Homotopías y poliedros

24-XII-2020

Índice

Capítulo 1

Homotopías

1.1 Definiciones y preliminares

> "Many of the computable functors, because they are computable, are invariant under continuous deformation. Therefore they cannot distiguish between spaces (or maps) that can be continuously deformed from one to the other; the most that can be hoped for from such functors is that they characterize the space (or map) up to continuous deformation."

Un *par topológico* es un par de espacios (X', X) junto con una función continua $f : X \to X'$ entre ellos (un par topológico es una función continua). Un morfismo de pares de $f : X \to X'$ en $g : Y \to Y'$ consiste en un par de funciones continuas $h : X \to Y$ y $h' : X' \to Y'$ tales que $h' \circ f = g \circ h$. Nos concentraremos en pares (X, A), donde $A \subset X$ es un subespacio (y $f : A \to X$ es la inclusión).

Sean (X, A) e (Y, B) dos pares topológicos ($A \subset X$ y $B \subset Y$) y sean $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ morfismos de pares que coinciden en algún subespacio $X' \subset X$ (independiente de A y de B). Decimos que f_0 y f_1 son *homotópicas relativas a* X', si existe un morfismo de pares

$$F : (X \times [0,1] , A \times [0,1]) \to (Y, B)$$

(es decir, una homotopía $X \times [0,1] \to Y$ tal que $F(A \times [0,1]) \subset B$ (los puntos de A, que van a parar a B, permanecen en B durante la deformación)) tal que

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f_0(x) \ , \\ F(x,1) &= f_1(x) \quad \text{y} \\ F(x,t) &= f_0(x) = f_1(x) \quad \text{si } x \in X' \ . \end{aligned}$$

Denotamos esta relación entre f_0 y f_1 por $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$ y decimos que F es una homotopía (de pares) relativa a X' de f_0 en f_1.

Dado $t \in [0,1]$, sea $h_t : (X, A) \to (X, A) \times [0,1]$ la función

$$h_t(x) = (x, t) \ .$$

Si F es una homotopía relativa a X' de f_0 en f_1, entonces

$$\begin{aligned} F \circ h_0 &= f_0 \ , \\ F \circ h_1 &= f_1 \quad \text{y} \\ F \circ h_t|_{X'} &= f_0|_{X'} \;=\; f_1|_{X'} \ , \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$. Una *familia a un parámetro* es una familia de funciones $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ parametrizada por el intervalo unitario (o $\mathbb{R}$, o...). En el contexto de pares topológicos, se requiere que, para todo t, la función f_t sea un morfismo (continuo) de pares $f_t : (X,A) \to (Y,B)$ (dominio y codominio independientes de t). Una familia a un parámetro $\{f_t : (X,A) \to (Y,B)\}_{t\in[0,1]}$ se dice *continua*, si el morfismo de pares

$$\big((x,t) \mapsto f_t(x)\big) \,:\, (X \times [0,1]\,, A \times [0,1]) \to (Y,B)$$

es continuo. En tal caso, la aplicación $F(x,t) = f_t(x)$ define una homotopía de f_0 en f_1. Toda familia a un parámetro tiene asociada una función

$$(t \mapsto f_t) \,:\, [0,1] \;\to\; C\left((X,A),(Y,B)\right) \ .$$

Si $[0,1]$ tiene la topología usual y a $C\left((X,A),(Y,B)\right)$ se le da la topología compacto abierta, entonces la función asociada a una familia a un parámetro continua es continua. Recíprocamente, si X es localmente compacto Hausdorff, entonces dada una función continua $\phi :\, [0,1] \to C\left((X,A),(Y,B)\right)$, la familia a un parámetro $\{\phi(t)\}_t$ es continua y define una homotopía de $\varphi(0)$ en $\varphi(1)$.

Observación 1.1.1. La relación de homotopía relativa a un subespacio es de una relación de equivalencia. Si $f :\, (X,A) \to (Y,B)$ es continua y $X' \subset X$ es un subespacio, entonces la homotopía constante $F(x,t) = f(x)$ realiza $f \simeq f \operatorname{rel} X'$; si $f_0, f_1 :\, (X,A) \to (Y,B)$ y $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$ y F es una homotopía de f_0 en f_1 relativa a X', entonces la homotopía inversa $(x,t) \mapsto F(x, 1-t)$ realiza $f_1 \simeq f_0 \operatorname{rel} X'$; finalmente, si $f_2 :\, (X,A) \to (Y,B)$ es un tercer morfismo de pares y G es una homotopía de f_1 en f_2 relativa a X', entonces la función

$$H(x,t) \;=\; \begin{cases} F(x,2t) & \text{si } t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & \text{si } t \ge 1/2 \end{cases}$$

es continua, por ser continua en cada uno de los cerrados en donde es definida, verifica $F(A \times [0,1]) \subset B$ y es una homotopía de f_0 en f_2 relativa a X'.

Dados pares (X,A) e (Y,B) definimos el *conjunto de clases de homotopía de* (X,A) *en* (Y,B) *relativas a* X' como el conjunto de clases de equivalencia respecto de esta relación. Denotamos este conjunto por $[X,A;Y,B]_{X'}$ y la clase de un morfismo $f : (X,A) \to (Y,B)$ por $\big[f\big]_{X'}$.

Observación 1.1.2. Sean $f_0, f_1 :\, (X,A) \to (Y,B)$ y sean $g_0, g_1 :\, (Y,B) \to (Z,C)$. Sea $X' \subset X$ y sea $Y' \subset Y$. Supongamos que $f_0|_{X'} = f_1|_{X'}$, que $g_0|_{Y'} = g_1|_{Y'}$ y que $f_0(X') = f_1(X') \subset Y'$. Si $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$ y $g_0 \simeq g_1 \operatorname{rel} Y'$ entonces

$$g_0 \circ f_0 \;\simeq\; g_1 \circ f_1 \quad \operatorname{rel} X' \ .$$

Si F realiza la homotopía entre f_0 y f_1 y G realiza la homotopía entre g_0 y g_1, entonces

$$g_0 \circ F \,:\, (X \times [0,1]\,, A \times [0,1]) \,\to\, (Y, B) \,\to\, (Z, C)$$

es una homotopía de $g_0 \circ f_0$ en $g_0 \circ f_1$ relativa a X' y

$$G \circ (f_1 \times \mathsf{id}_{[0,1]}) \,:\, (X \times [0,1]\,, A \times [0,1]) \,\to\, (Y \times [0,1]\,, B \times [0,1]) \,\to\, (Z, C)$$

es una homotopía de $g_0 \circ f_1$ en $g_1 \circ f_1$ relativa a $f_1^{-1}(Y')$. Pero $f_1(X') \subset Y'$ implica que esta homotopía también es relativa a X'. Por la observación **??**, la relación de homotopía es transitiva y se deduce que $g_0 \circ f_0$ es homotópica a $g_1 \circ f_1$ relativa a X'.

Teniendo en cuenta estas observaciones, podemos definir la *categoría homotópica de pares* como la categoría cuyos objetos son pares de espacios topológicos, al igual que en la categoría de pares, (X, A), (Y, B), pero cuyos morfismos son las clases de homotopía de morfismos de pares relativas al conjunto vacío, $[X, A; Y, B] = [X, A; Y, B]_\varnothing$. La clase de un morfismo de pares relativa al conjunto vacío la denotamos simplemente $\big[f\big]$. Diremos que un diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \longrightarrow & (Y, B) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (X', A') & \longrightarrow & (Y' B') \end{array}$$

conmuta módulo homotopías, si el diagrama correspondiente en la categoría homotoópica de pares es conmutativo. Una *equivalencia homotópica* es un morfismo de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ tal que su clase de homotopía $\big[f\big] \in [X, A; Y, B]$ sea un isomorfismo en la categoría homotópica, es decir, existiese $g : (Y, B) \to (X, B)$ tal que

$$\begin{aligned} \big[g \circ f\big] \;&=\; \big[g\big] \circ \big[f\big] \;=\; \big[\mathsf{id}_{(X,A)}\big] \quad \text{y} \\ \big[f \circ g\big] \;&=\; \big[f\big] \circ \big[g\big] \;=\; \big[\mathsf{id}_{(Y,B)}\big] \;. \end{aligned}$$

También diremos que $\big[f\big]$ es una equivalencia homotópica y que g, o que $\big[g\big]$ es su *inversa homotópica*. Decimos que dos pares (X, A) e (Y, B) *tienen el mismo tipo homotópico*, si existe una equivalencia homotópica entre ellos, es decir, si son isomorfos en la categoría homotópica.

Un espacio topológico X se dice *contráctil*, si la identidad id_X es homotópica a una función $X \to X$ constante, es decir, si existe $x_0 \in X$ tal que $\mathsf{id}_X \simeq (x \mapsto x_0)$. Una *contracción* de X en $x_0 \in X$ es una homotopía de F de id_X en a función constante $x \mapsto x_0$.

Observación 1.1.3. Sea Y un espacio topológico contráctil. Sea $y_0 \in Y$ y sea $c : Y \to Y$ la función constante $c(y) = y_0$. Supongamos que $\mathsf{id}_Y \simeq c$. Si $f_0, f_1 : X \to Y$ son funciones continuas, entonces

$$\begin{aligned} f_0 \;&=\; \mathsf{id}_Y \circ f_0 \;\simeq\; c \circ f_0 \quad \text{y} \\ f_1 \;&=\; \mathsf{id}_Y \circ f_1 \;\simeq\; c \circ f_1 \;. \end{aligned}$$

Pero $c \circ f_0 = c \circ f_1$. Por transitividad, $f_0 \simeq f_1$. En definitiva, el conjunto $[X;Y]$ consiste en una única clase cualquiera sea el espacio X, dos funciones continuas de X en Y son homotópicas.

Si definimos $\tilde{c} : Y \to \{y_0\}$ (si identificamos c con la función cuyo codominio es el conjunto puntual $\{y_0\}$), entonces $\tilde{c}$ es una equivalencia homotópica: su inversa homotópica está dada por la inclusión $\iota : \{y_0\} \to Y$. Pero entonces Y tiene el tipo homotópico del punto $\{y_0\}$. En particular,

$$[X;Y] \simeq [X;\{y_0\}]$$

vía $\big[f\big] \mapsto \big[\tilde{c}\big] \circ \big[f\big] = \big[\tilde{c} \circ f\big]$. Pero el conjunto $[X;\{y_0\}]$ posee una única clase, la clase de la única función $X \to \{y_0\}$. Concluimos, de esta manera también, que todo par de funciones $f_0, f_1 : X \to Y$ cuyo codominio es contráctil son homotópicas.

Notemos que la noción de ser contráctil equivale a tener el tipo homotópico del punto: ya vimos que $\mathsf{id}_{\{y_0\}} = \tilde{c} \circ \iota$ y que $\mathsf{id}_Y \simeq \iota \circ \tilde{c}$, con lo que Y y el conjunto puntual $\{y_0\}$ tienen el mismo tipo homotópico. Recíprocamente, si Y tiene el tipo homotópico de un conjunto puntual $\{y_0\}$, entonces existen $f : Y \to \{y_0\}$ y $g : \{y_0\} \to Y$ tales que $f \circ g = \mathsf{id}_{\{y_0\}}$ (pues no hay otra función $\{y_0\} \to \{y_0\}$) y $g \circ f \simeq \mathsf{id}_Y$. En particular, la segunda equivalencia implica que Y es contráctil.

La existencia de homotopías está relacionada con la posibilidad de extender funciones.

Teorema 1.1.4. *Sea $p_0 \in \mathrm{S}^n$ un punto arbitrario de la esfera de dimensión n ($n \geq 1$, $n \geq 0$) y sea $f : \mathrm{S}^n \to Y$ una función continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) f es homotópica a una constante;

(ii) f se puede extender de manera continua al disco D^{n+1};

(iii) f es homotópica a una constante relativa al punto $\{p_0\}$.

La última afirmación es equivalente a que $f \simeq (x \mapsto p_0)$ vía una homotopía que deje quieto el punto p_0.

Demostración. (i) implica (ii): sea F una homotopía de f en una función constante $c : \mathrm{S}^n \to Y$ y sea $y_0 \in Y$ tal que $c(x) = y_0$ para todo $x \in \mathrm{S}^n$. Sea $f' : \mathrm{D}^{n+1} \to y$ la función

$$f'(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } 0 \leq |x| \leq 1/2 \\ F\Big(\dfrac{x}{|x|}, 2 - 2|x|\Big) & \text{si } 1/2 \leq |x| \leq 1 \end{cases} .$$

Entonces f' está bien definida y es continua en D^{n+1}. Además, como $F(x,0) = f(x)$ para $x \in \mathrm{S}^n$, concluimos que f' es una extensión continua de f al disco.

(ii) implica (iii): Si $f' : \mathrm{D}^{n+1} \to Y$ es una extensión continua de f, la expresión

$$F(x,t) = f'((1-t)\,x)$$

define una homotopía de f en la función constante $x \mapsto f'(0)$. Pero esta homotopía no es necesariamente relativa a un punto de la esfera. Entonces, dado $p_0 \in \mathrm{S}^n$, sea $F : \mathrm{S}^n \times [0,1] \to Y$ la función

$$F(x,t) \;=\; f'((1-t)\,x + t\,p_0)\ .$$

Esta función es continua, porque f' lo es, y verifica:

$$\begin{aligned} F(x,0) \;&=\; f'(x)\ , \\ F(x,1) \;&=\; f'(p_0) \quad \text{y} \\ F(p_0,t) \;&=\; f'(p_0)\ . \end{aligned}$$

Entonces, como $f'|_{\mathrm{S}^n} = f$, F es una homotopía de f en la función constante $x \mapsto f(p_0)$ relativa a $\{p_0\}$. □

Observación 1.1.5. De la observación 1.1.3 y del teorema 1.1.4, se deduce que toda función de S^n en un espacio contráctil admite una extensión continua al disco D^{n+1}.

1.2 Retracciones

Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subespacio. Se dice que A es un *retracto de* X, si existe $r : X \to A$, continua, tal que $r \circ \iota_A = \mathsf{id}_A$. Se dice que A es un *retracto débil de* X, si existe $r : X \to A$, continua, tal que $r \circ \iota_A \simeq \mathsf{id}_A$. En el primer caso, decimos que r es una *retracción* y, en el segundo, que es una *retracción débil.* En este segundo caso, no se requiere que exista una homotopía reltiva a A de $r \circ \iota_A$ en id_A, sólo que exista alguna homotopía. En otras palabras, $A \subset X$ es un retracto de X, si la inclusión $\iota_A : A \to X$ admite una inversa a izquierda en la categoría de espacios topológicos y es un retracto débil de X, si la inclusión admite una inversa a izquierda en la categoría homotópica.

Un poco más en general, decimos que una función $r : X \to Y$ es una retracción, si admite una inversa a derecha, una función $j : Y \to X$ tal que $r \circ j = \mathsf{id}_Y$ (y decimos que Y es un retracto de X, si r es la inversa a izquierda de alguna función $Y \to X$). Análogamente, decimos que la función r es una retracción débil, si admite una inversa a derecha en la categoría homotópica, es decir, existe $j : Y \to X$ y una homotopía $r \circ j \simeq \mathsf{id}_Y$.

Sean X e Y espacios topológicos y sea $A \subset X$ un subespacio. Decimos que el par (X,A) *tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a* Y, si, dadas $g : X \to Y$ y $G : A \times [0,1] \to Y$ tal que

$$G(x,0) \;=\; g(x) \quad \text{para todo } x \in A\ ,$$

existe $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que

$$\begin{aligned} F(x,0) \;&=\; g(x) \quad \text{para todo } x \in X \quad \text{y} \\ F|_{A\times[0,1]} \;&=\; G\ . \end{aligned}$$

En términos de diagramas, (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a Y, si para todo diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[dd, hook] & & A \times [0,1] \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd, hook] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, hook] & & X \times [0,1] \arrow[ul, dotted, "F"']
\end{tikzcd}$$

con el triángulo por encima de la diagonal conmutativo, existe $F : X \times [0,1] \to Y$ que hace conmutar a los triángulos por debajo de la diagonal.

Observación 1.2.1. Si (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a un espacio Y y $f_0, f_1 : A \to Y$ son homotópicas (en A), entonces f_0 tiene una extensión continua a X, si y sólo si existe una extensión continua de f_1. Si $g : X \to Y$ es una extensión de f_0 y $G : A \times [0,1] \to Y$ es una homotopía en A de $f_0 = g|_A$ en f_1, entonces existe una "extensión" de G, F; $X \times [0,1] \to Y$, tal que $F(x,0) = g(x)$ para $x \in X$ y $F(x,t) = G(x,t)$ para todo $x \in A$. En particular, si $x \in A$, $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$, con lo que $x \mapsto F(x,0)$ es la extensión g de f_0 y $x \mapsto F(x,1)$ es una extensión de f_1 a todo el espacio X.

De esto se deduce que, si (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a Y, entonces el problema de determinar si una función $A \to Y$ se puede extender a X es un problema en la categoría homotópica.

En general, un morfismo $f : X' \to X$ se dice que es una *cofibración*, si dados un objeto arbitrario Y y morfismos $g : X \to Y$ y $G : X' \times [0,1] \to Y$ tales que

$$g \circ f(x') = G(x', 0) ,$$

es decir, $g \circ (f \times \mathsf{id}_{\{0\}}) = G \circ \iota_{X' \times \{0\}}$, existe $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que $F(x,0) = g(x)$ para todo $x \in X$ y $F(f(x'), t) = G(x', t)$ para todo $x' \in X'$ y $t \in [0,1]$. Dicho de otra manera, para *todo* diagrama

$$\begin{tikzcd}
X' \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "f \times \mathsf{id}_{\{0\}}"'] & & X' \times [0,1] \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd, "f \times \mathsf{id}_{[0,1]}"] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, hook] & & X \times [0,1] \arrow[ul, dotted, "F"']
\end{tikzcd}$$

cuyo triángulo encima de la diagonal sea conmutativo, existe una F tal que los triángulos inferiores también conmuten. En estos términos, la inclusión $\iota_A : A \to X$ es una cofibración, si y sólo si (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a cualquier espacio.

Teorema 1.2.2. *Sea $A \subset X$ un subespacio. Si (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a A, entonces A es un retracto de X, si sólo si es un retracto débil.*

Demostración. Sea $r : X \to A$ tal que $r \circ \iota_A \simeq \mathsf{id}_A$ y sea $G : A \times [0,1] \to A$ una homotopía de $r \circ \iota_A$ en id_A. Si (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a A, entonces existe $F : X \times [0,1] \to A$ tal que

$$\begin{aligned} F(\iota_A(x'), t) &= G(x', t) \quad \text{y} \\ F(x, 0) &= r(x) \end{aligned}$$

para todo $x' \in A$ y todo $x \in X$. Sea $r' : X \to A$ la función continua $r'(x) = F(x, 1)$. Entonces, por un lado, F es una homotopía de r en r' definida en X y, por otro,

$$r' \circ \iota_A(x') = F(\iota_A(x'), 1) = G(x', 1) = \mathsf{id}_A(x') \ ,$$

con lo que r' es una retracción de X en A. □

Notemos que la retracción r' obtenida en la demostración de 1.2.2 es homotópica a la retracción débil r.

1.3 Deformaciones

Sea X un espacio topológico. En la sección anterior consideramos subespacios $A \subset X$ tales que la inclusión $\iota_A : A \to X$ admite una inversa a izquierda en la categoría de espacios topológicos y funciones continuas, o bien en la categoría homotópica. Dado un subespacio $X' \subset X$, una *deformación* de X' en (dentro de) X es una homotopía $D : X' \times [0,1] \to X$ tal que $D(x', 0) = x'$ para todo $x' \in X'$. Si $D\big(X' \times \{1\}\big) \subset A$ para cierto subespacio A de X, se dice que X' es *deformable en X en A*. Si $X' = X$ se dice, simplemente, que X es deformable en A.

Observación 1.3.1. Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subespacio. Entonces X es deformable en A, si y sólo si la inclusión $\iota_A : A \to X$ admite una inversa homotópica *a derecha*. Veamos que esto es así. Si existe $f : X \to A$ y una homotopía $F : X \times [0,1] \to X$ tal que

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= x \quad \text{y} \\ F(x, 1) &= \iota_A \circ f(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ (existe una inversa a derecha de ι_A en la categoría homotópica), entonces F es una deformación de X (dentro de X) y

$$F\big(X \times \{1\}\big) = \iota_A \circ f(X) \subset A$$

con lo que, por definición, X es deformable en A. Recíprocamente, si X es deformable en A y $D : X \times [0,1] \to X$ es una deformación de X (una homotopía que cumple

$D(x,0) = x$ en X) tal que $D\big(X \times \{1\}\big) \subset A$, entonces existe una única función (de conjuntos) $f : X \to A$ tal que

$$\iota_A \circ f(x) \;=\; D(x,1)$$

para todo $x \in X$. Como A es un subespacio, f es continua. Como D es una deformación de X, D es una homotopía de la identidad id_X en $\iota_A \circ f$, es decir, ι_A admite una inversa a derecha en la categría homotópica.

En la sección anterior consideramos dos tipos de retractos: aquellos subespacios $A \subset X$ para los cuales existe una función $r : X \to A$ tal que $r \circ \iota_A = \mathsf{id}_A$ y aquellos subespacios para los cuales existe una función $r : X \to A$ tal que $r \circ \iota_A \simeq \mathsf{id}_A$. En esta sección, dado un subespacio $A \subset X$, nos preguntamos si existe una función $f : X \to A$ tal que $\iota_A \circ f \simeq \mathsf{id}_X$, es decir, si la inclusión $\iota_A : A \to X$ admite una inversa homotópica a derecha. Notemos que el problema de la existencia de inversas a derecha de ι_A en la categoría de espacios topológicos y funciones continuas es trivial, ya que, si $\iota_A \circ f = \mathsf{id}_X$, entonces ι_A es sobre y $A = X$.

Dado un subespacio $A \subset X$, se dice que A es un *retracto por deformación débil de* X, si ι_A es una equivalencia homotópica: esto quiere decir que existen $f, r : X \to A$ tales que $\iota_A \circ f \simeq \mathsf{id}_X$ y $r \circ \iota_A \simeq \mathsf{id}_A$ (necesariamente, $r \simeq f$). Según lo mencionado en la observación 1.3.1, $\iota_A \circ f \simeq \mathsf{id}_X$ equivale a que X sea deformable en A y $r \circ \iota_A \simeq \mathsf{id}_A$ significa que A es un retracto débil de X. (Un retracto por deformación débil es un retracto débil que es, además, deformación).

Sea $A \subset X$ un subespacio. Si A es un retracto de X (existe $r : X \to A$ tal que $r \circ \iota_A = \mathsf{id}_A$) y la inclusión admite una inversa homotópica a derecha, $f : X \to A$, entonces decimos que A es un *retracto por deformación de* X. Notemos que ι_A es una equivalencia homotópica (y, necesariamente, $r \simeq f$), con lo cual todo retracto por deformación es un retracto por deformación débil. (Un retracto por deformación es un retracto que es deformación).

Un *retracto por deformación fuerte* de un espacio X es un subespacio $A \subset X$ que es retracto y existe una función $f : X \to A$ tal que $\iota_A \circ f \simeq \mathsf{id}_X \operatorname{rel} A$.

para el cual existe una retracción $r : X \to A$ tal que $\iota_A \circ r \simeq \operatorname{rel} A$. En particular, tomando $f = r$, se ve que todo retracto por deformación fuerte es un retracto por deformación.

En estas definiciones, podemos asumir que $r = f$. En el caso de la primera definición, si $\iota_A \circ f \simeq \mathsf{id}_X$ y $r \circ \iota_A \simeq \mathsf{id}_A$, entonces

$$\begin{aligned} \big[\iota_A\big]\,\big[f\big] \;&=\; \big[\mathsf{id}_X\big] \quad \text{y} \\ \big[r\big]\,\big[\iota_A\big] \;&=\; \big[\mathsf{id}_A\big]\;. \end{aligned}$$

Componiendo y cancelando, se deduce que $\big[f\big] = \big[r\big]$, es decir, $f \simeq r$. Por lo tanto, r verifica $\iota_A \circ r \simeq \mathsf{id}_X$, también. Con respecto a la segunda definición el mismo argumento muestra que la retracción r verifica la condición sobre f. En la definición de retracto por deformación fuerte, el argumento debe ser distinto, pues la relación de homotopía se asume relativa al subespacio A. Aun así, si

$$\begin{aligned} \iota_A \circ f &\simeq \mathsf{id}_X \operatorname{rel} A \quad \text{y} \\ r \circ \iota_A &= \mathsf{id}_A \ , \end{aligned}$$

entonces r verifica

$$\iota_A \circ r = \iota_A \circ r \circ \mathsf{id}_X \simeq_{(\operatorname{rel} A)} \iota_A \circ r \circ \iota_A \circ f = \iota_A \circ f \ .$$

Pero entonces r verifica la condición sobre f y podemos asumir que $f = r$ en este caso también.

