Distribución del los números primos

Índice de contenidos

1 Funciones aritméticas

Nomenclatura. En general, salvo que se indique lo contrario, p o p_i, p_j, p_k, etc. denotarán números primos, pero q o q_i, q_j, q_k, etc. podrá denotar un entero arbitrario. Si $x \in \mathbb{R}$ es un número real, escribimos $\lfloor x \rfloor$ para denotar su parte entera:

$$\lfloor x \rfloor \;=\; \mathsf{max}\big\{n \in \mathbb{Z} \,:\, n \leq x\big\} \;;$$

La parte fraccionaria de x la denotamos $\{x\}$:

$$\{x\} \;=\; x - \lfloor x \rfloor \;\;.$$

Proposición 1.1. *La función* $\lfloor x \rfloor$ *satisface:*

(a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$*;*

(b) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ *es igual a* 0*, si* $x \in \mathbb{Z}$*, y a* -1*, si no;*

(c) $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$*, si* $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$*;*

(d) $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ *es igual al entero más cercano a* x*, y el mayor;*

(e) $-\left\lfloor -x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ *es igual al entero más cercano a* x*, y el menor;*

(f) $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \#\{1 \leq k \leq x \,:\, m \mid k\}$*, si* $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$*.*

Demostración. (a): escribir $x = m + \mu$ e $y = n + \nu$. Entonces, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = m + n \leq \lfloor m + n + \mu + \nu \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$ y $\lfloor x + y \rfloor = m + n + \lfloor \mu + \nu \rfloor \leq m + n + 1$.

(b): si $x = m + \mu$, entonces $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = m + \lfloor -m - \mu \rfloor = \lfloor -\mu \rfloor$ que es igual a 0, si $\mu = 0$ y a -1, si $\mu > 0$.

(c): si $x = n + \nu$, entonces $n = q\,m + r$ $(0 \leq r < m)$ y

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor q + \frac{r}{m} \right\rfloor \;=\; q + \left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor \;\;.$$

Por otro lado,

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{n+\nu}{m} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor q + \frac{r}{m} + \frac{\nu}{m} \right\rfloor \;=\; q + \left\lfloor \frac{r+\nu}{m} \right\rfloor \;\;.$$

Pero $0 \leq r \leq m - 1$ y $0 \leq \nu < 1$, con lo que $0 \leq r + \nu < m$ y

$$\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{r+\nu}{m} \right\rfloor \;=\; 0 \;.$$

En particular, $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = q$.

(d): Si n es el entero más cercano a x y el mayor entre ellos y si $n = x + \theta$ $(-\frac{1}{2} < \theta \leq \frac{1}{2})$, entonces $0 \leq -\theta + \frac{1}{2} < 1$ y

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor n - \theta + \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; n + \left\lfloor -\theta + \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; n \;.$$

(e): si n es el entero más cercano a x y el menor entre ellos y si $n = x+\theta$ $(-\frac{1}{2} \leq \theta < \frac{1}{2})$, entonces $0 \leq \theta + \frac{1}{2} < 1$ y

$$\left\lfloor -x + \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor -n + \theta + \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; -n + \left\lfloor \theta + \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; -n \;.$$

(f): Si $j\,m \leq x < (j+1)\,m$, entonces $j \leq \frac{x}{m} < j+1$ y, por definición, $j = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$. $\square$

1.1 Ejemplos

Definición 1.2. Una *función aritmética* es una sucesión de números (complejos), una función $\mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$.

Ejemplo 1.3. La *función de Möbius* es la función aritmética definida por:

$$\mu(n) \;=\; \begin{cases} 1 \;, & \text{si } n = 1 \;, \\ (-1)^k \;, & \text{si } n = p_1 \,\cdots\, p_k \text{ (libre de cuadrados) y} \\ 0 \;, & \text{si } n \text{ no es libre de cuadrados.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.4. La *función de Euler* es la función aritmética definida por:

$$\varphi(n) \;=\; \#\big\{0 \leq k < n \;:\; (k:n) = 1\big\} \;.$$

Ejemplo 1.5. La *cantidad de divisores* es una función aritmética; en un entero positivo toma como valor la cantidad de divisores positivos del mismo:

$$d(n) \;=\; \#\mathsf{Div}_+(n) \;.$$

Ejemplo 1.6 (Sumas de divisores)**.** Un poco más en general, si $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos

$$\sigma_\alpha(n) \;=\; \sum_{d|n} d^\alpha \;,$$

donde la suma se realiza sobre los divisores positivos de n. La cantidad de divisores es $d(n) = \sigma_0(n)$.

Ejemplo 1.7. La *cantidad de divisores primos positivos distintos* se define de la siguiente manera:

$$\omega(n) \;=\; \#\big\{p \;:\; \text{primo y } p \mid n\big\} \;.$$

También es una función aritmética. La *cantidad de divisores primos postivos contados con multiplicidad* la denotamos por $\Omega(n)$.

Ejemplo 1.8. La *función de von Mangoldt* es la función aritmética definida por:

$$\Lambda(n) \;=\; \begin{cases} \mathsf{log}(p) \;, & \text{si } n = p^m \;, \\ 0 \;, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

O sea, $\Lambda(n) = 0$, precisamente cuando $\omega(n) \neq 1$ (pues $\mathsf{log}(1) = 0$). La *función logaritmo*, $\mathsf{log}(n)$, restringida a los enteros positivos, es una función aritmética.

Ejemplo 1.9. La *función de Liouville* es la función aritmética definida por:

$$\lambda(n) \;=\; \begin{cases} 1 \;, & \text{si } n = 1 \;, \\ (-1)^{a_1 + \cdots + a_k} \;, & \text{si } n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \;. \end{cases}$$

Ejemplo 1.10. La *función identidad* es la función

$$N(n) \;=\; n$$

y la *función constante* es, simplemente,

$$u(n) \;=\; 1 \;.$$

La función

$$I(n) \;=\; \begin{cases} 1 \;, & \text{si } n = 1 \;, \\ 0 \;, & \text{si } n > 1 \;, \end{cases}$$

también es una función aritmética importante; la llamaremos *neutro* o *delta*.

Ejemplo 1.11. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, la función aritmética definida por $n \mapsto n^\alpha$ está construida a partir de $N(n)$ componiendo esta función con *elevar a la potencia α*. Si α es un número natural, podemos describirla también como la *multiplicación coordenada a coordenada* α veces de N con sigo misma:

$$n \;\mapsto\; n^\alpha \;=\; N(n)^\alpha \;=\; N^\alpha(n) \;.$$

En general, el *producto puntual* de funciones aritméticas define nuevas funciones.

Ejemplo 1.12. Si $n \geq 1$, entonces

$$\mathsf{log}(n)\, I(n) \;=\; 0 \;.$$

Es decir, el producto puntual de las funciones I y log es igual a la función cero, que denotaremos 0.

Ejemplo 1.13. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es un número real arbitrario, el *coeficiente binomial* $\binom{\alpha}{\cdot}$: $\mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ es la función definida por:

$$\binom{\alpha}{k} \;=\; \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-k+1)}{k!} \;=\; \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) \;,$$

donde $k! = k\,(k-1)\, cdots\, 1$ denota la función factorial en k. Podemos extender la función a $k = 0$, con la convención de que $0! = 1$ y que el producto de trasladados de α sea vacío; es decir,

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \ .$$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces $\binom{\alpha}{k}$, por propiedades del número combinatorio, es igual al coeficiente binomial usual. Si pensamos en un polinomio de variable compleja $P(z) = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k\, z^k$ ($\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), entonces

$$P^{(r)}(z) \ = \ \sum_{k=r}^{\alpha} k\,(k-1)\ \cdots\ (k-r+1)\, a_k\, z^{k-r}$$

y, en particular, $P^{(r)}(0) = r!\, a_r$. Si elegimos $P(z) = (1+z)^\alpha$, entonces

$$P^{(r)}(z) \ = \ \alpha\,(\alpha-1)\ \cdots\ (\alpha-r+1)\,(1+z)^{\alpha-r}$$

y, así, el coeficiente de z^k es $a_k = \binom{\alpha}{k}$. Es decir, si $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$(1+z)^\alpha \ = \ \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} z^k \ .$$

El coeficiente binomial que aparece en esta expresión es el definido para un número real arbitrario. Si $|z| < 1$, entonces $\mathsf{Re}(1+z) > 0$ y podemos definir, para $\alpha \in \mathbb{C}$, la función $f(z) = (1+z)^\alpha$ por la rama principal del logaritmo; esta función es holomorfa en $\mathsf{Re}(z) > -1$ y admite un desarrollo de Taylor centrado en $z_0 = 0$ convergente en $|z| < 1$:

$$(1+z)^\alpha \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k \ .$$

El coeficiente en z^k es

$$a_k \ = \ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \ = \ \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ \cdots\ (\alpha-k+1)}{k!} \ .$$

De esta manera, podemos definir, para un número complejo arbitrario α, el *coeficiente binomial (complejo)* como la función $\binom{\alpha}{k} = a_k$.

Ejemplo 1.14. Dado $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definimos la *$q$-identidad* por:

$$N_q(n) \ = \ 1 \ + \ q \ + \ \cdots \ + \ q^{n-1} \ = \ \frac{q^n - 1}{q-1} \ .$$

El *q-factorial* es

$$n!_q \ = \ N_q(n)\, N_q(n-1)\ \cdots\ N_q(1) \ = \ \frac{(q-1)\,(q^2-1)\ \cdots\ (q^n-1)}{(q-1)^n} \ .$$

Finalmente, el *coeficiente q-binomial* para enteros $0 \leq k \leq n$ es

$$\binom{n}{k}_q \ = \ \frac{n!_q}{k!_q\,(n-k)!_q} \ .$$

Observación 1.15. La función neutro, I, se puede describir en términos de la función parte entera:

$$I(n) \;=\; \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor \;.$$

A continuación demostramos algunas relaciones entre las funciones definidas en los ejemplos que aparecen al sumar sobre los divisores del argumento.

