# Cálculo de formas de Hilbert

## Formas de Hilbert y dónde encontrarlas

Mejail, Daniel

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

# Contenidos

# Contenidos

## El semiplano complejo superior

El semiplano complejo superior es

$$\mathfrak{h} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) > 0 \right\} .$$

El *grupo modular*,

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,:\, a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\} ,$$

actúa en $\mathfrak{h}$ vía

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} .$$

# El grupo modular

$\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

- El cociente $Y(1) = \Gamma\backslash\mathfrak{h}$ parametriza clases de isomorfismo de curvas elípticas sobre $\mathbb{C}$:

$$\tau \in \mathfrak{h} \mapsto E_\tau \quad , \quad \gamma\tau = \tau' \Rightarrow E_\tau \simeq E_{\tau'}$$

- La curva compleja $Y(1)$ admite una compactificación agregando una *cúspide*: $X(1) = Y(1) \cup \{\infty\}$
- Existe una biyección

$$\left\{ f : \Gamma\backslash\mathfrak{h} \to \mathbb{C} \right\} \leftrightarrow \left\{ f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C} \; : \; f(\gamma z) = f(z) \forall \gamma \in \Gamma \right\}$$

# Formas modulares para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

## Definición

Dado $k \in \mathbb{Z}$, decimos que $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ es una *forma modular de peso $k$ para* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ($f \in \mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$), si:

1. $f$ es holomorfa en $\mathfrak{h}$,
2. para toda $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad \text{y}$$

3. $f$ es holomorfa en $\infty$;

una forma $f \in \mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ se dice *cuspidal* ($f \in \mathcal{S}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$), si, además,

4. $f$ se anula en $\infty$.

## Desarrollo de Fourier

Si $f$ verifica 1 y 2, entonces posee un *desarrollo de Fourier*:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f)\, e^{2\pi i z n} \; .$$

- $f \in \mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, si $a_n(f) = 0$, siempre que $n < 0$, y
- $f \in \mathcal{S}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, si, además, $a_0(f) = 0$.

# Otros grupos

El grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ actúa transitivamente en $\mathfrak{h}$. Podemos obtener un conciente $\Gamma\backslash\mathfrak{h}$ a partir de $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ bajo ciertas condiciones:

- $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y subgrupos de congruencia, por ejemplo

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,:\, c \equiv 0 \pmod{N} \right\} ;$$

- grupos de unidades de órdenes en álgebras de cuaterniones indefinidas (más adelante).

# Contenidos

## Algunos preliminares

Sea $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d > 0$. Existen dos inclusiones $F \hookrightarrow \mathbb{R}$:

$$\tau_1 : a + b\sqrt{d} \mapsto a + b\sqrt{d} \quad \text{y} \quad \tau_2 : a + b\sqrt{d} \mapsto a - b\sqrt{d} .$$

Un elemento $x \in F$ se dice *totalmente positivo* (escribimos $x \gg 0$ o $x \in F_+^\times$), si $x_j = \tau_j(x) > 0$ para $j = 1, 2$.

### Definición

- $\mathfrak{o}_F$: anillo de enteros de $F$.
- $\mathrm{Cl}(F)$: *grupo de clases* de $F$ ($\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, si $\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{b}$, $\lambda \in F^\times$).
- $\mathrm{Cl}^+(F)$: *grupo de clases estrictas* de $F$ ($\lambda \gg 0$).
- $V^F$: conjunto de lugares de $F$ (primos $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}_F$, $|\cdot|_{\tau_1}$, $|\cdot|_{\tau_2}$).

# Ejemplos

- $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d > 0$,

$$\mathfrak{o}_F = \begin{cases} \left\{a + b\frac{1+\sqrt{d}}{2} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\right\} & d \equiv 1\,(4) \\ \left\{a + b\sqrt{d} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\right\} & d \equiv 2, 3\,(4) \end{cases};$$

- $F = \mathbb{Q}(w)$, $w^3 - w^2 - 8\,w + 7 = 0$, $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[w]$.

| | $h$ | $h^+$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ | 1 | 1 |
| $\mathbb{Q}(w)$ | 1 | 2 |
| $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ | 2 | 2 |

$\to \mathrm{Cl}^+(\mathbb{Q}(w)) = \{\langle 1\rangle, \langle w^2 - 4\rangle\}$