Si en lugar de concentrarnos en las propiedades de un espacio miramos lo que pasa con las funciones con propiedades como las de la retracción de la inclusión,...

En la sección anterior consideramos dos tipos de retracciones: aquellas que admiten una inversa continua a derecha y aquellas que admiten una inversa homotópica a derecha, aquellas que son, respectivamente, inversas a izquierda de la inclusión de un subespacio en la categoría de espacios topológicos y funciones continuas y aquellas que son inversas a izquierda de la inclusión en la categoría homotópica.

Corolario 1.3.1. *Si (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías con erspecto a A, entonces A es un retracto por deformación débil de X, si y sólo si es un retracto por deformación.*

Demostración. Este corolario es consecuencia del teorema 1.2.2. □

Teorema 1.3.2. *Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subespacio cerrado tal que el par $(X \times [0,1], L)$, donde*

$$L = (X \times \{0\}) \cup (A \times [0,1]) \cup (X \times \{1\}) \ ,$$

tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a X. Entonces A es un retracto por deformación de X, si y sólo si es un retracto por deformación fuerte.

Demostración. Supongamos que A es un retracto por deformación de X. Sea $r : X \to A$ una retracción de X en A y sea $F : X \times [0,1] \to X$ una homotopía de id_X en $\iota_A \circ r$. Lo que hay que ver es que existe una homotopía relativa a A. Sea $G : L \times [0,1] \to X$ la función definida por

$$\begin{aligned} G((x,0),t') &= x \quad \text{en } (X \times \{0\}) \times [0,1] \ , \\ G((x,t),t') &= F(x,(1-t')\,t) \quad \text{en } (A \times [0,1]) \times [0,1] \quad \text{y} \\ G((x,1),t') &= F(\iota_A \circ r(x), 1-t') \quad \text{en } (X \times \{1\}) \times [0,1] \ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como A es cerrado en X, G es continua. Ahora bien, si $(x,t) \in L$, a tiempo $t' = 0$,

$$G((x,t),0) = F(x,t) \ ,$$

pues

$$\begin{aligned} G((x,0),0) &= x = F(x,0) \ , \\ G((x,t),0) &= F(x,t) \quad \text{y} \\ G((x,1),0) &= F(\iota_A \circ r(x),1) = (\iota_A \circ r) \circ (\iota_A \circ r)(x) \\ &= \iota_A \circ r(x) = F(x,1) \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Sea $f_0 = G|_{L\times\{0\}}$ y sea $f_1 = G|_{L\times\{1\}}$. Entonces las igualdades (1.2), implican que $g : (X \times [0,1]) \times \{0\}$ definida por

$$g((x,t),0) = F(x,t)$$

es una extensión de f_0. Por la propiedad de extensión de homotopías (ver la observación 1.2.1), f_1 admite una extensión a $(X \times [0,1]) \times \{1\}$. Sea

$$G' : (X \times [0,1]) \times \{1\} \to X$$

una extensión de $f_1 = G|_{L\times\{1\}}$ y sea

$$H : X \times [0,1] \to X$$

La función

$$H(x,t) = G'((x,t),1) \ .$$

Entonces H verifica

$$\begin{aligned} H(x,0) &= G'((x,0),1) = G((x,0),1) = x \quad \text{si } x \in X \ , \\ H(x,1) &= G'((x,1),1) = G((x,1),1) \\ &= F(\iota_A \circ r(x),0) = \iota_A \circ r(x) \quad \text{si } x \in X \quad \text{y} \\ H(x,t) &= G'((x,t),1) = G((x,t),1) \\ &= F(x,0) = x \quad \text{si } x \in A,\, t \in [0,1] \ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Entonces H es una homotopía de id_X en $\iota_A \circ r$. relativa a A. □

1.4 El cilindro de un morfismo

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sea Z_f el espacio que se obtiene como cociente de $(X \times [0,1]) \sqcup Y$ por la relación $(x,1) \sim f(x)$. Este espacio se denomina *cilindro de f*. Si $[x,t]$ denota la clase de un punto $(x,t) \in X \times [0,1]$ e $[y]$ denota la clase de un punto $y \in Y$, entonces las funciones $i : X \times [0,1]\, \mathrm{Z}_f$ y $j : Y \to \mathrm{Z}_f$ dadas por

$$\begin{aligned} i(x) &= [x,0] \quad \text{y} \\ j(y) &= [y] \end{aligned}$$

realizan X e Y como subespacios de Z_f, es decir, podemos identificar los puntos de X con las clases $[x,0]$ y los puntos de Y con las clases $[y]$ en el cilindro. La función $r:\mathrm{Z}_f\to Y$ dada por

$$\begin{cases} r[x,t] \;=\; f(x) \quad \big(\equiv [f(x)]\big) & \text{si } x\in X,\ t\in[0,1] \quad \text{y} \\ & \\ r[y] \;=\; y \quad \big(\equiv [y]\big) & \text{si } y\in Y \end{cases} ,$$

es una retracción del subespacio $j:Y\to\mathrm{Z}_f$, pues

$$r\circ j \;=\; \mathsf{id}_Y \;.$$

Notemos que r actúa como una proyección, aplastando el "cuadrado" $X\times[0,1]$ en el subespacio $f(X)\subset Y$, siguiendo las rectas $\{(x,t)\, t\in[0,1]\}$ hasta $t=1$.

Teorema 1.4.1. *Sea $f:X\to Y$ una función continua. Sea Z_f el cilindro de f y sean $i:X\to\mathrm{Z}_f$ y $j:Y\to\mathrm{Z}_f$ los embeddings $i(x)=[x,0]$ y $j(y)=[y]$. Existe un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{Z}_f \arrow[dl, "r"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

tal que (i) $r\circ j=\mathsf{id}_Y$, (ii) $j\circ r\simeq \mathsf{id}_{\mathrm{Z}_f}\operatorname{rel}Y$ *y* (iii) *el embedding $i:X\to\mathrm{Z}_f$ es una cofibración.*

Demostración. En cuanto a la existencia del diagrama conmutativo y a la afirmación *(i)*, la demostración está contenida en los comentarios previos al enunciado.

Sea $F:\mathrm{Z}_f\times[0,1]\to\mathrm{Z}_f$ la homotopía

$$\begin{cases} F([x,t],t') \;=\; [x,(1-t')\,t+t'] \\ F([y],t') \;=\; [y] \end{cases} .$$

Entonces F es una homotopía de $\mathsf{id}_{\mathrm{Z}_f}$ en $j\circ r\operatorname{rel}Y$. Notemos que F es continua porque está inducida por la homotopía

$$\begin{cases} \tilde F((x,t),t') \;=\; (x,(1-t')\,t+t') \\ \tilde F(y,t') \;=\; y \end{cases} .$$

El diagrama

$$\begin{tikzcd} \big((X\times[0,1])\sqcup Y\big)\times[0,1] \arrow[r, "\tilde F"] \arrow[d] & (X\times[0,1])\sqcup Y \arrow[d] \\ \mathrm{Z}_f\times[0,1] \arrow[r, "F"'] & \mathrm{Z}_f \end{tikzcd} ,$$

cuyas flechas verticales son las proyecciones canónicas en los cocientes, conmuta y, como $\tilde{F}$ es continua, también lo es F.

En cuanto a *(iii)*, sean $g : \mathrm{Z}_f \to W$ y $G : X \times [0,1] \to W$ tales que el triángulo superior en el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[dd, "i\times\{0\}"'] & & X \times [0,1] \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd, "i\times[0,1]"] \\
& W & \\
\mathrm{Z}_f \times \{0\} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr] & & \mathrm{Z}_f \times [0,1] \arrow[ul, dotted, "H"']
\end{tikzcd}$$

Como no hay información acerca de la función f, para definir $H : \mathrm{Z}_f \times [0,1] \to W$, la única posibilidad parece ser $H([y], t') = g([y])$ para todo $t' \in [0,1]$, si $y \in Y$. La existencia de H dependerá de poder deformar G, definida en $X \times [0,1]$ (es decir, en $i(X) \times [0,1]$), en la función $([y], t') \mapsto g(y)$, definida en $Y \times [0,1]$ (en $j(Y) \times [0,1]$). Definimos entonces

$$\begin{cases} H([y], t') & = g([y]) \\ H([x,t], t') & = \begin{cases} g\big([x, \frac{2t-t'}{2-t'}]\big) & \text{si } t' \leq 2t \\ G\big(x, \frac{t'-2t}{1-t}\big) & \text{si } t' \geq 2t \end{cases} \end{cases} .$$

Entonces H es continua,

$$\begin{aligned} H([x,t], 0) &= g([x,t]) \ , \\ H([y], 0) &= g([y]) \quad \text{y} \\ H|_{X\times[0,1]} &= G \ . \end{aligned}$$

$\square$

1.5 Ejemplos

Ejemplo 1.5.1. Sean $X = Y = \mathbb{R}^n$ y sean $f_0(x) = x$ y $f_1(x) = 0$ para todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ la función

$$F(x,t) = (1-t)\,x \ .$$

Entonces F es una homotopía de $f_0 = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^n}$ en la función constante $f_1 = 0$ relativa al subespacio $\{0\}$.

Ejemplo 1.5.2. Si ahora $X = Y = [0,1]$, $f_0(t) = t$ y $f_1(t) = 0$, para todo instante $t \in [0,1]$, y $F : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es la función

$$F(t,t') = (1-t')\,t \ ,$$

entonces F es una homotopía de $f_0 = \mathsf{id}_{[0,1]}$ en la función constante $f_1 = 0$ relativa al subespacio $\{0\}$.

Ejemplo 1.5.3. Sean $X = Y = \mathrm{D}^2$ y sean $A = B = \mathrm{S}^1$. Sea $f_0, f_1 : (\mathrm{D}^2, \mathrm{S}^1) \to (\mathrm{D}^2, \mathrm{S}^1)$ las funciones dadas por

$$\begin{aligned} f_0(re^{i\theta}) &= re^{i\theta} \\ f_1(re^{i\theta}) &= re^{i(\theta+\pi)} \ , \end{aligned}$$

es decir, $f_0 = \mathsf{id}_{\mathrm{D}^2}$ y f_1 es hacer medio giro, o bien reflejar un punto en el origen. Sean F, F' las funciones definidas por

$$\begin{aligned} F(re^{i\theta}, t) &= re^{i(\theta+t\pi)} \\ F'(re^{i\theta}, t) &= re^{i(\theta-t\pi)} \ . \end{aligned}$$

Entonces $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} \{0\}$, tanto vía F como vía F'.

Ejemplo 1.5.4. Sea X un espacio topológico arbitrario y sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio convexo. Sean $f_0, f_1 : X \to Y$ funciones continuas y sea $X' \subset X$ un subespacio en donde f_0 y f_1 coinciden. Si $F : X \times [0,1] \to Y$ es la función definida por

$$F(x,t) \ = \ t\, f_1(x) + (1-t)\, f_0(x) \ ,$$

entonces F es una homotopía de f_0 en f_1 relativa a X'.

Ejemplo 1.5.5. Sea $Y \subset \mathbb{R}^2$ el subespacio del plano dado por

$$Y \ = \ \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \ : \ (0 \leq y \leq 1 \wedge x = 1/n) \vee (y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 1)\big\} \ .$$

Si $F : Y \times [0,1] \to Y$ es la función

$$F((x,y),t) \ = \ (x, (1-t)\, y) \ ,$$

entonces F es una homotopía de id_Y en la proyección $\pi : (x,y) \mapsto (x,0)$ (relativa al subespacio $\{(x,0) \ : \ 0 \leq x \leq 1\}$). Como este subespacio es contráctil, por transitividad, se deduce que Y es contráctil. En particular, si $c : Y \to Y$ es la función constante $c(x,y) = (1,0)$, entonces $\mathsf{id}_Y \simeq c$ y coinciden en $(1,0)$. Pero, como la topología de Y es la de subespacio del plano, no existe una homotopía de id_Y en c relativa al punto $\{(1,0)\}$, es decir, que deje fijo el punto.

Ejemplo 1.5.6. Sea $X = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ y sea A el espacio del ejemplo 1.5.5. Entonces A y X son contráctiles. De acuerdo con la observación 1.1.3, la inclusión $\iota : A \to X$ es una equivalencia homotópica. En particular A es un retracto débil de X. Pero A no es un retracto de X, pues, por ejemplo, el punto $(0,1)$ posee puntos arbitrariamente cerca que debieran ser proyectados lejos.

Ejemplo 1.5.7. Si C es un subespacio convexo en un espacio vectorial topológico y $x_0 \in C$ es un punto arbitrario, entonces

$$F(x,t) \;=\; t\,x_0 + (1-t)\,x$$

es una homotopía de la identidad id_C en la función constante $x \mapsto x_0$ relativa al punto $\{x_0\}$. Esto muestra que todo punto en un conjunto convexo es un retracto por deformación fuerte del convexo.

Ejemplo 1.5.8. Sea S^n la esera de dimenensión n vista como subespacio de $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ y sea $F : \big(\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}\big) \times [0,1]\, \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ la función

$$F(x,t) \;=\; (1-t)\,x + t\,\frac{x}{|x|}$$

entonces F es una retracción por deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ en S^n, pues, si llamamos $r(x) = F(x,1) = \frac{x}{|x|}$, entonces r es una retracción de la inclusión ($r \circ \iota_{\mathrm{S}^n} = \mathsf{id}_{\mathrm{S}^n}$) y F es una homotopía de $\iota_{\mathrm{S}^n} \circ r$ en $\mathsf{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}}$ relativa a la esfera.

Ejemplo 1.5.9. Sea $X = [0,1]^2$ y sea $A \subset X$ el subespacio del ejemplo 1.5.5. Como X y A son contráctiles, la inclusión $A \subset X$ es una equivalencia homotópica, con lo A es un retracto débil de X y una deformación, un retracto por deformación débil. Pero, según el ejemplo 1.5.6, A no es un retracto de X y, por lo tanto, A no es un retracto por deformación de X.

Tal vez A sea un retracto débil por deformación fuerte, es decir, la deformación se pueda tomar relativa a A.

Ejemplo 1.5.10. Si ahora X es el espacio del ejemplo 1.5.5 y $A = \{(0,1)\}$, entonces, como X es contráctil, $\mathsf{id}_X \simeq \iota_A \circ c$, donde $c:\; X \to A$ es la función constante $(x,y) \mapsto (0,1)$. Como $c \circ \iota_A = \mathsf{id}_A$, se deduce que A es un retracto por deformación de X. Pero, como se mencionó en el ejemplo 1.5.6, no existe una homotopía de id_X en $\iota_A \circ c$ relativa al punto A, es decir que A no es un retracto por deformación fuerte de X.

Capítulo 2

Poliedros

2.1 Complejos simpliciales

2.1.1 Objetos

Un *complejo simplicial* es un par (K, V), compuesto por un conjunto V de *vértices* y un conjunto K de subconjuntos finitos y no vacíos de V, denominados *símplices* del complejo. Se requiere, además, que *(i)* todo subconjunto $\{v\} \subset V$ compuesto por un único elemento de V pertenezca a K, es decir, sea un símplice; y *(ii)* todo subconjunto no vacío de un símplice sea, también, un símplice. El complejo se suele denotar simplemente por K. Un q-símplice en un complejo simplicial K es un símplice compuesto por exactamente $q+1$ vértices distintos; se dice que q es la *dimensión* de s. Si s es un símplice y $s' \subset s$, entonces se dice que s' es una *cara* de s; si, además, s' es un p-símplice, se dice que es una p-cara de s. Una cara $s' \subset s$ se dice *propia*, si $s' \neq s$. Las caras de un complejo simplicial K están parcialmente ordenadas por inclusión. Dado un símplice $s \in K$, llamamos *vértices de* s a los elementos de s, es decir, aquellos vértices de K que pertenecen a s.

Observación 2.1.1. Sea K un complejo simplicial. Los 0-símplices de K se corresponden exactamente con los vértices de K (es decir, V). Podemos pensar, entonces, a K simplemente como el conjunto de símplices, identificando los vértices V con los 0-símplices del complejo. Además, todo símplice de K está *generado*, determinado, por los vértices que contiene, es decir, por sus 0-caras: todo símplice es un subconjunto de los vértices de K, es decir, es de la forma $s = \{v_0, \dots, v_q\} \subset V$ y, dado un suconjunto $\{v_0, \dots, v_q\} \subset V$ de vértices, existe a lo sumo un símplice cuyos vértices sean exactamente $v_0, \dots, v_q$.

Otra manera de pensar en un complejo simplicial es en un conjunto K de objetos denominados *símplices*, parcialmente ordenado y que cumple ciertas propiedades de “finitud”: existen elementos v minimales en K, es decir, tales que, si $s \in K$, entonces $v \leq s$, o bien v y s no son comparables; si $s \in K$, entonces existe al menos un elemento minimal $v \in K$ tal que $v \leq s$; dado $s \in K$, la cantidad de elementos minimales por debajo de s es igual a la cantidad de elementos intermedios (incluyendo los extremos) entre s y cualquiera de los elementos minimales debajo de s; si $s, s' \in K$ y $s' \leq s$, entonces existen a lo sumo finitos elementos intermedios $s' \leq s'' \leq s$. No estoy seguro de que estas propiedades sean suficientes para caracterizar a los complejos simpliciales como conjuntos parcialmente ordenados.

La *dimensión* de un complejo simplicial K se define como

$$\dim K \;=\; \sup \{\dim s \,:\, s \in K\} \cup \{-1\} \ ,$$

con lo cual $\dim K = n$, si K contiene un n-símplice pero no contiene $(n+1)$-símplices, $\dim K = \infty$ si K contiene un n-símplice para n arbitrariamente grande y $\dim K = -1$, si $K = \varnothing$ es el complejo vacío. Un complejo se dice *finito*, si contiene una cantidad finita de símplices (no confundir ser finito con ser de dimensión finita). También se dice que K es *localmente finito*, si cada vértice de K es parte de a lo sumo finitos símplices de K.

Un *subcomplejo* de un complejo simplicial K es un subconjunto de símplices de K que constituye, a su vez, un complejo simplicial.

2.1.2 Morfismos

Una *transformación simplicial* $(K_1, V_1) \to (K_2, V_2)$ (o aplicación simplicial, o un mapa simplicial o morfismo simplicial) es un par (φ, φ_0), donde $\varphi_0 : V_1 \to V_2$ y $\varphi : K_1 \to K_2$ son funciones que verifican que, si $s = \{v_0, \ldots, v_q\} \in K_1$, entonces

$$\varphi(s) \;=\; \varphi\big(\{v_0, \ldots, v_q\}\big) \;=\; \{\varphi_0(v_0), \ldots, \varphi_0(v_q)\} \ . \tag{2.1}$$

En particular, $\varphi\big(\{v\}\big) = \varphi_0(v)$, para todo vértice $v \in V_1$. Además, la función en símplices φ está determinada por la función en vértices φ_0, pues, dada una función $\varphi_0 : V_1 \to V_2$ arbitraria, existe una única función $\varphi : \mathcal{P}(V_1) \to \mathcal{P}(V_2)$ en subconjuntos de vértices que verifica (2.1). Pero no toda función en los vértices define una transformación simplicial. Para que un par (φ, φ_0) que cumple (2.1) sea una transformación simplicial es necesario y suficiente que φ_0 cumpla

$$\{\varphi_0(v_0), \ldots, \varphi_0(v_q)\} \in K_2 \quad \text{para todo símplice } \{v_0, \ldots, v_q\} \in K_1 \ . \tag{2.2}$$

En definitiva, las transformaciones simpliciales se pueden ver equivalentemente como pares $(\varphi : K_1 \to K_2, \varphi_0 : V_1 \to V_2)$ que verifican (2.1), o bien como una función $\varphi_0 : V_1 \to V_2$ que cumple (2.2). Por último, notemos que, identificando los vértices V_i con los 0-símplices ${K_i}^{(0)}$ de los complejos, se cumple que $\varphi(V_1) \subset V_2$ y que $\varphi|_{V_1} = \varphi_0$. Así, podemos pensar en una transformación simpicial (φ, φ_0) como la función en símplices $\varphi : K_1 \to K_2$, identificando φ_0 con la restricción de φ al 0-esqueleto. De esta manera, nos podemos referir a (φ, φ_0) simplemente por φ.

La composición $\varphi \circ \psi$ de transformaciones simpliciales φ y ψ se define como la transformación determinada por la composición $\varphi_0 \circ \psi_0$ de las funciones en los vértices. Además, dado un complejo K la función identidad en vértices determina una transformación simplicial id_K que es la identidad en el conjunto de símplices. Así, queda determinada una categoría cuyos objetos son los complejos simpliciales y cuyos morfismos son las transformaciones simpliciales entre ellos.

Sea K un complejo simplicial. Los subcomplejos de K se corresponden con transformaciones simpliciales $\iota : L \to K$ que son inclusiones $\iota : L \subset K$ como funciones entre los conjuntos de símplices. Llamamos a estas transformaciones, *inclusiones simpliciales*. Toda transformación simplicial $L \to K$ que es inyectiva como función entre los conjuntos de símplices se puede pensar como una inclusión simplicial vía alguna biyección con un subcomplejo de K en el sentido estricto de la definición. También llamaremos inclusiones simpliciales a estas transformaciones y subcomplejos a los complejos de partida de las mismas.

Dado un subcomplejo $L \subset K$, el subconjunto $N \subset K$ de símplices sin vértices en L es un subcomplejo de K, al que podemos llamar *complemento de* L; es el subcomplejo más grande de K disjunto de L, es decir, que no comparte vértices con L. Dado $s = \{v_0, \ldots, v_q\} \in K$, entonces hay tres posibilidades: una primera posibilidad es $v_i \notin L$ para todo i, con lo cual $s \in N$; una segunda posibilidad es que, renombrando los vértices, exista $p \geq 0, p < q$ tal que $v_i \in L$, si $i \leq p$ y $v_i \notin L$, si $i > p$, en tal caso, quedan determinados dos símplices $s' = \{v_0, \ldots, v_p\}$ y $s'' = \{v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ y vale que $s'' \in N$; la tercera posibilidad es que todos los vértices pertenezcan a L. Un subcomplejo $L \subset K$ se dice *pleno*, si se cumple que todo símplice de K cuyos vértices pertenecen al conjunto de vértices de L pertenece al complejo L.

Lema 2.1.1. *Si $L \subset K$ es un subcomplejo pleno de K y N es el complemento de L en K, entonces, dado $s \in K$, vale que: $s \in N$, o bien $s = s' \cup s''$, con $s' \in L$ y $s'' \in N$, o bien $s \in L$.*

Observación 2.1.2. La descomposición $s = s' \cup s''$ no tiene en cuenta las caras del símplice s, es simplemente una descomposición del conjunto de vértices de s.

2.1.3 Subcategorías

Un *par simplicial* es un par (K, L), donde K es un complejo simplicial y $L \subset K$ es un subcomplejo ($(K, \varnothing)$ es una posibilidad). Un morfismo de pares simpliciales $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ es una transformación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ que verifica $\varphi(L_1) \subset L_2$.