Teorema 1.16. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$\sum_{d|n} \mu(d) \;=\; I(n) \;. \tag{1}$$

Demostración. Si $n = p_1^{a_1} \,\cdots\, p_k^{a_k}$, entonces $\mu(d) = (-1)^j$, si d es producto de j primos distintos y libre de cuadrados; si d no es libre de cuadrados, $\mu(d) = 0$. Entonces

$$\sum_{d|n} \mu(d) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \;=\; \begin{cases} 1\;, & \text{si } k = 0\;, \\ 0\;, & \text{si } k \geq 1\;, \end{cases} \;=\; \begin{cases} 1\;, & \text{si } n = 1\;, \\ 0\;, & \text{si } n > 1\;. \end{cases}$$

□

Teorema 1.17. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) \;=\; n \;. \tag{2}$$

Demostración. Sea S el conjunto $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ y, para cada divisor d de n, sea $A(d) \subset S$ el subconjunto de los $k \in S$ tales que $(k : n) = d$. Entonces,

$$S \;=\; \bigsqcup_{d|n} A(d) \;.$$

En particular, $n \;=\; \#S \;=\; \sum_{d|n} \#A(d)$. Ahora, la función $k \mapsto k/d$ determina una biyección

$$A(d) \;=\; \{0 < k \leq n \;:\; (k:n) = d\} \;\simeq\; \{0 < q \leq n/d \;:\; \left(q : \tfrac{n}{d}\right) = 1\} \;.$$

De esto se deduce que $\#A(d) = \varphi(\frac{n}{d})$ y que

$$n \;=\; \sum_{d|n} \varphi(\tfrac{n}{d}) \;=\; \sum_{d|n} \varphi(d) \;.$$

□

Teorema 1.18. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$\varphi(n) \;=\; \sum_{d|n} \mu(d)\, \frac{n}{d} \;=\; n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \;. \tag{3}$$

Demostración. Simplemente,

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} I((k:n)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|(k:n)} \mu(d) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d|k \\ d|n}} \mu(d) .$$

Pero, intercambiando las sumatorias, el último término es igual a

$$\sum_{d|n} \mu(d) \sum_{\substack{k=qd \\ q=1}}^{n/d} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} .$$

Finalmente, de la definición de μ,

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) .$$

□

Proposición 1.19. *La función φ satisface:*

(a) $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$*;*

(b) $\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n)\,\frac{d}{\varphi(d)}$*, donde* $d = (m:n)$*;*

(c) $\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n)$*, si* $(m:n) = 1$*;*

(d) $\varphi(a) \mid \varphi(b)$*, si* $a \mid b$*;*

(e) $\varphi(n)$ *es par, si* $n \geq 3$*;*

(f) $2^r \mid \varphi(n)$*, si* n *es divisible por* r *primos impares distintos.*

Demostración. (b): por el Teorema 1.18,

$$\frac{\varphi(mn)}{mn} = \prod_{p|mn} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p|(m:n)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \frac{\varphi(m)}{m} \frac{\varphi(n)}{n} \frac{d}{\varphi(d)} .$$

(d): si $a \mid b$, entonces $b = a\,c$ para cierto c entero. Si $c \in \{1, b\}$, no hay nada que probar. Supongamos que $c < b$. Por (b),

$$\varphi(b) = \varphi(a)\,\varphi(c)\,\frac{d}{\varphi(d)} ,$$

donde $d = (a:c)$. Pero $c < b$ y $d \mid c$. Inductivamente, podemos suponer que $\varphi(d) \mid \varphi(c)$ y, por lo tanto, $\varphi(a) \mid \varphi(b)$, pues $\frac{\varphi(c)}{\varphi(d)}\, d \in \mathbb{Z}$. □

Teorema 1.20. *Si $n \geq 1$ es un entero y p es un promo positivo, entonces el mayor exponente de p que divide a $n!$ es p^e, donde*

$$e = \sum_{l\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor . \tag{4}$$

Demostración. Si $n = 1$, no hay nada que probar. Si j es tal que $p^j \mid\mid n$, entonces

$$\sum_{l\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor - \sum_{l\geq 1} \left\lfloor \frac{n-1}{p^l} \right\rfloor = \sum_{l\geq 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{p^l} \right\rfloor \right) = \sum_{p^l \mid n} 1 = j . \tag{5}$$

Para probar la anteúltima igualdad, notamos que, si $p^l \mid n$, entonces $\frac{n}{p^l}$ es entero, pero $\frac{n-1}{p^l}$ no lo es y, entonces $\left\lfloor \frac{n-1}{p^l} \right\rfloor = \frac{n}{p^l} - 1$; si $p^l \nmid n$, entonces, escribiendo $n = q\,p^l + r$ $(1 \leq r < p^l)$, q es el cociente para n y para $n-1$ en la división por p^l, con lo que $\left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor = q = \left\lfloor \frac{n-1}{p^l} \right\rfloor$. De (5), se deduce que, si vale (4) para $n-1$, entonces vale para n. □

Observación 1.21. Si $a_1, \ldots, a_n$ es una secuencia (finita) de enteros no negativos, entonces

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(1) + f(2) + \cdots , \tag{6}$$

donde $f(k) = \#\{i : a_i \geq k\}$; la sumatoria de las $f(k)$ es finita.

Otra Demostracióndel Teorema 1.20. Para cada j en el rango $1 \leq j \leq n$, definimos $a_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $p^{a_j} \mid\mid j$. Entonces el valor de $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $p^e \mid\mid n!$ es igual a

$$e = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{l\geq 1} f(l) = \sum_{l\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor ,$$

donde $f(l) = \#\{1 \leq k \leq n : p^l \mid k\}$ es igual a $\left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor$, por Proposición 1.1 (f). □

Corolario 1.22. *Si $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es una secuencia finita de enteros no negativos y $n = a_1 + \cdots + a_r$, entonces*

$$\frac{n!}{a_1! \cdots a_r!}$$

es entero.

Demostración. Para cada primo p, si p^k divide al producto $a_1! \cdots a_r!$, entonces divide a $n!$. Esta afirmación se deduce de la desigualdad

$$\left\lfloor \frac{a_1}{p^l} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_r}{p^l} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_r}{p^l} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor$$

(válida para todo p primo y todo $l \geq 1$), sumando sobre l. □

1.2 Producto de convolución

Definición 1.23. Dadas funciones aritméticas f y g, su *convolución* o *producto de Dirichlet* es la función aritmética:

$$f * g(n) \;=\; \sum_{d|n} f(d)\, g(\tfrac{n}{d}) \;. \tag{7}$$

Ejemplo 1.24. Los enunciados del Teorema 1.16, del Teorema 1.17 y del Teorema 1.18 se traducen, respectivamente, como

$$\mu * u \;=\; I \quad , \quad \varphi * u \;=\; N \quad \text{y} \quad \mu * N \;=\; \varphi \;.$$

Las funciones suma de divisores σ_α cumplen que

$$\sigma_\alpha \;=\; N^\alpha * u \;.$$

En particular, $d = \sigma_0 = u * u$.

Proposición 1.25. *Dadas funciones aritméticas f, g y h, se verifica*

(a) $f * g = g * f$*;*

(b) $(f * g) * g = f * (g * h)$

(c) $I * f = f * I = f$*.*

Demostración. (a): si $n \geq 1$, sumando sobre los pares de enteros postivos a, b cuyo producto es igual a n,

$$f * g(n) \;=\; \sum_{a\,b=n} f(a)\, g(b) \;=\; g * f(n) \;.$$

(b): análogamente,

$$(f * g) * h(n) \;=\; \sum_{a\,b\,c=n} f(a)\, g(b)\, h(c) \;=\; f * (g * h)(n) \;.$$

(c): por (a), es suficiente probar que $f * I = f$. Pero

$$f * I(n) \;=\; \sum_{d|n} f(d) \left\lfloor \frac{d}{n} \right\rfloor \;=\; f(n) \;.$$

□

Teorema 1.26. *Si $f(1) \neq 0$, entonces existe una única función aritmética g que cumple que $f * g = g * f = I$. En tal caso, g está dada por:*

$$\begin{cases} g(1) \;=\; \frac{1}{f(1)} \;, \\ g(n) \;=\; \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(\frac{n}{d})\, g(d) \;, \qquad si\ n > 1 \;. \end{cases} \tag{8}$$

Demostración. Para $n = 1$, se debe cumplir

$$1 \;=\; f * g(1) \;=\; f(1)\, g(1) \ .$$

Para $n > 1$,

$$0 \;=\; f * g(n) \;=\; \sum_{d|n} f(\tfrac{n}{d})\, g(d) \ .$$

□

Observación 1.27. La condición $f(1) \neq 0$ es también necesaria para que f admite una *inversa.*

Corolario 1.28. *El conjunto de las funciones aritméticas con el producto de convolución y la función I como neutro conforman un monoide. Las funciones f con $f(1) \neq 0$ forman un submonoide que es, además, un grupo con la inversa definida como en* (8)*.*

Demostración. Si $f(1)$ y $g(1)$ son distintos de cero, entonces $f * g(1) = f(1)\, g(1) \neq 0$. □

Teorema 1.29 (Fórmula de inversión de Möbius)**.** *Si f es una función aritmética y F es la función*

$$F(n) \;=\; \sum_{d|n} f(d) \;=\; f * u(n) \ , \tag{9}$$

entonces

$$f(n) \;=\; \sum_{d|n} F(d)\, \mu(\tfrac{n}{d}) \;=\; F * \mu(n) \ . \tag{10}$$

Recíprocamente, si f cumple (10) *para cierta F, entonces F y f están relacionadas por* (9)*.*

Demostración. Se deduce de $I = \mu * u = u * \mu$. □

Ejemplo 1.30. La función φ satisface $\varphi(1) = 1 \neq 0$, con lo cual admite una inversa. Más adelante describiremos esta función.

Teorema 1.31. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) \;=\; \mathsf{log}\, n \ , \tag{11}$$

es decir, $\Lambda * u = \mathsf{log}$. Sin embargo, $\Lambda(1) = 0$, con lo cual la función de von Mangoldt no es invertible.

Demostración. Si $n = 1$, $0 = \mathsf{log}(1) = \Lambda(1)$. Si $n > 1$ y $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, entonces

$$\mathsf{log}\, n \;=\; \sum_{j=1}^{k} a_j \,\mathsf{log}\, p_j \ .$$

Por otro lado, como Λ se anula en los números con más de un factor primo distinto,

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{a_j} \Lambda(p_j^m) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{a_j} \mathsf{log}\, p_j \;.$$

$\square$

Si bien no podemos invertir Λ, podemos aplicar la Fórmula de inversión de Möbius (Teorema 1.29).

Teorema 1.32. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$\Lambda(n) \;=\; \sum_{d|n} \mu(d)\,\mathsf{log}(\tfrac{n}{d}) \;=\; -\sum_{d|n} \mu(d)\,\mathsf{log}(d) \;, \tag{12}$$

es decir, $\Lambda = \mu * \mathsf{log} = -(\mu \cdot \mathsf{log}) * u$.

Observación 1.33. El Teorema 1.32 proporciona otro ejemplo de producto puntual de funciones aritméticas.

Demostración. Por el Teorema 1.31 y el Teorema 1.29,

$$\Lambda(n) \;=\; \sum_{d|n} \mu(d)\,\mathsf{log}(\tfrac{n}{d}) \;=\; \mathsf{log}(n) \sum_{d|n} \mu(d) \;-\; \sum_{d|n} \mu(d)\,\mathsf{log}(d) \;.$$

Pero $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$ y el Ejemplo 1.12 muestra que $\mathsf{log}(n)\, I(n) = 0$, siempre. $\square$

Observación 1.34. La conmutatividad, asociatividad, neutralidad y la Fórmula de inversión no requieren que las funciones sean invertibles.

1.3 Funciones multiplicativas

Definición 1.35. Una función aritmética $f \neq 0$ se dice *multiplicativa*, si $f(mn) = f(m)\, f(n)$ para todo par de enteros m y n coprimos. Si $f(mn) = f(m)\, f(n)$ para tod par de enteros m y n, entonces se dice que f es *completamente multiplicativa.*

.

Ejemplo 1.36. Las funciones I, N y u son completamente multiplicativas. La función N^α, también.

Ejemplo 1.37. Las funciones φ y μ son multiplicativas, pero no completamente; la función λ es completamente multiplicativa.

Observación 1.38. Algunas funciones separan productos en sumas: por ejemplo, el logaritmo verifica

$$\mathsf{log}(mn) \;=\; \mathsf{log}(m) \;+\; \mathsf{log}(n) \;,$$

para todo par de enteros m y n, mientras que la función cantidad de divisores primos verifica

$$\omega(mn) \;=\; \omega(m) \;+\; \omega(n) \;,$$

si $(m : n) = 1$.