## Acción en $\mathfrak{h}^2$

Si $(z_1, z_2) \in \mathfrak{h}^2$ y $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2^+(F) = \left\{\gamma \in \mathrm{GL}_2(F) \,:\, \det(\gamma) \gg 0\right\}$,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (z_1, z_2) \;:=\; \left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \frac{a_2 z_2 + b_2}{c_2 z_2 + d_2}\right) \;.$$

Dadas $f \,:\, \mathfrak{h}^2 \to \mathbb{C}$ y $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2^+(F)$,

$$f\,|\gamma\,(z_1, z_2) \;:=\; \frac{\det(\gamma_1)}{(c_1 z_1 + d_1)^2}\,\frac{\det(\gamma_2)}{(c_2 z_2 + d_2)^2}\, f(\gamma \cdot (z_1, z_2)) \;.$$

# Subgrupos de congruencia

Si $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\mathfrak{o}_F^\times = \{ \pm \epsilon_0^k \, : \, k \in \mathbb{Z} \}$. Definimos

$$\mathrm{GL}_2^+(\mathfrak{o}_F) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \, : \, a, b, c, d \in \mathfrak{o}_F, \, ad - bc \in \mathfrak{o}_{F,+}^\times \right\}$$

$$\Gamma_0(\mathfrak{N}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathfrak{o}_F) \, : \, c \in \mathfrak{N} \right\} \qquad ( \, \mathfrak{N} \subset \mathfrak{o}_F \, ).$$

## Observaciones

- Si $\epsilon \in \mathfrak{o}_{F,+}^\times$ y $\mu \in \mathfrak{o}_F$, $\left[\begin{smallmatrix} \epsilon & \mu \\ & 1 \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma_0(\mathfrak{N})_\infty$;
- $\Gamma_0(\mathfrak{N}) \backslash \mathfrak{h}^2$ es una superficie no compacta (finitas cúspides);
- asumimos que $h^+(F) = 1$.

# Formas modulares para $\Gamma_0(\mathfrak{N})$

## Definición

Una función $f : \mathfrak{h}^2 \to \mathbb{C}$ es una *forma modular de peso* $(2,2)$ *para* $\Gamma_0(\mathfrak{N})$ ($f \in \mathcal{M}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$), si:

1. $f$ es holomorfa en $\mathfrak{h}^2$;
2. para toda $\gamma \in \Gamma_0(\mathfrak{N})$, $f|\gamma = f$.

## Observación (Desarrollo de Fourier)

Por 2, $f(z+\mu) = f(z)$ para todo $\mu \in \mathfrak{o}_F$ y

$$f = \sum_{\nu \in \mathfrak{o}_F^{\perp}} a_\nu(f)\, e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\nu z)} ,$$

donde $\mathrm{Tr}(\nu z) = \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2$ y $\mathfrak{o}_F^{\perp} = \{\nu \in F : \mathrm{Tr}(\nu \mathfrak{o}_F) \subset \mathbb{Z}\}$.

# Principio de Koecher y formas cuspidales

## Teorema

- $a_{\epsilon\nu} = a_\nu$ para todo $\nu \in \mathfrak{o}_F^\perp$, $\epsilon \in \mathfrak{o}_{F,+}^\times$;
- si $a_\nu \neq 0$, entonces $\nu = 0$ o $\nu \gg 0$.

Para ver lo que pasa en otra cúspide, $x \in \mathbb{P}^1(F)$, miramos el desarrollo de $f\,|A$, con $A \cdot \infty = x$.

## Definición

Una forma $f$ se dice *cuspidal* ($f \in \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$), si, además,

3. $a_0\left(f\,|A\right) = 0$ para toda $A \in \mathrm{GL}_2^+(F)$.

# Operadores de Hecke y coeficientes de Fourier

El espacio $\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$ posee un producto interno y, para cada primo $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$, operadores $T_{\mathfrak{p}} : \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N}) \to \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$ tales que

- $T_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{q}} = T_{\mathfrak{q}} T_{\mathfrak{p}}$ y
- $\langle T_{\mathfrak{p}} f, g \rangle = \langle f, T_{\mathfrak{p}} g \rangle$.

Dado $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{o}_F$, existe $\nu \in \mathfrak{d}^{-1}$, $\nu \gg 0$ tal que $\mathfrak{m} = \nu\, \mathfrak{d}$.

$$C(\mathfrak{m}, f) := \mathbb{N}(\mathfrak{m})\, a_\nu(f)\ .$$

$$C(\mathfrak{m}, T_{\mathfrak{p}} f) = \mathbb{N}(\mathfrak{p})\, C(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{m}, f) + C(\mathfrak{p}\mathfrak{m}, f)\ .$$

$(\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m} \Rightarrow C(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{m}, f) = 0)$.