Observación 2.1.3. Un poco más en general, podemos llamar par simplicial a un par de complejos K, K' y una transformación simplicial $\varphi : K \to K'$ –es decir, un par simplicial se corresponde con una transformación simplicial, con esta definición. Dadas transformaciones simpliciales $\varphi_1 : K_1 \to K_1'$ y $\varphi_2 : K_2 \to K_2'$, un morfismo de pares simpliciales $\varphi_1 \to \varphi_2$ es un par de transformaciones simpliciales (ψ', ψ), $\psi : K_1 \to K_2$ y $\psi' : K_1' \to K_2'$ tales que

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\psi"'] & K_1' \arrow[d, "\psi'"] \\ K_2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & K_2' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Los pares simpliciales junto con los morfismos de pares constituyen una categoría, la *categoría de pares simpliciales.* La categoría de complejos simpliciales se puede ver como una subcategoría plena de la categoría de pares simpliciales vía $K \mapsto (K, \varnothing)$. Otra subcategoría plena de la categoría de pares simpliciales es la categoría de *complejos simpliciales con un vértice distinguido*, cuyos objetos son los pares (K, v), $v \in V$ y cuyos morfismos son los morfismos de complejos que preservan el vértice distinguido. La inclusión en la categoría de pares está dada por $(K, v) \mapsto (K, \{v\})$.

2.2 El espacio topológico de un complejo simplicial

2.2.1 El complejo geométrico

Sea $K = (K, V)$ un complejo simplicial no vaío. Denotamos $|K|$ al conjunto de funciones $\alpha : V \to [0, 1]$ que verifican:

(i) el conjunto $\{v \in V \,:\, \alpha(v) \neq 0\}$ es un símplice en K; y

(ii) $\sum_{v\in V} \alpha(v) = 1$.

Dicho de otra manera, $|K|$ es el conjunto de combinaciones lineales convexas de vértices de K. Si $K = \varnothing$, se define $|K| = \varnothing$. En el conjunto $|K|$ definimos una métrica: sea $d : |K| \times |K| \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$d(\alpha, \beta) \;=\; \Big(\sum_{v\in V} |\alpha(v) - \beta(v)|^2\Big)^{1/2} \;.$$

Entonces la función d es simétrica, $d(\alpha, \beta) \geq 0$ y es igual a cero, si y sólo si $\alpha(v) = \beta(v)$ para todo vértice v. En cuanto a la desigualdad triangular, como el conjunto de vértices v tales que $\alpha(v)$ y $\beta(v)$ son no nulos es finito, la desigualdad triangular se deduce del caso usual en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Denotamos $|K|_d$ al espacio métrico $(|K|, d)$.

Si $s \in K$ es un q-símplice, definimos

$$|s| \;=\; \Big\{\alpha \in |K| \,:\, \alpha(v) = 0 \text{ , si } v \notin s\Big\} \;,$$

es decir, $|s|$ es el subconjunto de funciones $\alpha \in |K|$ que son nulas en todos los vértices que no pertenecen a s. En términos de la definición anterior, $|s| = |\overline{s}|$. Si $s = \{v_0, \ldots, v_q\}$, sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por los $q + 1$ vértices de s. Sea $[v_0, \ldots, v_q]$ el conjunto de puntos $x \in E$ de la forma

$$x \;=\; \sum_{i=0}^{q} t^i v_i$$

tales que $t^i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^{q} t^i = 1$. Es decir, $[v_0, \ldots, v_q]$ es el conjunto de combinaciones lineales convexas de los puntos correspondientes a los vértices v_i en E, o, lo que es lo mismo, el conjunto convexo más chico que los contiene, la *cáscara convexa.* Se ve entonces que el subconjunto $|s| \subset |K|$ está en correspondencia con el subconjunto $[v_0, \ldots, v_q]$ de E vía $\Phi : \alpha \mapsto (\alpha(v_0), \ldots, \alpha(v_q))$.

En tanto $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, E admite una única topología con respecto a la cual las operaciones de suma y producto por escalares son continuas y la métrica euclidea es compatible con esta topología. Por otro lado, $|s| \subset |K|$ hereda la métrica d definida anteriormente y $\Phi : |s| \to [v_0, \ldots, v_q]$ es una isometría. En particular, $|s|$ con la topología dada por la métrica d es homeomorfo al conjunto convexo y compacto $[v_0, \ldots, v_q]$. Notemos que este espacio es también Hausdorff.

2.2.2 Repaso de Topología

Con el propósito de darle una topología más natural al conjunto $|K|$, recordamos dos teoremas básicos:

Teorema 2.2.1 (de rigidez)**.** *Sea $f : X \to Y$ una función continua e inyectiva definida en un espacio topológico compacto X y codominio un espacio topológico Hausdorff. Entonces f determina un homeomorfismo entre X y el subespacio $f(X) \subset Y$.*

De este teorema se deduce que, si τ es una topología en un conjunto X con respecto a la cual X resulta compacto y Hausdorff, entonces no existe una topología más débil en X con respecto a la cual X sea Hausdorff, ni existe una topología más fuerte con respecto a la cual X sea compacto. Dicho de otra manera, dos topologías comparables, compactas y Hausdorff deben ser iguales.

Dado un conjunto X y una familia indexada de espacios topológicos $\{X_j\}_j$ y funciones $\{g_j : X_j \to X\}_j$, la *topología coinducida por las funciones* $\{g_j\}_j$ es la topología más fina/fuerte en X tal que las funciones g_j resulten ser continuas. Esta topología está caracterizada por la propiedad de que, si Y es un espacio topológico, una función $f : X \to Y$ es continua, si y sólo si las composiciones $f \circ g_j : X_j \to Y$ lo son para todo j.

Teorema 2.2.2. *Sea X un conjunto y sea $\{A_j\}_j$ una familia indexada de espacios topológicos contenidos en X. Si*

(i) la intersección $A_j \cap A_{j'}$ es cerrada en A_j y en $A_{j'}$ para todo par j, j' y

(ii) la topología inducida en $A_j \cap A_{j'}$ como subconjunto de A_j coincide con la inducida en tanto subconjunto de $A_{j'}$,

entonces la topología determinada en X por las inclusiones $\iota : A_j \hookrightarrow X$ se caracteriza por ser la única topología en X tal que cada subconjunto A_j sea cerrado en X y que sea coherente con las topologías de los espacios A_j. Lo mismo es cierto si se requiere que las intersecciones $A_j \cap A_{j'}$ sean abiertas en A_j y en $A_{j'}$, en lugar de cerradas, y los subconjuntos A_j sean abiertos en X, en lugar de cerrados. La propiedad de coherencia de la topología de X con respecto a la de los A_j significa que un subconjunto $B \subset X$ es cerrado (o abierto), si $B \cap A_j$ es cerrado para todo j (respectivamente, abierto).

2.2.3 Una topología coherente

Sea K un complejo simplicial. En lugar de darle a $|K|$ la topología inducida por la métrica d, definiremos una topología coherente con la topología de los símplices. Lo que buscamos es que la noción de continuidad de una función definida en $|K|$ esté determinada por lo que ocurre con la restricción de dicha función a los subconjuntos $|s|$.

Dados símplices $s, s' \in K$, entonces, o bien $s \cap s' = \varnothing$, o bien $s \cap s'$ es un subconjunto no vacío tanto de s como de s'. En el primer caso, $|s| \cap |s'| = \varnothing$, pues la única función en los vértices de K que se anula fuera de s y fuera de s' es la función cero. En el segundo caso, $s \cap s'$ es una cara de s y una cara de s', también. En particular, si $s \cap s' \neq \varnothing$, vale que $|s \cap s'| = |s| \cap |s'|$, pues las funciones que se anulan fuera de s y fuera de s' son las funciones que se anulan fuera de $s \cap s'$. En cualquiera de los dos casos, $|s| \cap |s'|$ tiene una toplogía comacta y Hausdorff (proveniente de la métrica d, si la intersección es no vacía). Además, las inclusiones en $|s|_d$ y en $|s'|_d$ son continuas, con lo que la topología en $|s| \cap |s'|$ es comparable a las heredadas de $|s|_d$ y de $|s'|_d$. Pero la intersección $|s| \cap |s'|$ es cerrada tanto como subespacio de $|s|$ como en tanto subespacio de $|s'|$ y, por en consecuencia, un espacio compacto y Hausdorff con cualquiera de estas dos topologías. En definitiva, por 2.2.1, la topología inducida en $|s| \cap |s'|$ como subespacio de $|s|_d$ coincide con la inducida como subespacio de $|s'|_d$. Notemos que el conjunto $|K|$ y la colección de espacios topológicos $\big\{ |s|_d \,:\, s \in K \big\}$ verifican las condiciones *(i)* y *(ii)* del teorema 2.2.2. De esta manera, queda determinada una topología en $|K|$ que denominaremos *coherente*.

En el contexto de espacios topológicos, denotaremos $|K|$ al espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $|K|$ y cuya topología es la topología coherente recién definida.

Observación 2.2.3. La igualdad de conjuntos $|s| = |\overline{s}|$ da lugar a una identificación entre los espacios topológicos $|\overline{s}|$ y $|s|_d$. Denotaremos todos estos espacios por $|s|$. Además, los espacios $|\dot{s}|$ y $|\dot{s}|_d$ obtenidos a partir del complejo $\dot{s}$ de paras propias de un símplice s también son homeomorfos. En particular, $|s|$ y $|\dot{s}|$ son subespacios del espacio vectorial topológico generado por los vértices del símplice s y

$$|\dot{s}| = \partial\big(\,|s|\,\big)\ .$$

De la definición de la topología coherente de un complejo simplicial podemos deducir los siguientes corolarios.

Corolario 2.2.4. *Sea K un complejo simplicial. Entonces una función $f : |K| \to X$ es continua, si y sólo si las restricciones $f|_{|s|}$ son continuas. Equivalentemente, $f : |K| \to X$ es continua, si y sólo si $f|_{|K^{(q)}|}$ es continua.*

Corolario 2.2.5. *La identidad $|K| \to |K|_d$ es continua*

Si $L \subset K$ es un subcomplejo, entonces, conjustísticamente, $|L| \subset |K|$: si $\alpha \in |L|$, entonces $\{\alpha \neq 0\} \in L$ y, como $L \hookrightarrow K$ es simplicial, $\{\alpha \neq 0\}$ es un símplice de K.

Observación 2.2.6. Un poco más en general, si $\varphi : K \to K'$ es una transformación simplicial y $\alpha \in |K|$, entonces $\{v \in V : \alpha(v) \neq 0\}$ es un símplice en K y, aplicando φ, el conjunto $\{\varphi(v) \in V' : \alpha(v) \neq 0\}$ es un símplice de K'. Definimos $\alpha' : V' \to [0,1]$ por

$$\alpha'(v') = \begin{cases} \sum_{\varphi(v)=v'} \alpha(v) & \text{si } v' \in \operatorname{img}\varphi \\ 0 & \text{si } v' \notin \operatorname{img}\varphi \end{cases} .$$

Como los valores de α son no negativos, se cumple que

$$\{\alpha' \neq 0\} = \varphi\big(\{\alpha \neq 0\}\big) .$$

Definimos $|\varphi|(\alpha) = \alpha'$.

Proposición 2.2.7. *Sea $\varphi : K \to K'$ una transformación simplicial. La función $|\varphi| : |K| \to |K'|$ es continua, tanto con respecto a la topología inducida por la métrica euclidea en $|K|$ y en $|K'|$, como con respecto a la topología coherente. Usaremos $|\varphi|_d$ para referirnos a la función entre los espacios métricos y $|\varphi|$ para referirnos a la función entre los espacios con la topología determinada por sus símplices.*

Demostración. Veamos que $|\varphi| : |K|_d \to |K'|_d$ es continua con respecto a las métricas en los complejos K y K'. Sea entonces $\alpha \in |K|$, sea $\epsilon > 0$ y sean $v_1, \ldots, v_r$ los vértices del símplice $\{\alpha \neq 0\} \in K$. Si $\beta \in |K|$ y $v' \in V'$, entonces

$$\Big| \sum_{v \in V | \varphi(v)=v'} \alpha(v) - \beta(v) \Big|^2 = \big|(|\varphi|\,\alpha)(v) - (|\varphi|\,\beta)(v)\big|^2 \leq \sum_{\varphi(v)=v'} \big|\alpha(v) - \beta(v)\big| ,$$

pues

$$-1 \leq (|\varphi|\,\alpha)(v) - (|\varphi|\,\beta)(v) \leq 1 .$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} d(|\varphi|\,\alpha, |\varphi|\,\beta)^2 &= \sum_{v' \in V'} \Big| \sum_{\varphi(v)=v'} \alpha(v) - \beta(v) \Big|^2 \\ &\leq \sum_{v'} \sum_{\varphi(v)=v'} \big|\alpha(v) - \beta(v)\big| = \sum_{v} \big|\alpha(v) - \beta(v)\big| . \end{aligned}$$

Si $d(\alpha, \beta) < \delta$ para cierto $\delta > 0$, entonces $\big|\alpha(v_i) - \beta(v_i)\big| < \delta$ para $i = 1, \ldots, r$. En particular,

$$\begin{aligned}
d(|\varphi|\,\alpha, |\varphi|\,\beta)^2 \;&\leq\; \sum_{i=1}^{r} \big|\alpha(v_i) - \beta(v_i)\big| \;+\; \sum_{v \neq v_i} \beta(v) \\
&=\; \sum_{i=1}^{r} \big|\alpha(v_i) - \beta(v_i)\big| \;+\; \Big(1 - \sum_{i=1}^{r} \beta(v_i)\Big) \\
&=\; \sum_{i=1}^{r} \big|\alpha(v_i) - \beta(v_i)\big| \;+\; \sum_{i=1}^{r} \big(\alpha(v_i) - \beta(v_i)\big) \\
&\leq\; \sum_{i=1}^{r} \big|\alpha(v_i) - \beta(v_i)\big| \;+\; \sqrt{r}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{r} \big|\alpha(v_i) - \beta(v_i)\big|^2\Big)^{1/2} \\
&<\; r\cdot\delta \;+\; \sqrt{r}\cdot\delta\ .
\end{aligned}$$

De esto se deduce que $|\varphi|$ es continua con respecto a las métricas euclideas en los complejos. En particular, si $L \subset K$ es un subcomplejo, la inclusión $|L|_d \hookrightarrow |K|_d$ es continua.

Veamos ahora que la misma función $|\varphi| \,:\, |K| \to |K'|$ es continua con respecto a la topología coherente. Dado un símplice $s \in K$, hay que ver que $|\varphi|\,|_{|s|} \,:\, |s| \to |K'|$ sea continua. Determinemos primero cuál es la imagen de esta función: por un lado, $\varphi(s) \in K'$ es un símplice, por definición de φ, y, por otro,

$$|\varphi|\,(|s|) \;=\; \big\{\, |\varphi|\,\alpha \,:\, \alpha(v) = 0\ ,\ \text{si } v \notin s \big\}\ .$$

Ahora, si $\alpha \in |\varphi|\,(|s|)$ y $v' \notin \varphi(s)$, entonces

$$(|\varphi|\,\alpha)(v') \;=\; \sum_{\varphi(v)=v'} \alpha(v) \;=\; \sum_{v\in s | \varphi(v)=v'} \alpha(v) \;=\; 0\ .$$

De esto se deduce que $|\varphi|\,\alpha \in |\varphi(s)|$ y $|\varphi|\,(|s|) \subset |\varphi(s)|$. (Esto ya es suficiente para concluir que $|\varphi|\,|_{|s|}$ es continua). Recíprocamente, si $\varphi(s) = \{{v'}_0,\, \dots,\, {v'}_q\}$ sean $v_0,\, \dots,\, v_q \in s$ tales que $\varphi(v_i) = v'_i$. Si $\alpha' \in |\varphi(s)|$, entonces $\alpha'(v'_i) \geq 0$ y $\alpha'(v') = 0$, si $v' \neq v'_i$ para todo i. Sea $\alpha : V \to [0,1]$ la función

$$\alpha(v) \;=\; \begin{cases} \alpha'(v'_i) & \text{si } v = v_i \\ 0 & \text{si } v \neq v_i \text{ para todo } i \end{cases}\ .$$

Entonces $\{\alpha \neq 0\} \subset \{v_0,\, \dots,\, v_q\} \subset s$ y $\sum_v \alpha(v) = 1$. En particular, $\{\alpha \neq 0\} \in K$ y $\alpha \in |K|$. Pero, además, $\alpha(v) = 0$, si $v \notin s$, con lo que $\alpha \in |s|$ y, por definición, $|\varphi|\,\alpha = \alpha'$. En definitiva, $|\varphi(s)| \subset |\varphi|\,(|s|)$ y

$$|\varphi|\,(|s|) \;=\; |\varphi(s)|\ \ .$$

Dado que $|\varphi|\,(|s|) \subset |\varphi(s)|$ y que $|\varphi(s)| \subset |K'|$ es subespacio (cerrado) porque $\varphi(s) \in K'$ es un símplice, la restricción $|\varphi| : |s| \to |K'|$ es continua, si y sólo si la correstricción

$$|\varphi| \,:\, |s| \;\to\; |\varphi(s)|$$

es continua. Pero $|s|$ y $|\varphi(s)|$ tienen la topología dada por la métrica euclidea y ya vimos que $|\varphi|_d : |s|_d \to |\varphi(s)|_d$ es continua. En definitiva, $|\varphi| : |s| \to |\varphi(s)|$ es continua y $|\varphi| : |s| \to |K'|$. Como $s \in K$ era arbitrario, por 2.2.4, deducimos que $|\varphi| : |K| \to |K'|$ es continua. □

Corolario 2.2.8. *Si $L \subset K$ es un subcomplejo, $|L|_d$ es un subespacio cerrado de $|K|_d$. En particular, $|L|$ es un subespacio cerrado de $|K|$.*

Demostración. En primer lugar, la métrica en $|L|_d$ es la restricción de la métrica en $|K|_d$, con lo que $|L|_d$ es un subespaico métrico de $|K|_d$ y, en particular, un subespacio topológico.

Sea $\alpha \in |K|_d$ un elemento en la clausura de $|L|_d$. Por definición, $\alpha(v) \geq 0$ para todo $v \in K^{(0)}$ y $\alpha(v) > 0$ sólo para finitos vértices de K. Sean $v_1, \ldots, v_r$ los vértices tales que $\alpha(v_i) > 0$, es decir,

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha(v_j) \;=\; 1$$

Sea $a = \min\{\alpha(v_i)\}_i > 0$ y sea $\epsilon < a/2$ un número positivo. Por hipótesis, existe $\beta \in |L|$ tal que $d(\alpha, \beta) < \epsilon$. En particular,

$$\beta(v_i) \;>\; \alpha(v_i) - \epsilon \;>\; a/2 \;>\; 0 \;.$$

Como $\beta \in |L|$, esto implica, por un lado, que los v_i son vértices en el subcomplejo L y, por otro, que

$$\{\beta \neq 0\} \;=\; \{v_1, \ldots, v_r\} \cup B \;,$$

donde $B \subset L^{(0)}$ es algún subconjunto (posiblemente vacío) de vértices de L. Como $\{\beta \neq 0\}$ es un símplice en L, se deduce que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ también lo es. En conclusión, $\alpha \in |L|$ y $|L|_d$ es cerrado en $|K|_d$.

La última afirmación se deduce de 2.2.5 y de que $|L| \subset |K|$ es un subespacio topológico (los símplices que determinan la topología en $|L|$ son los símplices que determinan la topología en $|K|$ que pertenecen al subcomplejo L). □

Observación 2.2.9. Sea K un complejo simplicial y sea $\{L_i\}_i$ una familia de subcomplejos de K. Entnonces $|\bigcup_i L_i| = \bigcup_i |L_i|$ y $|\bigcap_i L_i| = \bigcap_i |L_i|$.

Las aplicaciones $K \mapsto |K|$ en complejos simpliciales y $\varphi \mapsto |\varphi|$ en transformaciones simpliciales define un funtor de la categoría de complejos simpliciales en la categoría de espacios topológicos. Lo mismo es cierto para las aplicaciones $K \mapsto |K|_d$ y $\varphi \mapsto |\varphi|_d$. Más aun, como la identidad $|K| \to |K|_d$ es continua y los diagramas

$$\begin{tikzcd} {|K|} \arrow[r] \arrow[d, "|\varphi|"'] & {|K|_d} \arrow[d, "|\varphi|_d"] \\ {|K'|} \arrow[r] & {|K'|_d} \end{tikzcd}$$

son diagramas conmutativos en la categoría de espacios topológicos, la identidad $|K| \to |K|_d$ determina una transformación natural $|\cdot| \to |\cdot|_d$ entre estos funtores. Finalmente, podemos extender estos funtores a la categoría de pares simpliciales: a un par simplicial $\varphi : K \to K'$ le asociamos el par de espacios topológicos $|\varphi| : |K| \to |K'|$ (o bien $|\varphi|_d$); a un morfismo de pares simpliciales (ψ', ψ) le asociamos el morfismo de pares de espacios topológicos $(|\psi'|, |\psi|)$ (o, respectivamente, $(|\psi'|_d, |\psi|_d)$):

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & K_1' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi' \\ K_2 & \xrightarrow[\varphi_2]{} & K_2' \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc} |K_1| & \xrightarrow{|\varphi_1|} & |K_1'| \\ |\psi| \downarrow & & \downarrow |\psi'| \\ |K_2| & \xrightarrow[|\varphi_2|]{} & |K_2'| \end{array}$$

Una *triangulación* de un espacio topológico X consiste en un par (K, f), donde K es un complejo simplicial y $f : |K| \to X$ es un homeomorfismo. Análogamente, definimos una traingulación de un par de espacios $g : X \to X'$ como un par simplicial $\varphi : K \to K'$ junto con un homeomorfismo de pares $(f', f) : |\varphi| \to g$, es decir, un par de homeomorfismos $f : |K| \to X$ y $f' : K' \to X'$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|\varphi|} & |K'| \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X & \xrightarrow[g]{} & X' \end{array}$$

conmuta. Notemos que, si el par (X, A) consiste está compuesto por un espacio topológico X y un subespacio $A \subset X$, entonces, de existir una triangulación (K, L) la transformación simplicial correspondiente $L \to K$ debe ser (isomorfa a) un subcomplejo. En particular, podemos ver el par $(|K|, |L|)$ como un par topológico compuesto por el espacio $|K|$ y un subespacio $|L| \subset |K|$. En tal caso, los homeomorfismos $f : |L| \to A$ y $f' : |K| \to X$ están forzados a cumplir $f = f'|_{|L|}$.

2.3 Propiedades de la topología coherente

Dado un complejo simplicial K, el espacio topológico $|K|_d$ es perfectamente normal, pues es metrizable. Veamos que propiedades de separabilidad verifica $|K|$. El espacio $|K|$ es Hausdorff, pues posee más abiertos que $|K|_d$. Pero esto no es todo.

Teorema 2.3.1. *Sea K un complejo simplicial. Entonces $|K|$ es un espacio topológico T_4 (normal Hausdorff)*

Observación 2.3.2. Una función $F : |K| \to [0, 1]$ es continua, si y sólo si las restricciones $F|_{|s|}$ lo son. Así la existencia de una función continua $F : |K| \to [0, 1]$ equivale a la existencia de una familia compatible de funciones continuas $\{f_s : |s| \to [0, 1]\}_{s \in K}$. La compatibilidad de esta familia significa que, dados símplices s y s' y dadas sus funciones correspondientes f_s y $f_{s'}$, o bien $|s| \cap |s'| = \varnothing$, o, si la intersección es no vacía, se cumple

$$f_s|_{|s| \cap |s'|} = f_{s'}|_{|s| \cap |s'|} .$$

Como $|s| \cap |s'| = \varnothing$ equivale a $s \cap s' = \varnothing$ y, en caso contrario, $|s| \cap |s'| = |s \cap s'|$ es una cara tanto de s como de s', la comatibilidad de las funciones $\{f_s\}_{s \in K}$ se traduce en la condición

$$f_s|_{|s'|} \;=\; f_{s'} \;, \tag{2.3}$$

para todo símplice s y toda cara $s' \subset s$.