Observación 1.39. Dadas funciones aritméticas f y g, el producto puntual $f \cdot g(n) = f(n)\, g(n)$ es una función aritmética. Si f y g son multiplicativas, $f \cdot g$ también lo es; si son completamente multiplicativas, $f \cdot g$, también. Por otro lado, en general, si $g(n) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, podemos definir $f/g(n) = f(n)/g(n)$. Si f y g son multiplicativas, entonces f/g también lo será; si son completamente multiplicativas, f/g también lo será. Un poco más en general, podemos definir f/g en el subconjunto de $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ en donde g no se anula. Sigue siendo cierto, siempre que esté definida, que si f y g son multiplicativas, o bien completamente multiplicativas, entonces el cociente f/g tambiń será multiplicativa o completamente multiplicativa, respectivamente.

Proposición 1.40. *Sea f una función aritmética. Entonces,*

(a) si f es multiplicativa, $f(1) = 1$;

(b) si $f(1) = 1$, entonces f es multiplicativa, si y sólo si

$$f(p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_k^{a_k}) \ ;$$

(c) si f es multiplicativa, entonces es completamente multiplicativa si (y sólo si), además,

$$f(p^a) = f(p)^a \ .$$

Demostración. (a): como (por definición) f no es la función cero, $f(n) \neq 0$ para algún n. Como $(n : 1) = 1$, $f(n) = f(1)\, f(n)$, de lo que se deduce que $f(1) = 1$. □

Observación 1.41. Si f es multiplicativa, por la Proposición 1.40 (a), $f(1) = 1$. Pero, entonces

$$f(n)\, I(n) = I(n) \ ,$$

para todo $n \geq 1$.

Teorema 1.42. *Sean f y g funciones aritméticas. Entonces,*

(a) si f y g son multiplicativas, $f * g$ también lo es;

(b) si g y $f * g$ son multiplicativas, f también lo es;

(c) si g es multiplicativa, su inversa con respecto a la convolución también lo es.

Demostración. (a): sean m y n enteros coprimos. Si $d \mid mn$, entonces $d = ab$, con $(a : b) = 1$ y $a \mid m$ y $b \mid n$. De hecho, existe una biyección

$$\mathsf{Div}_+(m) \times \mathsf{Div}_+(n) \simeq \mathsf{Div}_+(mn)$$

dada por $(a, b) \mapsto ab$. Entonces,

$$f * g(mn) = \sum_{d|mn} f(d)\, g(\tfrac{mn}{d}) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(ab)\, g(\tfrac{m}{a}\,\tfrac{n}{b}) = \sum_{a|m} f(a)\, g(\tfrac{m}{a}) \sum_{b|n} f(b)\, g(\tfrac{n}{b}) \ .$$

(b): asumiendo que g es multiplicativa, $g(1) = 1$ y

$$f * g(1) \;=\; f(1)\ .$$

Si $(m : n) = 1$ y $f(ab) = f(a)\,f(b)$ para todo par $(a : b) = 1$ tal que $ab < mn$, entonces

$$\begin{aligned}
f * g(mn) \;&=\; f(mn) \;+ \sum_{\substack{a|m\ ,\ b|n \\ ab<mn}} f(a)\,f(b)\,g(\tfrac{m}{a})\,g(\tfrac{n}{b}) \\
&=\; f(mn) \;-\; f(m)\,f(n) \;+\; \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a)\,f(b)\,g(\tfrac{m}{a})\,g(\tfrac{n}{b}) \\
&=\; f(mn) \;-\; f(m)\,f(n) \;+\; \big(f * g(m)\big)\,\big(f * g(n)\big)\ .
\end{aligned}$$

Es decir, $f * g$ es multiplicativa, (si y) sólo si f es multiplicativa. $\square$

Observación 1.43. El resultado del Teorema 1.42 no es cierto, en general, para funciones completamente multiplicativas (ver también el Teorema 1.44).

$$\begin{array}{c}
\text{Funciones aritmeticas (monoide)} \\
| \\
f(1) \neq 0 \quad \text{(submonoide, grupo)} \\
| \\
f(1) = 1 \quad \text{(subgrupo)} \\
| \\
\text{Funciones multiplicativas (subgrupo)} \\
| \\
\text{Funciones completamente multiplicativas (subconjunto)}
\end{array}$$

Cada uno de estos subconjuntos es cerrado por el producto y el conciente coordenada a coordenada. La función constante u actúa como neutro con respecto a este producto.

Teorema 1.44. *Sea f una función multiplicativa. Entonces f es completamente multiplicativa, si y sólo si*

$$f^{-1}(n) \;=\; \mu(n)\,f(n) \;=\; (\mu \cdot f)(n)\ ,$$

para todo $n \geq 1$.

Demostración. Sea $g(n) := \mu(n)\,f(n)$. Si f es completamente multiplicativa, entonces

$$g * f(n) \;=\; \sum_{d|n} \mu(d)\,f(d)\,f(\tfrac{n}{d}) \;=\; f(n) \sum_{d|n} \mu(d) \;=\; f(n)\,I(n)\ .$$

Pero $f(n)\,I(n) = I(n)$ (puntualemnte) y, así, $g * f = I$.

En general, si f es multiplicativa, $\mu{\cdot}f$ también es multiplicativa y f es completamente multiplicativa, si $f(p^a) = f(p)^a$ para todo primo p y todo $a \geq 1$. Si $f^{-1} = g$, entonces,

$$0 \;=\; \sum_{j=0}^{a} g(p^j)\, f(p^{a-j}) \;=\; \mu(1)\, f(1)\, f(p^a) \;+\; \mu(p)\, f(p)\, f(p^{a-1}) \;,$$

de lo que se deduce que $f(p^a) = f(p)\, f(p^{a-1})$. □

Ejemplo 1.45. Dado que $\varphi = \mu * N$,

$$\varphi^{-1} \;=\; \mu^{-1} * N^{-1} \;=\; u * N^{-1}$$

(el exponente denota inversa conrespecto a la convolución y no elevar a $\alpha = -1$ como en el Ejemplo 1.11). Como N es completamente multiplicativa, deducimos que $N^{-1} = \mu{\cdot}N$ y, por lo tanto,

$$\varphi^{-1}(n) \;=\; u * (\mu \cdot N)(n) \;=\; \sum_{d|n} \mu(d)\, d \;.$$

Teorema 1.46. *Si f es una función multiplicativa, entonces*

$$\sum_{d|n} \mu(d)\, f(d) \;=\; \prod_{p|n} \big(1 - f(p)\big) \;.$$

Demostración. Como f es multiplicativa, $\mu{\cdot}f$ y $g = u*(\mu{\cdot}f)$ también. Pero en potencias de primos,

$$g(p^a) \;=\; \mu(1)\, f(1) \;+\; \mu(p)\, f(p) \;=\; 1 \;-\; f(p) \;.$$

□

Ejemplo 1.47. La inversa de φ satisface

$$\varphi^{-1}(n) \;=\; \sum_{d|n} \mu(d)\, d \;=\; \prod_{p|n} \big(1 - p\big) \;.$$

Teorema 1.48. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$\sum_{d|n} \lambda(d) \;=\; \begin{cases} 1 \;, & \textit{si } n \textit{es cuadrado perfecto y} \\ 0 \;, & \textit{si no.} \end{cases} \tag{13}$$

Además, la inversa λ^{-1} satisface:

$$\lambda^{-1}(n) \;=\; |\mu(n)| \;,$$

si $n \geq 1$.

Demostración. Como λ es completamente multiplicativa,

$$\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\,\lambda(n) = \begin{cases} \left[(-1)^k\right]^2 , & \text{si } n = p_1 \cdots p_k \text{ libre de cuadrados y} \\ 0 , & \text{en otro caso,} \end{cases}$$
$$= \mu(n)^2 = |\mu(n)| \ .$$

También, $g = u * \lambda$ es multiplicativa y, en potencias de primos,

$$g(p^a) = \sum_{j=0}^{a} \lambda(p^j) = \sum_{j=0}^{a} (-1)^j = \begin{cases} 1 , & \text{si } a \text{ es par y} \\ 0 , & \text{si no.} \end{cases}$$

□

1.4 La identidad de Selberg

Definición 1.49. Si f es una función aritmética, su *derivada (formal)* es la función

$$f'(n) = (\log n)\, f(n) \ .$$

Observación 1.50. Para toda f, $f'(1) = 0$.

Ejemplo 1.51. La derivada del neutro es la función cero:

$$I'(n) = (\log n)\, I(n) = 0 \ .$$

La derivada de la función constante u está dada por:

$$u'(n) = (\log n)\, u(n) = \log n = \sum_{d|n} \Lambda(d) \ ,$$

es decir, $u' = u * \Lambda$.

Proposición 1.52. *Sean f y g funciones aritméticas. Entonces,*

(a) $(f+g)' = f' + g'$;

(b) $(f*g)' = f' * g + f * g'$;

(c) $(f^{-1})' = -f' * (f*f)^{-1}$.

Demostración. (b): si $n, d \geq 1$, $\log(n) = \log(d) + \log(\frac{n}{d})$. □

Teorema 1.53 (Identidad de Selberg)**.** *Si $n \geq 1$, entonces*

$$\Lambda(n)\log(n) + \sum_{d|n} \Lambda(d)\,\Lambda(\tfrac{n}{d}) = \sum_{d|n} \mu(d)\log(\tfrac{n}{d})^2 \ . \qquad (14)$$

Demostración. Derivando $\Lambda * u = \mathsf{log} = u'$,

$$\Lambda' * u \,+\, \Lambda * u' \;=\; u'' \;=\; (\mathsf{log})' \;=\; (\mathsf{log})^2$$

(producto puntual). Pero $\Lambda' * u = (\Lambda \cdot \mathsf{log}) * u$ y, por otro lado,

$$\Lambda * u' \;=\; \Lambda * \mathsf{log} \;=\; \Lambda * \Lambda * u \ .$$

O sea,

$$(\mathsf{log})^2 \;=\; u'' \;=\; \big(\Lambda' + (\Lambda * \Lambda)\big) * u \ .$$

□

1.5 Convolución generalizada

Definición 1.54. Dada una función aritmética α y una función $F : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ que verifique $F(x) = 0$, si $x < 1$, definimos la *convolución generalizada de α con F* como la función

$$(\alpha \circ F)(x) \;=\; \sum_{n \le x} \alpha(n)\, F(\tfrac{x}{n}) \ .$$

Observación 1.55. Si $F(x) = 0$ cuando $x < 1$, entonces $\alpha \circ F(x) = 0$ cuando $x < 1$, también.