# El espacio de formas nuevas

## Definición

Si $\mathfrak{N} = \mathfrak{l}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{l}$ primo, existen $\iota_1, \iota_\mathfrak{l} : \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{M}) \hookrightarrow \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$.

$$\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{l}-\mathrm{new}} := \Big(\iota_1\big(\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{M})\big) + \iota_\mathfrak{l}\big(\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{M})\big)\Big)^{\perp},$$

$$\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})^{\mathrm{new}} := \bigcap_{\mathfrak{l}\mid\mathfrak{N}} \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{l}-\mathrm{new}} = \Big(\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})^{\mathrm{old}}\Big)^{\perp}.$$

Son espacios $T_\mathfrak{p}$-invariantes ($\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$).

## Corolario

Existe una base ortogonal para $\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})^{\mathrm{new}}$ compuesta por autoformas para $T_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$ (*formas nuevas*).

# Formas nuevas

Si $f$ es autoforma,

$$C(\mathfrak{p}, f) = C(\mathfrak{o}_F, T_{\mathfrak{p}} f) = \lambda_{\mathfrak{p}}\, C(\mathfrak{o}_F, f) \qquad (\ \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}\ ).$$

Si $C(\mathfrak{o}_F, f) \neq 0$, podemos asumir $C(\mathfrak{o}_F, f) = 1$ (normalizada).

## Teorema (Multiplicidad uno)

Dado un ideal íntegro $\mathfrak{N}$ y dado un sistema (de autovalores) $\{\lambda_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}} \subset \mathbb{C}$, existe, a lo sumo, una forma nueva normalizada $f$ de nivel $\mathfrak{M} \mid \mathfrak{N}$ tal que $C(\mathfrak{p}, f) = \lambda_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$.

# Calculando $\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$

- Objetivo: hallar una base para el espacio $\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$.
- Si $F = \mathbb{Q}$, formas modulares elípticas:
  - el espacio $\mathcal{S}_2(N)$ se realiza en la cohomología de $X_0(N)$ (Eichler-Shimura);
  - si $N$ no es un cuadrado, las formas en $\mathcal{S}_2(N)^{\mathrm{new}}$ aparecen como combinaciones lineales de series *theta*.
- Si $[F:\mathbb{Q}] = n$, $f \in \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$ da lugar a una $n$-forma diferencial holomorfa $f(z_1, \ldots, z_n)\, dz_1 \cdots dz_n$ en $X_0(\mathfrak{N})$.
- $n > 1$ es un problema difícil ¿Hay otra manera?

La correspondencia de Jacquet-Langlands garantiza que estas formas también se pueden encontrar en la cohomología de otras variedades. En todo caso, alcanza con mirar variedades de dimensión 0 o 1.

# Contenidos

# Álgebras de cuaterniones

## Definición

Un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo $F$ ($\mathrm{car}(F) \neq 2$) es una $F$-álgebra $B$ con dos generadores $i, j$ que verifican

$$i^2 = a\ , \quad j^2 = b \quad \text{y} \quad ji = -ij$$

$a, b \in F^\times$, $k := ij$, $B = (a, b)_F$. Si $h \in B$, es raíz de

$$X^2 - \mathrm{trd}(h)\,X + \mathrm{nrd}(h) = X^2 - (h + \bar{h})\,X + \bar{h}h\ .$$

## Ejemplos

- $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$: $i = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$, $j = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, nrd = det y trd = Tr;
- $(-1, -1)_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{H}$.

# Álgebras de cuaterniones (cont.)

## Observación

Dadas $B/F$ y una extensión $K/F$, $B \otimes_F K$ es un álgebra de cuaterniones sobre $K$. $((-1,-1)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{H})$.

## Definición

- $B$ *ramifica en* $v$, si $B_v/\mathbb{Q}_v$ es de división ($v = p, \infty$);
- *discriminante*: $\mathrm{D}_B := \prod_{p \in \mathrm{Ram}(B)} \langle p \rangle$. $(\mathrm{D}_{(-1,-1)_{\mathbb{Q}}} = 2\mathbb{Z})$;
- $B$ es *indefinida*, si $B_\infty \simeq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
- $B$ es *definida*, si $B_\infty \simeq \mathbb{H}$.

