-1}\,x_n \;+\; d\,x_n^2 & , \end{cases}$$

si n es par, y a

$$x_1\,x_2 \;+\; \cdots \;+\; x_{n-2}\,x_{n-1} \;+\; x_n^2 \;,$$

si n es impar.

[63] Si (x_0, y_0) fuese isotrópico, $y_0 \neq 0$ y $d = (x_0/y_0)^2 + x_0/y_0 = \wp(x_0/y_0)$.

[64] C.f. el argumento del Teorema 7.29.

Demostración. Podemos asumir $n = \mathsf{dim}\, V \geq 4$. Entonces, por el Teorema 8.17, existe $v \neq 0$ tal que $Q(v) = 0$. Por el Teorema 8.16, existe w tal que $B(v, w) = 1$, $Q(w) = 0$ y $U := \langle v, w \rangle$ es no degenerado. Por la Observación 8.25, $Q|_U$ es equivalente a $x\, y$.

Si n es par, por el Lema 8.19, $V^{\perp} = 0$ y B es no degenerada. Entonces, por el Teorema 3.9, $V = U \oplus U^{\perp}$ y $U^{\perp}$ es no degenerado. Inducción.

Si n es impar, $V^{\perp}$ es unidimensional y $n \geq 5$. Como $Q|_{V^{\perp}}$ no es idénticamente nula, es no degenerada y, aplicando el Teorema 8.24, está representada por x^2, en alguna base (eligiendo un generador). Si elegimos cualquier complemento (lineal), $V = V^{\perp} \oplus W$, vale que $\mathsf{dim}\, W$ es par y $B|_W$ es no degenerada (pues $W \cap V^{\perp} = 0$). Por la Observación 8.20, $Q|_W$ es no degenerada. Ahora, aplicamos el caso de dimensión par a $Q|_W$ y descomponemos $Q = Q|_W + Q|_{V^{\perp}}$. Lo que resta notar es que la forma

$$x^2 \,+\, x\, y \,+\, d\, y^2 \,+\, z^2 \ ,$$

en $\mathbb{F}^3$ es no degenerada y, por el Teorema 8.24, equivalente a $x\, y + z^2$. $\square$

El enunciado del Teorema 8.26 no garantiza que las formas cuadráticas del caso n par no sean no equivalentes. A continuación, demostramos que esto es así. Recordemos que en el caso de característica impar, Teorema 7.35, tampoco es inmediato que las distintas formas que aparecen en el enunciado no son equivalente. El argumento involucraba el discriminante de cada una de las formas *canónicas* y sus clases módulo cuadrados. Pero sus imágenes también podían ser útiles.

Definición 8.27. Dada una forma cuadrática $Q : V \to F$, el *conjunto de ceros* es el conjunto $\big\{v \in V \ : \ Q(v) = 0\big\}$. Cuando el cuerpo de base F es un cuerpo finito, denotamos el cardinal de este conjunto por $z(Q)$.

El conjunto de ceros está compuesto por los vectores isotrópicos y el vector cero. Es un invariante para la relación de equivalencia de formas cuadráticas.

Ejemplo 8.28. Si $\mathbb{F}$ es un cuerpo finito de característica 2, $V = \mathbb{F}^2$ y $Q : V \to \mathbb{F}$ es una forma no degenerada, entonces Q es equivalente a $x\, y$ o a $x^2 + x\, y + d\, y^2$. Como vimos, estas formas no son equivalentes. Se puede comprobar que:

- $z(x\, y) = 2q - 1$ y que
- $z(x^2 + x\, y + d\, y^2) = 1$,

donde $q = |\mathbb{F}|$.

Observación 8.29. Si $a \in \mathbb{F}^{\times}$, entonces $a = b^2$ para cierto $b \in \mathbb{F}^{\times}$. Los subconjuntos $Q^{-1}(a)$ y $Q^{-1}(1)$ de V están en biyección vía $v \mapsto (1/b)\, v$. En particular,

$$|Q^{-1}(a)| \,=\, |Q^{-1}(1)| \ , \tag{29}$$

para todo $a \neq 0$.

Ejercicio 8.30. Calcular $|Q^{-1}(a)|$ para cada $a \neq 0$ para la forma $x\,y$.[65] Hacer lo mismo para la forma $x^2 + x\,y + d\,y^2$.

Lema 8.31. *Sea $Q : V \to \mathbb{F}$ una forma cuadrática y sea h la forma $x\,y$ en $\mathbb{F}^2$. Entonces,*

$$z(h \perp Q) \;=\; q\,z(Q) \;+\; (q-1)\,|V|\ ,$$

donde $q = |\mathbb{F}|$.

Demostración. En primer lugar, $(h \perp Q)(u,v) = 0$, si y sólo si $Q(v) = h(u)$. Entonces,

$$z(h \perp Q) \;=\; \sum_u |Q^{-1}(h(u))|\ .$$

Separar en casos $h(u) = 0$ y $h(u) \neq 0$ y usar la Observación 8.29 y el Ejemplo 8.28. □

Teorema 8.32. *Sea $n = 2m$, $m \geq 1$. Entonces,*

$$\begin{aligned} z(x_1\,x_2 + \;\cdots\; + x_{n-3}\,x_{n-2} + x_{n-1}\,x_n) \;&=\; q^{2m-1} + q^m - q^{m-1} \quad y \\ z(x_1\,x_2 + \;\cdots\; x_{n-3}\,x_{n-2} + x_{n-1}^2 + x_{n-1}\,x_n + d\,x_n^2) \;&=\; q^{2m-1} - q^m + q^{m-1}\ . \end{aligned}$$

En particular, las dos formas de dimensiones pares del Teorema 8.26 no son equivalentes.

En la clasificación de formas cuadráticas sobre cuerpos finitos de característica 2, la dificultad al final resultó ser distinguir las clases de formas no degeneradas en dimensiones pares. Sobre un cuerpo F de característica 2 y perfecto, hay una única clase de equivalencia de formas cuadráticas no degeneradas por cada dimensión impar y $|F/\wp(F)|$ tantas clases en cada dimensión par. Para poder distinguirlas, introducimos el *invariante de Arf* de una forma.

Sea F un cuerpo de característica 2 (no necesariamente finito, no necesariamente perfecto) y sea $Q : V \to F$ una forma cuadrática tal que $B = B_Q$ sea no degenerada.[66]

Definición 8.33. El *invariante de Arf* de Q es la clase

$$\sum_{i=1}^{m} a^i\,b^i \,(\mathsf{mod}\,\wp(F))$$

en $F/\wp(F)$, donde a^i y b^i son los coeficientes diagonales de la matriz de Q en una base simpléctica.

Ejercicio 8.34. Probar que, cambiando la base simpléctica, la suma $\sum_i a^i\,b^i$ se ve modificada por sumar un elemento en $\wp(F)$. En particular, el invariante de Arf de una forma cuadrática cuya forma bilineal es no degenerada está bien definido y es un invariante para la relación de equivalencia de formas cuadráticas.