Teorema 1.56. *Si α y β son funciones aritméticas, entonces*

$$\alpha \circ (\beta \circ F) \;=\; (\alpha * \beta) \circ F \ .$$

Demostración. Dado $x \ge 1$,

$$\begin{aligned}\alpha \circ (\beta \circ F)(x) \;&=\; \sum_{m \le x} \alpha(m) \sum_{n \le x/m} \beta(n)\, F(\tfrac{x}{mn}) \;=\; \sum_{mn \le x} \alpha(m)\, \beta(n)\, F(\tfrac{x}{mn}) \\ &=\; \sum_{k \le x} (\alpha * \beta)(k)\, F(\tfrac{x}{k}) \ .\end{aligned}$$

□

Observación 1.57. La función I también es neutro para esta operación:

$$I \circ F(x) \;=\; \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor F(\tfrac{x}{n}) \;=\; F(x) \ .$$

Teorema 1.58 (Fórmula de inversión generalizada)**.** *Sea α una función aritmética invertible con inversa α^{-1} respecto del producto de convolución y sea $F : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función que verifica $F(x) = 0$ si $x < 1$. Si*

$$G(x) \;=\; \sum_{n \le x} \alpha(n)\, F(\tfrac{x}{n}) \ , \tag{15}$$

entonces

$$F(x) \;=\; \sum_{n\leq x} \alpha^{-1}(n)\, G(\tfrac{x}{n}) \;. \tag{16}$$

Recíprocamente, si F cumple (16) *para cierta G, entonces F y G están relacionadas por* (15)*.*

Ejemplo 1.59. Si $G(x) = \sum_{n\leq x} F(\frac{x}{n})$, entonces $G = u \circ F$. Recupermos F multiplicando por μ:

$$F(x) \;=\; \sum_{n\leq x} \mu(n)\, G(\tfrac{x}{n}) \;.$$

Corolario 1.60. *Si α es completamente multiplicativa, entonces F y G satisfacen $G(x) = \alpha \circ F(x)$, si y sólo si satisfacen $F(x) = (\mu \cdot \alpha) \circ G(x)$.*

2 Promedios de funciones aritméticas

Las funciones de esta sección serán del tipo $A \to \mathbb{C}$, donde $A \subset \mathbb{R}$ es algún sobconjunto: un intervalo, una semirecta, los enteros, etc.; en particular, no consideramos funciones de variable compleja, aunque, con un poco de cuidado, sea posible adaptar las definiciones, los enunciados y las demostraciones. Si $g \geq 0$, es decir, si g es una función que toma valores reales no negativos, $O\left(g(x)\right)$ denota la clase de funciones f que cumplen

$$|f(x)| \;\leq\; M\, g(x) \;,$$

para todo x suficientemente grande y cierta constante M.[1] Escribimos $f(x) = o\left(g(x)\right)$ para indicar que $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 0$ (el límite existe y es 0); también usamos $f \sim g$ para indicar que $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 1$ (el límite existe y es 1).

2.1 Fórmulas para $\sum_{n\leq x} 1/n^s$

Teorema 2.1 (Fórmula sumatoria de Euler)**.** [2] *Si f es una función con derivada f' continua en un intervalo $[x, y]$, entonces*

$$\sum_{x<n\leq y} f(n) \;=\; \int_x^y f(t)\, dt \;+\; \int_x^y \big(t - \lfloor t \rfloor\big)\, f'(t)\, dt$$
$$-\; \Big(\big(y - \lfloor y \rfloor\big)\, f(y) - \big(x - \lfloor x \rfloor\big)\, f(x)\Big) \;.$$

[1] La clase de las f para las que existen $M = M(f) > 0$ y $x_0 = x_0(f)$ tal que, si $x \geq x_0$, entonces $|f(x)| \leq M\, g(x)$:

$$O\,(g) \;=\; \bigcup_{M>0} \bigcup_{x_0} \bigcap_{x\geq x_0} \Big\{ f \,:\, |f(x)| \leq M\, g(x) \Big\} \;.$$

[2] Este resultado será generlizado por la Identidad de Abel (Teorema 3.6).

Demostración. En primer lugar, integrando $\big(t\,f(t)\big)' = f(t) + t\,f'(t)$,

$$y\,f(y)\;-\;x\,f(x)\;=\;\int_x^y f(t)\,dt\;+\;\int_x^y t\,f'(t)\,dt\;.$$

El lado derecho de la fórmula del enunciado es, entonces, igual a

$$-\int_x^y \lfloor t\rfloor\; f'(t)\,dt\;+\;\lfloor y\rfloor\; f(y)\;-\;\lfloor x\rfloor\; f(x)\;.$$

En segundo lugar, si m y n son enteros $m<n$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{m+1}^n \lfloor t\rfloor\; f'(t)\,dt\;&=\;\sum_{k=m+2}^{n}\int_{k-1}^{k}\lfloor t\rfloor\; f'(t)\,dt\;=\;\sum_{k=m+2}^{n}(k-1)\big(f(k)-f(k-1)\big)\\ &=\;(m+1)\big(f(m+2)-f(m+1)\big)\;+\;\cdots\;+\;(n-1)\big(f(n)-f(n-1)\big)\\ &=\;n\,f(n)\;-\;(m+1)\,f(m+1)\;-\;\sum_{k=m+2}^{n} f(k)\;.\end{aligned}$$

En particular, si $m=\lfloor x\rfloor$ y $n=\lfloor y\rfloor$, entonces

$$\begin{aligned}\int_x^y \lfloor t\rfloor\; f'(t)\,dt\;&=\;\int_x^{m+1}\;+\;\int_{m+1}^{n}\;+\;\int_n^y \lfloor t\rfloor\; f'(t)\,dt\\ &=\;m\,\big(f(m+1)-f(x)\big)\;+\;\int_{m+1}^{n}\lfloor t\rfloor\; f'(t)\,dt\;+\;n\,\big(f(y)-f(n)\big)\\ &=\;n\,f(y)\;-\;m\,f(x)\;-\;\sum_{k=m+1}^{n} f(k)\;.\end{aligned}$$

Pero $\sum_{x<k\le y} f(k) = \sum_{n+1}^{m} f(k)$. $\square$

Definición 2.2. La *función de Riemann* es la función $\zeta\,:\,(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{C}$ que definimos de la siguiente manera:

$$\zeta(s)\;=\;\begin{cases}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^s}\;, & \text{si } s>1\;,\\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}\;-\;\frac{x^{1-s}}{1-s}\right)\;, & \text{si } 0<s<1\;.\end{cases}$$

La *constante de Euler* es

$$C\;=\;\lim_{x\to+\infty}\Big(\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\;-\;\log x\Big)\;.$$

Observación 2.3. Habría que verificar que los límites que aparecen en la Definición 2.2 efectivamente existen. Pero que ζ y C están bien definidas es consecuencia de, respectivamente, los items (b) y (c) y (a) del Teorema 2.4.

Teorema 2.4. *Si $x\ge 1$, entonces* *(a)* $\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\log x+C+O\left(\frac{1}{x}\right)$*;*

(b) $\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}=\frac{x^{1-s}}{1-s}+\zeta(s)+O\left(x^{-s}\right)$*, si* $s>0$ *y* $s\neq 1$*;*

(c) $\sum_{n>x}\frac{1}{n^s}=O\left(x^{1-s}\right)$*, si* $s>1$*;*

(d) $\sum_{n\le x}n^{\alpha}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+O\left(x^{\alpha}\right)$*, si* $\alpha\ge 0$.

Demostración. Para probar (a), elegir $f(t)=\frac{1}{t}$ y aplicar el Teorema 2.1: si $y=x$ y $x=1$,

$$\sum_{1<n\le x}\frac{1}{n}=\int_1^x\frac{dt}{t}+\int_1^x\left(t-\lfloor t\rfloor\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt-\left(\left(x-\lfloor x\rfloor\right)\frac{1}{x}-\left(1-\lfloor 1\rfloor\right)\frac{1}{1}\right).$$

Entonces, sumando el término $n=1$, si llamamos $R(x)=\int_1^x\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt$, vale que

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\le \log x+1-R(x)+\frac{1}{x}.$$

De hecho,

$$\left|\sum_{n\le x}\frac{1}{n}-\log x-\left(1-R(x)\right)\right|=\frac{\{x\}}{x}.$$

Si $x<X$, $R(X)-R(x)\le\frac{1}{x}-\frac{1}{X}$, que tiende a 0 con $x\to+\infty$, con lo cual el límite de $1-R(x)$ existe. Sea

$$C':=1-\int_1^{+\infty}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\left(1-R(x)\right).$$

Entonces, el límite C existe y es igual a C'. Ahora bien,

$$\left(1-R(x)\right)-C=\int_x^{+\infty}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt\le\frac{1}{x}.$$

Por desigualdad triangular,

$$\left|\sum_{n\le x}\frac{1}{n}-\left(\log x-C\right)\right|\le\frac{1+\{x\}}{x}.$$

Para la parte (b), elegimos $f(t)=t^{-s}$ ($s>0$, $s\neq 1$). Entonces,

$$\sum_{1<n\le x}\frac{1}{n^s}=\int_1^x t^{1-s}\frac{dt}{t}+\int_1^x\left(t-\lfloor t\rfloor\right)\left(\frac{-s}{t^{s+1}}\right)dt-\left(x-\lfloor x\rfloor\right)x^{-s}.$$

Ahora, $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{t-\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}}\, dt = O\left(x^{-s}\right)$ y, por lo tanto ($s > 0$), el límite $\int_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}}\, dt$ existe. Como

$$\int_1^x t^{1-s} \frac{dt}{t} \;=\; \frac{x^{1-s}-1}{1-s} \;,$$

agregando el término para $n = 1$ a la sumatoria,

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} \;=\; \frac{x^{1-s}}{1-s} \;+\; \Big(\frac{-1}{1-s} \;+\; 1 \;-\; s \int_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}}\, dt\Big) \;+\; O\left(x^{-s}\right) \;. \tag{17}$$

De esta expresión se deduce que, si $s > 1$, entonces $x^{1-s} \to 0$ y $\zeta(s)$ está bien definida en $(1, +\infty)$. Además, para $s > 0$ y $s \neq 1$, el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} \;-\; \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big) \tag{18}$$

existe, de lo que se concluye que $\zeta(s)$ está bien definida para $0 < s < 1$, también. Por otra parte, se ve que, para $s > 1$, $\zeta(s)$ es *igual a* el límite (18) existe para *todo* $s > 0$, $s \neq 1$. En definitiva,

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} \;-\; \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big) \;=\; \zeta(s) \;=\; -s\Big(\frac{1}{1-s} \;-\; \int_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t \rfloor}{t^s}\, \frac{dt}{t}\Big) \;.$$

Volviendo a la expresión asintótica (17), se deduce el resultado.

En cuanto a (c),

$$\sum_{n > x} \frac{1}{n^s} \;=\; \zeta(s) \;-\; \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} \;=\; \frac{-x^{1-s}}{1-s} \;+\; O\left(x^{-s}\right) \;.$$

Finalmente, para (d), tomar $f(t) = t^\alpha$ ($\alpha > 0$). Entonces,

$$\sum_{1 < n \leq x} n^\alpha \;=\; \int_1^x t^\alpha\, dt \;+\; \alpha \int_1^x \big(t - \lfloor t \rfloor\big)\, t^\alpha\, \frac{dt}{t} \;-\; \big(x - \lfloor x \rfloor\big)\, x^\alpha \;.$$

Pero la segunda integral es $O\left(x^\alpha\right)$ y la primera es igual a $\frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$. $\square$

Observación 2.5. En la demostración de (a) del Teorema 2.4, era mucho más sencillo decir: $\int_x^{+\infty} \frac{t-\lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt = O\left(\frac{1}{x}\right)$ y, por lo tanto, el límite C' existe y $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + C' + O\left(\frac{1}{x}\right)$; luego, el límite C existe y $C = C'$.

Observación 2.6. La expresión

$$\zeta(s) \;=\; \frac{s}{s-1} \;+\; s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^s}\, \frac{dt}{t} \;, \tag{19}$$

válida para todo $s > 0$, $s \neq 1$, permite definir la función en todo el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$, extenderla de manera meromorfa, con una única singularidad, un polo de orden 1 en $s = 1$ y residuo 1.