## Teorema (Clasifición global)

Sobre un cuerpo de números, $\left[B/F\right] \leftrightarrow$ subconjuntos pares de $V^F$

# Ejemplos

| $B$ | $\mathrm{Ram}(B)$ | $\mathrm{D}_B$ | $B_\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(-1,-11)_{\mathbb{Q}}$ | $\{11,\infty\}$ | $11\cdot\mathbb{Z}$ | $\mathbb{H}$ |
| $(-1,-1)_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ | $\{\tau_1,\tau_2\}$ | $1$ | $B_{\tau_1}, B_{\tau_2} \simeq \mathbb{H}$ |
| $(5-w^2, 1-w^2)_{\mathbb{Q}(w)}$ | $\{\tau_1,\tau_3\}$ | $1$ | $B_{\tau_2} \simeq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ |

$$w^3 - w^2 - 8\,w + 7 \;=\; 0$$

$$\tau_1 \;:\; w \;\mapsto\; -2,781\ldots\;,$$

$$\tau_2 \;:\; w \;\mapsto\; 0,8621\ldots\;,$$

$$\tau_3 \;:\; w \;\mapsto\; 2,919\ldots$$

# Órdenes e ideales

## Definiciones

- Un *retículo (completo)* en $B$ es un $\mathbb{Z}$-módulo $I \subset B$ f.g. que contiene una base ($\mathbb{Q} \cdot I = B$);
- $x \in B$ es *íntegro*, si $\mathrm{nrd}(x), \mathrm{trd}(x) \in \mathbb{Z}$;
- un *orden* es un retículo $\mathcal{O}$ que es subanillo (con 1);
- $\mathcal{O}_{\mathrm{der}}(I) := \left\{ h \in B \ : \ I\,h \subset I \right\}$ es un orden;
- un *$\mathcal{O}$-ideal (a derecha)* es un retículo $I$ tal que $\mathcal{O}_{\mathrm{der}}(I) = \mathcal{O}$.

# Órdenes e ideales (cont.)

**Lema**

Todo orden $\mathcal{O} \subset B$ tiene asociado un ideal $\mathrm{drd}(\mathcal{O}) \subset F$ de manera que, si $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$, entonces $\mathrm{drd}(\mathcal{O}) \subset \mathrm{drd}(\mathcal{O}')$. En ese caso, $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$, si y sólo si $\mathrm{drd}(\mathcal{O}) = \mathrm{drd}(\mathcal{O}')$.

**Observación**

Existen órdenes maximales.

**Definición**

Un *orden de Eichler* es la intersección de dos órdenes maximales.

Si $\mathcal{O}$ es de Eichler,

$$\mathrm{drd}(\mathcal{O}) = \mathrm{D}_B \cdot \mathfrak{N} ,$$

$\mathfrak{N}$ es el *nivel* del orden y $(\mathrm{D}_B, \mathfrak{N}) = 1$.

# Ejemplos

- $B = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(F)$,

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{o}_F \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{o}_F \end{bmatrix} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathfrak{o}_F) \qquad (\ \mathcal{O}_+^\times = \Gamma_0(\mathfrak{N})\ );$$

- $B = (-1, -11)_{\mathbb{Q}}$, $\langle 1, i, j, k \rangle$ no es maximal:

| $\mathcal{O}$ | $\mathrm{D}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ |
|---|---|
| $\langle 1, i, j, k \rangle$ | $4^2\, 11^2$ |
| $\left\langle 1, i, j, \frac{1+i+j+k}{2} \right\rangle$ | $2^2\, 11^2$ |
| $\left\langle 1, i, \frac{1+j}{2}, \frac{i+k}{2} \right\rangle$ | $11^2$ |
| $\left\langle 1, i, \frac{1+k}{2}, \frac{i-j}{2} \right\rangle$ | $11^2$ |

## Clases de ideales

$$\mathcal{I}(\mathcal{O}) := \{ I \subset B \ : \ \mathcal{O}_{\text{der}}(I) = \mathcal{O} \text{ , invertible} \} \ .$$

Dados $I, J \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$, $I \sim J$, si existe $h \in B^\times$ tal que $I = h\,J$.

$$\mathrm{Cl}(\mathcal{O}) := B^\times \backslash \mathcal{I}(\mathcal{O}) \ .$$

En general, no es un grupo. $H(\mathcal{O}) := \#\mathrm{Cl}(\mathcal{O}) < \infty$.