[65] Hint: Probar que $|Q^{-1}(1)| \geq 1$ y apelar a la Observación 8.29 y al Ejemplo 8.28

[66] En dimensiones pares, esto equivale a que Q sea no degenerada, y es en esos casos en los que necesitaremos distinguir clases.

8.5 Extras

En característica 2 las formas $x\,y$ y $x^2 - y^2$ no son equivalentes: una es degenerada y la otra no.

Definición 8.35. Un *plano hiperbólico* es un espcio cuadrático de dimensión 2 equivalente a $x\,y$.

Teorema 8.36. *Sea (V, Q) un espacio cuadrático sobre un cuerpo de característica 2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (V, Q) es un plano hiperbólico;

(ii) Q es no degenerada y admite un vector isotrópico.

Ejercicio 8.37. Sea K/F una extensión cuadrática. Probar que la norma es no degenerada, si y sólo si K/F es una extensión separable. Si $F = \mathbb{F}$ es un cuerpo finito, $\mathsf{Nm}_{K/F}$ es igual a $x^2 + c\,x\,y + y^2$ en alguna base; el polinomio $T^2 + c\,T + 1$ es irrecucible.

Ejercicio 8.38. Si $a\,x^2 + x\,y + b\,y^2$ y $a'\,x^2 + x\,y + b'\,y^2$ son equivalentes, mostrar (explícitamente) que $ab \equiv a'b' \,(\mathsf{mod}\,\wp(F))$. No asumir que el cuerpo F es perfecto ¿Vale la vuelta?

Ejercicio 8.39. Sea $n \geq 2$ un entero par y sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito de característica 2. Sea Q una forma cuadrática en un espacio de V dimensión n sobre $\mathbb{F}$. Definimos:

$$n_+(Q) = \left|\{v \in V \,:\, Q(v) \in \wp(F)\}\right| \quad \text{y} \quad n_-(Q) = \left|\{v \in V \,:\, Q(v) \notin \wp(F)\}\right| .$$

Supongamos que Q es no degenerada. Probar que los valores de $n_+(Q)$ y de $n_-(Q)$ son iguales a $q^n\,(q^n + 1)/2$ o a $q^n\,(q^n - 1)/2$; probar que $n_+(Q) > n_-(Q)$, si el invariante de Arf de Q pertence a $\wp(\mathbb{F})$ y que $n_-(Q) > n_+(Q)$, si no.[67] Es decir, el invariante de Arf de Q es la clase en el cociente $\mathbb{F}/\wp(\mathbb{F})$ que contiene una mayoría de valores de $Q(v)$.

[67] Sobre un cuerpo finito, hay sólo dos clases en el cociente $\mathbb{F}/\wp(\mathbb{F})$.

Parte III

El Teorema de extensión de Witt

9 Recapitulación

9.1 Espacios bilineales

De acuerdo con la Definición 1.1, un *espacio bilineal* es un par (V, B), donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo, F, y $B : V \times V \to F$ es una forma bilineal.

Definición 9.1. Un *morfismo de espacios bilineales*,

$$(V, B_V) \to (W, B_W)$$

es una t.l. $A : V \to W$ tal que

$$B_W(A\,v, A\,v_1) = B_V(v, v_1) ,$$

para todo $v, v_1 \in V$.

Es decir, un morfismo entre espacios bilineales es una t.l. entre los e.v. subyacentes que preserva las formas bilineales. Los morfismos de espacios bilineales preservan la relación de ortogonalidad.[68] En términos de la Definición 9.1, la Observación 3.20 se reinterpreta de la siguiente manera: todo morfismo de espacios bilineales *no degenerados* es inyectivo.

Definición 9.2. Un *embedding isométrico* es un morfismo inyectivo de espacios bilineales. Una *isometría* es un embedding isométrico que es sobreyectivo.

Ejemplo 9.3. Si (V, B) es un espacio bilineal y $W \subset V$ es un subespacio, la inclusión de $W \hookrightarrow V$ es un embedding isométrico de $B|_W$ en B.

Observación 9.4. Los espacios bilineales, junto con los morfismos de espacios bilineales conforman una categoría, la *categoría de espacios bilineales*. Las equivalencias de espacios bilineales son los isomorfismos de la categoría. Los espacios bilineales con los embeddings isométricos como morfismos constituyen una subcategoría. Esta subcategoría no es *plena*; los espacios bilineales no degenerados con los embeddings isométricos como morfismos constituyen una subcategoría plena.

El espacio vectorial nulo sobre un cuerpo F admite, salvo isomorfismo, una única forma bilineal, la trivial. El par compuesto por este espacio y esta forma bilineal es un espacio bilineal en la categoría de espacios bilineales sobre el cuerpo F. No es cualquier objeto de la categoría; es un *objeto inicial*. Este objeto también es un *objeto final* en la categoría, pues, dado (V, B), existe una única t.l. $V \to 0$ y la misma es un morfismo de (V, B) en 0. Pero, si nos restringimos a la subcategoría de espacios bilineales no

[68] C.f. la Definición 3.18.

degenerados, 0 deja de ser un objeto final. No hay objeto final en la categoría de espacios bilineales no degenerados, aunque sí existe objeto inicial.

Algo similar sucede con las construcciones de suma directa y producto directo. Si (V, B_V) y (W, B_W) son espacios bilineales, $(V \oplus W, B_{V\oplus W})$, donde

$$B_{V\oplus W}(v + w, v_1 + w_1) \;=\; B_V(v, v_1) \;+\; B_W(w, w_1)\;, \tag{30}$$

es un espacio bilineal y es un *coproducto* en la categoría de espacios bilineales; también es un *producto* en la misma categoría. Las inclusiones canónicas en $V \oplus W$ son embeddings isométricos, con lo cual la suma directa también es un coproducto en la subcategoría de espacios no degenerados; pero, al igual que el espacio nulo, deja de ser un producto en la subcategoría. La suma directa la llamamos *suma directa ortogonal.*

Además de la construcción de suma directa, el *producto tensorial* de dos espacios bileneales (V, B_V) y (W, B_W) es el par $(V \otimes W, B_{V\otimes W})$, cuya forma bilineal está dada, en tensores elementales, por

$$B_{V\otimes W}(v \otimes w, v_1 \otimes w_1) \;=\; B_V(v, v_1)\, B_W(w, w_1)\;. \tag{31}$$

La matriz asociada al producto tensorial es el *producto de Kronecker* de las matrices asociadas a cada uno de los factores.

Definición 9.5. El *grupo ortogonal* de (V, B) es el subgrupo

$$\mathsf{O}(V, B) \;=\; \Big\{A \in \mathsf{GL}(V)\;:\; B(A\,v, A\,v_1) = B(v, v_1) \text{ para todo } v, v_1 \in V\Big\}$$

de $\mathsf{GL}(V)$. También denotamos este subgrupo por $\mathsf{O}(V)$ o por $\mathsf{O}(B)$.