2.2 Fórmulas para sumas de divisores

Teorema 2.7 (Dirichlet)**.** *Si $x \geq 1$, entonces*

$$\sum_{n \leq x} d(n) \;=\; x \log x \;+\; x\left(2C-1\right) \;+\; O\left(\sqrt{x}\right) \;.$$

Demostración. Recordando que $d(n) = \sum_{d|n} 1$, podemos intentar

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} d(n) \;&=\; \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 \;=\; \sum_{q\,d \leq x} 1 \;=\; \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/d} 1 \;=\; \sum_{d \leq x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \\ &=\; \sum_{d \leq x} \left(\frac{x}{d} + O\left(1\right)\right) \;=\; x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \;+\; O\left(x\right) \;.\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.4 (a), esta última expresión es igual a

$$x\left(\log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \;+\; O\left(x\right) \;=\; x \log x \;+\; O\left(x\right) \;,$$

que es un poco peor de lo enunciado. La idea será aprovechar la simetría; los roles de q y d son intercambiables. Entonces,

$$\sum_{d \leq x} d(n) \;=\; \sum_{q\,d \leq x} 1 \;=\; 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} \Big(\sum_{d < q \leq x/d} 1\Big) \;+\; \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor \;.$$

El término $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ corresponde a $d = q$. La suma sobre $d < q \leq x/d$ es igual a $\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - d$ de lo que se deduce que todo es igual a

$$2\,x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{d} \;-\; 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} d \;+\; O\left(\sqrt{x}\right) \;.$$

El resultado se deduce apelando a (a) y a (d) (con $\alpha = 1$) con $\sqrt{x}$ en lugar de x. □

Teorema 2.8. *Si $x \geq 1$, entonces*

$$\sum_{n \leq x} \sigma_1(n) \;=\; \frac{1}{2}\,\zeta(2)\,x^2 \;+\; O\left(x \log x\right) \;.$$

Demostración. En este caso, no hay simetría en σ_1. Entonces,

$$\sum_{n \leq x} \sigma_1(n) \;=\; \sum_{q\,d \leq x} q \;=\; \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/d} q \;.$$

Ahora, la suma sobre $q \leq x/d$ es $(\frac{x}{d})^2\,\frac{1}{2} + O\left(\frac{x}{d}\right)$ (la constante implícita no depende de d). Reemplazando, la sumatoria total es igual a

$$\frac{x^2}{2} \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^2} \;+\; O\left(x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d}\right) \;.$$

El resultado se deduce ahora apelando a (a) y a (b) (con $s = 2$). □

2.3 Fórmulas para sumas que involucran μ y Λ

Proposición 2.9. *Dadas funciones aritméticas f y g, sea $h = f * g$. Si*

$$F(x) = \sum_{n\le x} f(n) \quad , \quad G(x) = \sum_{n\le x} g(n) \quad y \quad H(x) = \sum_{n\le x} h(n) \ ,$$

entonces

$$H(x) = \sum_{n\le x} f(n)\, G(\tfrac{x}{n}) = \sum_{n\le x} g(n)\, F(\tfrac{x}{n}) \ .$$

Observación 2.10. El resultado de la Proposición 2.9 es un caso particular del de la Proposición 2.18.

Demostración. Usando la convolución generalizada (Definición 1.54), podemos reescribir $F = f \circ U$, $G = g \circ U$ y $H = h \circ U$, donde

$$U(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } 0 < x < 1 \ , \\ 1 \ , & \text{si } x \ge 1 \ . \end{cases} \tag{20}$$

Pero, por Teorema 1.56, $(f * g) \circ U = f \circ (g \circ U)$. □

Observación 2.11. La función U definida en (20) cumple que $f * u = f \circ U$ para toda f aritmética.

Corolario 2.12. *Si $F(x) = \sum_{n\le x} f(n)$, entonces*

$$\sum_{n\le x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{n\le x} f(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n\le x} F(\tfrac{x}{n}) \ .$$

Demostración. Aplicar la Proposición 2.9 con $g = 1$, notando que $G := g \circ U = \lfloor x \rfloor$. □

Teorema 2.13. *Si $x \ge 1$, entonces*

$$\sum_{n\le x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1 \qquad y \qquad \sum_{n\le x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \log \lfloor x \rfloor! \ .$$

Demostración. Aplicamos el Corolario 2.12 con $f = \mu$:

$$\sum_{n\le x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n\le x} \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{n\le x} I(n) = 1 \ ;$$

y con $f = \Lambda$:

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n\le x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{n\le x} \log n = \log \lfloor x \rfloor! \ .$$

□

Corolario 2.14. *Si $x \geq 1$, entonces*

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1 \ .$$

Si $x < 2$ vale la igualdad (y vale sin valor absoluto, la sumatoria tiene un único término y es positivo); si $x \geq 2$, la desigualdad es estricta.

Demostración. Si $1 \leq x < 2$, $\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = \mu(1) = 1$. Suponemos que $x \geq 2$. Por el Teorema 2.13 (la suma con μ),

$$1 + \sum_{n \leq x} \mu(n) \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) = x \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \ .$$

Acotando,

$$x \left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1 + \sum_{n \leq x} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) = 1 + \big(x - \lfloor x \rfloor \big) + \sum_{2 \leq n \leq x} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) .$$

Como $x \geq 2$, la sumatoria de la derecha es no vacía y, de hecho, cada sumando está en el rango $[0, 1)$. La sumatoria está acotada superiormente por $\lfloor x \rfloor - 1$, estrictamente, de lo que se deduce el resultado. □

Observación 2.15 (Identidad de Legendre o Fórmula de Polignac)**.** Dado que, si $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$, del Teorema 1.20 deducimos que, si $x \geq 1$, entonces

$$\lfloor x \rfloor ! = \prod_{p \leq x} p^{e(p)} \quad , \quad \text{donde} \qquad e(p) = \sum_{m \geq 1} \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \ .$$

La sumatoria es sobre $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor$. En particular,

$$\log \lfloor x \rfloor ! = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{p \leq x} (\log p) \sum_{m \geq 1} \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \ . \tag{21}$$

Teorema 2.16. *Si $x \geq 2$, entonces*

$$\log \lfloor x \rfloor ! = x \log x - x + O\left(\log x\right) \ .$$

Demostración. Aplicamos la Fórmula sumatoria de Euler (Teorema 2.1) con $f(t) = \log t$:

$$\sum_{n \leq x} \log n = \sum_{2 \leq n \leq x} \log n = x \log x - x + 1 + \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} \, dt + O\left(\log x\right) \ .$$

La integral es $O(\log x)$, también. □

Teorema 2.17. *Si $x \geq 2$, entonces*

$$\sum_{p \leq x} \left(\log p\right) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \;=\; x \log x \;+\; O\left(x\right) \;\; .$$

Demostración. En primer lugar,

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \;=\; \sum_{p^m \leq x} \left(\log p\right) \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \;\; .$$

Como, en realidad, la sumatoria sobre potencias de primos p^m es finita (Observación 2.15), podemos separar y reordenarla: la sumatoria es igual a

$$\sum_{m \geq 1} \sum_{p \leq x} \left(\log p\right) \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \;\; .$$

En segundo lugar, separamos $m = 1$ de $m \geq 2$ y acotamos esta última parte:

$$\sum_{m \geq 2} \sum_{p \leq x} \left(\log p\right) \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \;\leq\; x \sum_{m \geq 2} \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p^m} \;\; .$$

Pero, ahora, intercambiando las sumatorias nuevamente (por convergencia absoluta),

$$\sum_{m \geq 2} \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p^m} \;=\; \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p\,(p-1)} \;=\; O\left(1\right) \;\; .$$

Así,

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \;=\; \sum_{p \leq x} \left(\log p\right) \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \;+\; O\left(x\right) \;\; .$$

□

Proposición 2.18 (Fórmula de sumatoria por partes)**.** *Dadas funciones aritméticas f y g, definimos F, G y H como en la Proposición 2.9. Entonces, para todo par de números reales positivos, a y b, tales que $ab = x$, vale*

$$H(x) \;=\; \sum_{d\,q \leq x} f(d)\, g(q) \;=\; \sum_{m \leq a} f(m)\, G(\tfrac{x}{m}) \;+\; \sum_{n \leq b} g(n)\, F(\tfrac{x}{n}) \;-\; F(a)\, G(b) \;\; .$$

Demostración. Dividir en tres regiones la sumatoria H:

$$\left\{d \leq a \;,\; q \leq b\right\} \quad , \quad \left\{x \geq d > a \;,\; q \leq b\right\} \quad \text{y} \quad \left\{d \leq a \;,\; x \geq q > b\right\} \;.$$

Dibujar el gráfico de la hipérbola $ab = x$ en ejes 'd' y 'q', marcando un a entre 1 y x en el eje 'd' y un b entre 1 y x en el eje 'q'. □

3 Distribución de los números primos

3.1 Las funciones de Tchebychev

Definición 3.1. Dado $x > 0$, se definen las funciones

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \qquad \text{y} \qquad \vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p \ .$$

Observación 3.2. Dado que $\Lambda(n) = 0$, salvo que $n = p^m$ ($m \ge 1$, p primo),

$$\psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p = \sum_{m \ge 1} \sum_{p \le x^{1/m}} \log p \ .$$

Si $x^{1/m} < 2$, la sumatoria sobre p es vacía y, por lo tanto, la suma sobre m es, en realidad, finita. En términos de logaritmos, la cota para m es

$$m > \frac{\log x}{\log 2} \ ;$$

para estos valores, $\sum_{p \le x^{1/m}} \log p = 0$. De esta manera, las funciones ψ y ϑ están relacionadas por

$$\psi(x) = \sum_{m \le \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}) \ .$$

Teorema 3.3. *Si $x > 0$, entonces*

$$0 \le \frac{\psi\, x}{x} - \frac{\vartheta\, x}{x} \le \frac{(\log x)^2}{2\,(\log 2)\,\sqrt{x}} \ . \tag{22}$$

Demostración. De la Observación 3.2,

$$\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \le m \le \frac{\log x}{\log 2}} \vartheta(x^{1/m}) \ge 0 \ .$$

De la Definición 3.1, acotando por peor caso,

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p \le x \log x \ .$$

Entonces,

$$0 \le \psi(x) - \vartheta(x) \le \sum_{2 \le m \le \frac{\log x}{\log 2}} x^{1/m} \log(x^{1/m}) \le \frac{\log x}{\log 2} \sqrt{x} \log(\sqrt{x}) \ ,$$

de nuevo, acotando por peor caso. □

Definición 3.4. Dado $x > 0$, se define la función

$$\pi(x) \;=\; \#\{p \le x \,:\, \text{primo}\}\ .$$

Observación 3.5. Las funciones π y ϑ son similares, en tanto que dan saltos en los primos, 1 y $\log p$, respectivamente.

Teorema 3.6 (Identidad de Abel)**.** *Sea $a(n)$ una función aritmética y sea $A(x) = \sum_{n\le x} a(n)$ su función de distribución acumulada ($x > 0$). Si f es una función con derivada continua, f', en el intervalo $[x, y]$, entonces*

$$\sum_{x<n\le y} a(n)\, f(n) \;=\; A(y)\, f(y) \;-\; A(x)\, f(x) \;-\; \int_x^y A(t)\, f'(t)\, dt\ .$$

Demostración. Este resultado es una generalización de la Fórmula sumatoria de Euler (Teorema 2.1). Se puede demostrar por un argumento similar. También se puede apelar a la integral de Riemann-Stieltjes y la fórmula de integración por partes. □

Teorema 3.7. *Si $x \ge 2$, entonces*

$$\vartheta(x) \;=\; \pi(x)\log x \;-\; \int_2^x \pi(t)\,\frac{dt}{t} \quad y \quad \pi(x) \;=\; \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{(\log t)^2}\,\frac{dt}{t}\ .$$

En particular,

$$\frac{\pi(x)\log(x)}{x} - \frac{\vartheta\, x}{x} \;=\; \frac{1}{x}\int_2^x \pi(t)\,\frac{dt}{t} \;=\; \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{(\log t)^2}\,\frac{dt}{t}\ . \tag{23}$$

Demostración. Si $a(n)$ denota la función característica del conjunto de primos y $f(t) = \log t$, entonces $\pi(x)$ es la función de distribución acumulada de $a(n)$ y $\vartheta(x) = \sum_{n\le x} a(n)\, f(n)$. Aplicando el Teorema 3.6 y notando que $\pi(t) = 0$, si $t < 2$,

$$\vartheta(x) \;=\; \pi(x)\log x \;-\; \int_2^x \pi(t)\,\frac{dt}{t}\ .$$

Si $b(n) = a(n)\log n$ y $g(t) = \frac{1}{\log t}$, entonces $\vartheta(x)$ es la función de distribución acumulada de $b(n)$ y $\pi(x) = \sum_{n\le x} b(n)\, g(n)$. Aplicando el Teorema 3.6 y notando que $\vartheta(t) = 0$, si $t < 2$,

$$\pi(x) \;=\; \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{(\log t)^2}\,\frac{dt}{t}\ .$$

□

Teorema 3.8. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1$;

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta\, x}{x} = 1$;

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi\, x}{x} = 1$.

