Introducción a las variedades diferenciales

2020

Contents

Capítulo 1

Variedades diferenciales

1.1 Variedades topológicas

1.1.1 Definiciones y repaso de nociones de Topología

Sea M un espacio topológico. Se dice que M es una *variedad topológica de dimensión* n, si

(i) M es T_2,

(ii) M es N_2 y

(iii) M es localmente euclideo de dimensión n,

es decir,

(i) dados dos puntos $p, q \in M$ distintos, existen entornos abiertos U y V de p y de q, respectivamente, tales que $U \cap V = \varnothing$,

(ii) existe una familia numerable de abiertos de M, $\{U_n\}_{n\geq 1}$ que constituye una base para la topología de M y

(iii) dado $p \in M$, existe $U \subset M$ entorno abierto de p homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

El teorema de la dimensión implica que la noción de dimensión en un espacio localmente euclideo está bien definida. En particular, la dimensión de una variedad topológica (no vacía…) esté bien definida, también.

Teorema 1.1.1 (de la dimensión)**.** *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos no vacíos y homeomorfos. Entonces $n = m$.*

Las propiedades de ser Hausdorff y de admitir una base numerable para la topología se preservan al pasar a un subespacio. En el caso de la propiedad de ser localmente euclideo de dimensión $n \geq 0$, esto mismo es cierto para subespacios abiertos.

Proposición 1.1.2. *Sea X un espacio topológico y sea Y un subespacio.*

(a) Si X es T_2, Y es T_2.

(b) Si X es N_2, Y es N_2.

(c) Si X es localmente euclideo de dimensión $n \geq 0$ e Y es abierto, entonces Y es localmente euclideo de dimensión n.

En particular, si M es una variedad topológica de dimensión $n \geq 0$ y $U \subset M$ es abierto, U también tiene estructura de variedad topológica de dimensión n.

Lema 1.1.3. *Si X es un espacio topológico N_2, entonces todo cubrimiento de X por abiertos admite un subcubrimiento numerable.*

Lema 1.1.4. *Sean X un espacio topológico Hausdorff y sea $q : X \to X/R$ una función cociente* abierta *donde $R \subset X \times X$ es una relación. Entonces el cociente X/R es Hasudorff, si y sólo si R es cerrada en el producto.*

Lema 1.1.5. *Sea X un espacio topológico N_2 y sea R una relación tal que el cociente X/R es localmente euclideo. Entonces X/R es, también N_2.*

1.1.2 Variedades con borde y variedades con esquinas

Una *variedad con borde*, específicamente, una *variedad topológica con borde* se define como un espacio topológico Hausdorff y N_2 tal que todo punto del mismo tiene un entorno homeomorfo a un abierto del semiespacio superior $\mathbb{H}^d$ para algún $d \geq 0$. El valor de d es la dimensión de la variedad (y, por un corolario del teorema de la dimensión 1.1.1, está bien definida). Es decir, en lugar de estar modelado localmente como $\mathbb{R}^d$, una variedad con borde es localmente como

$$\mathbb{H}^d = \left\{(x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d : x^d \geq 0\right\} .$$

Si M es una variedad con borde y $p \in M$, existe un abierto U de M y un homeomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U)$ con un abierto de $\mathbb{H}^d$ tal que $p \in U$. Como en el caso de una variedad topológica, un par (U, φ) se denominará *carta* para M en p.

El *borde* de $\mathbb{H}^d$ en $\mathbb{R}^d$ es el conjunto de puntos $x^1, \dots, x^d$ tales que $x^d = 0$, lo denotaremos $\partial\mathbb{H}^d$. El *interior* de $\mathbb{H}^d$ se define como el conjunto de puntos $x^1, \dots, x^d$ tales que $x^d > 0$ y lo denotamos $\operatorname{int}\left(\mathbb{H}^d\right)$. Si M es una variedad con borde, el *borde* de M será el conjunto de puntos $p \in M$ para los cuales existe una carta (U, φ) tal que $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^d$, es decir, $\pi^d(\varphi(p)) = 0$. El *interior* de M se define como el subconjunto formado por aquellos puntos $p \in M$ para los cuales existe una carta (U, φ) tal que $\varphi(p) \in \operatorname{int}\left(\mathbb{H}^d\right)$, es decir, $\pi^d(\varphi(p)) > 0$. Los puntos del interior de M admiten entornos homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^d$. Denotamos el borde de M por ∂M y su interior por $\operatorname{int}(M)$.

Si bien los conjuntos $\operatorname{int}(M)$ y ∂M están bien definidos e, intuitivamente, deberían ser disjuntos, no es claro, *a priori* que así lo sea.

El interior $\operatorname{int}(M)$ de una variedad M de dimensión d es una variedad de dimensión d (sin borde), pues es un subespacio abierto de la variedad M. El borde ∂M también es una variedad topológica (sin borde). Su dimensión es $d-1$: si p es un punto del borde y (U,φ) es una carta para M en p, entonces

$$U \cap \partial M \;=\; \Big\{ q \in U \;:\; \pi^d(\varphi(q)) = 0 \Big\} \;.$$

De esto se deduce que $(U\cap\partial M, \tilde{\varphi})$ es una carta para ∂M en p, donde $\tilde{\varphi} = (\varphi^1, \dots, \varphi^{d-1})$ –es decir, proyectar sobre las primeras $d-1$ coordenadas la *coordenada* φ, valga la redundancia. La imagen de esta carta es un abierto de $\mathbb{R}^{d-1}$ dado por intersecar el abierto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^d$ con el hiperplano $\{x^d = 0\}$ (y proyectar sobre las primeras $d-1$ coordenadas).

Subespacios

Dado un espacio topológico X, un subespacio es un subconjunto $A \subset X$ al cual se le da la topología cuyos abiertos son, precisamente, los subconjuntos que se obtienen de intersecar A con un abierto cualquiera de X. Una función continua $i : A \to X$ entre espacios topológicos se dice subespacio, si es inyectiva y determina un homeomorfismo con su imagen, es decir, A e $i(A)$ son homeomorfos, donde a $i(A)$ se le da la topología subespacio de X. También se dirá que i es un *embedding topológico*. La inclusión de un subespacio es una función subespacio.