### Teorema

Si $\mathcal{O}$ es de Eichler, $B_+^\times := \{ h \in B^\times \ : \ \mathrm{nrd}(h) \gg 0 \}$,

$$\mathrm{nrd} \ : \ B_+^\times \backslash \mathcal{I}(\mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathrm{Cl}^+(F) \ .$$

Si $B$ es indefinida, es una biyección (aproximación fuerte). Si $B$ es definida, $\mathrm{nrd} : \mathrm{Cl}(\mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathrm{Cl}^+(F)$.

# Contenidos

# Formas cuaterniónicas: $B$ indefinida

Sean $B/F$ un álgebra indefinida ($r = 1$) y $v_1, \ldots, v_n \in V_\infty^F$:

$$B_{v_1} \simeq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad B_{v_j} \simeq \mathbb{H} \quad (\ j > 1\ ).$$

El grupo $B_+^\times = \{\mathrm{nrd} \gg 0\}$ actúa en $\mathfrak{h}$ vía $\gamma \mapsto \gamma_\infty \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$.
Dadas $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, $\gamma_\infty = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$,

$$f\,|\gamma\,(z) = \frac{\det(\gamma_\infty)}{(cz+d)^2}\, f(\gamma_\infty \cdot z)\ .$$

# Formas cuaterniónicas: $B$ indefinida (cont.)

Dado un orden de Eichler $\mathcal{O} \subset B$ de nivel $\mathfrak{N}$, $\Gamma := \mathcal{O}_+^\times$. El cociente

$$X_0^B(\mathfrak{N}) := \Gamma \backslash \mathfrak{h}$$

es una curva compleja compacta (no hay cúspides) y conexa.

## Definición

$f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ es una *forma cuaterniónica de peso* $\underline{2}$ *para* $\mathcal{O}$, si

1. $f$ es holomorfa en $\mathfrak{h}$;
2. para $\gamma \in \Gamma$, $f|\gamma = f$.

Denotamos este espacio por $\mathcal{S}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{N})$.

# Operadores de Hecke

El espacio $\mathcal{S}_{\underline{2}}^{B}(\mathfrak{N})$ posee un producto interno y, para cada primo $\mathfrak{p} \nmid \mathrm{D}_B \cdot \mathfrak{N}$, operadores $T_{\mathfrak{p}} : \mathcal{S}_{\underline{2}}^{B}(\mathfrak{N}) \to \mathcal{S}_{\underline{2}}^{B}(\mathfrak{N})$ tales que

- $T_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{q}} = T_{\mathfrak{q}} T_{\mathfrak{p}}$ y
- $\langle T_{\mathfrak{p}} f, g \rangle = \langle f, T_{\mathfrak{p}} g \rangle$.

Si $\mathfrak{p} = \langle p \rangle$ con $p \gg 0$, entonces

$$T_{\mathfrak{p}} f \ := \sum_{i \in \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}} f\,|\pi_i \ + \ f\,|\pi_\infty \quad ,$$

donde $\pi_i, \pi_\infty \in \mathcal{O}$, $\mathrm{nrd}(\pi_i) = \mathrm{nrd}(\pi_\infty) = p$ y forman un sistema de representantes de

$$\Theta(\mathfrak{p}) \ := \ \Gamma \backslash \Big\{ \pi \in \mathcal{O}_+ \ : \ \langle \mathrm{nrd}(\pi) \rangle = \mathfrak{p} \Big\} \ .$$

# Formas cuaterniónicas: $B$ definida

Sea $B/F$ un álgebra definida $(r = 0)$. $B_{v_i} \simeq \mathbb{H}$, si $v_i \in V_\infty^F$ y no hay acción en $\mathfrak{h}$. Sea $\mathcal{O} \subset B$ un orden de Eichler de nivel $\mathfrak{N}$.

## Definición

Una *forma modular cuaterniónica de peso* $\underline{2}$ *para* $\mathcal{O}$ es una función $f : \mathcal{I}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}$ tal que $f(b\,I) = f(I)$ para todo $b \in B^\times$.
Denotamos este espacio $\mathcal{M}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{N})$.

## Observaciones

Sean $I \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$, $[I]$ la función carcterística de la clase.

- $[I] \in \mathcal{M}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{N})$;
- $\{[I_1], \ldots, [I_H]\}$ es base de $\mathcal{M}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{N})$.