Demostración. Demostraremos que $|K|$ es normal probando que es posible extender toda función continua definida en un subespacio cerrado. Sea $A \subset |K|$ un subespacio cerrado y sea $f : A \to [0,1]$ una función continua. Una función $F : |K| \to [0,1]$ es una extensión continua de f, si y sólo si, además de la condición de continuidad (compatibilidad) (2.3), se verifica

$$F_s|_{A \cap |s|} \;=\; f|_{A \cap |s|} \tag{2.4}$$

para todo símplice $s \in K$. Definimos una extensión de manera inductiva en la dimensión de los símplices de K. Si $s \in K$ es un 0-símplice, un vértice, entonces $|s| \in |K|$ consiste en un único punto, al que llamamos α_s y, o bien $\alpha_s \in A$, o bien $\alpha_s \notin A$. En el primer caso definimos $f_s = f(\alpha_s)$; en el segundo caso definimos f_s de manera arbitraria, por ejemplo, $f_s = 1$. Así,

$$f_s \;=\; \begin{cases} f(\alpha_s) & \text{si } \alpha_s \in A \\ 1 & \text{si no} \end{cases} \;.$$

Supongamos que $q > 0$ y que existen funciones $\{f_s \,:\, \dim s < q\}$ que verifican (2.3) y (2.4). Dado un q-símplice s y un punto $\alpha \in |s|$, o bien $\alpha \in |carasps|$, es decir $\alpha \in |s'|$ para cierta cara $s' \subset s$ propia, o bien α pertenece al interior de $|s|$ (ver 2.2.3, este conjunto no es el interior como subespacio de $|K|$, son simplemente los puntos de $|s|$ que no pertenecen a caras propias, pero sí es abierto en $|s|$). Definimos un función intermedia $f'_s : |\dot{s}| \cup (A \cap |s|) \to [0,1]$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f'_s|_{|s'|} \;&=\; f_{s'} \quad \text{si } s' \text{ es una cara propia,} \\ f'_s|_{A \cap |s|} \;&=\; f|_{A \cap |s|} \;. \end{aligned}$$

(Si la intersección $A \cap |s|$ es vacía, f'_s queda sin definir allí). Esto define una función continua en el subespacio cerrado $|\dot{s}| \cup (A \cap |s|)$ de $|s|$ con imagen en el intervalo $[0,1]$. Por el teorema de extensión de Tietze ($|s|$ es, entre otras cosas, un espacio T_4), existe una función continua $f_s : |s| \to [0,1]$ que extiende a f'_s. La familia $\{f_s\}_{s \in K}$ definida inductivamente determina una extensión continua de la función $f : A \to [0,1]$ a todo el espacio $|K|$. □

¡Y aun hay más!

Corolario 2.3.3. *El espacio $|K|$ es T_6... (perfectamente normal Hausdorff).*

Demostración. Sea $A \subset |K|$ un subespacio cerrado. Veremos que A es el conjunto de ceros de una función continua definida en $|K|$. Consideramos la función $f : A \to [0,1]$,

$f = 0$. Procedemos inductivamente, como en la demostración de 2.3.1, pero con algunas salvedades. Empezamos con los 0-símplices: si $s \in K$ es tal que $\dim s = 0$ y llamamos α_s al único punto en $|s|$, entonces definimos

$$f_s = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_s \in A \\ 1 & \text{si } \alpha_s \notin A \end{cases} .$$

Supongamos que $q > 0$ y que las funciones f_s están definidas para todo símplice de dimensión $\dim s < q$, de manera tal que

$$\begin{aligned} f_s|_{|s'|} &= f_{s'} \quad \text{si } s' \subset s \text{ es una cara propia} \\ f_s|_{A \cap |s|} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

(Para ser un poco más precisos, podemos suponer, además, que $f_s = 1$, si $|s| \cap A = \varnothing$ y que $f_s(\alpha) > 0$, si $\alpha \notin A$, aunque esto se podrá deducir de la forma en la que se realizarán los pasos inductivos). Sea $s \in K$ un q-símplice. Si $|s| \subset A$, definimos $f_s = 0$, si $|s| \cap A = \varnothing$, definimos $f_s = 1$. En otro caso, $A \cap |s| \subset |s|$ es un subespacio cerrado y también lo es el subespacio que se obtiene a partir de las caras propias de s, $|\dot{s}|$. Definimos dos funciones intermedias: sean f'_s y f''_s las funciones $|\dot{s}| \cup (A \cap |s|) \to [0, 1]$ dadas por:

$$\begin{aligned} f'_s|_{|s'|} &= f_{s'} \quad \text{si } s' \subset s \text{ es una cara propia} \\ f'_s|_{A \cap |s|} &= 0 \ ; \end{aligned}$$

y por

$$\begin{aligned} f''_s|_{|s'|} &= 0 \\ f''_s|_{A \cap |s|} &= 0 \ . \end{aligned}$$

Como $|\dot{s}| \cup (A \cap |s|) \subset |s|$ es cerrado y $|s|$ es T_4, existe, por el teorema de extensión de Tietze, una función $g_s : |s| \to [0, 1]$ continua que extiende a f'_s (de nuevo remarcamos que, si $|s| \cap A = \varnothing$, elegimos $g_s = 1$). Por otro lado, como, además, $|s|$ es T_6, existe una extensión $h_s : |s| \to [0, 1]$ de $f''_s = 0$ que es estrictamente positiva fuera de $|\dot{s}| \cup (A \cap |s|)$. Sea finalmente $f_s : |s| \to [0, 1]$ la función dada por

$$f_s = g_s + \frac{h_s}{h_s + 1} \cdot (1 - g_s) \ .$$

Entonces f_s es continua, coincide con f'_s en $|\dot{s}| \cup (A \cap |s|)$ y es estrictamente positiva $|s| \setminus A$. Además, $f_s = 0$, si $|s| \subset A$ y $f_s = 1$, si $|s| \cap A = \varnothing$. La familia de funciones $\{f_s\}_{s \in K}$ definida de manera inductiva determina una función continua en $|K|$ que es cero en A y estrictamente positiva fuera de A. Esta función verifica también que vale 1 en todo símplice disjunto de A. $\square$

Sea $\langle s\rangle = |s| \smallsetminus |\dot{s}|$. Este subconjunto es abierto en $|s|$, pero no necesariamente en $|K|$ (nunca será abierto si s está contenido en un símplice de dimensión estrictamente mayor). Los subconjuntos $\langle s\rangle$ cubren $|K|$. Sea $A \subset |K|$ un subconjunto arbitrario. Para cada síplice $s \in K$, sea $\alpha_s \in A \cap \langle s\rangle$ (siempre que la intersección sea no vacía). Como α_s no pertenece a ninguna cara propia de s, α_s está unívocamente asociado a s, es decir, $\alpha_s = \alpha_{s'}$ implica $s = s'$. En particular, $\alpha_s \in |s'|$ implica que $s \subset s'$, con lo cual, si $A' = \{\alpha_s\}_{A\cap\langle s\rangle\neq\varnothing}$, entonces $|s| \cap A'$ es a lo sumo finita para todo símplice $s \in K$. Se deduce entonces que $A' \subset |K|$ es discreto.

Corolario 2.3.4. *Todo subespacio compacto $A \subset |K|$ está contenido en la unión de una cantidad finita de símplices abiertos $\langle s\rangle$.*

Corolario 2.3.5. *Dado un complejo simplicial K, el espacio $|K|$ con la topología coherente es compactamente generado, es decir, la topología es coherente con la familia de subespacios compactos de $|K|$.*

Demostración. Si $A \subset |K|$ es cerrado, como $|K|$ es Hausdorff, $A \cap C$ es cerrado en C para todo compacto $C \subset |K|$. Recíprocamente, si $A \cap C$ es cerrado en C para todo compacto C, entonces $A \cap |s|$ es cerrado para todo símplice $s \in K$ y, en particular, A es cerrado. □

Corolario 2.3.6. *Un complejo simplicial K es finito, si y sólo si $|K|$ es compacto.*

Corolario 2.3.7. *Un complejo simplicial K es localmente finito, si y sólo si $|K|$ es localmente compacto. (???)*

Teorema 2.3.8. *Sea K un complejo simplicial. Una función $F : |K| \times [0,1] \to X$ es continua, si y sólo si las restricciones $F|_{|s|\times[0,1]}$ son continuas para todo símplice $s \in K$.*

Demostración. Como $[0,1]$ es localmente compacto Hausdorff y $|K|$ es compactamente generado, el producto $|K| \times [0,1]$ es compactamente generado, también. Si $C \subset |K| \times [0,1]$ es compacto y $C_1 \subset |K|$ denota su proyección en el primer factor, entonces C_1 es compacto y, por el corolario 2.3.4, existen símplices $s_1, \ldots, s_r$ tales que

$$C_1 \subset \langle s_1\rangle \cup \cdots \cup \langle s_r\rangle$$

En particular, el subcomplejo finito $L = \overline{s_1} \cup \cdots \cup \overline{s_r}$ de $|K|$ cumple que

$$C \subset |L| \times [0,1] \ .$$

De esto y de que $|K| \times [0,1]$ es compactamente generado, se deduce que la topología de $|K| \times [0,1]$ coincide con la topología determinada por la familia de subconjuntos $\big\{\, |L| \times [0,1]\big\}_L$, donde L varía entre todos los subcomplejos finitos de K. Esta topología es, a su vez, equivalente a la topología determinada por $\big\{\, |s| \times [0,1] \,:\, s \in K\big\}$, pues, si L es finito, la topología en $|L| \times [0,1]$ coincide con la topología determinada por la familia $\big\{\, |s| \times [0,1] \,:\, s \in L\big\}$. □

Sea K un complejo simplicial. Sea $v \in V$ un vértice. Definimos la *estrella centrada en v* como el subconjunto

$$\operatorname{st} v \;=\; \big\{\alpha \in |K| \;:\; \alpha(v) \neq 0\big\} \;.$$

La función $\big(\alpha \mapsto \alpha(v)\big) : |K|_d \to [0,1]$, dada por tomar "coordenada en v", es continua con respecto a la métrica en $|K|_d$. En particular, $\operatorname{st} v$ es un subconjunto abierto de $|K|_d$ y, por lo tanto, también de $|K|$.

Sea $\alpha \in |K|$ un punto arbitrario. Entonces, excepto que α sea un vértice de $|K|$ ($\alpha(v) = 1$ para algún vértice en K), existe un símplice s tal que $\alpha \in |s|$, pero $\alpha \notin |s'|$, si $s' \subset s$ es una cara propia. Este símplice (o $\{v\}$, si $\alpha(v) = 1$ para algún v), es el símplice más chico que contiene a α. Dado que

$$\langle s\rangle \;=\; |s| \smallsetminus |\dot{s}| \;=\; \big\{\alpha \in |K| \;:\; \alpha(v) \neq 0 \Leftrightarrow v \in s\big\} \;,$$

entonces $\alpha \in \operatorname{st} v$, si y sólo si $\alpha \in \langle s\rangle$ para algún símplice $s \in K$ que tenga a v como vértice. En particular,

$$\operatorname{st} v \;=\; \bigcup \big\{\langle s\rangle \;:\; v \in s, s \in K\big\} \;.$$

Corolario 2.3.9. *Sea $L \subset K$ un subcomplejo y sean $v_0, \ldots, v_q$ vértices (distintos) de K. Entonces $v_0, \ldots, v_q$ son los vértices de un símplice en L, si y sólo si*

$$\bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} v_i \cap |L| \;\neq\; \varnothing \;.$$

Teorema 2.3.10. *Sea K un complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \big\{\operatorname{st} v \;:\; v \in V$ la familia de estrellas centradas en vértices de K. La aplicación $v \mapsto \operatorname{st} v$ define una transformación simplicial $\varphi : K \to K(\mathcal{U})$ de K en el nervio de la colección de abiertos $\mathcal{U}$ de $|K|$. La transformación φ es un isomorfismo y, para todo subcomplejo $L \subset K$, la restricción $\varphi|_L : L \to K_{|L|}(\mathcal{U})$ también lo es.*

2.4 La estructura lineal de los complejos simpliciales

Lema 2.4.1. *Sea K un complejo simplicial. Una combinación convexa de puntos de $|K|$ pertenece a $|K|$, si y sólo si dichos puntos pertenecen a un mismo símplice en K.*

Demostración. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in |K|$ puntos pertenecientes a un mismo símplice $|s|$, $s \in K$. Dados números reales $t^1, \ldots, t^r \in [0,1]$ tales que $\sum_{i=1}^r t^i = 1$, la función $\alpha : V \to [0,1]$ dada por $\alpha = \sum_{i=1}^r t^i \alpha_i$ pertenece a $|s|$, pues $\{\alpha \neq 0\} \subset s$ y $s \in K$ es un símplice. Recíprocamente, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in |K|$ son puntos que verifican $\alpha = \sum_{i=1}^r t^i \alpha_i \in |K|$ para ciertos números reales *positivos* t^i que suman 1 (ninguno de los puntos α_i aparece trivialmente), entonces existe un símplice $s \in K$ más chico que contiene a α. Como $\alpha \in \langle s\rangle$, si $v \notin s$ es un vértice de K que no pertenece a s, entonces $\alpha(v) = 0$ y, para cada $i = 1, \ldots, r$, $\alpha_i(v) = 0$. Por lo tanto, $\alpha_i \in |s|$. $\square$

Dado un vértice $v \in K$, llamamos α_v a la función $\alpha_v \in |K|$ tal que $\alpha_v(v) = 1$ (*a fortiori*, $\alpha_v(v') = 0$, si $v' \neq v$). Todo elemento $\alpha \in |K|$ se puede escribir (de manera única) como una combinación lineal convexa de estas funciones:

$$\alpha = \sum_{v \in V} \alpha(v)\, \alpha_v \ .$$

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $X \subset E$ un espacio topológico cuya topología es coherente con su intersección con los subespacios de dimensión finita de E (dándole a éstos la única topología con respecto a la cual son espacios vectoriales topológicos). Entonces, si $F \subset E$ es un subespacio vectorial de dimensión finita, $X \cap F$ tiene la topología de subespacio de F, donde F tiene la etructura de e.v.t. de dimnsión finita.

Una función $f : |K| \to E$ se dice *lineal*, si

$$f(\alpha) = f\Big(\sum_{v \in V} \alpha(v)\alpha_v\Big) = \sum_{v \in V} \alpha(v)\, f(\alpha_v)$$

para todo $\alpha \in |K|$. Una función $f : |K| \to X$ se dice lineal, si $\iota_{X \hookrightarrow E} \circ f : |K| \to E$ es lineal (en particular, la combinación lineal $\sum_v \alpha(v)\, f(\alpha_v)$ tiene que ser un punto de X).

Toda función lineal en $|K|$ está determinada por su valor en los vértices α_v. Recíprocamente, toda función $f_0 : V \to E$ determina una función lineal $f : |K| \to E$. Si $X \subset E$ y $f_0 : V \to X$, entonces la función lineal correspondiente, f, es una función lineal en X, si y sólo si, para todo símplice $s \in K$, las combinaciones convexas $\sum_{v \in s} t^v f_0(\alpha_v)$ también pertenecen a X. En particular, si X es un subconjunto convexo de E, entonces toda función $V \to X$ se extiende a una función lineal $|K| \to X$.

En cuanto a la continuidad de una función lineal $f : |K| \to X$, si $s \in K$ es un q-símplice, entonces la restricción $f|_{|s|}$ coincide con la restricción de una función lineal definida en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por los vértices de s. A este espacio lo denotamos $F\big(\{\alpha_v\}_{v \in s}\big)$. Todo punto de este espacio vectorial se escribe de manera única como combinación lineal de los vértices $\{\alpha_v\}_{v \in s}$. A su vez, los puntos de $|s|$ se escriben de manera única como combinaciones lineales convexas de estos mismos elementos. Así, podemos identificar canónicamente $|s|$ con un subconjunto de $F\big(\{\alpha_v\}_{v \in s}\big)$. En cuanto a la función f, si $\alpha \in |s|$ y $\alpha = \sum_{v \in s} \alpha(v)\, \alpha_v$, entonces $f(\alpha) = \sum_{v \in s} \alpha(v)\, f(\alpha_v)$. Pero, por otro lado, por propiedad universal de $F\big(\{\alpha_v\}_{v \in s}\big)$, las asignaciones $\alpha_v \mapsto f(\alpha_v)$ determinan unívocamente una función lineal $f_s : F\big(\{\alpha_v\}_{v \in s}\big) \to E$. Esta extensión cumple que

$$f_s|_{|s|} = f|_{|s|} \ ,$$

pues ambas están dadas por la misma fórmula en términos de los elementos de la base $\{\alpha_v\}_{v \in s}$. En particular, $f_s(|s|) \subset X$. Notemos también que la topología en $|s|$ es exactamente la topología inducida como subespacio de $F\big(\{\alpha_v\}_{v \in s}\big)$ y que X es un subespacio topológico de E, con lo cual, para ver $f : |K| \to X$ es continua, alcanza con ver que las funciones f_s son continuas. Pero f_s, por ser lineal, tiene imagen en un subespacio $W \subset E$ de dimensión finita. Por lo tanto, $f_s : F\big(\{\alpha_v\}_{v \in s}\big) \to W$ es continua. Como la inclusión $W \to E$ es continua, f_s es continua. En definitiva, toda función lineal $f : |K| \to X$ es automáticamente continua…

Observación 2.4.2. Dado un complejo simplicial K consideramos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por todos los vértices de K: $E = F\big(\{\alpha_v\}_{v\in K}\big)$. El conjunto $|K|$ es un subconjunto de este espacio: todo elemento $\alpha \in |K|$ es una combinación lineal convexa de los elementos de la base (pero no todas tales combinaciones pertenecen a $|K|$). La topología coherente en $|K|$ está determinada por la topología en cada uno de los subconjuntos $|s|$, $s \in K$. Pero la topología en $|s|$ es la topología de subespacio del $\mathbb{R}$-espacio de dimensión finita generado por aquellos vértices de K que pertenecen a s.

Dada una transformación simplicial $\varphi : K \to K'$, aplicando el funtor $|\cdot|$, se obtiene una función lineal: $|\varphi| : |K| \to |K'|$ está dada por la fórmula

$$|\varphi|\,(\alpha) \;=\; \sum_{v\in V} \alpha(v)\,\alpha_{\varphi(v)} \;=\; \sum_{v\in V} \alpha(v)\;|\varphi|\,(\alpha_v)\ .$$

2.5 Homotopías con complejos

Sea $f : X \to Y$ una función continua. Definimos el *cilindro de f* como el cociente

$$\mathrm{Z}_f \;=\; \big((X \times [0,1]) \sqcup Y\big)/\sim\ \ ,$$

identificando los puntos $(x,1) \sim f(x) \in Y$. Dado un espacio topológico X y un conjunto puntual w, el *cono de X con vértice w* es el cilindro de la función constante $X \to w$. Denotaremos este espacio por $X * w$, o simplemente C_X, omitiendo la referencia al vértice w.

Lema 2.5.1. *Sea $s \in K$ un símplice de un complejo K. El cono $|\dot{s}| * w$ es homeomorfo a $|s|$.*

Demostración. Sea $w_0 \in \langle s\rangle$ un punto arbitrario (una función) y sea $f : |\dot{s}| * w \to |s|$ la función

$$f[\alpha,t] \;=\; tw_0 + (1-t)\alpha\ .$$

Esta función es la factorización de la función en $(|\dot{s}| \times [0,1]) \sqcup w$ dada por

$$\begin{aligned} (\alpha,t) \;&\mapsto\; tw_0 + (1-t)\alpha \quad \text{y} \\ w \;&\mapsto\; w_0\ . \end{aligned}$$

Notemos que esta función (y, por lo tanto, su factorización) está bien definida porque $|s|$ es convexo. Ambas partes de la definición en la unión disjunta son continuas. La función f es, en consecuencia, continua.

Para ver que f es un homeomorfismo, es suficiente ver que es una biyección. Supongamos que $[\alpha,t]$ y $[\beta,t']$ son tales que

$$tw_0 + (1-t)\alpha \;=\; t'w_0 + (1-t')\beta\ .$$

Como $\alpha \in |\dot{s}|$, α se anula en al menos uno de los vértices de s. Por otro lado, como w_0 está en el símplice interior $\langle s \rangle$, todas las coordenadas de w_0 son positivas. Si $v \in s$ es tal que $\alpha(v) = 0$, entonces

$$tw_0(v) \;=\; t'w_0(v) + (1-t')\beta(v) \ .$$

Como $w_0(v) > 0$, se deduce que $t \geq t'$. Análogamente, intercambiando los roles de α y de β, se deduce que $t' \geq t$. En definitiva, $t = t'$. La igualdad

$$(1-t)\alpha \;=\; (1-t)\beta$$

implica que, o bien $t = t' = 1$, o bien $t = t'$ y $\alpha = \beta$. En todo caso $[\alpha, t] = [\beta, t']$.

Para ver que f es suryectiva, notamos, primero, que, si $\alpha \in |\dot{s}|$, entonces $f[\alpha, 0] = \alpha$ y que $f[w] = w_0$. Resta ver que los puntos en $\langle s \rangle \smallsetminus \{w_0\}$ también están en la imagen de f. Para eso, veremos que por todo punto $\alpha \in \langle s \rangle$, $\alpha \neq w_0$ pasa un segmento que va desde w_0 a algún punto de $|\dot{s}|$. Sea $\phi : \mathbb{R} \to F$ la función

$$\phi(t) \;=\; (1+t)\alpha - tw_0 \ ,$$

donde $F = F\big(\{\alpha_v\}_{v \in s}\big)$ (abusando un poco más de la notación, podríamos escribir $F(s)$ para denotar este espacio). Esta función es continua y $\phi(0) = \alpha \in \langle s \rangle$ que es abierto en F. Como $\alpha \neq w_0$ y las coordenadas de ambos suman 1, debe valer que $\alpha(v') < w_0(v')$ para algún vértice $v' \in s$. Mirando esta coordenada, se obtiene una función monótona decresciente estrictamente en t:

$$\phi(t)(v') \;=\; \alpha(v') - t(w_0(v') - \alpha(v')) \ .$$

Por lo tanto, existe un único valor de t tal que $\phi(t)(v') = 0$, además este valor de t debe ser positivo. Como los vértices de s son finitos, debe existir un menor valor positivo $t_0 > 0$ tal que $\phi(t_0)(v) = 0$ para algún vértice $v \in s$. En particular, el punto $\phi(t_0) \in |s|$ pertenece, en realidad, a $|\dot{s}|$ y

$$\alpha \;=\; \frac{t_0}{1+t_0}\, w_0 + \frac{1}{1+t_0}\, \phi(t_0) \ .$$

En particular, f es sobre. □

Contar con un punto en $\langle s \rangle$ permite parametrizar los puntos del espacio $|s|$ mediante las coordenadas $[\alpha, t]$ del cono $\mathrm{C}_{|\dot{s}|}$ y la función correspondiente definida como en la demostración del lema 2.5.1. Para poder hacer esto de alguna manera canónica, definimos el *baricentro* de un símplice s como el punto $b(s) \in \langle s \rangle$ dado por

$$b(s) \;=\; \sum_{v \in s} \frac{1}{1 + \dim s}\, \alpha_v \ .$$

Lema 2.5.2. *Sea $s \in K$ un símplice. El subespacio $(|s| \times \{0\}) \cup (|\dot{s}| \times [0,1])$ es un retracto por deformación fuerte de $|s| \times [0,1]$.*

Demostración. Si $\dim s = 0$, $|s|$ consta de un único punto y $|\dot{s}| = \varnothing$, $|s| \times \{0\}$ es un punto en el intervalo $|s| \times [0,1]$. Si $\dim s > 0$, se define una homotopía

$$F \,:\, (|s| \times [0,1)) \times [0,1] \;\to\; |s| \times [0,1]$$

mediante una especie de proyección estereográfica desde un punto imaginario por fuera del símplice y por encima del baricentro, siguiendo los rayos que parten desde este punto hacia los lados de $(|s| \times \{0\}) \cup (|\dot{s}| \times [0,1])$. La fórmula es la siguiente:

$$F([\alpha, t], t', t'') \;=\; \begin{cases} \left(\left[\alpha, (1-t'')t + \frac{t''(2t-t')}{2-t'}\right], (1-t'')t' \right) & t' \leq 2t \\ \left([\alpha, (1-t'')t]\,, (1-t'')t' + \frac{t''(t'-2t)}{1-t} \right) & t' \geq 2t \end{cases} .$$

$\square$

Corolario 2.5.3. *Sea K un complejo simplicial y sea $L \subset K$ un subcomplejo. Entonces el subespacio $(|K| \times \{0\}) \cup (|L| \times [0,1])$ es un retracto por deformación fuerte de $|K| \times [0,1]$.*

Demostración. Para cada $n \geq -1$, definimos

$$X^n \;=\; (|K| \times \{0\}) \,\cup\, \left(\left| K^{(n)} \cup L \right| \times [0,1] \right) .$$

La demostración se divide en dos partes: primero deformar X^n en X^{n-1} para $n \geq 0$ y luego pegar, concatenar adecuadamente las deformaciones. Notemos que

$$\begin{aligned} X^{-1} \;&=\; (|K| \times \{0\}) \,\cup\, (|L| \times [0,1]) \quad \text{y} \\ |K| \times I \;&=\; \bigcup_{n \geq -1} X^{-1} \;. \end{aligned}$$

Sea $n \geq 0$ y sea $s \in K^{(n)} \smallsetminus L$. Por el lema 2.5.2, existe una retracción por deformación fuerte

$$F_s \,:\, |s| \times [0,1] \times [0,1] \;\to\; |s| \times [0,1]$$

de $|s| \times [0,1]$ en $(|s| \times \{0\}) \cup (|\dot{s}| \times [0,1])$. Definimos $F_n : X^n \times [0,1] \to X^n$ por

$$\begin{aligned} F_n|_{|s| \times [0,1] \times [0,1]} \;&=\; F_s \qquad \text{si } s \in \smallsetminus^{(K)} L \quad \text{y} \\ F_n(x,t) \;&=\; x \qquad \text{si } x \in X^{n-1},\, t \in [0,1] \;. \end{aligned}$$

Entonces F_n es una retracción por deformación fuerte de X^n en X^{n-1}. Sea $f_n : X^n \to X^{n-1}$ la retracción correspondiente $f_n(x) = F_n(x,1)$.