Teorema 1.1.6 (Propiedad característica de la topología subespacio)**.** *Sea X un espacio topológico y sea $\iota A : A \hookrightarrow X$ un subespacio. Para todo espacio Y y toda función (conjuntista) $f : Y \to A$, la función f es continua, si y sólo si la composición $\iota A \circ f$ es continua.*

Las funciones subespacio están caracterizadas por la propiedad anterior. Es decir, si $i : A \to X$ verifica el enunciado de la proposición anterior en el lugar de ιA, entonces i es una función subespacio. Más aun, la topología de subespacio es única de manera que la propiedad se verifica.

Teorema 1.1.7 (Unicidad de la topología subespacio)**.** *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Entonces la topología de subespacio en A es la única topología para la cual se verifica la propiedad característica de 1.1.6.*

Cocientes

Espacios localmente compactos Hausdorff

Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff Todo punto de X posee un entorno cuya clausura es compacta.

Lema 1.1.8. *Sea $U \subset X$ un subconjunto abierto y sea $x \in U$. Existe un abierto V tal que $x \in V$, $\overline{V}$ es compacta y $\overline{V} \subset U$.*

Diremos en general que un subconjunto $A \subset X$ es un entorno de un punto x, si $x \in \operatorname{int}(A)$. El lema anterior se puede expresar diciendo que dado un punto x y un abierto U que lo contiene, existe un entorno compacto de x contenido en U.

Demostración. Como X es localmente compacto y Hausdorff, podemos asumir que $\overline{U}$ es compacto, en otro caso, reemplazamos U por $U \cap V$ donde V es un entorno de x con clausura copmpacta. Como X es Hausdorff, existen abiertos en $\overline{U}$, V y W, tales que $x \in V$, $\partial U \subset W$ y $V \cap W = \varnothing$. Como U es abierto y $V \subset U$, V es abierto en X. Su clausura $\overline{V}$ está contenida en $U \setminus W$ y es compacta, por estar contenida en el compacto $\overline{U}$. □

Lema 1.1.9. *Si $U \subset X$ es abierto y K es un compacto contenido en U, entonces existe un abierto V cuya clausura es comapcta, $K \subset V$ y $\overline{V} \subset U$.*

Demostración. Por 1.1.9, para cada $x \in K$ existe un entorno comacto N_x de x contenido en U. La familia $\{\operatorname{int}(N_x)\}_{x \in K}$ es un cubrimiento por abiertos de K. Como K es compacto, admite un subcubrimiento finito $\{\operatorname{int}(N_{x_1}), \ldots, \operatorname{int}(N_{x_k})\}$ Si llamamos V a la unión de los abiertos $\operatorname{int}(N_{x_i})$, entonces $K \subset V$ y $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{k} N_{x_i}$ es compacto y está contenido en U. □

Proposición 1.1.10. *Sea $U \subset X$ un abierto y sea $K \subset U$ un compacto contenido en U. Existe una función continua f en X tal que $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ en K y $f = 0$ fuera de un compacto contenido en U.*

Demostración. Existe un abierto V con clausura compacta tal que $K \subset V$ y $\overline{V} \subset U$, por 1.1.9. Como todo espacio compacto Hausdorff es T_4, existe, por el *lema de Uryshohn*, una función continua $f : \overline{V} \to [0,1]$ tal que $f = 1$ en K y $f = 0$ en ∂V. Sea $\tilde{f} : X \to [0,1]$ la función dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \overline{V} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta función satisface lo pedido. Sólo hay que verificar que sea continua. Pero si $E \subset [0,1]$ es cerrado, entonces

$$\tilde{f}^{-1}(E) = \begin{cases} f^{-1}(E) & \text{si} 0 \in E \\ f^{-1}(E) \cup \left(\overline{V}\right)^{\mathsf{c}} = f^{-1}(E) \cup (V)^{\mathsf{c}} & \text{si no.} \end{cases}$$

En cualquiera de los dos casos, $\tilde{f}^{-1}(E)$ es cerrado en X y $\tilde{f}$ es continua. □

Proposición 1.1.11. *Sea $K \subset X$ compacto y sea f una función continua en K. Existe una extensión F definida en X que es continua y tiene soporte compacto.*

1.1.3 Propiedades básicas de las variedades

Toda variedad topológica tiene una base numerable que consiste en bolas coordenadas con clausura compacta (este es el *lema de las bolas coordenadas*).

Lema 1.1.12 (de las bolas coordenadas)**.** *Toda variedad topológica admite una base numerable de bolas precompactas.*

De este lema, se deduce la siguiente proposición.

Proposición 1.1.13 (las variedades topológicas son localmente arcoconexas)**.** *Sea M una variedad topológica. Entonces*

(a) M es localmente arcoconexa;

(b) M es conexa, si y sólo si es arcoconexa;

(c) las componentes conexas de M coinciden con sus componentes arcoconexas y

(d) M tiene una cantidad numerable de componentes.

Además, cada componente es abierta y una variedad topológica conexa.

Demostración. Dado que las bolas en $\mathbb{R}^n$ son arcoconexas, las bolas coordenadas de M, siendo homeomorfas a bolas de $\mathbb{R}^n$, también lo son. Dado que, por el lema 1.1.12, M posee una base de bolas coordenadas, M es localmente arcoconexa: dados un punto p de M y un abierto V que lo contenga, existe un abierto de la base B tal que $p \in B \subset V$ y B es arcoconexo.

Dado que M es localmente arcoconexa, las componentes arcoconexas de M deben ser abiertas. Como M es la unión de dichas componentes, lass mismas deben ser, también, cerradas. En particular, M es conexa, si y sólo si es arcoconexa y, más aun, las componentes conexas coinciden con las componentes arcoconexas. En particular, las componentes conexas son abiertas en M y constituyen un cubrimiento por abiertos de M. Como todo cubrimiento por abiertos admite un subcubrimiento numerable, la cantidad de componentes de M debe ser, a lo sumo, numerable.

Finalmente, como cada componente es abierta, tiene estructura de variedad topológica. $\square$

Demostración (de 1.1.12). Si M es homeomorfo a un abierto U de $\mathbb{R}^n$ vía un homeomorfismo $\varphi : M \to U$, entonces, como U admite una base de esas características, M también.

En general, M admite un cubrimiento por abiertos homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^n$. Como M es N_2, admite un subcubrimiento numerable, existe un cubrimiento $\{U_l\}_{l\geq 1}$ por abiertos de M homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^n$. Para cada U_l existe una base numerable de bolas coordenadas precompactas (en U_l). La unión de estas bases constituye una base de M por bolas coordenadas. Si B es una de ellas y B viene del abierto U_l del cubrimiento, sea $\overline{B}$ la clausura de B *en* U_l. Entonces $\overline{B}$ es compacta. Como subespacio de subespacio es subespacio, $\overline{B}$ es un subespacio compacto de M. Como M es T_2, esta clausura es cerrada en M. En particular, la clausura de B en U_l debe coincidir con la clausura en M y, por lo tanto, $B \subset M$ es una bola coordenada precompacta. $\square$

Otra consecuencia casi inmediata del lema 1.1.12 –aunque también es consecuencia de la propiedad de ser localmente euclideas de las variedades– es que las variedades topológicas son localmente compactas.