# Operadores de Hecke

Dados $\mathfrak{p} \nmid D_B \cdot \mathfrak{N}$ e $I \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$,

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{p}}(I) := \left\{ J \in \mathcal{I}(\mathcal{O}) \,:\, J \subset I,\, \mathrm{nrd}(J) = \mathfrak{p}\,\mathrm{nrd}(I) \right\},$$
$$T_{\mathfrak{p}}[I] := \sum_{J \in \mathcal{T}_{\mathfrak{p}}(I)} [J].$$

- El espacio $\mathcal{M}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$ admite un producto interno respecto del cual los $T_{\mathfrak{p}}$ son autoadjuntos.
- Existe $e_0 \in \mathcal{M}_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$, autofunción simultánea para los $T_{\mathfrak{p}}$, con autovalor $\mathbb{N}\mathfrak{p} + 1$.
- $\mathcal{S}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{N}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{N}) \,:\, \langle f, e_0 \rangle = 0 \right\}$.

# La correspondencia de Jacquet-Langlands

## Teorema

Sea $B/F$ un álgebra de cuaterniones de discriminante $\mathrm{D}_B$ y sea $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{o}_F$ un ideal coprimo con $\mathrm{D}_B$. Entonces existe un morfismo inyectivo de módulos de Hecke

$$\mathcal{S}_{\underline{2}}^{B}(\mathfrak{N}') \hookrightarrow \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathrm{D}_B \cdot \mathfrak{N}')$$

cuya imagen consiste en las formas $f$ nuevas en los primos $\mathfrak{p} \mid \mathrm{D}_B$.

# La correspondencia de Jacquet-Langlands (cont.)

Sean $\mathfrak{N} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$), $B/F$ con $\mathrm{Ram}(B) \cap V_f^F = \{\mathfrak{p}\}$. Por J-L,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) &= \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{p}\mathfrak{q})^{\mathfrak{p}-\mathrm{new}} \oplus \mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{p}\mathfrak{q})^{\mathfrak{p}-\mathrm{old}} \\ &= \mathcal{S}_{\underline{2}}^{B}(\mathfrak{q}) \oplus \left(\iota_1\left(\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{q})\right) + \iota_{\mathfrak{p}}\left(\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{q})\right)\right) . \end{aligned}$$

Si $n = [F : \mathbb{Q}] = 1$ o 2, hay una única posibilidad. Si $n > 2$ hay muchas álgebras (ramificación en $\infty$).
Si, en cambio, $\mathfrak{N} = \mathfrak{p}^2$, no tenemos tantas opciones: debe ser $\mathrm{D}_B = 1$ y $\mathrm{Ram}(B) \subset V_\infty^F$. Si $n = 1$ es imposible; si $n = 2$, hay una única elección.

# La correspondencia de Jacquet-Langlands (cont.)

## Observación

- Si $B/F$ es indefinida, $f \in \mathcal{S}^B_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$ tiene asociada una $r$-forma diferencial holomorfa en la *variedad* $\mathcal{O}^\times_+ \backslash \mathfrak{h}^r$;
- si $B$ es totalmente definida, $f$ es una función en un *espacio finito*.

Hacer la elección más sencilla y eficiente posible, $r = 0$ o $1$:

- si $2 \mid n = [F : \mathbb{Q}]$, tomar $\mathrm{Ram}(B) = V^F_\infty$;
- si $2 \nmid n$, tomar $\mathrm{Ram}(B) = V^F_\infty \setminus \{v_1\}$ $(n > 2)$.

En estos casos, $\mathcal{S}_{\underline{2}}(\mathfrak{N}) \simeq \mathcal{S}^B_{\underline{2}}(\mathfrak{N})$.

# Método definido

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $B = (-1,-1)_F$, $\mathrm{Ram}(B) = V_\infty^F$.

- Si $\mathcal{O}_0(1)$ es maximal, $H(\mathcal{O}_0(1)) = 1$ y $\dim\big(\mathcal{S}_{\underline{2}}^B(1)\big) = 0$ (sobre $\mathbb{Q}$, $\mathcal{S}_4(1) = 0$);
- sobre $F$, $11 = \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2$ y $\mathcal{S}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{n}_1) = 0 = \mathcal{S}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{n}_2)$, también;
- pero $H(\mathcal{O}_0(\mathfrak{n}_1^2)) = 3$ y $\mathcal{S}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{n}_1^2) = \mathcal{S}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{n}_1^2)^{\mathrm{new}} \neq 0$.