Sea $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Para $n \geq 0$, sea $G_n : X^n \times [0,1] \to X^n$ la función dada por

$$G_0(x,t) \;=\; \begin{cases} x & \text{si } t \leq a_2 \\ F_0\left(x, \frac{t-a_2}{1-a_2}\right) & \text{si } t \geq a_2 \end{cases} ,$$

si $n = 0$ y, para $n \geq 1$,

$$G_n(x,t) \;=\; \begin{cases} x & t \leq a_{n+2} \\ F_n\big(x, \frac{t-a_{n+2}}{a_{n+1}-a_{n+2}}\big) & a_{n+2} \leq t \leq a_{n+1} \\ G_{n-1}(f_n(x),t) & \geq a_{n+1} \end{cases} ,$$

definida inductivamente. Para cada $n \geq 0$, la función G_n es una retracción por deformación fuerte de X^n en X^{n-1} y cumple que

$$G_n|_{X^{n-1}\times[0,1]} \;=\; G_{n-1} \;.$$

Entonces queda definida una función

$$G \;:\; |K| \times [0,1] \times [0,1] \;\to\; |K| \times [0,1]$$

tal que $G|_{X^n\times[0,1]} \;=\; G_n$. Esta función es una retracción por deformación fuerte de $|K| \times [0,1]$ en $(|K| \times \{0\}) \cup (|L| \times [0,1])$. □

Corolario 2.5.4. *Sea $L \subset K$ un subcomplejo. El par $(|K|\,,|L|)$ (con la inclusión) tiene la propiedad de extensión de homotopías respecto de cualquier espacio.*

Demostración. Sea $g : |K| \to Y$ una función continua y sea $G : |L| \times [0,1] \to Y$ tal que $G(\alpha,0) = g(\alpha)$, si $\alpha \in |L|$. Sea $f : (|K| \times \{0\}) \cup (|L| \times [0,1]) \to Y$ la función

$$\begin{aligned} f(\alpha,0) \;&=\; g(\alpha) \qquad \text{si } \alpha \in |K| \\ f(\alpha,t) \;&=\; G(\alpha,t) \qquad \text{si } \alpha \in |L|\,,\, t \in [0,1] \;. \end{aligned}$$

Esta función es continua. Sea H la función del corolario 2.5.3 y sea

$$r \;:\; |K| \times [0,1] \;\to\; (|K| \times \{0\}) \,\cup\, (|L| \times [0,1])$$

la retracción fuerte $r(x,t) = H((x,t),1)$. Entonces $F = f \circ r$ es una extensión de f y verifica

$$\begin{aligned} F(\alpha,0) \;&=\; g(\alpha) \qquad \text{si } \alpha \in |K| \\ F|_{|L|\times[0,1]} \;&=\; G \;. \end{aligned}$$

□

2.6 Realización geométrica

Lema 2.6.1. *Una función lineal $f : |s| \to \mathbb{R}^n$ es una inmersión si y sólo si el conjunto $\{f(v)\}_{v\in s}$ es un conjunto en posición general, afínmente independiente.*

Demostración. Sea $s = \{v_0, \ldots, v_q$ y sea $p_i = f(\alpha_{v_i})$ el punto correspondiente al vértice v_i. Supongamos que existen números reales $t^0, \ldots, t^q$ no todos nulos tales que $\sum_{i=0}^q t^i p_i = 0$ y $\sum_{i=0}^q t^i = 0$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $t^i \geq 0$ para $i \geq i_0$ y $t^i < 0$, si $i < i_0$. Entonces

$$\begin{aligned} p \,&:=\, \sum_{i<i_0} (-t^i)\, p_i \,=\, \sum_{i\geq i_0} t^i\, p_i \quad \text{y} \\ a \,&:=\, \sum_{i<i_0} (-t^i) \,=\, \sum_{i\geq i_0} t^i \ . \end{aligned}$$

Sean $\alpha, \beta \in |s|$ los puntos dados por

$$\begin{aligned} \alpha \,&=\, \sum_{i<i_0} \frac{-t^i}{a}\, \alpha_{v_i} \quad \text{y} \\ \beta \,&=\, \sum_{i\geq i_0} \frac{t^i}{a}\, \alpha_{v_i} \ . \end{aligned}$$

Entonces $f(\alpha) = f(\beta)$, por linealidad, y f no es inyectiva. Recíprocamoente, si $\alpha, \beta \in |s|$, $\alpha \neq \beta$ y $f(\alpha) = f(\beta)$, supongamos que $\alpha^{i_0} \neq \beta^{i_0}$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^q \alpha^i\, p_i \,=\, f(\alpha) \,=\, f(\beta) \,=\, \sum_{i=0}^q \beta^i\, p_i \quad \text{y} \\ \sum_{i=0}^q \alpha^i \,=\, 1 \,=\, \sum_{i=0}^q \beta^i \ . \end{aligned}$$

Tomando la diferncia, los coeficientes $\alpha^i - \beta^i$ no son todos nulos y

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^q (\alpha^i - \beta^i)\, p_i \,=\, 0 \quad \text{y} \\ \sum_{i=0}^q (\alpha^i - \beta^i) \,=\, 0 \ , \end{aligned}$$

con lo cual, los puntos $\{p_0, \ldots, p_q\}$ no están en posición general. $\square$

Sea $\alpha \in |K|$. Entonces $\alpha \in \langle s \rangle$ para algún símplice $s \in K$ y $\alpha \mathrm{st}\, v$ para algún vértice v de K. Este vértice, si K es un complejo localmente finito, pertenece a finitos símplices. Sea $C = \bigcup_{v\in s} |s|$. Entonces $\alpha \in C$ y C es una unión finita de subconjuntos compactos de $|K|_d$ y, por lo tanto, compacto. Si $L = \bigcup_{v\in s} \overline{s}$, entonces L es un subcomplejo finito de K y $\alpha \in \mathrm{st}\, v \subset |L|_d$. Esto demuestra el siguiente lema. (Notemos que también podemos incluir C en la unión de una cantidad finita de símplices "abiertos" $\langle s \rangle$).

Lema 2.6.2. *Sea K un complejo simplicial localmente finito. Todo punto $\alpha \in |K|_d$ tiene un entorno de la forma $|L|_d$ para algún subcomplejo finito $L \subset K$. Es decir, $\alpha \in U$ para cierto abierto $U \subset |L|_d$.*

Teorema 2.6.3. *Sea K un complejo simplicial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *K es localmente finito;*

(b) *$|K|$ es localmente compacto;*

(c) *la identidad $|K| \to |K|_d$ es un homeomorfismo;*

(d) *$|K|$ es metrizable;*

(e) *$|K|$ verifica el primer axioma de numerabilidad: todo punto posee una base numerable de entornos.*

Demostración. (b) implica (c): Sea $U \subset |K|$ un abierto con clausura $\overline{U}$ compacta ($|K|$ es Hausdorff). Como $\overline{U}$ es compacta, existe una cantidad finita de símplices s tales que $\overline{U}$ está contenida en la unión de los finitos símplices abiertos $\langle s \rangle$, por el corolario 2.3.4. La unión de estos símplices forma un subcomplejo finito $L \subset K$ y $\overline{U} \subset |L|$. Como L es finito, la identidad $|L| \to |L|_d$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, U es abierto en $|L|_d$. Sea $K_1 \subset K$ el subcomplejo

$$K_1 \, = \, \big\{ s \in K \, : \, U \cap |s| = \varnothing \big\} \; .$$

Como $U \subset |K|$ es abierto (con la topología coherente),

$$U \, \cap \, |s| \, = \, \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad U \, \cap \, \langle s \rangle \, = \, \varnothing \; ,$$

con lo cual, si $s \in K \smallsetminus K_1$, entonces $\langle s \rangle \cap |L| \neq \varnothing$. En particular, si $s \in K \smallsetminus K_1$, existe $\alpha \in |K|$ tal que

$$\alpha \, \in \, \langle s \rangle \, \cap \, |L| \;\; .$$

Pero $\alpha \in |L|$ quiere decir que $\{\alpha \neq 0\} \in L$ y $\alpha \in \langle s \rangle$ quiere decir que $\{\alpha \neq 0\} = s$. En definitiva, tenemos una descomposición del complejo K como unión de los dos subcomplejos:

$$K \, = \, K_1 \, \cup \, L \; .$$

De esta descomposición se deduce la descomposición

$$|K|_d \, = \, |K_1|_d \, \cup \, |L|_d \;\; .$$

En particular, $|K|_d \smallsetminus |K_1|_d = |L|_d \smallsetminus |K_1|_d$. Como $U \subset |L|_d$ es abierto y U está contenido en $|L|_d \smallsetminus |K_1|_d$, se deduce que U es abierto en $|K|_d \smallsetminus |K_1|_d$. Pero $|K_1|_d$ es cerrado en $|K|_d$ y, en consecuencia, U es abierto en $|K|_d$.

(e) implica (a): si K no es localmente finito, existe algún vértice $v \in K$ que pertenece a todos los símplices de una familia infinita numerable de símplices de K, $\{s_i\}_{i \geq 1}$. Supongamos que dicho vértice v admite una base numerable de entornos (del

punto correspondiente $\alpha_v \in |K|$), $\{U_i\}_{i\geq 1}$ en $|K|$ (topología coherente), y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $U_i \supset U_{i+1}$ para todo $i \geq 1$. Para cada $i \geq 1$, como $|s_i| \subset |K|$ es cerrado, $\overline{\langle s_i \rangle} = |s_i|$. Como $\alpha_v \in |s_i|$ y U_j es un abierto que contiene al punto α_v, se deduce que existe

$$\alpha_i \in \langle s_i \rangle \cap U_i \ .$$

Como los abiertos U_i constituyen una base de entornos de α_v y $U_i \supset U_{i+1}$ para todo i, la sucesión $\{\alpha_i\}_{i\geq 1}$ tiende a α_v en la topología de $|K|$. Como $\alpha_i \in \langle s_i \rangle$, en particular $\alpha_i \neq \alpha_v$ para todo i, pero también, dado un símplice arbitrario $s \in K$, la intersección $|s| \cap \{\alpha_i\}_{i\geq 1}$ es a lo sumo un conjunto finito. Como en el comentario previo al lema 2.3.4, esto implica que $\{\alpha_i\}_{\imath\geq 1}$ es discreto en $|K|$, lo que contradice el hecho de que tenga un punto de acumulación. $\square$

Una *realización* de un complejo simplicial K en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E (cuya topología se caracteriza por ser coherente con los subespacios de dimensión finita) es una inmersión lineal $|K| \to \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.6.4. *Sea K un complejo simplicial. Si K admite una realización $|K| \to \mathbb{R}^n$ en un espacio de dimensión finita, entonces K es a lo sumo numerable, localmente finito y $\dim K \leq n$. Recíprocamente, si K es numerable, localmente finito y $\dim K \leq n$, entonces K admite una realización en $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

2.7 Subdivisiones

Una *subdivisión* de un complejo simplicial K es un complejo simplicial K' con las siguientes tres propiedades:

(i) los vértices de K' son puntos de $|K|$,

(ii) si $s' \in K'$ es un símplice, entonces existe un símplice $s \in K$ tal que $s' \subset |s|$ y

(iii) la función lineal $|K'| \to |K|$ que se obtiene a partir de la aplicación $\alpha_{v'} \mapsto v'$ definida en los puntos correspondientes a los vértices de K' es un homeomorfismo.

Observación 2.7.1. Sea K un complejo simplicial y sea $\Phi : |K| \to X$ una función lineal. Si K' es una subdivisión de K, entonces Φ también es lineal en K' ($\Phi \circ f : |K'| \to X$ es lineal).

Lema 2.7.2. *Sea K un complejo simplicial. Toda subdivisión de una subdivisión de K es una subdvisión de K y, dadas dos subdivisiones K' y K'' de K existe una subdivisión de K que es subdivisión de K' y de K''.*

Observación 2.7.3. Sean K, K' complejos simpliciales que verifican las condiciones *(i)* y *(ii)* de la definición de subdivisión. Entonces la aplicación $\alpha_{v'} \in |K'| \mapsto v' \in |K|$

determina una función lineal $f : |K'| \to |K|$: si $s' \in K'$ es un símplice y $s \in K$ es tal que $s' \subset |s|$, entonces definimos $f_{s',s} : |s'| \to |s|$ por

$$f_{s'}\Big(\sum_{v' \in s'} t^{v'}\, \alpha_{v'}\Big) \;=\; \sum_{v' \in s'} t^{v'}\, v' \;.$$

Como $s' \subset |s|$, la función $f_{s',s}$ está bien definida. La función $f_{s',s}$ proyecta el símplice $|s'|$ sobre la cáscara convexa generada por las imágenes de sus vértices en $|s|$. Si el símplice s está contenido en algún símplice $s_1 \in K$, entonces la inclusión $s \subset s_1$ determina una inclusión $\iota_{s,s_1} : |s| \subset |s_1|$ y vale que

$$\iota_{s,s_1} \circ f_{s',s}(\alpha) \;=\; f_{s',s_1}(\alpha)$$

para todo $\alpha \in |s'|$, por unicidad. En particular, queda determinada una función lineal y continua $f_{s'} : |s'| \to |K|$. Si $s'' \in K'$ es otro símplice y $s' \cap s'' \neq \varnothing$, entonces, nuevamente porque las funciones lineales están determinadas por su valor en los vértices,

$$f_{s'}|_{|s' \cap s''|} \;=\; f_{s''}|_{|s' \cap s''|} \;.$$

En definitiva, queda determinada una función lineal y continua en todo el espacio $|K'|$ del complejo.

Esta función no es, en general, inyectiva y, por lo tanto, no es posible identificar $|K'|$ con un subespacio de $|K|$ (no estamos asumiendo la propiedad *(iii)*, aun). La inyectividad puede fallar por distintas razones: por ejemplo, si $s', s'' \in K'$ y $s \in K$ es tal que $s', s'' \subset |s|$ las cáscaras convexas de s' y de s'' en $|s|$ pueden solaparse de manera tal que su intersección no sea la cáscara convexa generada por ningún símplice de K'; otra posibilidad es que las funciones parciales $f_{s'} : |s'| \to |K|$ reduzcan la dimensión de los símpices en donde están definidas, es decir, la imagen de los vértices de $|s'|$ puede ser un conjunto afínmente dependiente de $|s|$, los vértices de $s' \subset |s|$ pueden no estar en posición general.

A pesar de la posible falla de la inyetividad de $f : |K'| \to |K|$, todo símplice $s' \in K'$ está incluido en alguno de los espacios $|s|$ y, por finitud de s, existe un símplice $s \in K$ más chico tal que $|s| \supset s'$ (y dicho símplice es único). La cáscara convexa $f(|s'|)$ de s' en $|s|$ es cerrada. Por otro lado, como s' es un subconjunto finito arbitrario de $|s|$, la cáscara convexa puede estar contenida en el interior $\langle s \rangle$, o bien intersecar alguna cara propia de s y, en tal caso, la intersección puede ser total o parcial. En todo caso, si $\beta \in \langle s' \rangle$ entonces se cumple que $f(\beta) \in \langle s \rangle$.

Demostremos esta última afirmación. Si $v' \in s'$, como $s' \subset |s|$, entonces

$$v' \;=\; \sum_{v \in s} t^{v}_{v'}\, \alpha_v$$

y, como s es el símplice más chico tal que $s' \subset |s|$, entonces, para todo $v \in s$, existe algún

$v' \in s'$ tal que $t^v_{v'} \neq 0$ (si no el vértice $v \in s$ se podría omitir). Si $\beta \in \langle s' \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \beta \;&=\; \sum_{v' \in s'} \beta^{v'} \beta_{v'} \quad \text{y} \\ f(\beta) \;&=\; \sum_{v' \in s'} \beta^{v'} f(\beta_{v'}) \;=\; \sum_{v' \in s'} \beta^{v'} \sum_{v \in s} t^v_{v'} \, \alpha_v \\ &=\; \sum_{v \in s} \Big(\sum_{v' \in s'} \beta^{v'} t^v_{v'} \Big) \alpha_v \ . \end{aligned}$$

Como $\beta^{v'} > 0$ para todo v' y, para cada v existe $t^v_{v'} > 0$, vale que los coeficientes $\sum_{v' \in s'} \beta^{v'} t^v_{v'}$ son todos positivos. Por lo tanto, $f(\beta) \in \langle s \rangle$.

Lema 2.7.4. *Sean K', K complejos simpliciales que verifican las condiciones* (i) *y* (ii) *de la definición de subdivisión. Entonces K' es una subdivisión de K, si y sólo si,* (iii') *para todo símplice $s \in K$, el conjunto*

$$\big\{ f\big(\langle s' \rangle\big) \,:\, s' \in K',\, f\big(\langle s' \rangle\big) \subset \langle s \rangle \big\}$$

es una partición finita de $\langle s \rangle$.

Demostración. Si $s \in K$, sea $K'(s) \subset K'$ el subconjunto

$$K'(s) \;=\; \bigcup_{s_1 \in \overline{s}} \big\{ s' \in K' \,:\, f\big(\langle s' \rangle\big) \subset \langle s_1 \rangle \big\} \ .$$

Asumamos que se verifica *(i)* y definamos el subconjunto $V'(s) = \big\{ v' \in K' \,:\, v' \in |s| \,\big\}$ de los vértices de K'. Entonces $\{v'\} \in K'(s)$, para todo $v' \in V'$. Sean $s' \in K'(s)$ y $s'' \subset s'$. Como K' es un complejo, $s'' \in K'$. Como el conjunto $f\big(\langle s' \rangle\big)$ está contenido en $\langle s_1 \rangle$ para alguna cara $s_1 \subset s$, los vértices de s' están contenidos en $|s_1|$ y, en particular, en s. Como s'' es un subconjunto de estos vértices, $s'' \subset |s|$, también. En particular, $s'' \subset |s_2|$ para alguna cara s_2 de s. Tomando s_2 como la cara más chica con esta propiedad, se deduce, por lo visto en la observación 2.7.3, que $f\big(\langle s'' \rangle\big) \subset \langle s_2 \rangle$ y, por lo tanto, $s'' \in K'(s)$. En definitiva, $K'(s)$ es un subcomplejo de K' cuyo conjunto de vértices es $V'(s)$.

Supongamos que se cumplen *(i)* y que el conjunto de la condición *(iii')* es finito. Entonces dado $s \in K$, el subcomplejo $K'(s) \subset K'$ es un complejo finito. Si, además, suponemos que el conjunto de *(iii')* es una partición, entonces, la función lineal $h_s : |K'(s)| \to |s|$ dada en vértices por $h_s(\alpha_{v'}) = v' \in |s|$ es continua y biyectiva entre espacios compactos Hausdorff. En particular, las condiciones *(i)* y *(iii')* implican que h_s es un homeomorfismo. La condición *(ii)* implica que todo símplice de K' pertence a alguno de los subcomplejos $K'(s)$. Notemos que

$$h_s \;=\; f|_{|K'(s)|} \ .$$

Por lo tanto, *(i)*, *(ii)* y *(iii')* implican que $f : |K'| \to |K|$ tiene una inversa continua dada por $f^{-1}|_{|s|} = h_s^{-1}$. En definitiva, K' es una subdivisión de K.

Recíprocamente, la familia $\{\langle s'\rangle \,:\, s' \in K'\}$ particiona al espacio $|K'|$. Sea $s \in K$ y sea $s' \in K'$. Entonces, por la observación 2.7.3, o bien $f(\langle s'\rangle) \cap \langle s\rangle = \varnothing$, o bien $f(\langle s'\rangle) \subset \langle s\rangle$. Si asumimos *(iii)*, que $f : |K'| \to |K|$ es un homeomorfismo, entonces el conjunto

$$\{f(\langle s'\rangle) \,:\, s' \in K',\, f(\langle s'\rangle) \subset \langle s\rangle\}$$

es una partición de $\langle s\rangle$. Pero, como $|s|$ es compacto en $|K'|$ (vía el homeomorfismo f), el lema 2.3.4 implica que $|s|$ está contenido en una unión finita de conjuntos de la forma $\langle s'\rangle$ con $s' \in K'$ y, por lo tanto, la partición de $\langle s\rangle$ debe ser finita. $\square$

Observación 2.7.5. Si $L \subset K$ es un subcomplejo y K' es una subdivisión de K, entonces el subconjunto

$$L' = \{s' \in K' \,:\, f(\langle s'\rangle) \subset |L|\}$$

es un subcomplejo de K' y, si $t \in L$, entonces

$$\{f(\langle s'\rangle) \,:\, s' \in K',\, f(\langle s'\rangle) \subset \langle t\rangle\} = \{f(\langle s'\rangle) \,:\, s' \in L',\, f(\langle s'\rangle) \subset \langle t\rangle\}\ .$$

En particular, por el lema 2.7.4, L' es una subdivisión de L. Dicho de otra manera, toda subdivisión de un complejo subdivide a todo subcomplejo también. Notemos que L' es el único subcomplejo de K' con esta propiedad. Lo llamamos *la subdivisión inducida por* K'.

Observación 2.7.6. ¿Vale más en general? Dada una transformación simplicial $\varphi : L \to K$ y una subdivisión K' de K, ¿existe una subdivisión L' de L y una transformación simplicial $\varphi' : L' \to K'$ compatibles con la subdivisión K' y la transformación φ? La compatibilidad podría estar dada "naturalmente" en términos de las realizaciones geométricas de los complejos y de los morfismos, es decir, en términos del funtor $|\cdot|$. La pregunta es la siguiente: dados un par simplicial $\varphi : L \to K$ y una subdivisión K' de K, ¿existe un par simplicial de la forma $\varphi' : L' \to K'$ tal que L' sea una subdivisión de L y tal que

$$\begin{array}{ccc} |L'| & \xrightarrow{|\varphi'|} & |K'| \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ |L| & \xrightarrow[|\varphi|]{} & |K| \end{array}$$

sea un diagrama conmutativo de espacios topológicos y funciones continuas? Las funciones $f : |K'| \to |K|$ y $g : |L'| \to |L|$ son los homeomorfismos asociados a las subdivisiones: están dadas en los vértices por $f(\alpha_{v'}) = v'$ para todo vértice v' de K' y por $g(\beta_{w'}) = w'$ para todo vértice w' de L'.