Proposición 1.1.14. *Sea X un espacio topológico localmente euclideo de dimensión $n \geq 0$. Entonces X es localmente compacto.*

Además de ser localmente compactas, las variedades topológicas son *paracompactas.* Para dar una definición de esta propiedad, es necesario definir otras nociones primero.

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{T}$ una colección de subconjuntos de X. La colección $\mathcal{T}$ se dice *localmente finita*, si, para todo punto $p \in X$, existe un entorno $V \subset M$ de p tal que $V \cap T$ es vacía para todos salvo finitos elementos $T \in \mathcal{T}$. Por otro lado, dado un cubrimiento $\mathcal{U}$ de X, un *refinamiento* de $\mathcal{U}$ es otro cubrimiento $\mathcal{V}$ de X tal que, para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ con $V \subset U$.

Ahora sí podemos definir lo que quiere decir que un espacio topológico sea paracompacto. Un espacio topológico X se dice paracompacto, si todo cubrimiento por abiertos de X admite un refinamiento localmente finito conformado por abiertos de X.

Proposición 1.1.15. *Sea M una variedad topológica. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de M por abiertos y sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de M. Entonces existe un refinamiento numerable y localmente finito de $\mathcal{U}$ compuesto por elementos de $\mathcal{B}$. En particular, toda variedad topológica es paracompacta.*

Demostración. En primer lugar, sea $\{K_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión creciente de subconjuntos compactos de M tal que

$$\begin{aligned} M &= \bigcup_{j\geq 1} K_j \quad \text{y} \\ K_j &\subset K_{j+1} \end{aligned}$$

para todo $j \geq 1$. Se define $K_0 = \varnothing$ y, para $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_j &= K_{j+1} \setminus \operatorname{int}(K_j) \quad \text{y} \\ W_j &= \operatorname{int}(K_{j+2}) \setminus K_{j-1} \ . \end{aligned}$$

De esta manera, $\{W_j\}_{j\geq 1}$ es un cubrimiento de M por abiertos y $W_j \supset F_j$ para todo j. Además, cada F_j es compacto y

$$W_j \cap W_{j'} \neq \varnothing \Rightarrow |j - j'| < 3 \ .$$

Sea $j \geq 1$. Para cada $x \in F_j$, existe un abierto $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Como $\mathcal{B}$ es una base para la topología de M, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U_x \cap W_j$. Entonces F_j está contenido en una unión de finitos abiertos básicos B_x. La colección de estos abiertos, con j variando en los enteros positivos, es una colección numerable de abiertos básicos pertenecientes a $\mathcal{B}$. Cada elemento de esta colección está contenido en un elemento de $\mathcal{U}$ según la manera en que fueron elegidos, por lo que constituye un refinamiento de $\mathcal{U}$. Para terminar de demostrar la proposción, resta verificar que esta colección es localmente finita.

Ahora bien, dado que cada elemento del refinamiento encontrado está contenido, además, en algún W_j y que W_j sólo interseca finitos abiertos $W_{j'}$, se deduce que cada W_j

contiene finitos elementos del refinamiento y que cada uno de estos elementos interseca a lo sumo finitos elementos distintos. En particular, dado un punto $p \in M$, tomando un W_j o un elemento de la colección que lo contenga, se deduce que existe un entorno de p en M que interseca sólo finitos elementos del refinamiento, es decir, el mismo es localmente finito. $\square$

1.1.4 Algunas observaciones

A continuación realizamos algunas observaciones acerca de los resultados demostrados anteriormente.

Observación 1.1.1. La proposición 1.1.15 dice más que que toda variedad es paracompacta. Si solamente se quiere demostrar la paracompacidad de una variedad topológica, se puede proceder usando algunas de las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned}
T_2 \text{ y loc. euc.} &\Rightarrow T_2 \text{ y loc. comp.} \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \\
\text{loc. euc. y } N_2 &\Rightarrow \sigma\text{-comp.} \\
\text{loc. comp. y } N_2 &\Rightarrow \sigma\text{-comp.} \\
T_2, \text{ loc. comp. y } \sigma\text{-comp.} &\Rightarrow T_4 \\
T_2, \text{ loc. comp. y } \sigma\text{-comp.} &\Rightarrow \text{paracomp.} \\
T_2, \text{ loc. comp. y } N_2 &\Rightarrow \text{metrizable} \\
T_4 \text{ y } N_2 &\Rightarrow \text{metrizable} \\
\text{paracomp. y loc. metrizable} &\Rightarrow \text{metrizable} \\
\text{metrizable} &\Rightarrow \text{paracomp.}
\end{aligned}$$

Observación 1.1.2. En la demostración de la proposición 1.1.15, se usa de manera esencial que toda variedad topológica admite una sucesión exhaustiva de compactos $\{K_j\}_{j\geq 1}$, es decir, tales que $M = \bigcup_j K_j$ y que $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$. un espacio toplógico con esta propiedad se denomina σ-compacto. El hecho de que las variedades topológicas poseen esta propiedad es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 1.1.16. *Sea X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff y que admite una base numerable para su topología, es decir, es N_2. Entonces existe una sucesión exhaustiva de compactos para X, es decir, X es σ-compacto. En particular, toda variedad topológica es σ-compacta.*

Demostración. Dado que X es localmente compacto y Hausdorff, existe una base de abiertos con clausura compacta. Dado que, además, X es N_2, esta base, por ser un cubrimiento por abiertos de X, admite un subcubrimiento numerable. Sea $K_1 = \overline{U_1}$, donde $\{U_n\}_n$ es un cubrimiento numerable por abiertos precompactos. Existe n_1 tal que

$$K_1 \subset U_1 \cup \cdots \cup U_{n_1} .$$

Sea K_2 la unión de las clausuras de los abiertos que aparecen en la unión:

$$K_2 = \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_{n_1}} .$$

Si $n_1 < 2$, se puede tomar $n_1 = 2$ y sigue siendo cierto que $K_1 \subset \operatorname{int}(K_2)$. Además, eligiendo n_1 de esta manera, $K_2 \supset U_2$.