# Método definido

$$\dim\left(\mathcal{S}_{\underline{2}}^{B}(\mathfrak{n}_1^2)\right) = 2$$

| $\mathbb{N}\,\mathfrak{p}$ | 4 | 5 | 9 | 19 | 19 | 29 | 29 | 31 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{\mathfrak{p}}(f)$ | $t$ | $-t$ | $-1$ | $4t$ | $-2$ | $-3$ | $-5t$ | $2t$ | $2t$ |

$(t^2 - 3 = 0)$.

$$T_{\mathfrak{p}_4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad T_{\mathfrak{p}_5} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T_{\mathfrak{p}_9} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Método definido

$$\dim\left(\mathcal{S}_{\underline{2}}^{B}(11)\right) = \dim\left(\mathcal{S}_{\underline{2}}^{B}(11)^{\text{new}}\right) = 3$$

| $\mathbb{N}\,\mathfrak{p}$ | 4 | 5 | 9 | 19 | 19 | 29 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{\mathfrak{p}}(f)$ | $0$ | $1$ | $-5$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a_{\mathfrak{p}}(g)$ | $t$ | $-t-1$ | $-t+3$ | $-4$ | $-4$ | $2t-4$ | $2t-4$ |

$(t^2 - t - 8 = 0)$.

| 31 | 31 |
|---|---|
| $7$ | $7$ |
| $-t+1$ | $-t+1$ |

$$T_{\mathfrak{p}_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad T_{\mathfrak{p}_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Método indefinido

$F = \mathbb{Q}(w)$, $B = (5 - w^2, 1 - w^2)_F$ ramifica en dos de los tres lugares reales. Sea $\mathcal{O}$ un orden de Eichler de nivel $\mathfrak{n}$.

- Si $\mathrm{Cl}^+(F) = \{1, \mathfrak{a}\}$, existe $J_\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$ con $\mathrm{nrd}(J_\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.
- $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$, $\mathcal{O}_\mathfrak{a} = \mathcal{O}_{\mathrm{izq}}(J_\mathfrak{a})$.
- $\Gamma_1 = \mathrm{inc}_\infty(\mathcal{O}_{1,+}^\times)$, $\Gamma_\mathfrak{a} = \mathrm{inc}_\infty(\mathcal{O}_{\mathfrak{a},+}^\times)$ actúan en $\mathfrak{h}$.

$$X_0^B(\mathfrak{n}) = \Gamma_1 \backslash \mathfrak{h} \sqcup \Gamma_\mathfrak{a} \backslash \mathfrak{h} \; .$$

Por Eichler-Shimura,

$$\mathcal{S}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{n}) \oplus \overline{\mathcal{S}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{n})} = \mathrm{H}^1\big(X_0^B(\mathfrak{n}), \mathbb{C}\big) = \mathrm{H}^1\big(X(\Gamma_1), \mathbb{C}\big) \oplus \mathrm{H}^1\big(X(\Gamma_\mathfrak{a}), \mathbb{C}\big) \; .$$

# Método indefinido

Sobre $F$, $31 = \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2$, con $\mathbb{N}(\mathfrak{n}_1) = 31$, $\mathbb{N}(\mathfrak{n}_2) = 31^2$.

$$\dim\left(\mathcal{S}^B_{\underline{2}}(\mathfrak{n}_1)\right) = 86 \quad , \quad \dim\left(\mathcal{S}^B_{\underline{2}}(\mathfrak{n}_2)\right) = 2722 \, ,$$
$$\dim\left(\mathcal{S}^B_{\underline{2}}(31)^{\text{new}}\right) = 81602 \, .$$

$\mathcal{S}^B_{\underline{2}}(\mathfrak{n}_1)$ se descompone como suma de subespacios Hecke-irreducibles de dimensiones 1, 1, 2, 2, 2, 8, 24 y 46.

| $\mathbb{N}\,\mathfrak{p}$ | 5 | 7 | 8 | 11 | 13 | 17 | 23 | 23 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_\mathfrak{p}(f_1)$ | $-3$ | $4$ | $3$ | $0$ | $2$ | $-3$ | $5$ | $-8$ | $3$ |
| $a_\mathfrak{p}(f_2)$ | $-3$ | $-4$ | $3$ | $0$ | $-2$ | $3$ | $-5$ | $-8$ | $-3$ |

¡Muchas gracias!