Supongamos que existe un par simplicial con estas características y sean

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{vert}(L) \quad , \quad W' = \operatorname{vert}(L')\ , \\ V &= \operatorname{vert}(K) \quad , \quad V' = \operatorname{vert}(K')\ . \end{aligned}$$

Entonces $W' \subset |L|$ y $\varphi\big(W'\big) \subset V' \subset |K|$. Si $w' \in W'$, entonces

$$\begin{aligned} f(\big|\varphi'\big|\,\beta_{w'}) &= f(\alpha_{\varphi' w'}) = \varphi' w' \quad \text{y} \\ |\varphi|\,\big(g(\beta_{w'})\big) &= |\varphi|\, w' \ . \end{aligned}$$

Es decir, la transformación simplicial φ' verifica, en los vértices de L', la igualdad

$$\varphi' w' = |\varphi|\, w' \ .$$

Recordando que toda transformación simplicial está determinada por su valor en los vértices, se deduce que, fijada la subdivisión L' (que, por definición, se construye con puntos de la realización $|L|$), existe a lo sumo una transformación simplicial $\varphi' : L' \to K'$ tal que $f \circ |\varphi'| = |\varphi| \circ g$. Notemos que el conjunto W' de vértices de L' está (casi) determinado por φ y por la subdivisión K': si $w' \in W'$ entonces $\varphi(w') \in V'$ debe ser un vértice de la subdivisión K'.

Otra observación que puede llegar a ser importante es que la subdivisión L' se puede definir en cada uno de los símplices $t \in L$ y cada uno de los espacios $|t|$ es compacto y homeomorfo a un símplice de $\mathbb{R}^{q+1}$ para algún $q \geq 0$. En particular, si $v' \in V'$ es un vértice de K', entonces $|t| \cap \big(|\varphi|^{-1} \left(\{v'\}\right)\big)$ es igual a un subespacio afín intersecado con $|t|$ y, por lo tanto, algo que tiene “forma de símplice”: existe un conjunto finito $t' \subset |t|$ tal que

$$\operatorname{co}\big(t'\big) = |t| \cap \big(|\varphi|^{-1} \left(\{v'\}\right)\big)$$

y minimal con esta propiedad. Este conjunto t' tiene necesariamente la propiedad de que, si llamamos T' al complejo cuyos vértices son los puntos de t' y cuyos símplices son todos los subconjuntos no vacíos de t' (es decir, $T' = \mathcal{P}(t') \smallsetminus \{\varnothing\}$), entonces T', junto con la función lineal que en los vértices (los puntos de t') es la identidad, es una triangulación de $\operatorname{co}(t')$. Es de esperar que L' tenga como vértices a la unión $\bigcup_{t \in L, v' \in V'} t'$. En caso de existir otros vértices en L', éstos deberán pertenecer a alguno de los conjuntos $\operatorname{co}(t')$. Podrían existir distintas subdivisiones de L que cumplan lo pedido.

Diremos que un par simplicial $\varphi' : L' \to K'$ subdivide un par simplicial $\varphi : L \to K$, si L' es una subdivisión de L, K' es una subdivisión de K y $f \circ |\varphi'| = |\varphi| \circ g$, donde g y f son los hoemomorfismos asociados a las subdivisiones.

Usando el lema 2.8.1, se puede ver inductivamente que existe una subdivisión L' de L, una subdivisión K'' de K' y una transformación simplicial $\varphi'' : L' \to K''$ tales que φ'' subdivide a φ (tal vez, eligiendo el punto w_0 en alguna de las “caras” colapsadas de L se pueda demostrar que 2.8.1 sigue valiendo y que no resulta necesario subdividir K').

Observación 2.7.7. Sea φ ($\varphi : L \to K$) una triangulación de h ($h : A \to X$) y sea $(\psi', \psi) : |\varphi| \to h$ el homeomorfismo de pares correspondiente. Si φ' ($\varphi' : L' \to K'$) es una subdivisión de φ, entonces φ' es una triangulación h, vía el homeomorfismo de pares $(\psi' \circ f, \psi \circ g)$.

$$\begin{array}{ccc}
|L'| & \xrightarrow{|\varphi'|} & |K'| \\
{\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
|L| & \xrightarrow{|\varphi|} & |K| \\
{\scriptstyle \psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi'} \\
A & \xrightarrow[h]{} & X
\end{array}$$

Observación 2.7.8. Sea K' una subdivisión de un complejo simplicial K. Sean v y v' vértices de K y de K', respectivamente. Entonces $v' \in \operatorname{st}_K v$ (estrella en K, pues v podría (debería) ser un vértice de K', también), si y sólo si $\operatorname{st}_{K'} v' \subset \operatorname{st}_K v$.

2.8 La subdivisión baricéntrica

En esta sección introducimos una forma canónica de subdividir un complejo.

Lema 2.8.1. *Sea $s \in K$ un símplice en un complejo K. Sea K' una subdivisión del subcomplejo $\dot{s}$ de caras propias de s. Entonces, dado un punto arbitrario $w_0 \in \langle s \rangle$, el complejo $K' * w_0$ (ver ejemplo 2.12.7) es una subdivisión de $\overline{s}$.*

Demostración. El complejo $K' * w_0$ es la suma de los complejos K' y $\{\{w_0\}\}$ (es decir, el complejo que tiene a w_0 como único vértice). Los símplices de este compejo son de la forma: $s' \in K'$, el símplice puntual $\{w_0\}$ o $s' \sqcup \{w_0\}$ con $s' \in K'$. Entonces se cumplen *(i)* lso vértices de $K' * w_0 = V' \sqcup \{w_0\}$ son puntos de $|\overline{s}|$ y *(ii)* los símplices de $K' * w_0$ están contenidos en la realización de algún símplice de $\overline{s}$ (todos están contenidos en $|s|$). Del lema 2.5.1 (o de su demostración) se deduce que los puntos de la realización $|s| = |\overline{s}|$ o bien son iguales a w_0, o bien pertenecen a $|\dot{s}|$, o bien pertenecen a $\langle s' \sqcup \{w_0\} \rangle$, para un único símplice $s' \in K'$. Esto implica que *(iii')* los símplices abiertos de $K' * w_0$ determinan una partición finita de $|s|$. Precisamente, si $s_1 \in \overline{s}$, entonces el conjunto $\big\{ \langle t' \rangle \, : \, t' \in K' * w_0, \, \langle t' \rangle \subset \langle s_1 \rangle \big\}$ es una partición finita de $\langle s_1 \rangle$. Por el lema 2.7.4, $K' * w_0$ es una subdivisión de $\overline{s}$. □

Sea K un complejo simplicial y sea $\operatorname{sd} K$ la colección de conjuntos finitos y no vacíos de baricentros de símplices de K que están totalmente ordenados por inclusión de una cara en un símplice más grande. Es decir, un elemento de $\operatorname{sd} K$ es un conjunto de la forma

$$\{ b\,(s_0)\,, \, \ldots, \, b\,(s_q) \} \ ,$$

donde $s_0, \ldots, s_q \in K$ y s_{i-1} es una cara (propia) de s_i. En general, asumiremos que los elementos de un conjunto perteneciente a $\operatorname{sd} K$ están numerados de esta manera. La colección $\operatorname{sd} K$ constituye un complejo simplicial cuyos vértices son los conjuntos puntuales de baricentros de símplices de K.

De la definición del complejo $\operatorname{sd} K$, se deduce que los vértices de $\operatorname{sd} K$ son puntos de $|K|$ y que, si $s' = \{ b\,(s_0)\,, \, \ldots, \, b\,(s_q) \} \in \operatorname{sd} K$, entonces $s' \subset |s_q|$. En particular, $\operatorname{sd} K$

y K satisfacen las propiedades *(i)* y *(ii)* de la definición de subdivisión. Se puede ver también que, si $L \subset K$ es un subcomplejo, entonces $\mathrm{sd}\, L$ es un subcomplejo de $\mathrm{sd}\, K$ y que, si $s' \subset |s_q|$ y $b\,(s_q) \in s'$, entonces s_q es el símplice más chico de K que contiene a s' (tal que $s' \subset |s_q|$).

Porposición 2.8.2. $\mathrm{sd}\, K$ *es una subdivisión de* K*.*

Demostración. Todo lo que hay que ver es que se verifica la condición *(iii')*. Sea $s \in K$. Por la observación 2.7.3, si K' es un complejo simplicial cuyos vértices son puntos de $|K|$, $s' \in K'$ y $s \in K$ es el símplice más chico tal que $s' \subset |s|$, entonces $f\big(\langle s' \rangle\big) \subset \langle s \rangle$. De esto y de los comentarios anteriores, se deduce que

$$\begin{aligned}\big\{s' \in \mathrm{sd}\, K \,:\, \langle s' \rangle \subset \langle s \rangle\big\} &= \big\{s' \in \mathrm{sd}\, K \,:\, b\,(s) \text{ es el último vértice de } s'\big\}\\ &= \big\{s' \in \mathrm{sd}\, \overline{s} \,:\, \langle s' \rangle \subset \langle s \rangle\big\}\ .\end{aligned}$$

Veamos que para todo símplice $s \in K$ se cumple que $\mathrm{sd}\, \overline{s}$ es una subdivisión de $\overline{s}$ y que estamos en las condiciones del lema 2.7.4. Si $\dim s = q = 0$, entonces $\mathrm{sd}\, \overline{s} = \overline{s}$. Si $q > 0$ y asumimos que $\mathrm{sd}\, \overline{s_1}$ es una subdivisión de $\overline{s_1}$ para todo símplice s_1 de dimensión menor, entonces, $\mathrm{sd}\, \overline{s_1}$ es una subdivisión de $\overline{s_1}$ para toda cara propia $s_1 \in \dot{s}$. En particular, se deduce que $\mathrm{sd}\, \dot{s}$ es una subdivisión de $\dot{s}$. Finalmente, como $\mathrm{sd}\, \overline{s} = \big(\mathrm{sd}\, \dot{s}\big) * b\,(s)$, por el lema 2.8.1, concluimos que $\mathrm{sd}\, \overline{s}$ es una subdivisión de $\overline{s}$. $\square$

Llamamos *subdivisión baricéntrica de* K a la subdivisión $\mathrm{sd}\, K$ de K.

Observación 2.8.3. Sea $L \subset K$ un subcomplejo y sean $\mathrm{sd}\, L$ y $\mathrm{sd}\, K$ las subdivisiones baricéntricas correspondientes a L y a K. Entonces $\mathrm{sd}\, L$ es un subcomplejo de $\mathrm{sd}\, K$. Supongamos que $\{b\,(s_0)\,, \ldots, \, b\,(s_q)\}$ es un símplice de $\mathrm{sd}\, K$ cuyos vértices pertenecen a $\mathrm{sd}\, L$. Entonces, por definición, s_{i-1} es una cara propia de s_i y cada s_i pertenece a L. En particular, $\{b\,(s_0)\,, \ldots, \, b\,(s_q)\} \in \mathrm{sd}\, L$ y $\mathrm{sd}\, L \subset \mathrm{sd}\, K$ es un subcomplejo pleno.

Sea $L \subset K$ un subcomplejo y consideremos el par de espacios $(|K|\,, |L|)$ (un *par poliedral*. En general, un par poliedral es un par $h\,:\, A \to X$ (no necesariamente un subespacio) que admite una triangulación $(\varphi\,:\, L \to K, (f', f))$ (no necesariamente un subcomplejo)).

Porposición 2.8.4. *El subespacio* $|L| \subset |K|$ *es un retracto por deformación fuerte de un entorno de* $|L|$ *en* $|K|$*.*

Demostración. Por la observación 2.8.3, podemos asumir que L es un subcomplejo pleno de K. Sea $N \subset K$ el complemento de L en K. Notemos que $|K| \smallsetminus |N|$ es abierto en $|K|$ y contiene a $|L|$, por el lema 2.1.1. Demostraremos que $|L|$ es un retracto por deformación fuerte de este abierto.

Sea $\alpha \in |K| \smallsetminus |N|$. Entonces, o bien $\alpha \in |L|$, o bien existen vértices $v_0, \ldots, v_p \in L$ y $v_{p+1}, \ldots, v_q \in N$ tales que $\alpha \in \langle\{v_0, \ldots, v_q\}\rangle$. En el segundo caso,

$$\alpha = \sum_{i=0}^{q} \alpha^i\, \alpha_{v_i}\ ,$$

donde $\alpha^i > 0$ para todo $i \in [\![0, q]\!]$. Definimos

$$a = \sum_{i=0}^{p} \alpha^i ,$$

$$\alpha' = \sum_{i=0}^{p} \frac{\alpha^i}{a} \alpha_{v_i} \quad \text{y} \quad \alpha'' = \sum_{i=p+1}^{q} \frac{\alpha^i}{1-a} \alpha_{v_i} .$$

Entonces $\alpha = a\,\alpha' + (1-a)\,\alpha''$, $\alpha' \in |L|$ y $\alpha'' \in |N|$. Sea

$$F : \big(|K| \smallsetminus |N|\big) \times [0,1] \to \big(|K| \smallsetminus |N|\big)$$

la función dada por

$$F(\alpha, t) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \in |L| \\ t\,\alpha' + (1-t)\,\alpha & \text{si } \alpha \in |K| \smallsetminus \big(|N| \cup |L|\big) \end{cases} .$$

Entoncs F es continua y es una retracción por deformación fuerte de $|K| \smallsetminus |N|$ en $|L|$. La continuidad de F se deduce de que F es continua en $|L|$, por ser constante, y de que F es continua en cada subconjunto de la forma $|s' \cup s''| \cap \big(|K| \smallsetminus |N|\big)$, por ser una homotopía lineal. Además ambas definiciones se pegan bien: en la clausura de $|s' \cup s''| \cap \big(|K| \smallsetminus |N|\big)$ dentro de $|K| \smallsetminus |N|$, $\alpha' = \alpha$ y ambas definiciones coinciden. $\square$

2.9 Refinamientos

Todo complejo simplcial K admite una métrica, pero, en general, la topología inducida no coincide con la topología coherente en $|K|$. De hecho esto es así si y sólo si K es localmente finito. Diremos que una métrica en $|K|$ es *lineal*, si coincide con la métrica inducida por una realización de K dentro de un espacio vectorial topológico E cuya topología sea compatible con una métrica. Más específicamente, diremos que una métrica en $|K|$ es lineal, si es la métrica inducida por una norma (cualquiera) en algún espacio $\mathbb{R}^n$ vía una realización de K en $\mathbb{R}^n$. Notemos que todo complejo finito admite una métrica lineal. También es cierto que, dada una métrica lineal en $|K|$ y una subdivisión K' de K, entonces la misma métrica es lineal en $|K'|$. Dada una métrica (arbitraria) en $|K|$, se define la *densidad* (o *apertura*, *fineza*) de K como el supremo de los diámetros de sus símplices con respecto a esta métrica:

$$\operatorname{mesh} K = \sup\{\operatorname{diam}|s| : s \in K\} .$$

Lema 2.9.1. *Dada una métrica lineal en un m símplice s y dado un símplice $s' \in \operatorname{sd}\overline{s}$ de la subdivisión baricéntrica, se cumple que*

$$\operatorname{diam}\big|s'\big| \le \frac{m}{m+1} \operatorname{diam}|s| .$$

Lema 2.9.2. *Si K es un complejo de dimensión m, dada una métrica lineal en $|K|$, se cumple que*

$$\operatorname{mesh}\big(\operatorname{sd} K\big) \;\leq\; \frac{m}{m+1}\operatorname{mesh} K \;.$$

Sea X un espacio topológico y sea (K, f), $f : |K| \to X$, una triangulación de X por un complejo simplicial K. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X por abierto. Se dice que la triangulación *es más fina que* $\mathcal{U}$ o que *refina a* $\mathcal{U}$, si, para todo vértice v de K, existe un abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que $f\big(\operatorname{st} v\big) \subset U$. Si $X = |K|$ y $f : |K| \to |K|$ es la identidad de $|K|$, decimos también que el complejo K refina el cubrimiento $\mathcal{U}$. Si K' es una subdivisión de K y $f : |K'| \to |K|$ es el homeomorfismo dado por $\alpha_{v'} \mapsto v'$ en los vértices, también decimos que K' refina el cubrimiento $\mathcal{U}$.

Teorema 2.9.3. *Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de un espacio triangulable compacto X. Entonces existe una triangulación de X más fina que $\mathcal{U}$.*

La siguiente definición aprecerá en la demostración del teorema. Denominamos *subdivisiones baricéntricas iteradas* de un complejo simplicial K a las subdivisiones definidas recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \operatorname{sd}^0 K \;&=\; K \;, \\ \operatorname{sd}^n K \;&=\; \operatorname{sd}\big(\operatorname{sd}^{n-1} K\big) \quad \text{si } n \geq 1 \;. \end{aligned}$$

Demostración. Sea (K, f) una triangulación arbitraria de X. Entonces, como $f : |K| \to X$ es un homeomorfismo y X es compacto, por el corolario 2.3.6, K es un complejo finito y, por el teorema 2.6.4, admite una realización en un $\mathbb{R}$-espacio de dimensión finita. La métrica inducida por la norma euclidea de este espacio, por ejemplo, es lineal en $|K|$.

Supongamos que el espacio $|K|$ viene dado con una métrica lineal. Sea $\epsilon > 0$ un número de Lebesque para el cubrimiento $\big\{f^{-1}(U) \,:\, U \in \mathcal{U}\big\}$ de $|K|$ respecto de esta métrica. Esto quiere decir que, si $A \subset |K|$ tiene diámetro menor que ϵ, entonces $f(A)$ está contenido en U para algún abieto U del cubrimiento $\mathcal{U}$. Sea $m = \dim K$ y sea $N \geq 1$ tal que

$$\Big(\frac{m}{m+1}\Big)^N \cdot \operatorname{mesh} K \;\leq\; \epsilon/2 \;.$$

Para $n \geq N$, $\operatorname{mesh} \operatorname{sd}^n K \leq \epsilon/2$. Si v' es un vértice de $\operatorname{sd}^n K$, entonces el conjunto $\operatorname{st} v'$ tiene diámetro acotado por

$$\operatorname{diam} \operatorname{st} v' \;\leq\; 2 \cdot \operatorname{mesh} \operatorname{sd}^n K \;\leq\; \epsilon \;.$$

Entonces, para $n \geq N$, vale que

$$f\big(\operatorname{st} v'\big) \;\subset\; U$$

para algún abierto $U \in \mathcal{U}$, con lo que $(\operatorname{sd}^n K, f)$ es refina el cubrimiento $\mathcal{U}$. $\square$

2.10 Aproximación simplicial

Sean $h_1 : X_1 \to X_1'$ y $h_2 : X_2 \to X_2'$ pares de espacios topológicos y sea $(f', f) : h_1 \to h_2$ un morfismo de pares. Supongamos que existen transformaciones simpliciales $\varphi_1 : K_1' \to K_1$ y $\varphi_2 : K_2' \to K_2$ y triangulaciones $(\varphi_1, (\psi_1', \psi_1))$ de h_1 y $(\varphi_2, (\psi_2', \psi_2))$ de h_2.

$$
\begin{tikzcd}
|K_1| \arrow[dr, "\varphi_1"] \arrow[dd, "\psi_1"'] & & |K_2| \arrow[dr, "\varphi_2"] \arrow[dd, "\psi_2"] & \\
& |K_1'| \arrow[dd, "\psi_1'"'] & & |K_2'| \arrow[dd, "\psi_2'"] \\
X_1 \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, "h_1"'] & & X_2 \arrow[dr, "h_2"'] & \\
& X_1' \arrow[rr, "f'"'] & & X_2'
\end{tikzcd}
$$

La pregunta que surge es si existe una transformación simplicial $\varphi_1 \to \varphi_2$ cuya realización haga conmutar el diagrama anterior.

No hablaremos de pares por el momento. Sean K_1, K_2 complejos simpliciales y sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una función continua. Una transformación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ se dice que es una *aproximación simplicial de* f, si, dados $\alpha \in |K_1|$ y $s_2 \in K_2$, $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$ implica que $|\varphi|\,\alpha \in |s_2|$ (o, lo que es equivalente (por que esto es cierto para todo $s_2 \in K_2$), $|\varphi|\,\alpha \in |s_2|$ si $f(\alpha) \in |s_2|$).

Observación 2.10.1. Sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una función continua y sea $\varphi : K_1 \to K_2$ una aproximación simplicial de f. Si v es un vértice de K_1 y $f(\alpha_v)$ se corresponde con un vértice de K_2, entonces $|\varphi|\,\alpha_v = f(\alpha_v)$ y, por lo tanto, $f(\alpha_v) = \beta_{\varphi(v)}$. ($\alpha_v$ denota la característica de v y $\beta_{\varphi(v)}$ denota la característica de $\varphi(v)$). Notemos que, en principio, $f(\alpha_v)$ no está forzada a ser un punto correspondiente a un vértice de K_2. Incluso si este fuese el caso, f podría no ser simplicial... El siguiente lema muestra que el caso en que f es "simplicial" no es muy interesante.

Lema 2.10.2. *Sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una función continua y sea $L_1 \subset K_1$ un subcomplejo. Supongamos que existe una transformación simplicial $\psi : L_1 \to K_2$ tal que*

$$f|_{|L_1|} = |\psi| \ .$$

Si $\varphi : K_1 \to K_2$ es una aproximación simplicial de f, entonces

$$|\varphi|\,|_{|L_1|} = |\psi| \ ,$$

es decir, $\varphi|_{L_1} = \psi$. En particular, existe una única aproximación simplicial a una función continua de la forma $|\varphi|$ y dicha transformación es φ.

En otras palabras, si una función continua f está inducida por una transformación simplicial en algún subcomplejo del dominio, entonces toda aproximación simplicial de f está forzada a coincidir con dicha transformación en dicho subcomplejo.

Demostración. Sean f ,ψ y φ como en el enunciado. Sea $\alpha \in |L_1|$ y supongamos que $\alpha = \alpha_v$ con v un vértice de L_1. Por hipótesis, como $f|_{L_1} = |\psi|$, se cumple

$$f(\alpha_v) \;=\; |\psi|\, \alpha_v \;=\; \beta_{\psi(v)}$$

y, por otro lado, si φ es una aproximación simplicial de f, entonces, por lo visto en la observación 2.10.1,

$$|\varphi|\, \alpha_v \;=\; f(\alpha_v) \;.$$

En particular, $|\varphi|\, \alpha_v = |\psi|\, \alpha_v$, $\beta_{\varphi(v)} = \beta_{\psi(v)}$ y $\varphi(v) = \psi(v)$ para todo vértice de L_1. $\square$

Repetimos la definición de aproximación simplicial: si $f : |K_1| \to |K_2|$ es una función continua, lo que se requiere de una transformación $\varphi : K_1 \to K_2$ para que sea una aproximación simplicial de f es que, para todo punto $\alpha \in |K_1|$, si su imagen $f(\alpha)$ está contenida en (el interior de) un símplice $s_2 \in K_2$, entonces $|\varphi|\, \alpha$ no puede estar muy lejos: de hecho debe pertenecer al mismo símplice (a lo sumo pertenece a la clausura de $\langle s_2 \rangle$).

Lema 2.10.3. *Sea* $\varphi : K_1 \to K_2$ *una aproximación simplicial de* $f : |K_1| \to |K_2|$. *Sea* $A \subset |K_1|$ *el conjunto* $\{|\varphi| = f\}$. *Entonces* $|\varphi| \simeq f\ (\mathrm{rel}\, A)$.