Habiendo definido $K_1, \ldots, K_j$ compactos tales que $K_i \subset \operatorname{int}(K_{i+1})$ y tales que $U_i \subset K_i$, sea $K_{j+1} = \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_{n_j}}$, donde n_j es tal que $K_j \subset U_1 \cup \cdots \cup U_{n_j}$. Se puede suponer que $n_j \geq j+1$, de manera que $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$ y que $K_{j+1} \supset U_{j+1}$, también. La sucesión que se obtiene así es una sucesión exhaustiva de X por compactos. $\square$

Observación 1.1.3. Si X es un espacio topológico localmente compacto y tal que todo cubrimiento por abiertos admite un subcubrimiento numerable, para cada punto $p \in X$ existen un abierto U_p y un compacto C_p tales que $p \in U_p \subset C_p$. La colección $\{U_p : p \in X\}$ es un cubrimiento de X y admite, pues, un subcubrimiento numerable, $\{U_n\}_{n\geq 1}$. Sea $\{C_n\}_{n\geq 1}$ la familia de compactos correspondiente. Sea $K_1 = C_1$. Como K_1 es compacto, existe n_1 (que se puede suponer mayor o igual a 2) tal que

$$K_1 \subset U_1 \cup \cdots \cup U_{n_1} .$$

Sea $K_2 = C_1 \cup \cdots \cup C_{n_1}$. Entonces

$$K_1 \subset U_1 \cup \cdots \cup U_{n_1} \subset C_1 \cup \cdots \cup C_{n_1} .$$

Así, $K_1 \subset \operatorname{int}(K_2)$ y $K_2 \supset U_2$. Inductivamente, queda definida una sucesión $\{K_j\}_{j\geq 1}$ de compactos tales que $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$ y $K_j \supset U_j$. Como $\{U_j\}_{j\geq 1}$ es un cubrimiento de X, se deduce que

$$X = \bigcup_{j\geq 1} K_j .$$

El espacio topológico X admite una sucesión exhaustiva de compactos. En definitiva, hemos demostrado una versión un poco más general de 1.1.16.

Proposición 1.1.17. *Si X es un espacio topológico localmente compacto y es tal que todo cubrimiento por abiertos admite un subcubriento numerable, entonces X es σ-*compacto. *En este contexto, esto quiere decir que X admite una sucesión exhaustiva de compactos.*

Observación 1.1.4. La propiedad de ser localmente compacta de una variedad topológica se puede demostrar sin el lema de las bolas coordenadas. Mejor dicho, las conclusiones del lema se pueden deducir asumiendo únicamente que M es un espacio topológico localmente euclideo. La cardinalidad de la base es consecuencia de que M admite un subcubrimiento numerable porque es, además, N_2.

Si decimos que X es un espacio topológico localmente euclideo de dimensión $n \geq 0$, estamos diciendo que X admite un cubrimiento por abiertos homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^n$. Es decir, existe una familia de pares (U, φ) donde U es abierto de X y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ determina un homeomorfismo entre U y un abierto de $\mathbb{R}^n$ y los abiertos U cubren a X. Por cada uno de estos pares, $\varphi(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a U. Dado que $\varphi(U)$ admite una base numerable de bolas precompactas $\{B_k\}_{k\geq 1}$, la familia $\{\varphi^{-1}(B_k)\}_{k\geq 1}$

es una base numerable para la topología de U, porque φ es un homeomorismo. Pero U tiene la topología subespacio de X y cada *bola* $\varphi^{-1}(B_k)$ tiene clausura compacta *en* U. Es decir, $\overline{\varphi^{-1}(B_k)}^U$ es compacta como subespacio de U. Pero subespcio de subespacio es subespacio, por lo tanto, $\overline{\varphi^{-1}(B_k)}^U$ debe ser compacto como subespacio de X, aunque talvez no coincida con la clausura de $\varphi^{-1}(B_k)$ en X.

En definitiva, por cada par (U, φ) con $U \subset X$ abierto y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo con un abierto de $\mathbb{R}^n$, existe una base numerable de bolas de X y por cada una de ellas un compacto de U (y, por lo tanto, de X) que la contiene. Es decir, cada bola de la base U es precompacta en el sentido de que está contenida en un subespacio compacto. Agrupando las bases asociadas a cada par (U, φ) se obtiene una base para X.

Si ahora asumimos que todo cubrimiento de X admite un subcubrimiento numerable, entonces X admite un cubrimiento numerable por bolas tales que cada una de ellas esté contenida en un subespacio compacto. Si X es, además, Hausdorff, se puede asumir que dichos compactos son las clausuras (en X o en el abierto U correspondiente, pues son iguales) de las respectivas bolas $\varphi^{-1}(B)$ de X. Obtenemos así una demostración de la proposición 1.1.14 y una generalización del lema 1.1.12 de las bolas coordenadas.

Observación 1.1.5. Si X es un espacio topológico σ-compacto y que, además es Hausdorff, entonces, siguiendo el argumento en la demostración de la proposición 1.1.15, se deduce que, dado un cubrimiento por abiertos y una base, existe un refinamiento numerable localmente finito del cubrimiento por elementos de la base. Es decir, todo espacio σ-compacto y Hausdorff es paracompacto.

1.1.5 Cartas coordenadas

Sea M una variedad topológica de dimensión n. Una *carta coordenada* (mapa coordenado, mapa, coordenada, carta, sistema de coordenadas, etc.) para/en/de M es un par (U, φ) donde $U \subset M$ es abierto y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homemorfismo sobre su imagen. También se puede definir como una terna $(U, \tilde{U}, \varphi)$ donde U es abierto en M, $\tilde{U}$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : U \to \tilde{U}$ es un homeomorfismo. Dado un punto $p \in M$, se dice que una carta (U, φ) *está centrada* en p, si $p \in U$ y $\varphi(p) = 0$. Dada una carta (U, φ), U se denomina el *dominio coordenado* de la carta y φ el *mapa coordenado*. Las funciones

$$x^k = \pi^k \circ \varphi : U \to \mathbb{R} ,$$

donde $\pi^k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota la proyección en la coordenada k, son las *funciones coordenadas* o *coordenadas locales en* U.

Con esta noción, podemos reformular la definición d variedad topológica: una variedad topológica es un espacio topológico Hausdorff M que admite una base numerable para su topología y que posee, además, un cubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}_\alpha$, donde los conjuntos U_α son domnios de una carta coordenada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ para M.