Si $A \in \mathsf{O}(B)$, tomando bases,

$$(\det A)^2 \operatorname{disc} B \;=\; \operatorname{disc} B\;. \tag{32}$$

En particular, *si B es no degenerada*, $\det(A) \in \{\pm 1\}$.[69]

Si B es no degenerada, podemos hablar de la adjunta A^* de $A \in \mathsf{O}(V)$. Si $V = F^n$, identificamos F^n con su dual y $A \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$, entonces A preserva la forma bilineal B, si y sólo si ${}^tA$ la preserva:

$$\begin{aligned} B(A\,v, A\,v_1) \;=\; B(v, v_1) \quad \text{para todo } v, v_1 \quad &\Rightarrow \quad A^*\,A = I \\ \Rightarrow \quad A\,A^* = I \quad \Rightarrow \quad & {}^tA^*\;{}^tA = I \\ \Rightarrow \quad B({}^tA\,v,\, {}^tA\,v_1) \;=\; B(v, v_1) \quad & \text{para todo } v, v_1\;. \end{aligned}$$

Definición 9.6. Una *rotación* en V (con respecto a B) es un elemento $A \in \mathsf{O}(B)$ tal que $\det(A) = 1$. Una *reflexión* es un elemento $A \in \mathsf{O}(B)$ tal que $\det(A) = -1$.

[69] Si B es degenerada, diagonalizando, se ve que existen endomorfismos que preservan B y que no son invertibles, necesariamente, o que, aunque sean invertibles, no tengan determinante a ± 1.

Lema 9.7. *Si $v \in V$ es tal que $B(v,v) \neq 0$, entonces*

$$V \;=\; \langle v\rangle \,\oplus\, v^{\perp_{\mathrm{L}}} \;=\; \langle v\rangle \,\oplus\, v^{\perp_{\mathrm{R}}} \;.$$

Si la relación de perpendicularidad es simétrica, entonces $v^{\perp_{\mathrm{L}}} = v^{\perp_{\mathrm{R}}}$ y la suma $V = v \oplus v^{\perp}$ es ortogonal. Además, en este caso, si V es no degenerado, entonces $v^{\perp}$ es no degenerado.

Demostración. Ver el Lema 4.5. □

Ejemplo 9.8. Sea $B = \left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ & 1\end{smallmatrix}\right]$. Si la característica del cuerpo es impar, el vector $v = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ cumple $B(v,v) \neq 0$. Los subespacios ortogonales son $v^{\perp_{\mathrm{L}}} = \langle\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\rangle$ y $v^{\perp_{\mathrm{R}}} = \left\langle\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]\right\rangle$ (si la característica del cuerpo es 2, $v^{\perp_{\mathrm{R}}} = \langle v\rangle$).

Proposición 9.9. *Sea (V,B) un espacio bilineal tal que la relación de perpendicularidad es simétrica. Si B no es alternada, el determinante $\mathsf{det} : \mathsf{O}(B) \to \{\pm 1\}$ es un morfismo sobreyectivo. Si la característica del cuerpo es 2, el morfismo es sobreyectivo trivialmente.*

Demostración. Si, para todo $x, y \in V$, $B(x,y) = 0$ implica $B(y,x) = 0$, se verifica que, para toda terna $u, v, w \in V$, se verifica[70]

$$B(v,u)\,B(u,w) \;=\; B(u,v)\,B(w,u) \;. \tag{33}$$

La idea es construir un elemento de determinante -1. Si $u \in V$ es un vector tal que $B(u,u) \neq 0$, definimos $\sigma_u : V \to V$ por

$$\sigma_u(v) \;=\; v \;-\; \frac{B(v,u) + B(u,v)}{B(u,u)}\,u \;. \tag{34}$$

La transformación (34) cumple:

- $B(\sigma_u(v), \sigma_u(w)) = B(v,w)$ para todo $v, w \in V$ (por (33)),
- $\sigma_u(u) = -u$ y
- $\sigma_u(v) = v$, si $v \in u^{\perp}$.

Por el Lema 9.7, $V = \langle u\rangle \oplus u^{\perp}$. Eligiendo una base adecuada (empezando con u), la transformación σ_u está representada por la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} .$$

En particular, $\mathsf{det}(\sigma_u) = -1$. □

[70] Ver (3).

9.2 Espacios cuadráticos

De acuerdo con la Definición 7.9, un *espacio cuadrático* es un par (V, Q), donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo, F, y $Q : V \to F$ es una forma cuadrática.

Definición 9.10. Un *morfismo de espacios cuadráticos*,

$$(V, Q_V) \to (W, Q_W) ,$$

es una t.l. $A : V \to W$ tal que

$$Q_W(A\,v) = Q_V(v) ,$$

para todo $v \in V$.

Un morfismo entre espacios cuadráticos es una t.l. entre los e.v. subyacentes que preserva las formas cuadráticas. Dado que (14) y que (22), los morfismos de espacios cuadráticos preservan la relación de perpendicularidad (expresada tanto en términos de formas cuadráticas, como en términos de formas bilineales). Los espacios cuadráticos, junto con los morfismos de espacios cuadráticos conforman una categoría, la *categoría de espacios cuadráticos* ¿Qué podemos decir de los morfismos entre espacios no degenerados? El razonamiento dependerá de la característica.

Supongamos que (V, Q_V) y (W, Q_W) son espacios cuadráticos no degenerados y sea $A : V \to W$ un morfismo. Si $\mathsf{car}(F) \neq 2$, entonces que las formas cuadráticas sean no degeneradas equivale a que las formas bilineales asociadas lo sean. En particular, en este caso, A debe ser inyectiva. Otro argumento es el siguiente: si $A\,v = 0$, entonces, para todo $v_1 \in V$,

$$0 = B_W(0, A\,v_1) = B_W(A\,v, A\,v_1) = B_V(v, v_1) , \tag{35}$$

con lo cual $v \in V^\perp$. Aquí, B_V y B_W son las formas bilineales correspondientes a Q_V y a Q_W. Si B_V es no degenerada, $V^\perp = 0$, $v = 0$ y A es inyectiva. Notemos que en (35) *únicamente usamos que A es un morfismo de espacios bilineales.* Si $\mathsf{car}(F) = 2$, $V^\perp$ podría no ser cero, pero $Q : V^\perp \to F$ es inyectiva. Como A es morfismo *de espacios cuadráticos*, si $v \in V^\perp$ y $A\,v = 0$, entonces

$$0 = Q_W(0) = Q_W(A\,v) = Q_V(v) , \tag{36}$$

con lo cual $v \in V^\perp \cap \{Q_V = 0\}$ y $v = 0$.[71]

Definición 9.11. Un *embedding isométrico* es un morfismo inyectivo de espacios cuadráticos. Una *isometría* es un embedding isométrico que es sobreyectivo.