Demostración. Sea $F : |K_1| \times [0,1] \to |K_2|$ la homotopía

$$F(\alpha, t) \;=\; t\, f(\alpha) + (1-t)\; |\varphi|\, (\alpha) \;.$$

Esta función está bien definida: si $\alpha \in |K_1|$ y $s_2 \in K_2$ es tal que $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$, entonces $|\varphi|\, \alpha \in |s_2|$ y la combinación convexa de estos dos puntos está definida y es un punto de $|s_2|$. Restringiendo a cada símplice de K_1, la imagen por f y la imagen por $|\varphi|$ son compactas en $|K_2|$. Por el corolario 2.3.4, si $s \in K_1$, existe una cantidad finita de símplices $t_1, \ldots, t_r \in K_2$ tales que

$$f(s) \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{r} \langle t_i \rangle \;.$$

Dado que φ es una aproximación simplicial, se cumple que

$$|\varphi|\, (s) \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{r} |t_i| \;\;.$$

Esta unión, por ser finita, está contenida en algún subcomplejo finito $L_2 \subset K_2$. Por finitud de L_2, $|L_2| = |L_2|_d$ y la topología en $|L_2|$ está dada por la métrica euclidea en sus símplices. Pero la topología en $|s|$ también está dada por la métrica euclidea. Como $|L_2| \subset |K_2|$ es un subespacio, las funciones $f, |\varphi| : |s| \to |L_2|$ son continuas. En particular, son continuas respecto de la métrica. Sea $\alpha \in |s|$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$

tal que, si $\alpha' \in |s|$ y $d(\alpha, \alpha') < \delta$, entonces, si bien sus imágenes pueden pertenecer a distintos símplices en K_2 las mismas (por f o por $|\varphi|$) pertenecen a $|L_2|$ y

$$d\big(f(\alpha), f(\alpha')\big) \,<\, \epsilon \quad \text{y} \quad d\big(\,|\varphi|\,\alpha, |\varphi|\,\alpha'\big) \,<\, \epsilon$$

En cuanto a F, si $t, t' \in [0,1]$, entonces $F(\alpha, t), F(\alpha', t') \in |L_2|$ y

$$d\big(F(\alpha,t), F(\alpha',t')\big) \,\leq\, d\big(F(\alpha,t), F(\alpha,t')\big) \,+\, d\big(F(\alpha,t'), F(\alpha',t')\big)\ .$$

Por un lado,

$$\begin{aligned} d\big(F(\alpha,t), F(\alpha',t)\big)^2 \,&=\, \sum_{w \in L_2} \big|F(\alpha,t)(w) - F(\alpha',t)(w)\big|^2 \\ &=\, \sum_{w \in L_2} \big|t\left(f(\alpha)w - f(\alpha')w\right) + (1-t)\left(\,|\varphi|\,\alpha w - |\varphi|\,\alpha' w\right)\big|^2 \\ &\leq\, \sum_{w \in L_2} t\,\big|f(\alpha)w - f(\alpha')w\big|^2 + (1-t)\,\big|\,|\varphi|\,\alpha w\,|\varphi|\,\alpha' w\big|^2 \\ &\leq\, t\,d\big(f(\alpha), f(\alpha')\big)^2 \,+\, (1-t)\,d\big(\,|\varphi|\,\alpha, |\varphi|\,\alpha'\big)^2 \end{aligned}$$

Por otro,

$$\begin{aligned} d\big(F(\alpha',t), F(\alpha',t')\big)^2 \,&=\, \sum_{w \in L_2} \big|F(\alpha',t)(w) - F(\alpha',t')(w)\big|^2 \\ &=\, \sum_{w \in L_2} \big|(t-t')\,f(\alpha')w + (t'-t)\ |\varphi|\,\alpha' w\big|^2 \\ &=\, |t-t'|^2 \sum_{w \in L_2} \big(f(\alpha')w + |\varphi|\,\alpha' w\big)^2 \\ &=\, |t-t'|^2 \Big(\sum_{w \in L_2} \big(f(\alpha')w\big)^2 \,+\, \sum_{w \in L_2} 2\,f(\alpha')w\ |\varphi|\,\alpha' w \\ &\qquad\qquad +\, \sum_{w \in L_2} \big(\,|\varphi|\,\alpha' w\big)^2 \Big) \\ &\leq\, |t-t'|^2 \,\Big(\sum_{w \in L_2} f(\alpha')w \,+\, 2 \sum_{w \in L_2} f(\alpha')w\ |\varphi|\,\alpha' w \\ &\qquad\qquad +\, \sum_{w \in L_2} |\varphi|\,\alpha' w \Big) \\ &\leq\, 4\,|t-t'|^2 \end{aligned}$$

Esto demuestra que, si $\alpha, \alpha' \in |s|$ verifican $d(\alpha, \alpha') < \delta$ y $|t - t'| < \sqrt{\epsilon}/2$ entonces $d\big(F(\alpha,t), F(\alpha',t')\big) < 2\epsilon$ y F es continua en $|s| \times [0,1]$.

Como $F|_{|s| \times [0,1]}$ es continua para todo $s \in K_1$, F es continua, por el teorema 2.3.8. Dado que $F(\alpha, t) = f(\alpha)$, si $\alpha \in A$, concluimos que F es una homotopía que realiza $|\varphi| \simeq f\,(\mathrm{rel}\,A)$. $\square$

Teorema 2.10.4. *Sea $\varphi : K_1 \to K_2$ una aplicación definida únicamente en los vértices ($\varphi : V_1 \to V_2$) y sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una función continua. Entonces φ determina una aproximación simplicial de f, si y sólo si, para todo vértice v de K_1, se cumple que*

$$f\big(\operatorname{st} v\big) \subset \operatorname{st}\varphi(v) \ .$$

La función φ está únicamente definida en los vértices. En particular, no se asume que es una transformación simplicial.

Demostración. Supongamos que $\varphi : K_1 \to K_2$ es una aproximación simplicial de f y sean $\alpha \in |K_1|$ y $s_2 \in K_2$ tales que $f(\alpha) \in \langle s_2\rangle$. Como φ es una aproximación simplicial, $|\varphi|\,\alpha \in |s_2|$. Por otra parte, $\alpha \in \operatorname{st} v$ para cierto vértice v de K_1. Entonces $\alpha(v) \neq 0$ y $|\varphi|\,\alpha(\varphi(v))$ es distinto de cero, también. En particular, el vértice $\varphi(v)$ peretenece a s_2 y $f(\alpha) \in \operatorname{st}\varphi(v)$. Como $\alpha \in \operatorname{st} v$ era arbitrario, se verifica

$$f\big(\operatorname{st} v\big) \subset \operatorname{st}\varphi(v) \ .$$

Recíprocamente, si la función en vértices φ verifica esta condición para todo vértice de K_1, entonces, dado $s = \{v_0, \dots, v_q\} \in K_1$, por el corolario 2.3.9, la intersección $\bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} v_i$ es no vacía. Pero esto implica que

$$\bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st}\varphi(v_i) \supset \bigcap_{i=0}^{q} f\big(\operatorname{st} v_i\big) \supset f\Big(\bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} v_i\Big) \neq \varnothing \ .$$

Apelando de nuevo al corolario 2.3.9, los vértices $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)\}$ son los vértices de un símplice en K_2. Es definitiva, $\varphi : K_1 \to K_2$ es simplicial.

Finalmente, para ver que φ es una aproximación simplicial de f, sea $\alpha \in |K_1|$ y sea $s_2 \in K_2$ tal que $f(\alpha) \in \langle s_2\rangle$. Sea $s \in K_1$ tal que $\alpha \in \langle s\rangle$ y sea $v \in s$ un vértice cualquiera de s. Entonces, por hipótesis, como $\alpha \in \operatorname{st} v$, se cumple que $f(\alpha) \in \operatorname{st}\varphi(v)$. En particular, $\varphi(v)$ es un vértice de s_2. Como φ es simplicial, $\varphi(s) \subset s_2$ y, por lo tanto, $|\varphi|\,\big(\,|s|\,\big) \subset |s_2|$. Así, $|\varphi|\,\alpha \in |s_2|$. $\square$

Sean $\varphi_1 : L_1 \to K_1$ y $\varphi_2 : L_2 \to K_2$ dos pares simpliciales y sea $(f', f) : |\varphi_1| \to |\varphi_2|$ una función continua en pares ($f' \circ |\varphi_1| = |\varphi_2| \circ f$). Supongamos que existe una transformación de pares simpliciales $(\psi', \psi) : \varphi_1 \to \varphi_2$ tal que $\psi' : K_1 \to K_2$ es una aproximación simplicial de f'. Si $\beta \in |L_1|$ y $t_2 \in L_2$ es tal que $f(\beta) \in \langle t_2\rangle$, entonces

$$f'\big(\,|\varphi_1|\,\beta\big) = |\varphi_2|\,f(\beta) \in |\varphi_2|\,\big(\langle t_2\rangle\big) \subset \langle \varphi_2 t_2\rangle$$

(φ_2 es simplicial, con lo que $\varphi_2 t_2 \in K_2$). Como f' es aproximada por ψ', vale que

$$\big|\psi'\big|\,\big(\,|\varphi_1|\,\beta\big) \in |\varphi_2 t_2| \ .$$

Pero

$$\big|\psi'\big|\,|\varphi_1| = \big|\psi'\varphi_1\big| = |\varphi_2\psi| = |\varphi_2|\,|\psi| \ .$$

Entonces se deduce que

$$|\varphi_2| \big(|\psi| \, \beta \big) \; \in \; |\varphi_2| \big(|t_2| \big) \; .$$

No parece haber razón para esperar que ψ sea una aproximación simplicial de f. Supongamos, por otro lado, que w_0 es un vértice de L_1. Sabemos, porque ψ es simplicial, que $\psi(w_0)$ es un vértice de L_2. Supongamos que $\beta \in \operatorname{st} w_0$. Entonces

$$\big(|\varphi_1| \, \beta \big)(\varphi_1 w_0) \; = \sum_{\varphi_1 w = \varphi_1 w_0} \beta(w) \; > \; 0$$

y $|\varphi_1| \, \beta \in \operatorname{st} \varphi_1(w_0)$. De esto podemos deducir que $f'\big(|\varphi_1| \, \beta \big)$ pertenece a $\operatorname{st} \psi'(\varphi_1 w_0)$. Pero esto significa que

$$|\varphi_2| \circ f(\beta) \; \in \; \operatorname{st} \varphi_2(\psi w_0) \; .$$

De nuevo, si φ_2 identifica símplices distintos en L_2, no hay razón para esperar que ψ sea una aproximación simplicial de f. El siguiente corolario garantiza que, cuando los pares (K_j, L_j) son subcomplejos, toda aproximación simplicial de $f' : K_1 \to K_2$ induce una aproximación de $f = f'|_{|L_1|}$ en los subcomplejos.

Corolario 2.10.5. *Sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una función continua y sean $L_1 \subset K_1$ y $L_2 \subset K_2$ subcomplejos. Supongamos que $f\big(|L_1| \big) \subset |L_2|$ y que f admite una aproximación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$. Entonces $\varphi\big(L_1\big) \subset L_2$ y $\varphi|_{L_1} : L_1 \to L_2$ es una aproximación simplicial de $f|_{|L_1|}$.*

Notemos que, si bien φ se restringe a una aplicación de los vértices de L_1 en los vértices de L_2, como no se asume que ni L_2 ni L_1 sean subcomplejos plenos, no es inmediato que la restricción de φ sea simplicial de L_1 *en* L_2.

Demostración. Por el teorema 2.10.4, alcanzará con demostrar que, dado un vértice w de L_1, entonces $\varphi(w)$ es un vértice de L_2 y que se verifica que

$$f\big(\operatorname{st} w \, \cap \, |L_1|\big) \; \subset \; \big(\operatorname{st} \varphi(w)\big) \, \cap \, |L_2| \; .$$

Por un lado, por hipótesis, $f\big(\operatorname{st} w\big) \subset \operatorname{st} \varphi(w)$. Por otro lado, como $f\big(|L_1| \big) \subset |L_2|$, existe un símplice $t_2 \in L_2$ tal que $f(w) \in \langle t_2 \rangle$. En particular, $|\varphi| \, (\alpha_w) \in |t_2|$ y $\varphi(w)$ es un vértice (φ es simplicial) de t_2. Entonces $\varphi(w)$ es un vértice de L_2 y

$$f\big(\operatorname{st} w \, \cap \, |L_1|\big) \; \subset \; f\big(\operatorname{st} w\big) \, \cap \, |L_2| \; \subset \; \big(\operatorname{st} \varphi(w)\big) \, \cap \, |L_2| \; .$$

□

Observación 2.10.6. Sean $L_1 \subset K_1$ y $L_2 \subset K_2$ subcomplejos y sea $f : (|K_1| \, , |L_1|) \to (|K_2| \, , |L_2|)$ una función continua de pares de espacios topológicos. Por el corolario 2.10.5, toda aproximación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ es está forzada a ser una transformación de pares $\varphi : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$.

Una pregunta que surge de esto es, si ψ' es una aproximación de f' y ψ es una aproximación de f (donde $(f', f') : |\varphi_1| \to |\varphi_2|$ es un morfismo de pares entre los espacios de los pares de complejos φ_1 y φ_2) ¿es cierto que $\psi'\varphi_1 = \varphi_2\psi$?, es decir, ¿es (ψ', ψ) una transformación simplicial de pares? En general, parece ser que la respuesta es negativa: lo que se puede deducir es que el punto

$$|\varphi_2|\, f(\beta_w) \;=\; f'\big(\,|\varphi_1|\,\beta_w\big)$$

(w un vértice de L_1) pertenece a la intersección

$$\operatorname{st}\psi'(\varphi_1 w) \,\cap\, |\varphi_2|\,\big(\operatorname{st}\psi(w)\big)\ .$$

Volviendo al caso de los subcomplejos, si $\varphi : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ es una aproximación simplicial de $f : (|K_1|\,, |L_1|) \to (|K_2|\,, |L_2|)$, entonces la homotopía $f \simeq |\varphi|$ dada por el lema 2.10.3 es, en realidad, una homotopía de pares, pues la imagen de $|L_1| \times [0, 1]$ debe mantenerse dentro de $|L_2|$.

Observación 2.10.7. Sean $g : |K_2| \to |K_3|$ y $f : |K_1| \to |K_2|$ funciones continuas y sean $\psi : K_2 \to K_3$ y $\varphi : K_1 \to K_2$ aproximaciones simpliciales. Entonces, dado un vértice v de K_1,

$$g \circ f\big(\operatorname{st} v\big) \;\subset\; g\big(\operatorname{st}\varphi(v)\big) \;\subset\; \operatorname{st}\psi \circ \varphi(v)\ .$$

Por lo tanto, $\psi \circ \varphi$ es una aproximación simplicial de $g \circ f$.

Proposición 2.10.8. *Sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una función continua. Entonces f admite una aproximación simplicial, si y sólo si K_1 refina el cubrimiento por abiertos*

$$\mathcal{U} \;=\; \big\{f^{-1}\big(\operatorname{st} v'\big) \,:\, v' \textit{ vértice de } K_2\big\}\ .$$

Demostración. Supongamos que existe una aproximación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ de f. Entonces, dado un vértice v de K_1, $\varphi(v) = v'$ es un vértice de K_2 y

$$\operatorname{st} v \;\subset\; f^{-1}\big(\operatorname{st} v'\big)\ .$$

En particular, K_1 refina el cubrimiento $\mathcal{U}$ de $|K_1|$. Recíprocamente, si para todo vértice v de K existe algún vértice v' tal que $\operatorname{st} v$ esté contenido en el abierto $f^{-1}\big(\operatorname{st} v'\big)$, entonces $\varphi : v \mapsto v'$ define una aplicación de los vértices de K_1 en los de K_2 que verifica las hipótesis del teorema 2.10.4. □

Corolario 2.10.9. *Sea K' una subdivisión de un complejo simplicial K y sea φ una aplicación definida en los vértices de K' con imagen en los vértices de K. Entonces φ determina una aproximación simplicial de la identidad $|K'| \to |K|$, si y sólo si $v' \in \operatorname{st}\varphi(v')$ para todo vértice v' en K'.*

Demostración. Este resultado es consecuencia de la observación 2.7.8 y del teorema 2.10.4. □

Notemos que esto implica la existencia de aproximaciones simpliciales de la identidad $|K'| \to |K|$ para toda subdivisión K' de K. Llegamos al teorema central de existencia de aproximaciones simpliciales.

Teorema 2.10.10. *Sea (K_1, L_1) un par simplicial finito y sea $f : (|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$ una función continua. Existe $N \geq 1$ tal que, si $n \geq N$, entonces f admite una aproximación simplicial $\varphi : (\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1) \to (K_2, L_2)$.*

Demostración. Ver el corolario 2.10.5, la proposición 2.10.8, el corolario 2.10.9 y el teorema 2.9.3. El valor de N dependerá del codominio (ver el ejemplo 2.12.16). □

2.11 Contigüidad

En esta sección definimos una relación análoga a la relación de homotopía entre pares de espacios topológicos. Nos concentraremos en pares (K, L) de complejos simpliciales donde $L \subset K$ es un subcomplejo. El objetivo es entender la relación, valaga la redundancia, entre estas dos nociones de equivalencia.

Sean K_1, K_2 complejos simpliciales y sea $L_1 \subset K_1$ y $L_2 \subset K_2$ subcomplejos. Dos transformaciones simpliciales $\varphi, \varphi' : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ se dicen *contiguas*, si,

(i) dado un símplice $s \in K_1$, la unión $\varphi(s) \cup \varphi'(s)$ es un símplice de K_2 y

(ii) si $s \in L_1$, entonces $\varphi(s) \cup \varphi'(s)$ es un símplice de L_2.

Esto no define una relación de equivalencia, pero sí simétrica y reflexiva en el conjunto de transformaciones simpliciales $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$. Para definir una relación de equivalencia, transitivizamos la relación: decimos que dos transformaciones simpliciales φ, φ' están relacionadas, o que *pertenecen a la misma clase de contigüidad*, si existe una cantidad finita de transformaciones simpliciales $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ tales que $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_r = \varphi'$ y φ_{i-1} y φ_i son contiguas. Escribimos $\varphi \sim \varphi'$ para denotar que φ y φ' pertenecen a la misma clase de contigüidad. Denotamos el conjunto de estas clases por $[K_1, L_1; K_2, L_2]$ y la clase de una transformación simplicial φ por $\bigl[\varphi\bigr]$.

Observación 2.11.1. Si $\varphi, \varphi' : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ son contiguas y $\psi, \psi' : (K_2, L_2) \to (K_3, L_3)$ son contiguas, entonces $\psi\varphi$ y $\psi'\varphi'$ son contiguas: dado un símplice $s \in K_1$,

$$\psi\varphi(s) \cup \psi'\varphi'(s) \subset \psi\bigl(\varphi(s) \cup \varphi'(s)\bigr) \cup \psi'\bigl(\varphi(s) \cup \varphi'(s)\bigr) .$$

Entonces, como la unión de la derecha es, por hipótesis, un símplice de K_3, el subconjunto de la izquierda también lo es; si $s \in L_1$, entonces lo mismo es cierto reemplazando los símplices K_i por los L_i.

De esto se deduce que, si, más en general, $\varphi \sim \varphi'$ y $\psi \sim \psi'$, entonces $\psi\varphi \sim \psi'\varphi'$ y la composición de clases de contigüidad está bien definida como la clase de las composiciones:

$$\bigl[\psi\bigr] \circ \bigl[\varphi\bigr] = \bigl[\psi \circ \varphi\bigr] .$$

Observación 2.11.2. Sean $\varphi, \varphi' : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ transformaciones simpliciales contiguas que coinciden en algún subcomplejo $L \subset K_1$. Sea

$$F \,:\, \big(\,|K_1| \times [0,1]\,, |L_1| \times [0,1]\,\big) \,\to\, (|K_2|\,, |L_2|)$$

la homotopía de $|\varphi|$ en $|\varphi'|$ dada por

$$F(\alpha, t) \,=\, (1-t), |\varphi|\,\alpha + t\,\left|\varphi'\right|\alpha\ .$$

Para $\alpha \in |L_1|$, como $s \in L_1$ implica $\varphi(s) \cup \varphi'(s) \in L_2$, $F(\alpha, t) \in |L_2|$. Para $\alpha \in |L|$, el resultado no depende de t. En definitiva, si φ y φ' son contiguas y coinciden en algún subcomplejo del dominio (independiente de L_1 y de L_2), entocnes $|\varphi| \simeq |\varphi'| \big(\mathrm{rel}\ |L|\,\big)$.

En particular, $\varphi \sim \varphi'$ implica $|\varphi| \simeq |\varphi'|$.

De las últimas dos observaciones se deduce que, en primer lugar, las clases de contigüidad de transformaciones simpliciales determinan una categoría cuyos objetos son los pares simpliciales, cuyos morfismos son las clases de contigüidad de transformaciones simpliciales con la composición dada por la clase de las composiciones. Los objetos son los mismos que en la categoría de pares simpliciales. En segundo lugar, las aplicaciones $(K, L) \mapsto (|K|\,, |L|)$ y $\big[\varphi\big] \mapsto \big[\,|\varphi|\,\big]$ determinan un funtor de la categoría *de contigüidad* de pares de complejos simpliciales en la categoría de homotopía de pares de espacios topológicos.

Lema 2.11.3. *Sean $\varphi, \varphi' : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ dos aproximaciones simpliciales de una misma función continua $f : (|K_1|\,, |L_1|) \to (|K_2|\,, |L_2|)$. Entonces φ y φ' son contiguas.*

Demostración. Sea $s = \{v_0, \ldots, v_q\} \in K_1$ un símplice. Por el corolario 2.3.9, $\bigcap_{i=0}^{q} \mathrm{st}\, v_i \neq \varnothing$. Por el teorema 2.10.4,

$$\bigcap_{i=0}^{q} \big(\mathrm{st}\,\varphi(v_i) \cap \mathrm{st}\,\varphi'(v_i)\big) \,\supset\, \bigcap_{i=0}^{q} f\big(\mathrm{st}\, v_i\big) \,\supset\, f\Big(\bigcap_{i=0}^{q} \mathrm{st}\, v_i\Big) \,\neq\, \varnothing\ .$$

Por el corolario 2.3.9, la unión $\varphi(s) \cup \varphi'(s) = \{\varphi(v_i)\}_i \cup \{\varphi'(v_i)\}_i$ es el conjunto de vértices de un símplice en K_2. Si asumimos que $s \in L_1$, entonces esta unión es un subconjunto de vértices de L_2 tales que la intersección de las estrellas correspondientes es no vacía y, por lo tanto, constituyen el conjunto de vértices de un símplice en L_2. En definitiva, φ y φ' son contiguas. $\square$

Transformaciones simpliciales que definen funciones continuas homotópicas en los espacios de los complejos pueden no pertenecer a la misma clase de contigüidad. Aun así, en el caso de que el dominio sea un cimplejo finito, es posible subdividir este complejo de forma tal que transformaciones que inducen funciones homotópicas son aproximables en la subdivisión por transformaciones en la misma clase de contigüidad.

Teorema 2.11.4. *Sea K_1 un complejo simplicial finito. Sean*

$$f, f' \,:\, (|K_1|\,, |L_1|) \,\to\, (|K_2|\,, |L_2|)$$

funciones homotópicas. Entonces existe $N \geq 1$ y aproximaciones simpliciales φ de f y φ' de f'

$$\varphi, \varphi' : (\operatorname{sd}^N K_1, \operatorname{sd}^N L_1) \to (K_2, L_2)$$

en la misma clase de contigüidad.

Demostración. Sea

$$F : \big(|K_1| \times [0,1], |L_1| \times [0,1]\big) \to (|K_2|, |L_2|)$$

una homotopía de f en f'. Al ser $|K_1|$ compacto y $\big\{F^{-1}\big(\operatorname{st} v'\big) : v' \text{ vértice en } K_2\big\}$ un cubrimiento por abiertos de K_1, existen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ tales que, para todo $\alpha \in K_1$, $F(\alpha, t_{i-1})$ y $F(\alpha, t_i)$ pertenezcan a un mismo abierto $\operatorname{st} v'$ de K_2.

Para cada $i = 0, \ldots, r$, sea

$$f_i : (|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$$

la función dada por $f_i(\alpha) = F(\alpha, t_i)$ y sea, para $i \geq 1$, $\mathcal{U}_i$ el cubrimiento

$$\mathcal{U}_i = \big\{f_i^{-1}\big(\operatorname{st} v'\big) \cap f_{i-1}^{-1}\big(\operatorname{st} v'\big) : v' \in K_2\big\}$$

por abiertos de K_1. Por el teorema 2.9.3, existe $N \geq 1$ tal que la subdivisión $\operatorname{sd}^N K_1$ sea más fina que todos los cubrimientos $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_r$. Esto significa que, para cada $i = 1, \ldots, r$, si v es un vértice de $\operatorname{sd}^N K_1$, entonces existe $U \in \mathcal{U}_i$ tal que $\operatorname{st} v \subset U$. Dicho de otra manera, para cada vértice v de la subdivisión, existe al menos un vértice v' de K_2 tal que

$$\operatorname{st} v \subset f_i^{-1}\big(\operatorname{st} v'\big) \cap f_{i-1}^{-1}\big(\operatorname{st} v'\big) .$$

Eligiendo, debe existir una función φ_i definida en los vértices de $\operatorname{sd}^N K_1$ con imagen en los vértices de K_2 tal que

$$f_i\big(\operatorname{st} v\big), \cup f_{i-1}\big(\operatorname{st} v\big) \subset \operatorname{st} \varphi_i(v)$$

para todo vértice v de la subdivisión. En particular, por el teorema 2.10.4, cada una de las funciones φ_i determina una transformación simplicial

$$\varphi_i : (\operatorname{sd}^N K_1, \operatorname{sd}^N L_1) \to (K_2, L_2)$$

que es, a la vez, aproximación de f_i y de f_{i-1}. Del lema 2.11.3, se deduce que φ_i y φ_{i+1} son contiguas. En particular, $\varphi_1 \sim \varphi_r$. Pero φ_1 es una aproximación de $f_0 = f$ y φ_r es una aproximación de $f_r = f'$. $\square$

Este resultado no es cierto en general, si K_1 no es finito (ver el ejemplo 2.12.19).