1.1.6 Paréntesis: el grupo fundamental de una variedad

Sea M una variedad topológica y sea $\mathcal{B}$ una base numerable de bolas coordenadas precompactas. Sea $p \in M$ un punto arbitrario y sea $f : [0, 1] \to M$ un camino cerrado basado en p, es decir, una función continua tal que $f(0) = f(1) = p$. Dado que $\mathcal{B}$ constituye un cubrimiento por abiertos de M y, en particular, de $f([0,1])$, existen finitos puntos $\{a_0, \ldots, a_k\}$ tales que $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_{k-1} < a_k = 1$ y existen también bolas $B_1, \ldots, B_k$ pertenecientes a $\mathcal{B}$ tales que

$$f([a_{t-1}, a_t]) \subset B_t \ .$$

El camino f se factoriza como un producto de caminos

$$f \sim f_1 \cdot \cdots \cdot f_k \ ,$$

donde $f_t = f|_{[a_{t-1},a_t]}$ (reparametriado adecuadamente para que su dominio sea $[0,1]$). Sea $x \in B_{t-1} \cap B_t$ un punto de la misma componente conexa de $B_{t-1} \cap B_t$ que $f(a_{t-1}) =: x_{t-1}$. Existe un camino contenido en B_t de x_{t-1} a x. Sea g_{t-1} tal camino. Así,

$$\begin{aligned} f &\sim f_1 \cdot \cdots \cdot f_k \\ &\sim (f_1 \cdot g_1) \cdot (\overline{g_1} \cdot f_2 \cdot g_2) \cdot \cdots \cdot (\overline{g_{k-1}} \cdot f_k) \ , \end{aligned}$$

donde $\overline{g}$ es el camino inverso de g.

Sea $B \in \mathcal{B}$ un elemento arbitrario de la base. Para cada $B' \in \mathcal{B}$, posiblemente igual a B, se elige un punto en cada componente conexa de $B \cap B'$. Como las componentes conecas de dicha intersección son numerables en cantidad y $\mathcal{B}$ contiene numerables bolas, son numerables los puntos elegidos. Llamemos a estos puntos *puntos especiales*. Si $B \in \mathcal{B}$ y si $x', x'' \in B$ son dos puntos especiales ($x' \in B' \cap B$ y $x'' \in B'' \cap B$, por ponerles un nombre), sea $h^B_{x',x''}$ un camino contenido en B con $h^B_{x',x''}(0) = x'$ y $h^B_{x',x''}(1) = x''$. Por cada terna (B, x', x'') se elige un camino, que se denominará *camino especial*, contenido en B de x' a x''. La cantidad de caminos así elegidos es, pues, numerable.

Por otro lado, se puede asumir que el punto p es uno de los puntos especiales: en primer lugar, la elección de los puntos especiales fue realizada sin mención de p; en segundo lugar, dado un punto $p \in M$ arbitrario, existe un punto especial x en la misma componente conexa de M que p, entonces $\pi(M,p) \simeq \pi(M,x)$. Por el argumento del párrafo anterior, para cada $t \in [\![1, k-1]\!]$, existe un camino g_t contenido en $B_t \cap B_{t+1}$ con origen en $x_t = f(a_t)$ que termina en un punto $x \in B_t \cap B_{t+1}$ en la misma componente conexa de $B_t \cap B_{t+1}$ que x_t. Ahora bien, si g_0 es el camino constante fijo en $x_0 = f(a_0) = f(0) = p$ y g_k es el camino constante fijo en $x_k = f(a_k) = f(1) = p$, vale que

$$\begin{aligned} f &\sim f_1 \cdot \cdots \cdot f_k \\ &\sim (\overline{g_0} \cdot f_1 \cdot g_1) \cdot (\overline{g_1} \cdot f_2 \cdot g_2) \cdot \cdots \cdot (\overline{g_{k-1}} \cdot f_k \cdot g_k) \ . \end{aligned}$$

Pero $\overline{g_{t-1}} \cdot f_t \cdot g_t$ es un camino contenido en B_t, que es simplemente conexa, que comienza en un punto especial x'_t y termina en otro punto especial x''_t. En particular,

$$\overline{g_{t-1}} \cdot f_t \cdot g_t \sim h^{B_t}_{x'_t,x''_t} \quad \text{y}$$

$$f \sim h^{B_1}_{x'_1,x''_1} \cdot \cdots \cdot h^{B_k}_{x'_k,x''_k} \ .$$

En definitiva, todo loop basado en p es homotópico a un producto finito de caminos especiales, lo que implica que $\pi(M,p)$ es, a lo sumo, numerable.

1.2 Estructuras diferenciales

1.2.1 Atlas suaves y estructuras diferenciales

Sea M una variedad topológica y sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas coordenadas. Si $U \cap V$ es no vacía, las funciones φ y ψ restringidas a la intersección $U \cap V$ son homeomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi| \,:\, U\cap V &\to \varphi(U\cap V) \quad \text{y} \\ \psi| \,:\, U\cap V &\to \psi(U\cap V) \end{aligned}$$

entre $U \cap V$ y $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$, respectivamente. En particular, la composición

$$\varphi \circ \psi^{-1} \,:\, \psi(U\cap V) \to \varphi(U\cap V)$$

es un homeomorfismo denominado *mapa de transición* o *cambio de coordenadas*. Las cartas (U, φ) y (V, ψ) se dicen *suavemente compatibles* (o, simplemente, compatibles), si $\varphi \circ \psi^{-1}$ es un difeomorfismo, es decir, si $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son funciones suaves entre los correspondientes abiertos de $\mathbb{R}^n$. Un *atlas para M* es una colección de cartas que cubren M. Un atlas se dice *atlas suave* o *atlas (suavemente) compatible*, si todo par de cartas del atlas es un par compatible. Un atlas (suave) se dice *maximal* o *completo* (respecto de la propiedad de ser suave), si no está propiamente contenido en otro atlas (suave); equivalentemente, si cualquier carta compatible con las cartas del atlas ya formaba parte del atlas. Una *estructura suave* en M es un atlas suave maximal. Las variedad topológica M, junto con una estructura suave se denomina *variedad suave* o *variedad diferencial.*

Proposición 1.2.1. *Todo atlas suave está contenido en un único atlas suave maximal. Dos atlas suaves están contenidos en el mismo atlas maximal, si y sólo si su unión es un atlas suave.*

Equivalentemente, en términos de estructura suave, todo atlassuave en M determina una única estructura suave en M. Dos atlas suaves determinan la misma estructura suave, si y sólo si su unión es un atlas suave.