Teorema 9.12. *Todo morfismo entre espacios cuadráticos no degenerados es un embedding isométrico.*

[71] Notemos que alcanza con asumir que el dominio es no degenerado, tanto si pensamos en formas bilineales, como si pensamos en formas cuadráticas.

Toda forma cuadrática tiene asociada una forma bilineal.[72] De esta manera, podemos definir una aplicación que a cada espacio cuadrático le asigna su espacio bilineal correpondiente:

$$(V, Q) \mapsto (V, B_Q) \ . \tag{37}$$

Si $A : V \to W$ es morfismo de espacios cuadráticos (V, Q_V) y (W, Q_W), entonces

$$\begin{aligned} * \, B_W(A\,v, A\,v_1) &= Q_W(A\,v + A\,v_1) \,-\, Q_W(A\,v) \,-\, Q_W(A\,v_1) \\ &= Q_V(v + v_1) \,-\, Q_V(v) \,-\, Q_V(v_1) \\ &= * \, B_V(v, v_1) \ , \end{aligned}$$

donde B_V y B_W son las formas bilineales asociadas y $* \in \{1, 2\}$. En particular, A es morfismo entre los espacios bilineales correspondientes. De esta manera, la asignación 37 determina un *funtor* de la categoría de espacios cuadráticos en la categoría de espacios bilineales.

Observación 9.13. El funtor de la categoría de espacios cuadráticos en la categoría de espacios bilineales se restringe a un funtor en la subcategoría plena de espacios bilineales no degenerados desde la subcategoría también plena de espacios cuadráticos no degenerados.

Ejercicio 9.14. Probar que

$$v \in V^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad Q(v + w) \,-\, Q(w) \text{ es constante.}$$

Probar que Q es no degenerada, si y sólo si,[73]

$$v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Q(v + w) \neq Q(w) \text{ para algún } w \in V \ .$$

Definición 9.15. El *grupo ortogonal* de (V, Q) es el subgrupo

$$\mathsf{O}(V, Q) \,=\, \Big\{ A \in \mathsf{GL}(V) \,:\, Q(A\,v) = Q(v) \text{ para todo } v \in V \Big\}$$

de $\mathsf{GL}(V)$. También denotamos este subgrupo por $\mathsf{O}(Q)$ o por $\mathsf{O}(V)$.

Si la característica del cuerpo es impar, entonces $\mathsf{O}(Q) = \mathsf{O}(B_Q)$. En general, que A preserve Q implica que A preserva B_Q.

9.3 Geometría

Empecemos reformulando algunos resultados de las secciones §§ 3, 7 y 8.

Teorema 9.16. *Sea (V, B) un espacio bilineal tal que $v \perp w$ es una relación simétrica. Existe un subespacio $W \subset V$ tal que $B|_W$ es no degenerada y*

$$V \,=\, V^{\perp} \oplus W \ .$$

[72] La definición depende de la característica.

[73] Si Q es no degenerada y $v \in V^{\perp}$, entonces $Q(v + w) \neq Q(w)$ para todo w.

Demostración. Si $v \perp w$ es una relación simétrica, entonces $V^{\perp_{\mathrm{L}}} = V^{\perp_{\mathrm{R}}} = V^{\perp}$. Basta, entonces, con elegir un complemento de $V^{\perp}$ en V. $\square$

Ejemplo 9.17. Si $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, entonces $V^{\perp_{\mathrm{L}}} = \langle \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \rangle$ y $V^{\perp_{\mathrm{R}}} = \langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \rangle$. En particular, $V = V^{\perp_{\mathrm{L}}} \oplus V^{\perp_{\mathrm{R}}}$. No es cierto en general que el mismo subespacio se complemento directo (ortogonal) tanto de $V^{\perp_{\mathrm{L}}}$ como de $V^{\perp_{\mathrm{R}}}$. Si $B = \left[\begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{smallmatrix}\right]$, entonces $V^{\perp_{\mathrm{L}}} = \left\langle \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\rangle$ y $V^{\perp_{\mathrm{R}}} = \left\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \right\rangle$. Si $W = \left\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \right\rangle$, entonces W es complemento directo de $V^{\perp_{\mathrm{L}}}$, pero $V^{\perp_{\mathrm{R}}} \cap W \neq 0$. En particular, $B|_W$ no es no degenerada. De hecho, $B|_W = \left[\begin{smallmatrix} & 1 \\ & \end{smallmatrix}\right]$, en la base de los generadores. ¿Qué condiciones garantizan que exista algún complemento común?

Observación 9.18. Si $V = V^{\perp_{\mathrm{L}}} + W$, entonces $V^{\perp_{\mathrm{R}}} = W^{\perp_{\mathrm{R}}}$. Si, además, $V^{\perp_{\mathrm{R}}} \cap W = 0$, entonces $B|_W$ es no singular y $W^{\perp_{\mathrm{L}}} \cap W = 0$. Pero, en particular, esto implica $V^{\perp_{\mathrm{L}}} \cap W = 0$ y W es complemento directo de $V^{\perp_{\mathrm{L}}}$ en V. Esto fuerza que las dimensiones cumplan $\dim W + \dim V^{\perp_{\mathrm{L}}} = \dim V$ y, en consecuencia, $\dim W + \dim V^{\perp_{\mathrm{R}}} = \dim V$. Pero, entonces, W es complemento de $V^{\perp_{\mathrm{R}}}$, también ¿Existe, en general, W tal que $V = V^{\perp_{\mathrm{L}}} + W$ y $V^{\perp_{\mathrm{R}}} \cap W = 0$?

Definición 9.19. Un vector v en un espacio cuadrático (V, Q) se dice *isotrópico*, si $v \neq 0$ y $Q(v) = 0$.[74] El espacio cuadrático (V, Q) se dice *isotrópico*, si es no degenerado y admite un vector isotrópico. Un subespacio $W \subset V$ se dice *totalmente isotrópico*, si $Q(w) = 0$, para todo $w \in W$.[75]

En un espacio cuadrático (V, Q), deberíamos hacer una distinción entre aquellos vectores que cumplen $Q(v) = 0$ y aquellos que cumplen $B_Q(v, v) = 0$. En característica distinta de 2, son *los mismos vectores*, pero en característica 2, $B_Q(v, v) = 0$ para todo v, mientras que la condición $Q(v) = 0$ es restrictiva. La confución aparece cuando introducimos la noción de subespacios isotrópicos, totalmente isotrópicos, anisotrópicos, degenerados y no degenerados. De nuevo, en característica impar, no hay distinción, pero, en característica 2, sí la hay: $Q = 0$ implica $B_Q = 0$, pero no siempre es cierta la vuelta; si A preserva Q, entonces preserva B_Q, pero no es cierto en general que si preserva B_Q, entonces preserve Q; si B_Q es no degenerada, entonces $V^{\perp} = 0$ y Q es no degenerada, pero Q puede ser no degenerada con $V^{\perp} \neq 0$. En particular, en característica 2, no es lo mismo un subespacio totalmente isotrópico (Q idénticamente cero) que un subespacio en donde B_Q sea idénticamente cero.