Demostración. (ii) y (iii) son equivalentes por las desigualdades (22). La equivalencia de (i) y (ii), se deduce del Lema 3.9 y del Lema 3.10. □

Lema 3.9. *Si* $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1$, *entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_2^x \pi(t)\, \frac{dt}{t} \;=\; 0 \;.$$

Demostración. Por hipótesis, $\frac{\pi\, t}{t} = O\left(\frac{1}{\log t}\right)$. Como $\log t$ es creciente,

$$\int_2^x \pi(t)\, \frac{dt}{t} \;\ll\; \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} \;+\; \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t} \;\ll\; \frac{\sqrt{x}-2}{\log 2} \;+\; \frac{x-\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}} \;.$$

□

Lema 3.10. *Si* $\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta\, x}{x} = 1$, *entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{(\log t)^2}\, \frac{dt}{t} \;=\; 0 \;.$$

Demostración. Por hipótesis, $\frac{\vartheta\, t}{t} = O\,(1)$. Entonces,

$$\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{(\log t)^2}\, \frac{dt}{t} \;\ll\; \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\log t)^2} \;+\; \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{(\log t)^2} \;\ll\; \frac{\sqrt{x}-2}{(\log 2)^2} \;+\; \frac{x-\sqrt{x}}{(\log\sqrt{x})^2} \;.$$

□

Observación 3.11. El límite de $\frac{1}{x}\int_2^x \pi(t)\, \frac{dt}{t}$ está acotado por 1, independientemente del resultado anterior. Con lo cual, $\frac{\pi(x)\log(x)}{x}$ converge, si y sólo si $\frac{\vartheta\, x}{x}$ converge. Los límites son, *a priori*, distintintos.

3.2 El primo n ésimo

Definición 3.12. El número primo n es p_n.

Teorema 3.13. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$;

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(\pi x)}{x} = 1$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\log n} = 1$.

Demostración. Las afirmaciones (i) y (ii) implican (Lema 3.14) que

$$\mathsf{log}(\pi\, x) \sim \mathsf{log}\, x \;; \tag{24}$$

en particular, las afirmaciones son equivalentes. Asumiendo la afirmación (ii) y eligiendo $x = p_n$, vale $\pi(x) = n$ y $\pi(x)\,\mathsf{log}(\pi\, x) = n\,\mathsf{log}\, n$. En particular, $\lim_{n\to\infty} \frac{n\,\mathsf{log}\, n}{p_n} = 1$. Asumiendo (iii), dado x, sea $n = n(x)$ tal que

$$p_n \;\le\; x \;<\; p_{n+1} \;.$$

Para este valor de n, $\pi(x) = n$ y

$$\frac{p_n}{n\,\mathsf{log}\, n} \;\le\; \frac{x}{n\,\mathsf{log}\, n} \;<\; \frac{p_{n+1}}{(n+1)\,\mathsf{log}(n+1)}\, \frac{(n+1)\,\mathsf{log}(n+1)}{n\,\mathsf{log}\, n} \;.$$

Los extremos tienden a 1, por hipótesis. □

Lema 3.14. *Si valen* (i) *o* (ii) *del Teorema 3.13, entonces vale* (24)*.*

Demostración. De (i), $\lim_{x\to\infty} \left\{\mathsf{log}(\pi\, x) + \mathsf{log}\,\mathsf{log}\, x - \mathsf{log}\, x\right\} = 0$. En particular,

$$\lim_{x\to\infty} (\mathsf{log}\, x) \left\{ \frac{\mathsf{log}(\pi\, x)}{\mathsf{log}\, x} + \frac{\mathsf{log}\,\mathsf{log}\, x}{\mathsf{log}\, x} - 1 \right\} \;=\; 0$$

y, en consecuencia, $\lim_{x\to\infty} \left\{ \frac{\mathsf{log}(\pi\, x)}{\mathsf{log}\, x} + \frac{\mathsf{log}\,\mathsf{log}\, x}{\mathsf{log}\, x} - 1 \right\} = 0$ (tiende a 0 más rápido que como $\mathsf{log}\, x$ tiende a ∞). La afirmación es consecuencia de que $\frac{\mathsf{log}\,\mathsf{log}\, x}{\mathsf{log}\, x}$ tiende a 0 con x. El razonamiento con (ii) es análogo, usando que $\frac{\mathsf{log}\,\mathsf{log}(\pi\, x)}{\mathsf{log}(\pi\, x)}$ tiende a 0 con x. □

Teorema 3.15. [3] *Si $n \ge 2$,*

$$\frac{1}{6}\, \frac{n}{\mathsf{log}\, n} \;<\; \pi(n) \;<\; 6\, \frac{n}{\mathsf{log}\, n} \;.$$

Demostración. Vale, para $n \ge 1$, la cota

$$2^n \;\le\; \binom{2n}{n} \;<\; 4^n \;.$$

Aplicando log a las desigualdades, como es una función creciente,

$$n\,\mathsf{log}\, 2 \;\le\; \mathsf{log}((2n)!) \;-\; 2\,\mathsf{log}(n!) \;<\; n\,\mathsf{log}\, 4 \;.$$

Ahora, por la Fórmula de Polignac (Observación 2.15), $\mathsf{log}(n!) = \sum_{p\le n} e(p)\,(\mathsf{log}\, p)$, donde

$$e(p) \;=\; \sum_{m=1}^{M(p)} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor \qquad \text{y} \qquad M(p) \;=\; M(n,p) \;=\; \left\lfloor \frac{\mathsf{log}\, n}{\mathsf{log}\, p} \right\rfloor \;.$$

[3] Este resultado será mejorado con el Teorema **??**.

Así, se deduce

$$\mathsf{log}((2n)!) \;-\; 2\,\mathsf{log}(n!) \;=\; \sum_{p\leq 2n} \Big(\sum_{m=1}^{M(p)} \left\lfloor \frac{2n}{p^m} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor \Big)\,(\mathsf{log}\,p)\ .$$

Pero las diferencias dentro de las sumatorias toman valores en $\{0,1\}$ (ver la Observación 3.16). Entonces,

$$\sum_{m=1}^{M(2n,p)} \left\lfloor \frac{2n}{p^m} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor \;\leq\; M(2n,p) \;=\; \left\lfloor \frac{\mathsf{log}(2n)}{\mathsf{log}\,p} \right\rfloor \;\leq\; \frac{\mathsf{log}(2n)}{\mathsf{log}\,p}\ .$$

En consecuencia, se deduce la cota $n\,\mathsf{log}\,2 \;\leq\; \pi(2n)\,\mathsf{log}(2n)$. Como $\sqrt{2} < e$, vale $\mathsf{log}\,2 > \frac{1}{2}$ y

$$\frac{1}{4}\,\frac{2n}{\mathsf{log}(2n)} \;<\; \pi(2n)\ . \tag{25}$$

Esto es la cota para números pares. Para números impares,

$$\pi(2n+1) \;\geq\; \pi(2n) \;>\; \frac{1}{4}\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)\,\frac{2n+1}{\mathsf{log}(2n+1)} \;\geq\; \frac{1}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{2n+1}{\mathsf{log}(2n+1)}\ ,$$

es decir,

$$\frac{1}{6}\,\frac{2n+1}{\mathsf{log}(2n+1)} \;<\; \pi(2n+1)\ . \tag{26}$$

En cuanto a la cota inferior, por la Observación 3.17,

$$\mathsf{log}((2n)!) \;-\; 2\,\mathsf{log}(n!) \;\geq\; \sum_{p\leq 2n} \Big(\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \Big)\,(\mathsf{log}\,p) \;\geq\; \sum_{n<p\leq 2n} \mathsf{log}\,p\ .$$

El lado derecho es igual a $\vartheta(2n) - \vartheta(n)$. Para n de la forma $n = 2^k$, $k \geq 0$,

$$\vartheta(2^{k+1}) \;-\; \vartheta(2^k) \;<\; 2^k\,(\mathsf{log}\,4)\ .$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \vartheta(2^{r+1}) \;&=\; \vartheta(2^{r+1}) \;-\; \vartheta(1) \;=\; \sum_{k=0}^{r} \vartheta(2^{k+1}) - \vartheta(2^k) \\ &<\; \Big(\sum_{k=0}^{r} 2^k\Big)\,(\mathsf{log}\,4) \;=\; (2^{r+1}-1)\,(\mathsf{log}\,4) \;<\; 2^{r+2}\,(\mathsf{log}\,2)\ . \end{aligned}$$

Si, ahora, $2^r \leq n < 2^{r+1}$, entonces

$$\vartheta(n) \;\leq\; \vartheta(2^{r+1}) \;<\; 2^{r+2}\,(\mathsf{log}\,2) \;\leq\; (4n)\,(\mathsf{log}\,2)\ .$$

Ahora, la idea es comparar $\pi(n)$ con $\pi(n^\alpha)$, donde $\alpha \in (0,1)$:

$$\big(\pi(n) - \pi(n^\alpha)\big)\,(\log n^\alpha) \;<\; \sum_{n^\alpha < p \le n} (\log p) \;\le\; \vartheta(n) \;<\; (4n)\,(\log 2)\ .$$

De esto se deduce que, para todo $\alpha \in (0,1)$,

$$\pi(n) \;<\; \frac{4n}{\alpha}\,\frac{\log 2}{\log n} \;+\; n^\alpha\ .$$

En particular,

$$\frac{\pi(n)\log(n)}{n} \;<\; \frac{4}{\alpha}\,(\log 2) \;+\; n^{-(1-\alpha)}\,(\log n)\ .$$

Ahora, la función

$$f \;=\; f(x,c) = x^{-c}\log x \qquad (\ c > 0\ ,\ x \ge 1\ )$$

tiene, en la región $x > 1$, como único punto crítico, a $x = e^{1/c}$: $\frac{df}{dx} < 0$, si $x > e^{1/c}$, y $\frac{df}{dx} > 0$, si $x < e^{1/c}$; El máximo, alcanzado en $x = e^{1/c}$, es igual a $\frac{1}{c\,e}$. En particular, para todo $\alpha \in (0,1)$,

$$\frac{\pi(n)\log(n)}{n} \;<\; \frac{4}{\alpha}\,(\log 2) \;+\; \frac{1}{(1-\alpha)\,e}\ .$$

El resultado se deduce eligiendo $\alpha = \frac{2}{3}$. $\square$

Observación 3.16. Para todo x, la diferencia $\lfloor 2x\rfloor - 2\,\lfloor x\rfloor$ pertenece a $\{0,1\}$. Por un lado, se cumple $\lfloor 2x\rfloor \le 2x < \lfloor 2x\rfloor + 1$; en particular, $2\,\lfloor x\rfloor < 2\,\left\lfloor \frac{\lfloor 2x\rfloor+1}{2}\right\rfloor \le 2\left(\frac{\lfloor 2x\rfloor+1}{2}\right) = \lfloor 2x\rfloor + 1$. Entonces, $\lfloor 2x\rfloor - 2\,\lfloor x\rfloor \le 1$. Por otro lado, $2\,\lfloor x\rfloor \le 2x < 2\,(\lfloor x\rfloor + 1)$ y, entonces, $\lfloor 2x\rfloor - 2\,\lfloor x\rfloor \ge 0$.