Observación 1.2.1. Equivalentemente, se define una relación de equivalencia entre atlas suaves de la siguiente manera: dos atlas suaves se dicen equivalentes, si se uniónes un atlas suave. Esto, efectivamente, determina una relación de equivalencia entre atlas suaves y las clases de equivalencia se corresponden, exactamente, con lo atlas suavves maximales. Una estructura suave en M se puede definir, también, como una clase de equivalencia de atlas suaves.

Para determinar si un atlas es suave, hay que verifica que todo cambio de coordenadas $\varphi \circ \psi^{-1}$ sea un difeomorfismo. Pero alcanza con verificar que cada uno de ellos es una transformación suave entre abiertos euclideos, ya que la inversa de un cambio $\varphi \circ \psi^{-1}$ es el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$. Por otra parte, para determinar si dos cartas (U, φ) y (V, ψ) son compatibles, hay que verificar que ambos mapas de transición sean suaves. Pero es suficiente verificar que uno de ellos, digamos, sea suave, inyectivo y que su jacobiano sea no nulo en todo punto de su dominio $\psi(U \cap V)$.

1.2.2 Representaciones locales en coordenadas

Sea M es una variedad diferencial. Una carta contenida en el atlas maximal, es decir, una carta compatible con la estructura diferencial se denomina *carta suave* para la variedad M. El dominio se denomina *entorno coordenado.* Si $\varphi(U)$ es una bola o un cubo de $\mathbb{R}^n$, se dice que U es una *bola, o un cubo coordenado.* Decimos que una bola coordenada, o un cubo coordenado, está centrada en un punto $p \in M$, si $\varphi(p) = 0$, donde φ es la función correspondiente de la carta.

Sea $B \subset M$ una bola coordenada. Se dice que B es una bola coordenada *regular*, si existe otra bola coordenada B' y coordenadas suaves φ tales que $B' \supset \overline{B}$ y

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= \mathrm{B}_r(0) \ , \\ \varphi(\overline{B}) &= \overline{\mathrm{B}_r(0)} \quad \text{y} \\ \varphi(B') &= \mathrm{B}_{r'}(0) \ . \end{aligned}$$

Esta noción tiene sentido, incluso si φ es meramente un homeomorfismo, sin tener en cuenta la estructura diferencial en M, pero nos concentraremos en coordenadas compatibles con dicha estructra.

Lema 1.2.2. *Toda variedad diferencial tiene una base numerable de bolas coordenadas regulares.*

Todo lo anterior sigue cierto reemplazando bolas por cubos.

1.2.3 El lema de las cartas

El siguiente lema es útil en la construcción de nuevas variedades, al definir nuevos objetos y determinar si son, o no, variedades diferenciales.

Lema 1.2.3 (de las cartas)**.** *Sea M un conjunto y supongamos dados (a) una colección $\{U_\alpha\}_\alpha$ de subconjuntos de M y (b), para cada índice α, una función $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ que cumplen con las siguientes condiciones:*

(i) por cada α, φ_α determina una biyección entre U_α y un abierto $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de $\mathbb{R}^n$;

(ii) dados α, β, tanto $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, como $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$;

(iii) si, para α, β, $U_\alpha \cap U_\beta$ es no vacía, entonces

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \, : \, \varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha)$$

es suave;

(iv) existe una subcolección numerable $\{U_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$M = \bigcup_{n\geq 1} U_n \quad y$$

(v) si p y q son puntos distintos de M, o bien existe α tal que $p, q \in U_\alpha$, o bien existen α, β tales que $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ y $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$.

Entonces M admite una única estructura suave tal que $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sea una carta compatible para todo α.

Demostración. Si se quiere que cada par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sea una compatible de M (suponiendo que M es una variedad diferencial), debe ser, en particular, una carta coordenada para la estructura de variedad topológica subyacente. Esto implica que cada U_α debe ser abierto y que cada aplicación φ_α debe ser un homeomorfismo entre U_α y un abierto de $\mathbb{R}^n$. Como $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, dado $p \in M$, existe α tal que $p \in U_\alpha$. Así, tomando una base de entornos para $\varphi_\alpha(p)$ en $\mathbb{R}^n$ y tomando preimagen por φ_α, se debería obtener una base de entornos para p en U_α y, porque $U_\alpha \subset M$ debería ser abierto, estas bases deberían dar una base para la topología de M (asumiendo que M es una variedad topológica).

Se define la siguiente topología en M. Sea

$$\mathcal{B} = \bigcup_\alpha \left\{ \varphi_\alpha^{-1}(V) \,:\, V \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto} \right\} .$$

Esta colección tiene las propiedades de base para una topología en M: en primer lugar,

$$M = \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcup_\alpha \varphi^{-1}\big(\varphi_\alpha(U_\alpha)\big)$$

y $\varphi_\alpha(U_\alpha) \in \mathcal{B}$ para todo α; en segundo lugar, dado $p \in M$ y dados $V, W \subset \mathbb{R}^n$ abiertos tales que $p \in \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$, vale la igualdad

$$\varphi_\alpha^{-1}\big(V \cap \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W)\big) = \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) \ni p .$$

Pero también

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha)^{-1}(W)$$

y como $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es suave, es, en particular, continua y $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W)$ es abierto en $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Como este último conjunto es abierto en $\mathbb{R}^n$, el subconjunto $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, también. En definitiva, la intersección $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es base para una topología, la topología más pequeña que la contiene. Resta ver que, con esta topología M es efectivamente una variedad topológica.

Antes de demostrarlo, notemos que esta topología en M es la más pequeña que hace de M una variedad topológica y tal que los pares $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sean cartas coordenadas. Si, por otro lado, M tiene una estructura de variedad topológica tal que estos pares sean cartas coordenadas, entonces, dado un abierto $U \subset M$, podemos descomponerlo intersecando con los dominios coordenados U_α: $U = \bigcup_\alpha U_\alpha \cap U$. Como las funciones coordenadas φ_α son homeomorfismos, cada término $U_\alpha \cap U$ pertenece a la colección $\mathcal{B}$. En definitiva, $\mathcal{B}$ es base para la topología de M. Por lo tanto, la topología determinada por $\mathcal{B}$ es la única topología que hace que M tenga estructura de variedad topológica y que los pares $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sean cartas para M. Dado que la colección de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ constituye, por hipótesis, un atlas compatible para M, la estructura diferenciable también es única: precisamente, es la (única) estructura detereminada por este atlas.