Los espacios bilineales simétricos se diagonalizan, los espacios bilineales alternados son simplécticos. Los espacios cuadráticos son híbridos de estos dos tipos de geometrías. Algunos de los resultados válidos para los espacios en donde la relación de perpendicularidad es simétrica son válidos para espacios cuadráticos. Un poco más específicamente, resultados acerca del espacio bilineal son reemplazados por resultados acerca del espacio

[74] En [5, p. 114], estos vectores se denominan *singulares*.

[75] En característca impar, esto equivale a que la forma bilineal asociada sea idénticamente cero en el subespacio. En particular, $(W, B|_W)$ es degenerado, con lo que, de acuerdo con la definición, *no es un espacio isotrópico*.

cuadrático. Esta distinción tiene especial relevancia en característica 2, pues el funtor $Q \mapsto B_Q$ no es una equivalencia.

Teorema 9.20. *Sea (V, B) un espacio bilineal en donde la relación de perpendicularidad es simétrica. Si la característica del cuerpo es 2, asumimos que B es alternada. Si $u \in V$ es un vector no nulo tal que $B(u, u) = 0$, entonces:*

- *existe un segundo vector $v \in V$ no nulo tal que $B(v, v) = 0$ y $B(u, v) = 1$,*
- *B es no degenerada en $\langle u, v\rangle$ y*

$$V = \langle u, v\rangle \oplus \langle u, v\rangle^{\perp} .$$

En particular, $\langle u, v\rangle \simeq \mathrm{H}$.

Demostración. Ver el Teorema 7.34. Si B es no degenerada, $V^{\perp} = 0$. Entonces, dado que $u \neq 0$, existe $v \in V$ tal que $B(u, v) \neq 0$. Reescalando, podemos asumir que $B(u, v) = 1$. Considerando vectores de la forma $c\,u + v \in \langle u, v\rangle$, $c \in F$,

$$B(c\,u + v, c\,u + v) = B(v, v) + 2\,c .$$

Si $2 \neq 0$, ésta es una función afín y existe un (único) valor de $c \in F$ tal que $B(c\,u + v, c\,u + v) = 0$. Con esta elección,

$$B(u, c\,u + v) = c\,B(u, u) + B(u, v) = B(u, v) = 1 ,$$

pues $B(u, u) = 0$. Reemplazamos v por $c\,u + v$. En todo caso, u y v son l.i. □

Teorema 9.21. *Sea (V, Q) un espacio cuadrático no degenerado sobre un cuerpo arbitrario. Si $e \in V$ es un vector isotrópico, entonces:*

- *existe un segundo vector isotrópico $f \in V$ tal que $B(e, f) = 1$,*
- *B es no degenerada en $\langle e, f\rangle$ y*

$$V = \langle e, f\rangle \oplus \langle e, f\rangle^{\perp} .$$

En particular, $\langle e, f\rangle \simeq \mathrm{H}$.

Demostración. Ver el Teorema 8.16. Si Q es no degenerada, $Q : V^{\perp} \to F$ es inyectiva. Entonces, dado que $Q(e) = 0$, $e \notin V^{\perp}$ y existe f tal que $B_Q(e, f) \neq 0$. Reescalando, podemos asumir que $B_Q(e, f) = 1$. Considerando vectores de la forma $c\,e + f \in \langle e, f\rangle$, $c \in F$, la función

$$Q(c\,e + f) = Q(f) + *\,c ,$$

donde $* \in \{1, 2\}$, es afín y existe un (único) valor de $c \in F$ tal que $Q(c\,e + f) = 0$. Con esta elección,

$$B_Q(e, c\,e + f) = c\,B_Q(e, e) + B_Q(e, f) = B_Q(e, f) = 1 ,$$

pues $B_Q(e, e) = 0$.[76] Reemplazamos f por $c\,e + f$. En todo caso, e y f son l.i. □

[76] Si la característica es impar, esto se debe a que $Q(e) = B_Q(e, e)$. Si la característica es 2, B_Q es alternada.

Observación 9.22. Los planos hiperbólicos fueron definidos como espacios cuadráticos de dimensión 2 que admiten una base $\{e, f\}$ tal que $Q(e) = Q(f) = 0$ y $B(e, f) = 1$. El subespacio $\langle u, v\rangle$ del Teorema 9.20 no es un plano hiperbólico: aunque sea $B = B_Q$, *a priori* no se sabe si $Q(u) = 0$. El isomorfismo $\langle u, v\rangle \simeq \mathrm{H}$ es en tanto espacios bilineales. El Teorema 9.21 garantiza que, si se sabe que, además, e es isotrópico, entonces el vector f (que se construye esencialmente de la misma manera) es isotrópico también. En particular, en este caso, el isomorfismo $\langle e, f\rangle \simeq \mathrm{H}$ es de espacios cuadráticos.

Observación 9.23. Todo espacio isotrópico es universal, pues contiene una copia del plano hiperbólico, que es universal.

Teorema 9.24. *Sea (V, B) un espacio bilineal no degenerado tal que la relación de perpendicularidad es simétrica. Si la característica del cuerpo es 2, asumimos que B es alternada. Entonces,*

(i) si $U \subset V$ es un subespacio tal que $B|_U = 0$ y de dimensión $m \geq 1$, existe un subespacio $U' \subset V$ tal que $B|_{U'} = 0$, de dimensión m y tal que $U \cap U' = 0$ y $U + U' \simeq \mathrm{H}^{\perp m}$;

(ii) si $Z \subset V$ es un subespacio tal que $U \perp Z$ y $U \cap Z = 0$, entonces podemos elegir U' de manera que $U' \perp Z$ y $U' \cap Z = 0$.

Teorema 9.25. *Sea (V, Q) un espacio cuadrático tal que la forma bilineal asociada, B_Q, es no degenerada. Entonces,*

(i) si $U \subset V$ es un subespacio totalmente isotrópico de dimensión $m \geq 1$, existe un subespacio $U' \subset V$ totalmente isotrópico de dimensión m tal que $U \cap U' = 0$ y $U + U' \simeq \mathrm{H}^{\perp m}$;

(ii) si $Z \subset V$ es un subespacio tal que $U \perp Z$ y $U \cap Z = 0$, entonces podemos elegir U' de manera que $U' \perp Z$ y $U' \cap Z = 0$.