Observación 3.17. Si $n < p^m \le 2n$, entonces $\left\lfloor \frac{2n}{p^m}\right\rfloor - 2\,\left\lfloor \frac{n}{p^m}\right\rfloor = 1$, pues

$$2 \;>\; \frac{2n}{p^m} \;\ge\; 1 \;>\; \frac{n}{p^m} \;\ge\; \frac{1}{2}\ .$$

Si $\frac{n}{2} < p^m \le n$, entonces

$$4 \;>\; \frac{2n}{p^m} \;\ge\; 2 \;>\; \frac{n}{p^m} \;\ge\; 1\ .$$

Si $\frac{n}{4} < p^m \le \frac{n}{2}$, entonces

$$8 \;>\; \frac{2n}{p^m} \;\ge\; 4 \;>\; \frac{n}{p^m} \;\ge\; 2\ .$$

Teorema 3.18. *Si $n \ge 1$, entonces*

$$\frac{1}{6}\,n\log n \;<\; p_n \;<\; 12\,n\,\big(\log(12\,n) - 1\big) \;=\; 12\,\big(n\log n + n\log(\tfrac{12}{e})\big)\ .$$

Demostración. Si $x = p_n$, entonces $n = \pi(x) \;<\; 6\,\frac{p_n}{\log p_n}$ y $p_n > \frac{1}{6}\,n\,(\log n)$. Por otro lado, $n = \pi(x) \;>\; \frac{1}{6}\,\frac{p_n}{\log p_n}$ implica que $p_n < 6\,n\,(\log p_n)$. En particular, como $\log x \le \frac{2}{e}\,\sqrt{x}$, para todo $x \ge 1$, se deduce que $\log p_n \le \frac{2}{e}\,\sqrt{p_n}$ y, en consecuencia, que $\sqrt{p_n} < \frac{12}{e}\,n$. Aplicar $\log$ a esta desigualdad. $\square$

3.3 El teorema de Shapiro

Un mecanismo general nos permite derivar fórmulas asintóticas nuevas. Específicamente, podremos pasar de sumatorias que involucran la función parte entera a sumatorias en las que dicha función no aparece.

Teorema 3.19 (Shapiro)**.** *Sea $a(n)$ una sucesión de números reales no negativos tales que*

$$\sum_{n\leq x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \;=\; x \log x \;+\; O\left(x\right) \;\;,$$

si $x \geq 1$. Entonces,

(i) para $x \geq 1$, $\sum_{n\leq x} \frac{a(n)}{n} = \log x + O\left(1\right)$;

(ii) existe $B > 0$ tal que $\sum_{n\leq x} a(n) \leq B\,x$, si $x \geq 1$;

(iii) existen $A > 0$ y $x_0 > 0$ tales que $\sum_{n\leq x} a(n) \geq A\,x$, si $x \geq x_0$.

Observación 3.20. La función $c(x) := \lfloor x \rfloor - 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ toma valores en $\{0, 1\}$ y, además, $c(x+2) = c(x)$. En la región $x/2 < n \leq x$, se cumple que $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$.

Demostración. Comparamos las funciones sumatorias

$$S(x) \;:=\; \sum_{n\leq x} a(n) \qquad \text{y} \qquad T(x) \;:=\; \sum_{n\leq x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \;\;.$$

Definimos $c(x) := \lfloor x \rfloor - 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$. En primer lugar,

$$T(x) \;-\; 2\,T\Big(\frac{x}{2}\Big) \;=\; \sum_{n\leq x/2} c\Big(\frac{x}{n}\Big)\,a(n) \;+\; \sum_{x/2<n\leq x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \;\geq\; \sum_{n\leq x/2} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \;\;.$$

Pero el lado derecho es igual a $\sum_{x/2<n\leq x} a(n)$, que coincide con $S(x) - S(\frac{x}{2})$.[4] Por hipótesis, $T(x) - 2\,T(\frac{x}{2}) \;=\; O\left(x\right)$. De esto se deduce que existe $K > 0$ tal que, en la región $x \geq 1$,

$$S(x) \;-\; S\Big(\frac{x}{2}\Big) \;\leq\; K\,x \;\;.$$

En particular, para cada $l \geq 0$ tal que $2^l \leq x$, $S(\frac{x}{2^l}) - S(\frac{x}{2^{l+1}}) \leq K\,\frac{x}{2^l}$. De esta manera,

$$S(x) \;=\; \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor} \Big(S\Big(\frac{x}{2^l}\Big) \;-\; S\Big(\frac{x}{2^{l+1}}\Big)\Big) \;\leq\; K\,x \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor} 2^{-l} \;\leq\; 2\,K\,x \;\;.$$

[4] Por otra parte, como $S(x)$ se separa como $\sum_{n\leq x} a(n) + \sum_{x/2<n\leq x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$, podemos acotar superiormente de la siguiente manera:

$$S(x) \;\geq\; T(x) \;-\; 2\,T\Big(\frac{x}{2}\Big) \;\;.$$

Es decir, vale (ii) con $B = 2K$.

En cuanto a (i),

$$T(x) \,=\, x \sum_{n\le x} \frac{a(n)}{n} \,+\, O\left(\sum_{n\le x} a(n)\right) \,=\, x \sum_{n\le x} \frac{a(n)}{n} \,+\, O\left(x\right) \ .$$

La última igualdad es consecuencia de $\sum_{n\le x} a(n) = S(x) = O\left(x\right)$. O sea,

$$\sum_{n\le x} \frac{a(n)}{n} \,=\, \frac{T(x)}{x} \,+\, O\left(\frac{S(x)}{x}\right) \,=\, \log x \,+\, O\left(1\right) \ .$$

La última igualdad es consecuencia de la hipótesis y de la cota $S(x) = O\left(x\right)$, nuevamente.

Por último, para la cota inferior, definimos $A(x) := \sum_{n\le x} \frac{a(n)}{n}$. Sabemos que $A(x) = \log x + R(x)$, donde $R(x)$ es un término de error que verifica $R(x) = O\left(1\right)$. Explícitamente, existe $M > 0$ tal que $|R(x)| \le M$, si $x \ge 1$. Dado $\alpha \in (0,1)$, si $\alpha\, x \ge 1$, entonces

$$A(x) \,-\, A(\alpha\, x) \,=\, -\log \alpha \,+\, \big(R(x) \,-\, R(\alpha\, x)\big) \,\ge\, -\log \alpha - 2\, M \ .$$

Eligiendo α tal que $-\log \alpha - 2\, M = 1$, en la región $x \ge \frac{1}{\alpha}$ se verifica

$$1 \,\le\, A(x) \,-\, A(\alpha\, x) \,=\, \sum_{\alpha\, x < n \le x} \frac{a(n)}{n} \,\le\, \frac{1}{\alpha\, x} \sum_{\alpha\, x < n \le x} a(n) \,=\, \frac{S(x)}{\alpha\, x} \ .$$

Es decir, vale (iii) con $A = \alpha$ y $x_0 = \frac{1}{\alpha}$. □

Corolario 3.21. *Si* $x \ge 1$,

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} \,=\, \log x \,+\, O\left(1\right) \qquad y$$

existen constnates $C_1, C_2 > 0$ *tales que:*

- $\psi(x) \le C_1\, x$, *si* $x \ge 1$, *y*
- $\psi(x) \ge C_2\, x$, *para* x *suficientemente grande.*

Demostración. Aplicamos el Teorema 3.19 partiendo de la fórmula asintótica

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \,=\, x \log x \,-\, x \,+\, O\left(\log x\right) \,=\, x \log x \,+\, O\left(x\right) \ .$$

□

Corolario 3.22. *Si* $x \ge 1$,

$$\sum_{p\le x} \frac{\log p}{p} \,=\, \log x \,+\, O\left(1\right) \qquad y$$

existen constantes $C_1, C_2 > 0$ *tales que*

- *$\vartheta(x) \le C_1\, x$, si $x \ge 1$, y*
- *$\vartheta(x) \ge C_2\, x$, para x suficientemente grande.*

Demostración. Aplicamos el Teorema 3.19 partiendo de la fórmula asintótica

$$\sum_{p\le x} (\log p) \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = x \log x + O(x) \ .$$

□

Observación 3.23. Para cualquier función aritmética f, si $F(x) = \sum_{n\le x} f(n)$, entonces

$$\sum_{n\le x} F\Big(\frac{x}{n}\Big) = \sum_{n\le x} f(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \ . \tag{27}$$

En particular, reescribimos el Corolario 3.21 y el Corolario 3.22 (las fórmulas asintóticas de la siguiente manera: si $x \ge 1$,

$$\sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) = x \log x - x + O(\log x) \quad \text{y}$$
$$\sum_{n\le x} \vartheta\Big(\frac{x}{n}\Big) = x \log x + O(x) \ .$$

3.4 La sumatoria $\sum_{p\le x} 1/p$

Observación 3.24. La sumatoria de los recíprocos de los primos crece, por lo menos, como $\log\log x$: si $x \ge 2$,

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} \ge \log\log x - \log 2 \ .$$

Por un lado, considerando la sumatoria de los recíprocos de todos los naturales positivos,

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \sum_{\substack{q\le x \\ \text{libres de cuadrados}}} \frac{1}{q} \sum_{m\le\sqrt{x/q}} \frac{1}{m^2} \le \sum_{\substack{q\le x \\ \text{libres de cuadrados}}} \frac{1}{q} \sum_{m\ge 1} \frac{1}{m^2} \ .$$

Ahora, la sumatoria de $\frac{1}{m^2}$ la podemos acotar de la siguiente manera:

$$\sum_{m\ge 1} \frac{1}{m^2} \le 1 + \sum_{m\ge 2} \Big(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\Big) = 2 \ .$$

La sumatoria de los recíprocos de los enteros positivos libres de cuadrados está acotada por:

$$\sum_{\substack{q\le x \\ \text{libres de cuadrados}}} \frac{1}{q} \le \prod_{p\le x} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big) \le \exp\Big(\sum_{p\le x} \frac{1}{p}\Big) \ ,$$

donde $\mathsf{exp}(x) = e^x$. Por otro lado, tenemos la cota inferior

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} \ge \sum_{n\le x} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \ge \mathsf{log}\, x \ .$$

Juntando todo y tomando logaritmo, se deduce la cota mencionada. Notemos que podríamos haber utilizado $|\mu(q)|$ como la característica de los enteros positivos libres de cuadrados.