Por *(i)*, M es localmente euclidea de dmensión n; por *(v)* es T_2 y por *(iv)* es N_2. Entonces M tiene estructura de variedad topológica. Finalmente, por *(ii)* y *(iii)*, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ es un atlas C^∞ para M. $\square$

1.3 Variedades con borde y variedades con esquinas

1.3.1 Variedades con bordes

Una *variedad con borde*, específicamente, una *variedad topológica con borde* se define como un espacio topológico Hausdorff y N_2 tal que todo punto del mismo tiene un entorno homeomorfo a un abierto del semiespacio superior $\mathcal{H}^d$ para algún $d \geq 0$. El valor de d es la dimensión de la variedad (y, por un corolario del teorema de la dimensión 1.1.1, está bien definida). Es decir, en lugar de estar modelado localmente como $\mathbb{R}^d$, una variedad con borde es localmente como

$$\mathcal{H}^d = \left\{(x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d \,:\, x^d \geq 0\right\} .$$

Si M es una variedad con borde y $p \in M$, existe un abierto U de M y un homeomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U)$ con un abierto de $\mathcal{H}^d$ tal que $p \in U$. Como en el caso de una variedad topológica, un par (U, φ) se denominará *carta* para M en p.

El *borde* de $\mathcal{H}^d$ en $\mathbb{R}^d$ es el conjunto de puntos $(x^1, \ldots, x^d)$ tales que $x^d = 0$, lo denotaremos $\partial\mathcal{H}^d$. El *interior* de $\mathcal{H}^d$ se define como el conjunto de puntos $(x^1, \ldots, x^d)$ tales que $x^d > 0$ y lo denotamos $\operatorname{int}\left(\mathcal{H}^d\right)$. Si M es una variedad con borde, el *borde* de M será el conjunto de puntos $p \in M$ para los cuales existe una carta (U, φ) tal que $\varphi(p) \in \partial\mathcal{H}^d$, es decir, $\pi^d(\varphi(p)) = 0$. El *interior* de M se define como el subconjunto formado por aquellos puntos $p \in M$ para los cuales existe una carta (U, φ) tal que $\varphi(p) \in \operatorname{int}\left(\mathcal{H}^d\right)$, es decir, $\pi^d(\varphi(p)) > 0$. Los puntos del interior de M admiten entornos homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^d$. Denotamos el borde de M por ∂M y su interior por $\operatorname{int}(M)$.

Si bien los conjuntos $\operatorname{int}(M)$ y ∂M están bien definidos e, intuitivamente, deberían ser disjuntos, no es claro, *a priori* que así lo sea.

El interior $\operatorname{int}(M)$ de una variedad M de dimensión d es una variedad de dimensión d (sin borde), pues es un subespacio abierto de la variedad M. El borde ∂M también es una variedad topológica (sin borde). Su dimensión es $d-1$: si p es un punto del borde y (U, φ) es una carta para M en p, entonces

$$U \cap \partial M = \left\{q \in U \,:\, \pi^d(\varphi(q)) = 0\right\} .$$

De esto se deduce que $(U \cap \partial M, \tilde{\varphi})$ es una carta para ∂M en p, donde $\tilde{\varphi} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^{d-1})$ –es decir, proyectar sobre las primeras $d-1$ coordenadas la *coordenada* φ, valga la redundancia. La imagen de esta carta es un abierto de $\mathbb{R}^{d-1}$ dado por intersecar el abierto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^d$ con el hiperplano $\{x^d = 0\}$ (y proyectar sobre las primeras $d-1$ coordenadas).

Dada una variedad topológica con borde M y una carta (U,φ), decimos que esta carta es una *carta del interior*, si $\varphi(U) \subset \mathcal{H}^d$ es un abierto contenido en el interior del semiespacio, es decir, $\varphi(U) \cap \partial\mathcal{H}^d = \varnothing$. Si, en cambio, $\varphi(U) \cap \partial\mathcal{H}^d \neq \varnothing$, decimos que (U,φ) es una *carta de borde*. Dado que los abiertos del interior $\operatorname{int}\left(\mathcal{H}^d\right)$ del semiespacio son homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^d$ y *vice versa*, también se denominarán *cartas* para M a los pares (U,φ), donde $U \subset M$ es un abierto y $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ es un homeomorfismo con un abierto euclideo. Específicamente, estas cartas serán cartas de interior, también. Finalmente, decimos que un abierto $U \subset M$ es una *semibola coordenada*, si es el dominio de una carta (U,φ) para M tal que $\varphi(U) \cap \partial\mathcal{H}^d \neq \varnothing$ (es decir, una carta de borde) y $\varphi(U) = \mathrm{B}_r(x) \cap \mathcal{H}^d$ para algún número $r > 0$ y algún punto $x \in \partial\mathcal{H}^d$. Un abierto $B \subset M$ se dice *semibola regular*, si existe una semibola coordenada (B',φ) tal que $\overline{B} \subset B'$ y

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= \mathrm{B}_r(0) \cap \mathcal{H}^d \ , \\ \varphi(\overline{B}) &= \overline{\mathrm{B}_r(0)} \cap \mathcal{H}^d \quad \text{y} \\ \varphi(B') &= \mathrm{B}_{r'}(0) \cap \mathcal{H}^d \end{aligned}$$

para ciertos números $r' > r > 0$.

1.3.2 Estructuras diferenciales en variedades con borde

Una *estructura diferencial (o suave) en/de/para M* se define como un atlas suavemente compatible maximal. Un *atlas* para M es un conjunto de cartas que cubre a M. Dos cartas se dicen *suavemente compatibles*, si los cambios de coordenadas en ambas direcciones son suaves. Un atlas en M se dice *suavemente compatible*, si todo par de cartas del atlas es un par compatible. Resta definir la noción de suavidad o regularidad para una función definida en un abierto de $\mathcal{H}^d$.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto arbitrario y sea $F : A \to \mathbb{R}^k$ una función. Se dice que F es *suave* o *diferenciable* o *regular*, si, dado $x \in A$, existe una función $\widetilde{F} : B \to \mathbb{R}^k$ suave, diferenciable, regular, definida en un entorno B de x, tal que $\widetilde{F}|_{B\cap A} = F|_{B\cap A}$. En particular, si $U \subset \mathcal{H}^d$ es un subconjunto abierto, una función $F : U \to \mathbb{R}^k$ es suave, si, para cada punto $x \in U$, existe un abierto $\widetilde{U}$ de $\mathbb{R}^d$ tal que $x \in \widetilde{U}$ y una función suave $\widetilde{F} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^k$ que coincide con F en $\widetilde{U} \cap U$. Notemos que la noción de diferenciabilidad depende del dominio de definición de la función; precisamente, depende de cuál es el espacio euclideo ambiente del cual A es subespacio. Si (U,φ) y (V,ψ) son cartas con borde para una variedad con borde M, entonces las mismas son compatibles, si, o bien $U \cap V = \varnothing$, o bien $U \cap V \neq \varnothing$ y los cambios de coordenadas