Demostración. La forma bilineal B_Q es no degenerada. Entonces, podemos proceder de la siguiente manera. Sea $W = \langle e_2, \ldots, e_m\rangle \perp Z$. Si $W^{\perp} \subset e_1^{\perp}$, entonces

$$\langle e_1\rangle = e_1^{\perp\perp} \subset W^{\perp\perp} = W .$$

Las igualdades son consecuencia de que *el espacio bilineal* (V, B_Q) es no degenerado.[77] Pero $\langle e_1\rangle \cap W = 0$, con lo que existe $w \in W^{\perp}$ tal que $B_Q(e_1, w) \neq 0$. El argumento de la demostración del Teorema 9.21, muestra que existe un (único) $f_1 \in \langle e_1, w\rangle$ tal que $Q(f_1) = 0$ y $B_Q(e_1, f_1) = 1$. El subespacio $H_1 = \langle e_1, w\rangle = \langle e_1, f_1\rangle$ es un plano hiperbólico y

$$H_1 \subset W^{\perp} ,$$

por definición. De nuevo, como B_Q es no degnerada, $W = W^{\perp\perp} \subset H_1^{\perp}$. Como H_1 es no degenerado, $H_1^{\perp}$ también lo es. Inductivamente en m, podemos concluir, con $H_1^{\perp}$ jugando el papel del espacio ambiente no degenerado, que existen $f_2, \ldots, f_m \in H_1^{\perp}$ que cumplen con las condiciones siguientes:

[77] Teorema 3.9.

- $Q(f_i) = 0$ y $B_Q(e_i, f_i) = 1$,
- si $H_i = \langle e_i, f_i \rangle$, entonces $H_i \simeq \mathrm{H}$ y son ortogonales y linealmente disjuntos.

El subespacio $U' := \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ cumple lo pedido. $\square$

Observación 9.26. De la demostración, si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una base de U, existen $f_1, \ldots, f_m$ tales que $B(e_i, f_i) = 1$ y $U' = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Además, si $H_i = \langle e_i, f_i \rangle$, entonces $H_i \simeq \mathrm{H}$ y son ortogonales y linealmente disjuntos.

Corolario 9.27. *Si W es un subespacio totalmente isotrópico maximal de un espacio cuadrático no degenerado V, entonces $\mathsf{dim}\, W \leq (\mathsf{dim}\, V)/2$.*

Teorema 9.28. *Sean (V, B_V) y (X, B_X) espacios bilineales no degenerados tales que las relaciones de perpendicularidad son simétricas. Si la característica del cuerpo es 2, asumimos que B_V y B_X son alternadas. Sea $U \subset V$ un subespacio tal que $B_V|_U = 0$ y sea $Z \subset V$ un subespacio tal que $U \perp Z$ y $U \cap Z = 0$. Si $A : U \perp Z \to X$ es un embedding isométrico, entonces existe un embedding isométrico $\tilde{A} : (U + U') \perp Z \to X$ tal que $\tilde{A}|_{U \perp Z} = A$.*

Teorema 9.29. *Sean (V, Q_V) y (X, Q_X) espacios cuadráticos tales que sus formas bilineales asociadas son no degeneradas. Sea $U \subset V$ un subespacio totalmente isotrópico y sea $Z \subset V$ un subespacio tal que $U \perp Z$ y $U \cap Z = 0$. Si $A : U \perp Z \to X$ es un embedding isométrico, entonces existe un embedding isométrico $\tilde{A} : (U + U') \perp Z \to X$ tal que $\tilde{A}|_{U \perp Z} = A$.*[78]

Demostración. Si A es un embedding, entonces $\{A(e_1), \ldots, A(e_m)\}$ es un subconjunto l.i. conformado por vectores isotrópicos y ortogonales. Por lo tanto, el subespacio generado, $A(U)$, es totalmente isotrópico y está en las condiciones del Teorema 9.25. Elegimos un subespacio de X totalmente isotrópico que lo complemente, generado por vectores $g_1, \ldots, g_m$, definimos $\tilde{A}(f_i) := g_i$ y extendemos linealmente. $\square$

10 Teoremas de extensión y de cancelación

10.1 Teoremas de Witt para espacios cuadráticos

Teorema 10.1 (Teorema de extensión)**.** *Sea (V, Q) un espacio cuadrático no degenerado sobre un cuerpo F. Si $\mathsf{car}(F) = 2$, suponemos, además, que $V^{\perp} = 0$. Entonces, dados subespacios $V_1, V_2 \subset V$ y una isometría $f : V_1 \to V_2$, existe una isometría $\tilde{f} : V \to V$ tal que $\tilde{f}|_{V_1} = f$.*

[78] Si A es sólo morfismo de espacios cuadráticos, podemos recurrir al Teorema 9.21. Si $Z = 0$, alcanza con suponer que las formas cuadráticas Q_V y Q_X son no degeneradas ¿Talvez se puede generalizar un poco y suponer que A sólo preserva la relación de ortogonalidad? No, porque es necesario que $A(e_i)$ sean isotrópicos.

¿Es, el Teorema de extensión 10.1, un teorema sobre espacios cuadráticos o es un teorema sobre espacios bilineales? La hipótesis fundamental parece ser que (V, B_Q), el espacio bilineal asociado a (V, Q), sea no degenerado ¿O es un teorema acerca del funtor $Q \mapsto B_Q$? La isometría f y su extensión son morfismos de espacios cuadráticos, no de los espacios bilineales asociados. La conclusión es que, si f preserva Q, entonces es posible extenderla de manera que siga preservando Q.

Teorema 10.2 (Teorema de cancelación). *Sea (V, Q) un espacio cuadrático no degenerado sobre un cuerpo F. Si $\mathsf{car}(F) = 2$, suponemos, además, que $V^\perp = 0$. Entonces, dados subespacios isométricos $V_1, V_2 \subset V$, se cumple que $V_1^\perp \simeq V_2^\perp$.*

El Teorema de cancelación se deduce del Teorema de extensión: si $f : V_1 \to V_2$ es una isometría, por el Teorema 10.1, podemos extenderla a una isometría de V. Pero, entonces $f(V_1^\perp) = f(V_1)^\perp = V_2^\perp$.

Recíprocamente, *en característica distinta de* 2, el Teorema de cancelación tiene como consecuencia el Teorema de extensión. Sea $f : V_1 \to V_2$ la isometría. Definimos $U_1 = V_1^\perp \cap V_1$, descomponemos $V_1 = U_1 \perp W_1$ y elegimos U_1' como en el Teorema 9.25. La isometría f induce un embedding isométrico $f : V_1 \to V$ que extendemos a $Z_1 := (U_1 + U_1') \perp W_1$, por el Teorema 9.29. Ahora, Z_1 es no degenerado y $V = Z_1 \oplus Z_1^\perp$. Si definimos $U_2 := f(U_1)$, $U_2' := f(U_1')$ y $W_2 := f(W_1)$, entonces

- $V_2 = f(V_1) = U_2 \perp W_2$,
- $U_2 \cap U_2' = 0$ y $U_2 + U_2' \simeq U_1 + U_1' \simeq \mathrm{H}^{\perp m}$ y
- W_2 es no degenerado, $W_2 \cap (U_2 + U_2') = 0$ y $W_2 \perp (U_2 + U_2')$.