Observación 2.11.5. Sea K_1 un complejo simplicial y sea L_1 un subcomplejo. Por el corolario 2.10.9, existen aproximaciones simpliciales

$$\varphi \,:\, (\operatorname{sd} K_1, \operatorname{sd} L_1) \,\to\, (K_1, L_1)$$

de la identidad

$$(|\operatorname{sd} K_1|\,, |\operatorname{sd} L_1|) \,\to\, (|K_1|\,, |L_1|)\;.$$

Dos aproximaciones de la identidad son, por 2.11.3, contiguas. Teniendo en cuenta esto, si $\lambda : (\operatorname{sd} K_1, \operatorname{sd} L_1) \to (K_1, L_1)$ es una aproximación simplicial de la identidad y $\varphi : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ es una transformación simplicial, la aplicación

$$\operatorname{sd}\big[\varphi\big] \;=\; \big[\varphi \circ \lambda\big] \;=\; \big[\varphi\big] \circ \big[\lambda\big]$$

está bien definida y define una función

$$\operatorname{sd}\;:\, [K_1, L_1; K_2, L_2] \,\to\, [\operatorname{sd} K_1, \operatorname{sd} L_1; K_2, L_2]\;.$$

Iterando este procedimiento, se obtiene una sucesión

$$\operatorname{sd}^{n,n+1}\;:\, [\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1; K_2, L_2] \,\to\, \big[\operatorname{sd}^{n+1} K_1, \operatorname{sd}^{n+1} L_1; K_2, L_2\big]$$

para $n \geq 0$. Para cada entero no negativo, elegimos alguna aproximación

$$\lambda_{n+1,n}\,:\, (\operatorname{sd}^{n+1} K_1, \operatorname{sd}^{n+1} L_1) \,\to\, (\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1)$$

de la identidad

$$\mathsf{id}\,:\, \big(\big|\operatorname{sd}^{n+1} K_1\big|\,, \big|\operatorname{sd}^{n+1} L_1\big|\big) \,\to\, (|\operatorname{sd}^n K_1|\,, |\operatorname{sd}^n L_1|)\;.$$

Entonces

$$\operatorname{sd}^{n,n+1}\big[\varphi\big] \;=\; \big[\varphi \circ \lambda_{n+1,n}\big] \;=\; \big[\varphi\big] \circ \big[\lambda_{n+1,n}\big] \;=\; \big[\lambda_{n+1,n}\big]^*\big(\big[\varphi\big]\big)\;.$$

Notemos que, como $\lambda_{n+1,n}$ es una aproximación simplicial de la identidad, la realización es homotópica a la identidad: $|\lambda_{n+1,n}| \simeq \mathsf{id}$. En particular, las clases de homotopía

$$\big[\,|\varphi \circ \lambda_{n+1,n}|\,\big] \;=\; \big[\,|\varphi|\,\big]$$

coinciden.

Dados $m \geq n$, sea

$$\lambda_{m,n}\,:\, (\operatorname{sd}^m K_1, \operatorname{sd}^m L_1) \,\to\, (\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1)$$

la composición

$$\lambda_{m,n} \;=\; \lambda_{n+1,n} \circ \lambda_{n+2,n+1} \circ \cdots \circ \lambda_{m,m-1}$$

y sea

$$\mathrm{sd}^{n,m} \ : [\mathrm{sd}^m K_1, \mathrm{sd}^m L_1; K_2, L_2] \ \to \ [\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]$$

la composición

$$\mathrm{sd}^{n,m} \ = \ \mathrm{sd}^{n,n+1} \circ \mathrm{sd}^{n+1,n+2} \circ \cdots \circ \mathrm{sd}^{m-1,m} \ .$$

Entonces, por un lado,

$$\mathrm{sd}^{n,m} \big[\varphi\big] \ = \ \big[\varphi \circ \lambda_{m,n}\big] \ .$$

Por otro lado, como $\lambda_{m,n}$ es una aproximación de la identidad, $|\lambda_{m,n}| \ \simeq \ \mathsf{id}$. Si φ : $(\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1) \to (K_2, L_2)$, entonces

$$\big[\, |\varphi \circ \lambda_{m,n}| \,\big] \ = \ \big[\, |\varphi| \,\big] \ .$$

Tomando el límite directo, se obtiene un funtor

$$\varinjlim \ [\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2] \ ,$$

contravariante en (K_1, L_1) y covariante en (K_2, L_2).

Teorema 2.11.6. *Sea K_1 un complejo simplicial finito. Entonces existe una isomorfismo natural*

$$\varinjlim \ [\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2] \ \simeq \ [|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|] \ .$$

Demostración. Para definir una transformación natural, es necesario definir, para cada par de subcomplejos (K_1, L_1) y (K_2, L_2), una función del límite directo en el conjunto de clases de homotopía de funciones de $(|K_1|, |L_1|)$ en $(|K_2|, |L_2|)$. Una función definida en el límite directo, equivale a una sucesión de funciones

$$f_n \ : \ [\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2] \ \to \ [|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|] \ ,$$

para $n \geq 0$, tales que

$$f_n \ = \ f_{n+1} \circ \mathrm{sd}^{n,n+1} \ .$$

Definimos f_n como la función

$$f_n\big([\varphi]\big) \ = \ \big[\, |\varphi| \,\big] \ ,$$

si $\varphi : \ (\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1) \to (K_2, L_2)$. Esta función está bien definida, por la observación 2.11.2. Entonces, por la observación 2.11.5,

$$f_{n+1} \circ \mathrm{sd}^{n,n+1} \big([\varphi]\big) \ = \ \big[\, |\varphi \circ \lambda_{n+1,n}| \,\big] \ = \ \big[\, |\varphi| \,\big] \ = \ f_n\big([\varphi]\big) \ .$$

Las funciones f_n son naturales en el par (K_1, L_1): dada $\psi_1 \ : \ (K_1, L_1) \to (K_1', L_1')$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [\operatorname{sd}^n K_1', \operatorname{sd}^n L_1'; K_2, L_2] & \xrightarrow{f_n} & [|K_1'|, |L_1'|; |K_2|, |L_2|] \\ {\scriptstyle [\psi]^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle [|\psi|]^*} \\ [\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1; K_2, L_2] & \xrightarrow[f_n]{} & [|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|] \end{array}$$

conmuta: dada φ' una representante de una clase de contigüidad en el extremo superior izquierdo,

$$\begin{aligned} f_n \circ [\psi]^*([\varphi']) &= f_n([\varphi' \circ \psi]) = [\,|\varphi' \circ \psi|\,] \quad \text{y} \\ [\,|\psi|\,]^* \circ f_n([\varphi']) &= [\,|\psi|\,]^*([\,|\varphi'|\,]) = [\,|\varphi'|\,] \circ [\,|\psi|\,] \ . \end{aligned}$$

De manera similar, se puede ver que la definición de f_n es natural en (K_2, L_2). Queda determinada, entonces, una transformación natural

$$f = \{f_n\}_{n \geq 0} : \varinjlim [\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1; K_2, L_2] \to [|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|] \ .$$

Veamos que f es una biyección natural. Sea $g : (|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$ una función continua y sea $\varphi : (\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1) \to (K_2, L_2)$ una aproximación simplicial de g, cuya existencia está garantizada por el teorema 2.10.10. Entonces

$$f_n([\varphi]) = [\,|\varphi|\,] = [g] \ .$$

En particular, f es sobreyectiva. Sean ahora

$$\begin{aligned} \varphi &: (\operatorname{sd}^n K_1, \operatorname{sd}^n L_1) \to (K_2, L_2) \\ \varphi' &: (\operatorname{sd}^{n'} K_1, \operatorname{sd}^{n'} L_1) \to (K_2, L_2) \end{aligned}$$

transformaciones simpliciales tales que $|\varphi| \simeq |\varphi'|$, es decir,

$$f_n([\varphi]) = [\,|\varphi|\,] = [\,|\varphi'|\,] = f_{n'}([\varphi'])$$

Por el teorema 2.11.4, existe $m \geq n, n'$ y aproximaciones

$$\psi, \psi' : (\operatorname{sd}^m K_1, \operatorname{sd}^m L_1) \to (K_2, L_2)$$

de φ y, respectivamente, de φ' que pertenecen a la misma clase de contigüidad {*revisar la demo del teo*}. Ahora bien, como φ es una aproximación de $|\varphi|$ y $\lambda_{m,n}$ es una aproximación de la identidad, la composición $\varphi \circ \lambda_{m,n}$ es, también, según la observación 2.10.7, una aproximación simplicial de $|\varphi|$. En particular, por el lema 2.11.3, las transformaciones $\varphi \circ \lambda_{m,n}$ y ψ son contiguas. Análogamente, $\varphi' \circ \lambda_{m,n'}$ y ψ' también son contiguas. Pero entonces

$$\operatorname{sd}^{m-n} [\varphi] = [\varphi \circ \lambda_{m,n}] = [\varphi' \circ \lambda_{m,n'}] = \operatorname{sd}^{m-n'} [\varphi']$$

en $[\operatorname{sd}^m K_1, \operatorname{sd}^m L_1; K_2, L_2]$. Concluimos, así, que f es inyectiva. □

Corolario 2.11.7. *Sea X un espacio topológico compacto y sea Y el espacio de un complejo simplicial a lo sumo numerable. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$ subespacios. Entonces el conjunto de clases de homotopía de pares $[X, A; Y, B]$ es a lo sumo numerable.*

2.12 Ejemplos

Ejemplo 2.12.1 (El complejo vacío)**.** El conjunto vacío visto como un conjunto vacío de símplices es un complejo. Lo denotamos $\varnothing$ y lo denominamos *complejo vacío.*

Ejemplo 2.12.2 (El complejo de subconjuntos finitos)**.** Dado un conjunto A, el conjunto de subconjuntos finitos no vacíos de A constituye un complejo.

Ejemplo 2.12.3 (Las caras de un símplice)**.** Sea K un complejo simplicial y sea $s \in K$ un símplice. El conjunto de caras de s constituye un complejo, *el complejo de caras de* s, denotado $\overline{s}$.

Ejemplo 2.12.4 (Las caras propias)**.** El conjunto de caras propias de un símplice s también constituye un complejo, lo denotamos $\dot{s}$.

Ejemplo 2.12.5 (El q-esqueleto de un complejo)**.** Sea K un complejo simplicial. El *q-esqueleto de K* es el complejo, denotado $K^{(q)}$, cuyos símplices son todos los p-símplices de K con $p \leq q$. El q-esqueleto de un complejo K es un subcomplejo de K.

Ejemplo 2.12.6 (El nervio de una familia de subconjuntos)**.** Sea X un conjunto y sea $\mathcal{W}$ una familia de subconjuntos de X. El *nervio de $\mathcal{W}$*, denotado $K(\mathcal{W})$, es el complejo simplicial cuyos símplices son los subconjuntos finitos de $\mathcal{W}$ cuya intersección sea no vacía. En particular, los vértices de $K(\mathcal{W})$ son exactamente los elementos de $\mathcal{W}$.

Ejemplo 2.12.7 (La suma de dos complejos)**.** Sean K_1, K_2 dos complejos simpliciales. La *suma de K_1 con K_2*, denotada $K_1 * K_2$, es el complejo simplicial cuyos símplices son los símplices del complejo K_1, los de K_2 y las uniones disjuntas de un símplice de K_1 con uno de K_2. De esta manera, el conjunto de vértices de $K_1 * K_2$ es igual a la unión disjunta del conjunto de vértices de K_1 con el de los de K_2. En símbolos,

$$K_1 * K_2 \;=\; K_1 \sqcup K_2 \cup \big\{ s_1 \sqcup s_2 \,:\, s_1 \in K_1,\, s_2 \in K_2 \big\} \;.$$

Ejemplo 2.12.8 (Segmentos enteros)**.** Sea $V = \mathbb{Z}$ y sea K la familia

$$K \;=\; \big\{ \{n\} \,:\, n \in \mathbb{Z} \big\} \cup \big\{ \{n, n+1\} \,:\, n \in \mathbb{Z} \big\} \;.$$

Entonces K es un complejo simplicial cuyos vértices son los números enteros y cuyos 1-símplices son los intervalos enteros $\{n, n+1\}$. El complejo K no posee símplices de mayor dimensión.

Ejemplo 2.12.9 (Puntos en un reticulado)**.** Sea $n \geq 1$ un entero fijo. Consideramos el conjunto de n-tuplas de enteros $\mathbb{Z}^n$ con el orden parcial dado por comparar las coordenadas: $(x^1, \ldots, x^n) \leq (y^1, \ldots, y^n)$, si $x^i \leq y^i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Sea K la familia de conjuntos finitos no vacíos y totalmente ordenados de $\mathbb{Z}^n$, $s = \{x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_q\}$, que verifican $x_q^i - x_0^i = 0$ o 1 para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces K es un complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es $V = \mathbb{Z}^n$.

Ejemplo 2.12.10. Dado un complejo K y un símplice $s \in K$, el complejo de caras $\overline{s} \subset K$ es un subcomplejo de K y el complejo de caras propias $\dot{s} \subset K$, también lo es. También vale que $\dot{s} \subset \overline{s}$ es un subcomplejo.

Ejemplo 2.12.11. Dada una familia de subcomplejos $\{L_i\}_i$ de un complejo K, la unión (conjuntística de los conjnuntos de símplices) $\bigcup_i L_i$ y la intersección (lo mismo) $\bigcap_i L_i$ son subcomplejos de K.

Ejemplo 2.12.12. Sea X un conjunto, $A \subset X$ un subconjunto y sea $\mathcal{W}$ una familia de subconjuntos de X. Sea $K(\mathcal{W})$ el nervio de la familia $\mathcal{W}$. Entonces, según el ejemplo 2.12.6,

$$K(\mathcal{W}) \,=\, \Big\{\{W_1,\, \ldots,\, W_r\} \,:\, W_i \in \mathcal{W},\, W_1 \cap \cdots \cap W_r \neq \varnothing\Big\}\,.$$

Sea, entonces, $K_A(\mathcal{W})$ el subconjunto de $K(\mathcal{W})$ dado por

$$K_A(\mathcal{W}) \,=\, \Big\{\{W_1,\, \ldots,\, W_r\} \,:\, W_i \in \mathcal{W},\, A \cap \big(W_1 \cap \cdots \cap W_r\big) \neq \varnothing\Big\}\,.$$

Entonces $K_A(\mathcal{W})$ es un subcomplejo de $K(\mathcal{W})$.

Ejemplo 2.12.13 (La bola y la esfera)**.** Sea $n \geq 1$, sea B^{n+1} la bola unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea S^n la esfera unitaria. Si s es un $n+1$-símplice (en algún complejo), existe un homeomorfismo entre el par $(\mathrm{B}^{n+1}, \mathrm{S}^n)$ y el par $(|\overline{s}|\,, |\dot{s}|)$.

Ejemplo 2.12.14. Sea K el complejo del ejemplo 2.12.8 y sea $f : |K| \to \mathbb{R}$ una función tal que $f|_{|\{n\}|} = n$ y $f|_{|\{n,n+1\}|}$ sea un homeo con el intervalo $[n, n+1] \subset \mathbb{R}$. Entonces f es una triangulación de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.12.15. Sea K el complejo definido en el ejemplo 2.12.9. Sea $f : |K| \to \mathbb{R}^n$ la función $f(\alpha)^i = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \alpha(x)\, x^i$. Entonces f es una traingulación…

Ejemplo 2.12.16. Sea s un 2-símplice y sea $\dot{s}$ el complejo de sus caras propias. Entonces $|\dot{s}|$ es homeomorfo a S^1. En particular, las clases homotopía de funciones $|\dot{s}| \to |\dot{s}|$ son infinitas. Pero, para cada $n \geq 0$ entero no negativo, existen a lo sumo finitas transformaciones simpliciales $\mathrm{sd}^n\, \dot{s} \to \dot{s}$. En consecuencia, fijado n, existen funciones $|\dot{s}| \to |\dot{s}|$ que no admiten aproximaciones definidas en $\mathrm{sd}^n\, \dot{s}$.

Ejemplo 2.12.17. Sean s y $\dot{s}$ como en el ejemplo 2.12.16. Sean v_0, v_1, v_2 los vértices de $\dot{s}$ (de s). Sean

$$\begin{array}{rcl} v_0 \,=\, b\,(v_0) \quad , & v_1 \,=\, b\,(v_1) \quad \text{y} & v_2 \,=\, b\,(v_2)\ , \\ w_0 \,=\, b\,(\{v_2,\, v_0\}) \quad , & w_1 \,=\, b\,(\{v_0,\, v_1\}) \quad \text{y} & w_2 \,=\, b\,(\{v_1,\, v_2\}) \end{array}$$

los baricentros del complejo y sea $f : |\dot{s}| \to |\dot{s}|$ la función lineal dada por

$$v_0 \,\mapsto\, w_1 \,\mapsto\, v_1 \,\mapsto\, w_2 \,\mapsto\, v_2 \,\mapsto\, w_0 \,\mapsto\, v_0$$

en los vértices de $\mathrm{sd}\,\dot{s}$. Entonces f es homotópica a la identidad de $|\dot{s}|$, pero no admite una aproximación simplicial de la forma $\dot{s} \to \dot{s}$. Sin embargo, existen exactamente ocho aproximaciones de la forma $\mathrm{sd}\,\dot{s} \to \dot{s}$ determinadas por lo que valen en los vértices v_0, v_1, v_2.

En cuanto a la existencia de la homotopía, una posibilidad es desandar gradualmente la misma función f. En cuanto a la segunda afirmación, si $\varphi : \dot{s} \to \dot{s}$ es una transformación simplicial, entonces $f(v_0) = w_1$ implica que $|\varphi|\, v_0$ pertenece a la cara generada por v_0 y v_1. Como $\varphi(v_0)$ es un vértice,

$$\varphi(v_0) \in \{v_0, v_1\} .$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &\in \{v_1, v_2\} \quad \text{y} \\ \varphi(v_2) &\in \{v_2, v_0\} . \end{aligned}$$

Notemos que esta observación también es válida si el dominio de φ es cualquier subdivisión de $\dot{s}$. Por otro lado, $w_1 = \frac{1}{2}\, v_0 + \frac{1}{2}\, v_1$ implica

$$|\varphi|\, w_1 = \frac{1}{2}\,\varphi(v_0) + \frac{1}{2}\,\varphi(v_1)$$

y $f(w_1) = v_1$ implica que $|\varphi|\, w_1 = v_1$, también. Esto fuerza

$$\varphi(v_0) = \varphi(v_1) = v_1 .$$

Pero, de manera similar, se deduce que debe cumplirse $\varphi(v_2) = \varphi(v_0) = v_0$. Lo que es absurdo.

En cuanto a la existencia de las aproximaciones en $\mathrm{sd}\,\dot{s}$, sabemos, por lo visto en el párrafo anterior, que de existir una aproximación $\varphi : \mathrm{sd}\,\dot{s} \to \dot{s}$ para f, $\varphi(v_i) \in \{v_i, v_{(i+1 \mod 3)}\}$, hay dos opciones para $\varphi(v_i)$, para cada $i = 0, 1, 2$. La diferencia con el caso anterior es que los baricentros no se escriben como combinaciones propias de vértices de $\mathrm{sd}\,\dot{s}$, *son* vértices del complejo subdividido. Al igual que antes, $f(w_i) = v_i$, con lo que $\varphi(w_i)$ está forzada a tomar el valor v_i, para cada $i = 0, 1, 2$. Esto no impone condiciones sobre los valores de φ en los v_i y, cualquiera sea la elección de dichos valores queda determinada una transformación simplicial $\varphi : \mathrm{sd}\,\dot{s} \to \dot{s}$ que es una aproximación simplicial de f.

Ejemplo 2.12.18. Sea $n \geq 1$ y sea $m < n$. Toda función $\mathrm{S}^m \to \mathrm{S}^n$ es homotópica a una constante. Sea s_1 un $(m+1)$-símplice y sea s_2 un $(n+1)$-símplice. Entonces S^m es homeomorfa a $|\dot{s_1}|$ y S^n es homeomorfa a $|\dot{s_2}|$. Sea $f : |\dot{s_1}| \to |\dot{s_1}|$ una función continua. Porque S^m es compacta, el teorema de existencia de aproximaciones, 2.10.10, implica que para i suficientemente grande, existe una aproximación simplicial $\varphi : \mathrm{sd}^i\, \dot{s_1} \to \dot{s_2}$ de f y, por el lema 2.10.3, $|\varphi| \simeq f$. Entonces, para demostrar que toda f es homotópica a una constante, será suficiente probar que, para toda aproximación φ, la función $|\varphi|$ lo es.

Como la dimensión del complejo $\mathrm{sd}^i \dot{s}_1$ es m, la imagen por una transformación simplicial φ en $\dot{s}_2$ está incluida en el m-esqueleto de $\dot{s}_2$. En particular, como $m < n$, existe algún punto $\alpha \in |\dot{s}_2|$ que no pertenece a la imagen $|\varphi|\left(\left|\mathrm{sd}^i \dot{s}_1\right|\right)$. Pero esto implica que $|\varphi|$ tiene imagen en el espacio $|\dot{s}_2| \smallsetminus \{\alpha\}$, que es homeomorfo a la esfera S^n sin un punto, que, a su vez, es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, que es contráctil. En definitiva, $|\varphi|$ es homotópica a una constante.

Un espacio topológico X se dice *n-conexo* ($n \geq 0$), si toda función continua $f : \mathrm{S}^k \to X$ ($k \leq n$) se puede extender de manera continua a una función definida en la bola D^{k+1}. El ejemplo anterior muestra que la esfera S^n es $(n-1)$-conexa. En particular, si $n > 1$, entonces S^n es simplemente conexa. Se deduce entonces que toda función continua $f : \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^1$ ($n > 1$) se factoriza por el revestimiento $\mathtt{exp} : \mathbb{R} \to \mathrm{S}^1$. Como $\mathbb{R}$ es contráctil, concluimos que toda función continua de f debe ser homotópica a una constante.

Ejemplo 2.12.19. Sea $K_1 = K_2$ el complejo del ejemplo 2.12.8. Entonces $|K_1| = |K_2| = \mathbb{R}$. Sea $\varphi : K_1 \to K_2$ la identidad de complejos simpliciales y sea $\varphi' : K_1 \to K_2$ la transformación constante dada por $\varphi'(n) = 0$ en todo vértice $n \in \mathbb{Z}$ de K_1. Como el espacio del complejo K_2, $\mathbb{R}$, es contráctil, vale que $|\varphi| \simeq |\varphi'|$. Ahora bien, si K_1' es una subdivisión de K_1 y $\psi, \psi' : K_1' \to K_2$ son transformaciones simpliciales tales que ψ es una aproximación de $|\varphi|$ (la identidad) y ψ' es una aproximación de $|\varphi'|$ (la función constante), por un lado, en vértices, $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es suryectiva y $\psi' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es constante ($\psi'(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$). Pero, por otro lado, si ψ y ψ' fuesen contiguas, los conjuntos $\{\psi(n), \psi'(n)\}$ deberían ser símplices de K_2. En particular –y esto es cierto en general, no sólo en este ejemplo–, la imagen del conjunto de vértices por ψ debería ser finita, si yólo si la imagen por ψ' lo fuese. En este caso, sin embargo, una es infinita numerable (es sobreyectiva) y la otra es finita (consiste en un único punto). Por lo tanto, ψ y ψ' no pueden pertenecer a la misma clase de contigüidad.

Bibliografía

[1] Spanier; *Algebraic Topology*