Teorema 3.25. *Existe $A > 0$ tal que, si $x \ge 2$,*

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \mathsf{log}\,\mathsf{log}\, x + A + O\left(\frac{1}{\mathsf{log}\, x}\right) .$$

Demostración. Definimos una sucesión $a(n)$ por

$$a(n) = \begin{cases} \frac{\mathsf{log}\, p}{p} \ , & \text{si } n = p \ , \\ 0 \ , & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea $A(x) = \sum_{p\le x} \frac{\mathsf{log}\, p}{p} = \sum_{n\le x} a(n)$ su función de distribución. Si $f(t) = \frac{1}{\mathsf{log}\, t}$ en el Teorema 3.6,

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \sum_{n\le x} a(n)\, f(n) = \frac{A(x)}{\mathsf{log}\, x} + \int_2^x \frac{A(t)}{(\mathsf{log}\, t)^2} \frac{dt}{t} \ ,$$

pues $A(t) = 0$, si $t < 2$. Por otro lado, de los resultados de § 3.3,

$$A(x) = \sum_{p\le x} \frac{\mathsf{log}\, p}{p} = \mathsf{log}\, x + R(x) \ ,$$

donde el término de error, $R(x)$, es $O\,(1)$. Así,

$$\begin{aligned} \sum_{p\le x} \frac{1}{p} &= 1 + \frac{R(x)}{\mathsf{log}\, x} + \int_2^x \frac{1}{\mathsf{log}\, t} \frac{dt}{t} + \int_2^x \frac{R(t)}{(\mathsf{log}\, t)^2} \frac{dt}{t} \\ &= \mathsf{log}\,\mathsf{log}\, x - \mathsf{log}\,\mathsf{log}\, 2 + 1 + O\left(\frac{1}{\mathsf{log}\, x}\right) + \int_2^x \frac{R(t)}{(\mathsf{log}\, t)^2} \frac{dt}{t} \ . \end{aligned}$$

Ahora bien, el último de los sumandos anteriores es una integral convergente y

$$\int_2^x \frac{R(t)}{(\mathsf{log}\, t)^2} \frac{dt}{t} = \int_2^\infty \frac{R(t)}{(\mathsf{log}\, t)^2} \frac{dt}{t} + O\left(\frac{1}{\mathsf{log}\, x}\right) \ ,$$

de lo que se deduce el resultado con

$$A = 1 - \mathsf{log}\,\mathsf{log}\, 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{(\mathsf{log}\, t)^2} \frac{dt}{t} \ .$$

$\square$

3.5 La sumatoria de μ

En esta sección estudiamos la función de distribución acumulada de $\mu(n)$.

Definición 3.26. Dado $x \geq 1$, definimos las funciones

$$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \qquad \text{y} \qquad H(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \log n \ .$$

Teorema 3.27. *Las funciones $M(x)$ y $H(x)$ verifican:*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{M(x)}{x} - \frac{H(x)}{x \log x} \right) = 0 \ .$$

Demostración. Aplicamos el Teorema 3.6 con $f(t) = \log t$ y deducimos:

$$H(x) = M(x)\,(\log x) - \int_1^x M(t)\,\frac{dt}{t} \ .$$

Pero, $|M(t)| \leq t$, con lo que la integral del lado derecho es $O\,(x)$. □

Ahora deducimos una nueva versión equivalente al Teorema de los números primos.

Teorema 3.28. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\psi(x) \sim x$;

(ii) $M(x) = o\,(x)$.

Demostración. La afirmación (i) es $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi\, x}{x} = 1$; la afirmación (ii) es $\lim_{x\to\infty} \frac{M\,x}{x} = 0$. En primer lugar, vamos a ver que (i) implica $H(x) = o\,(x \log x)$. Usando inversión de Möbius y la identidad $\Lambda = -(\mu \log) * u$, se deduce que

$$-H(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d \div n} \mu(d)\,\Lambda\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq \frac{x}{n}} \Lambda(m) \ .$$

Pero la sumatoria interior en la última expresión de la derecha es igual a $\psi(\frac{x}{n})$, con lo que

$$-\,H(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)\,\psi\Big(\frac{x}{n}\Big) \ . \tag{28}$$

Ahora, asumiendo $\psi\, x \sim x$, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 = x_0(\epsilon) \geq 1$ tal que, si $x \geq x_0$, entonces

$$|\psi(x) - x| < \epsilon\, x \ .$$

Si $y := \left\lfloor \frac{x}{x_0} \right\rfloor$, y $x > x_0$, entonces, separando (28), deducimos que, si $n \leq y$, entonces $n \leq \frac{x}{x_0}$ y $x_0 \leq \frac{x}{n}$, con lo que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq y} \mu(n)\,\psi\Big(\frac{x}{n}\Big) \right| &= \left| \sum_{n \leq y} \mu(n) \left(\Big(\psi\Big(\frac{x}{n}\Big) - \frac{x}{n} \Big) + \frac{x}{n} \right) \right| \\ &\leq x \left| \sum_{n \leq y} \frac{\mu(n)}{n} \right| + \epsilon\, x \sum_{n \leq y} \frac{1}{n} \leq x + \epsilon\, x + \epsilon\, x \log x \ . \end{aligned}$$

Por otro lado, si $y < n \le x$, entonces $\frac{x}{x_0} < y+1 \le n \le x$ y $\frac{x}{n} \le \frac{x}{y+1} < x_0$. En particular, $y < n \le x$ implica $\psi(\frac{x}{n}) \le \psi(x_0)$ y

$$\left| \sum_{y<n\le x} \mu(n)\, \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) \right| \;\le\; x\, \psi(x_0) \ .$$

Juntando estas dos cotas,

$$\frac{|H(x)|}{x \log x} \;\le\; \frac{1 + \epsilon + \psi(x_0(\epsilon))}{\log x} \;+\; \epsilon \ .$$

De esto se concluye que el límite superior de $\frac{|H(x)|}{x \log x}$ es 0.

Supongamos, ahora, que $M(x) = o\,(x)$. Haremos uso de las siguientes identidades:

$$1 \;=\; \sum_{d \div n} \mu(d)\, \sigma_0\Big(\frac{n}{d}\Big) \quad , \quad \Lambda(n) \;=\; \sum_{d \div n} \mu(d) \log\Big(\frac{n}{d}\Big) \quad , \quad \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor \;-\; \sum_{d \div n} \mu(d)\, u\Big(\frac{n}{d}\Big) \quad ,$$

$$\sum_{n \le x} 1 \;=\; \lfloor x \rfloor \quad , \quad \sum_{n \le x} \Lambda(n) \;=\; \psi(x) \quad \text{y} \quad \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor \;=\; 1 \ .$$

Combinando estas identidades, se deduce que

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor \;-\; \psi(x) \;-\; 2\,C \;&=\; \sum_{n \le x} \Big(1 - \Lambda(n) - 2\,C\, \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor \Big) \\ &=\; \sum_{n \le x} \sum_{d \div n} \mu(d) \Big(\sigma_0\Big(\frac{n}{d}\Big) - \log\Big(\frac{n}{d}\Big) - 2\,C\, u\Big(\frac{n}{d}\Big) \Big) \ . \end{aligned}$$

Si definimos $f(q) := \sigma_0(q) - \log(q) - 2\,C\, u(q)$, entonces

$$\psi(x) \;=\; \lfloor x \rfloor \;-\; \sum_{n \le x} \sum_{d \div n} \mu(d)\, f\Big(\frac{n}{d}\Big) \;-\; 2\,C \ .$$

El resultado es consecuencia de la siguiente afirmación:

$$\sum_{q\, d \le x} \mu(d)\, f(q) \;=\; o\,(x) \ . \tag{29}$$

Para demostrar (29), definimos $F(x) := \sum_{n \le x} f(n)$. Entonces, con $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $a\, b = x$,

$$\sum_{q\, d \le x} \mu(d)\, f(q) \;=\; \sum_{m \le a} f(m)\, M\Big(\frac{x}{m}\Big) \;+\; \sum_{n \le b} \mu(n)\, F\Big(\frac{x}{n}\Big) \;-\; F(a)\, M(b) \ .$$

Ahora, $F(x) \,=\, \sum_{n \le x} \sigma_0(n) - \sum_{n \le x} \log n \,-\, 2\,C \sum_{n \le x} 1$. Usando las cotas conocidas para estas sumatorias, se deduce que $F(x) = O\,(\sqrt{x})$ en la región $x \ge 1$. Es decir, existe

$B > 0$ tal que, si $x \geq 1$, entonces $|F(x)| \leq B\,x$. Tomando una constante A posiblemente mayor a B,[5]

$$\Big|\sum_{n\leq b} \mu(n)\, F\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big| \;\leq\; B \sum_{n\leq b} \sqrt{\frac{x}{n}} \;<\; A\sqrt{x\,b} \;=\; \frac{A\,x}{\sqrt{a}} \;.$$

En cuanto al segundo sumando, dado $\epsilon > 0$, elegir $a \leq x$ tal que $\frac{A}{\sqrt{a}} < \epsilon$ (a no depende de $x\ldots$); dada $K > 0$, existe $c > 0$ tal que, si $x > c$, entonces $\frac{|M\,x|}{x} < \frac{\epsilon}{K}$. En tal caso,

$$\Big|\sum_{m\leq a} f(m)\, M\Big(\frac{x}{m}\Big)\Big| \;\leq\; \sum_{m\leq x} |f(m)|\,\frac{x}{m}\,\frac{\epsilon}{K} \;=\; \frac{x\,\epsilon}{K}\sum_{m\leq a}\frac{|f(m)|}{m} \;.$$

En resumen, dado $\epsilon > 0$, elegimos $a \leq x$ tal que $A < \epsilon\sqrt{a}$, fijamos $K := \sum_{m\leq a}\frac{|f(m)|}{m}$ y elegimos $c > 0$ tal que, si $x > c$, entonces $\frac{|M\,x|}{x} < \frac{\epsilon}{K}$. Finalmente,

$$|F(a)\,M(b)| \;\leq\; B\sqrt{a}\,|M(b)| \;<\; A\sqrt{a}\,b \;=\; \frac{A}{\sqrt{a}}\,x \;<\; \epsilon\,x \;.$$

En definitiva, con estas elecciones, $\Big|\sum_{q\,d\leq x}\mu(d)\,f(q)\Big| \leq 3\,\epsilon\,x$. □

El siguiente resultado es sólo una de las implicaciones de otra equivalencia con el Teorema de los números primos.

Teorema 3.29. *Si* $\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n} = o\,(1)$, *entonces* $M(x) = o\,(x)$.

Demostración. Dado que

$$M(x) \;=\; \Big(\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}\Big)\,x \;-\; \int_1^x \Big(\sum_{n\leq t}\frac{\mu(n)}{n}\Big)\,dt \;,$$

el resultado es consecuencia de la siguiente afirmación: si $\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n} = o\,(1)$, entonces

$$\int_1^x \Big(\sum_{n\leq t}\frac{\mu(n)}{n}\Big)\,dt \;=\; o\,(x) \;.$$

Pero esto es cierto en general.[6] □

[5] Independiente de a, de b y de x.
[6] Si $A(x) = \sum_{n\leq x} a(n) = o\,(1)$, entonces las cotas

$$\Big|\int_1^x A(t)\,dt\Big| \;\leq\; \Big|\int_1^{x_0} A(t)\,dt\Big| + \Big|\int_{x_0}^x A(t)\,dt\Big| \;\leq\; (x_0 - 1)\,\|A\|_\infty \;+\; \epsilon\,(x - x_0)$$

implican que $\limsup_{x\to\infty}\Big|\frac{1}{x}\int_1^x A(t)\,dt\Big| \leq \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$.

Referencias

[Apo76] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts Math. Springer, Cham, 1976.

[Dav80] H. Davenport. *Multiplicative Number Theory*. 2nd. ed. Vol. 74. Grad. Texts Math. Springer, Cham, 1980.

[Lan99] E. Landau. *Elementary Number Theory*. Reprint of the 1966 2nd edition. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1999.

[TM00] G. Tenenbaum and M. Mendès France. *The Prime Numbers and Their Distribution*. Trans. by P. G. Spain. Vol. 6. Stud. Math. Libr. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2000.