Si $Z_2 := (U_2 + U_2') \perp W_2$, entonces Z_2 es no degenerado y $Z_1 \simeq Z_2 = f(V_1)$, vía la extensión (parcial) de f. Por el Teorema 10.2, $Z_1^\perp \simeq Z_2^\perp$. Pero $V = Z_2 \oplus Z_2^\perp$. Si $g : Z_1^\perp \to Z_2^\perp$ es una isometría, entonces

$$f \oplus g \,:\, Z_1 \oplus Z_1^\perp \to Z_2 \oplus Z_2^\perp$$

es una isometría de V que extiende a f.

Ejercicio 10.3. ¿Dónde falla el argumento si la característica del cuerpo es 2?

10.2 Teoremas de Witt para espacios bilineales

Los Teoremas de extensión y cancelación tienen versiones para espacios bilineales en los cuales la relación de perpenicularidad es simétrica.

Teorema 10.4. *Sea (V, B) un espacio bilineal no degenerado sobre un cuerpo F tal que la relación de perpendicularidad es simétrica. Si $\mathsf{car}(F) = 2$, asumimos que B es alternada. Entonces, dados subespacios $V_1, V_2 \subset V$ y una isometría $f : V_1 \to V_2$, existe una isometría $\tilde{f} : V \to V$ tal que $\tilde{f}|_{V_1} = f$.*

Teorema 10.5. *Sea (V,B) un espacio bilineal no degenerado sobre un cuerpo F tal que la relación de perpendicularidad es simétrica. Si $\mathsf{car}(F)=2$, asumimos que B es alternada. Entonces, dados subespacios isométricos $V_1, V_2 \subset V$, se cumple que $V_1^\perp \simeq V_2^\perp$.*

El argumento de la sección § 10.1, muestra que estos dos teoremas son equivalentes. En lugar del Teorema 9.25, aplicamos el Teorema 9.24 y, en lugar del Teorema 9.29, aplicamos el Teorema 9.28.

Observación 10.6. Sea (V,B) un espacio bilineal no degenerado sobre un cuerpo F tal que la relación de perpendicularidad es simétrica. Si $\mathsf{car}(F)=2$, asumimos que B es alternada. Si $V_1 \subset V$ es un subespacio (arbitrario), entonces por el Teorema 9.16, podemos descomponer $V_1 = U_1 \oplus W_1$, donde $U_1 = V_1^\perp \cap V_1$ y $W_1 \subset V_1$ es un subespacio no degenerado. En U_1, B es idénticamente cero. El Teorema 9.24 garantiza que existe U_1' tal que $U_1 + U_1'$ es isométrico con $\mathrm{H}^{\perp m}$ ($m = \mathsf{dim}\, U_1$), ortogonal con W_1 e independiente de éste. Si $A : V_1 \to X$ es un embedding isométrico, el Teorema 9.28 garantiza que A se extiende a $(U_1+U_1') \perp W_1$, al menos. El subespacio W_1 es no degenerado. El subespacio $U_1+U_1' \subset V$, por ser isométrico con una suma de planos hiperbólicos, es no degenerado. La suma directa ortogonal $(U_1+U_1') \perp W_1$ también es no degenerada.

Demostración del Teorema 10.4 [1]. Sea (V,B) el espacio bilineal y sea $f : V_1 \to V_2$ la isometría entre subespacios de V. Por la Observación 10.6, podemos suponer que V_1 es no degenerado. En tal caso, por el Teorema 3.9, $V = V_1 \oplus V_1^\perp$ y $V_1^\perp$ es no degenerado. Análogamente, $V_2 = f(V_1) \simeq V_1$ es no degenerado y $V = V_2 \oplus V_2^\perp$, con $V_2^\perp$ no degenerado.

Si B es alternada, como V_1 es no degenerado, $V = V_1 \oplus V_1^\perp$ y $V_1^\perp$ es no degenerado. Como también V_2 es no degenerado, $V = V_2 \oplus V_2^\perp$ y V_2 es no degenerado. Pero $\mathsf{dim}\, V_1 = \mathsf{dim}\, V_2$ y, por lo tanto, $\mathsf{dim}\, V_1^\perp = \mathsf{dim}\, V_2^\perp$. Entonces, $V_1^\perp$ y $V_2^\perp$ son espacios bilineales alternados no degenerados de la misma dimensión. Por el Corolario 5.7, existe alguna isometría $g : V_1^\perp \to V_2^\perp$. La suma $f \oplus g : V \to V$ extiende f.

Si $\mathsf{dim}\, V_1 = 1$, entonces $V_1 = \langle x \rangle$ para cierto $x \neq 0$. Pero también $\mathsf{dim}\, V_2 = 1$ y $V_2 = \langle y \rangle$, donde $y = f(x)$. Además, $B(y,y) = B(x,x) \neq 0$, pues suponemos que V_1 es no degenerado. Bajo nuestras hipótesis, esto sólo puede suceder, si $\mathsf{car}(F) \neq 2$. Todo lo que tenemos que probar es que, bajo estas condiciones, existe una isometría de V que verifica $x \mapsto y$.

Con el caso alternado no degenerado y el caso unidimensional no degenerado, podemos hacer inducción en la dimensión de V_1. □

Lema 10.7. *Si $x, y \in V$ cumplen $B(x,x) = B(y,y) \neq 0$, existe $A \in \mathsf{O}(V)$ tal que $A\,x = y$.*

Demostración. Ahora, $B(x+y, x-y) = 0$, con lo cual $x+y \perp x-y$. En particular, no pueden, ambos, cumplir $B(x \pm y, x \pm y) = 0$, pues la suma es $2\,x$ y $B(x,x) \neq 0$. Sea $z = x + \epsilon\, y$, $\epsilon = \pm 1$, tal que $B(z,z) \neq 0$. Sea $\sigma \in \mathsf{O}(B)$ la reflexión respecto de $z^\perp$. Entonces, $\sigma(x+\epsilon\, y) = -x - \epsilon\, y$ y $\sigma(x - \epsilon\, y) = x - \epsilon\, y$. Así, porque $x \pm \epsilon\, y$ son ortogonales y $2 \neq 0$,

$$\sigma(x) = -\epsilon\, y .$$

Si $\epsilon = -1$, listo. Si no, σ compuesta con la transformación antipodal $v \mapsto -v$ cumple lo pedido. Otra opción es componer con σ_y, pues $B(y, y) \neq 0$. $\square$

Observación 10.8. La isometría del Lema 10.7 que verifica $x \mapsto y$ se puede elegir de manera que sea una reflexión, o bien una reflexión compuesta con la antípoda $v \mapsto -v$, o bien una composición de, a lo sumo, dos reflexiones.

Ejercicio 10.9. Si $A \in \mathsf{O}(V)$ y $u \in V$ es un vector tal que $B(u, u) \neq 0$, entonces

$$A\, \sigma_u\, A^{-1} \;=\; \sigma_{A\,u}\ . \tag{38}$$

En particular, la clase de conjugación de σ_u en $\mathsf{O}(V)$ es $\{\sigma_v\ :\ B(v, v) = B(u, u)\}$.

El Teorema 10.10 quita la restricción de que el espacio ambiente sea no degenerado. En [2], se prueba primero este resultado antes de deducir el Teorema 10.5, pero sólo se hace en el caso de espacios bilineales simétricos sobre un cuerpo de característica impar.

Teorema 10.10. *Sean U_1, U_2, V_1, V_2 espacios bilineales sobre un cuerpo F tales que la relación de perpendicularidad es simétrica. Si $\mathsf{car}(F) = 2$, asumimos que son alternados. Si $V_1 \simeq V_2$ y $U_1 \perp V_1 \simeq U_2 \perp V_2$, entonces $U_1 \simeq U_2$.*

Demostración. Sean $X_i = U_i \perp V_i$, b_i la forma bilineal en X_i y $f : X_1 \to X_2$ una isometría. Cambiando X_1, V_1 y U_1 por $f(X_1) = X_2$, $f(V_1)$ y $f(U_1)$, podemos asumir que $X_1 = X_2 =: X$, $b_1 = b_2 =: b$ y que $f = \mathsf{id}_X$. Sean $[\cdot]_1, [\cdot]_2 : X \to F^n$ bases de X y sean m_i las matrices de b respecto de $[\cdot]_i$. Si $c : F^n \to F^n$ es la matriz de cambio de base,[79] entonces $m_2 = {}^t c\, m_1\, c$. Dado que $V_1 \simeq V_2$, vale que $\mathsf{dim}\, V_1 = \mathsf{dim}\, V_2$ y, en consecuencia, $\mathsf{dim}\, U_1 = \mathsf{dim}\, U_2$.

Supongamos que las restricciones $b|_{V_i}$ son idénticamente cero y $b|_{U_2}$ es no degenerada. Eligiendo bases de $U_i \perp V$ compuestas por bases de U_i y V, las matrices de b son de la forma $m_i = \left[\begin{smallmatrix} M_i & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, donde M_i son las matrices de las restricciones $b|_{U_i}$. La correspondiente matriz de cambio de base es de la forma $c = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$. En particular,

$${}^t A\, M_1\, A \;=\; M_2\ .$$

Como U_2 es no degenerado, M_2 es no singular y, por lo tanto, A es no singular. Así, en este caso, $b|_{U_1}$ y $b|_{U_2}$ son equivalentes. Hasta aquí, sólo hemos usado la correspondencia entre formas bilineales no degeneradas y matrices invertibles.

Supongamos, ahora, únicamente, que las restricciones $b|_{V_i}$ son idénticamente cero. Si la relación de perpendicularidad es simétrica en U_i, podemos descomponer $U_i = (U_i^\perp \cap U_i) \oplus W_i$, de manera que b es idénticamente cero en $U_i^\perp \cap U_i$ y es no degenerada en W_i. Intercambiando los roles de U_i, podemos suponer que $\mathsf{dim}\, W_2 \geq \mathsf{dim}\, W_1$, es decir, que el rango de $b|_{U_2}$ es mayor o igual al rango de $b|_{U_1}$. Si $Z_2 = U_2^\perp \cap U_2$, $\mathsf{dim}\, Z_2 \leq \mathsf{dim}\, (U_1^\perp \cap U_1)$ y podemos encontrar $Z_1 \subset U_1^\perp \cap U_1$ tal que $\mathsf{dim}\, Z_1 = \mathsf{dim}\, Z_2$. Los espacios Z_i son isométricos ($b|_{Z_i} = 0$ y tienen la misma dimensión). Cambiando V_i por $V_i \perp Z_i$, podemos asumir que U_2 es no degenerado.

[79] $c := [\cdot]_2 \circ f \circ [\cdot]_1^{-1}$, es la matriz de $f = \mathsf{id}$ respecto de estas bases.

Supongamos, ahora, que también la relación de perpendicularidad en V_i es simétrica. Entonces, podemos descomponer $V_i = (V_i^\perp \cap V_i) \perp W_i$, de manera que b es idénticamente cero en $V_i^\perp \cap V_i$ y es no degenerada en W_i. Como $V_1 \simeq V_2$, se deduce que $V_1^\perp \cap V_1 \simeq V_2^\perp \cap V_2$. Por lo ya demostrado, deducimos que $W_1 \simeq W_2$ y que $W_1 \perp U_1 \simeq W_2 \perp U_2$. De esta manera, podemos suponer también que V_i son no degenerados. Pero, entonces, estamos en las condiciones del Teorema 10.5, con $U_i = V_i^\perp$. $\square$

Teorema 10.11. *Sean X_1, X_2 espacios bilineales isométricos sobre un cuerpo F tales que la relación de perpendicularidad es simétrica. Si $\mathsf{car}(F) = 2$, asumimos que son alternados.*[80] *Supongamos que contamos con descomposiciones $X_1 = U_1 \perp V_1$ y $X_2 = U_2 \perp V_2$. Si $f : V_1 \to V_2$ es una isometría, entonces existe una isometría $\tilde{f} : X_1 \to X_2$ tal que $\tilde{f}|_{V_1} = f$.*

Ejercicio 10.12. Probar que el Teorema 10.10 es equivalente al Teorema 10.11.

Corolario 10.13. *Sea (V, B) un espacio bilineal sobre un cuerpo F tal que la relación de perpendicularidad es simétrica. Si $\mathsf{car}(F) = 2$, asumimos que es alternado. Sean $V_1, V_2 \subset V$ subespacios no degenerados. Toda isometría $f : V_1 \to V_2$ se extiende a una isometría $\tilde{f} : V \to V$.*

Demostración. Dado que V_i es no degenerado, $V = U_i \oplus V_i$, donde $U_i := V_i^\perp$. Por el Teorema 10.11, existe una extensión $\tilde{f} : V \to V$. Necesariamente, $f(U_1) = U_2$. $\square$

Ejercicio 10.14. Deducir el Teorema 10.4 del Corolario 10.13.

[80] Los espacios son isométricos vía alguna isometría no especificada.

Parte IV

El anillo de Witt

Referencias

[1] E. Artin. *Geometric Algebra*. Repr. of the orig., publ. by Interscience Publ., Inc. in the series 'Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics (1957) no. 3. Paperbk. ed. New York etc.: John Wiley &— Sons Ltd./Interscience Publishers, Inc., 1988.

[2] P. L. Clark. *Quadratic Forms over Fields I: Witt's Theory*. URL: `http://alpha.math.uga.edu/~pete/`.

[3] P. L. Clark. *Quadratic Forms over Fields II: Structure of the Witt Ring*. URL: `http://alpha.math.uga.edu/~pete/`.

[4] K. Conrad. *Bilinear Forms*. URL: `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/`.

[5] L. C. Grove. *Classical Groups and Geometric Algebra*. Vol. 39. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2001.