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi^{-1} &: \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V) \quad \text{y} \\ \psi \circ \varphi^{-1} &: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \end{aligned}$$

son suaves. Según la definición anterior, esto quiere decir, definiendo $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, que, dado $x \in \varphi(U \cap V)$, existe un abierto $B \subset \mathbb{R}^d$ tal que $x \in B$ y una función suave

$\tilde{f} : B \to \mathbb{R}^d$ tal que $\tilde{f}|_{B\cap\varphi(U\cap V)} = f|_{B\cap\varphi(U\cap V)}$ y, lo mismo para la inversa f^{-1}. El entorno B debe ser un abierto de $\mathbb{R}^d$, porque $\varphi(U\cap V)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^d$, y $\tilde{f}$ tiene que tomar valores en $\mathbb{R}^d$, porque, de la misma manera, $\psi(U\cap V)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^d$.

Si $F : U \subset \mathcal{H}^d \to \mathbb{R}^k$ es una función suave, entonces F restringida a $U \cap \operatorname{int}\left(\mathcal{H}^d\right)$ es suave en el sentido usual y las derivadas parciales de F en puntos del borde quedan determinadas por los valores en $\operatorname{int}\left(\mathcal{H}^d\right)$, independientemente de la extensión, por la continuidad de las derivadas (de F en el interior y de la extensión en el entorno del punto).

Una variedad topológica con borde M junto con una estructura diferencial en M se denomina *variedad diferencial con borde*. Una carta en M se dice *compatible*, si pertenece al atlas maximal correspondiente a la estructura en M. El lema 1.2.3 sigue siendo válido, si se reemplaza el espacio euclideo que modela localmente a la variedad por un semiespacio. El resultado es que queda determinada una estructura de variedad diferencial *con borde*.

1.3.3 Variedades con borde

Sea $\mathbb{L}^d$ el subconjunto de $\mathbb{R}^d$ de puntos cuyas coordenadas son no negativas:

$$\mathbb{L}^d = \left\{(x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d : x^1 \geq 0, \ldots, x^d \geq 0\right\} .$$

Topológicamente, $\mathbb{L}^d$ y $\mathcal{H}^d$ son homeomorfos, como lo son, por ejemplo, un cuadrado y un círculo. La diferencia desde el punto de vista geométrico está en la estructura diferencial. El homeomorfismo entre la esquina y el semiespacio nos permitiría trasladar al estructura dferencial de $\mathcal{H}^d$ a $\mathbb{L}^d$ ya que $\mathbb{L}^d$ es una variedad topológica con borde. Pero esta estrucutura no sería compatible con la topología de $\mathbb{L}^d$ como subespacio de $\mathbb{R}^d$.

Sea M una variedad topológica (con borde) de dimensión d. Una *carta de esquina (o con esquinas)* para M es un par (U, φ) tal que $U \subset M$ es abierto y $\varphi : U \to \widehat{U} \subset \mathbb{L}^d$ es un homeomorfismo entre U y un abierto $\widehat{U}$ de $\mathbb{L}^d$. Notemos que, componiendo una carta de borde de M con un homeomorfismo, se obtiene una carta de esquina de M (esto no quiere decir que estos homeomorfismos terminen siendo suaves). Un *atlas (con esquinas)* en M es un conjunto de cartas (cartas de interior, cartas de borde *y* cartas con esquinas) que cubren a M. Dos cartas (posiblemente con esquinas) (U, φ) y (V, ψ) para M se dicen *suavemente compatibles*, si $V \cap U = \varnothing$, o $V \cap U \neq \varnothing$ y los cambios de coordenadas

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi^{-1} &: \psi(V \cap U) \to \varphi(V \cap U) \quad \text{y} \\ \psi \circ \varphi^{-1} &: \varphi(V \cap U) \to \psi(V \cap U) , \end{aligned}$$

que son homeomorfismos, son suaves. Los dominios y codominios de estas composiciones son abiertos de $\mathbb{L}^d$ en este caso. Como en el caso de variedades con borde, decimos que una función $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es suave si se puede extender en un entorno de cada punto de su dominio de definición a una función suave. Recordemos que la extensión a considerar depende del espacio euclideo ambiente del que A sea subespacio. En el caso de los cambios de coordenadas, si $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, por ejemplo, que $f : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ sea suave quiere decir que, dado $x \in \varphi(U \cap V)$, existe un abierto $B \subset \mathbb{R}^d$ tal que $x \in B$ y una extensión $\tilde{f} : B \to \mathbb{R}^d$ que coincide con f en $\varphi(U \cap V) \cap B$ y que es suave.

Una *estructura diferenial (o suave) con esquinas* en una variedad topológica (con borde) M es un atlas (con esquinas) suavemente compatible maximal. Una variedad topológica (con borde), junto con una estructura diferencial con esquinas, se denomina *variedad diferencial con esquinas.* Dada una variedad diferencial con esquinas M, una carta *compatible* es una carta perteneciente a la estructura de M, ya sea de interior, de borde o de esquina.

Vale la pena notar que el borde (de variedad) de una variedad está definido en términos de la topología de la misma. En particular, el borde de una variedad con esquinas es el conjunto de puntos p para los cuales existe un homeomorfismo φ entre un entorno del punto en la variedad y un abierto de $\mathcal{H}^d$, de forma tal que $\varphi(p) \in \partial\mathcal{H}^d$. Por ejemplo,

$$\partial\mathbb{L}^d = \left\{(x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{L}^d : x^1 = 0 \text{ o} \dots \text{ o } x^d = 0\right\} .$$

Las *esquinas* de $\mathbb{L}^d$ son los puntos $(x^1, \dots, x^d)$ tales que al menos dos coordenadas se anulan.

Teorema 1.3.1. *Sea M una variedad diferencial con esquinas de dimensión $d \geq 2$. Sea $p \in M$ y sea (U, φ) una carta (compatible) en p. Si $\varphi(p) \in \mathbb{L}^d$ pertenece a las esquinas de $\mathbb{L}^d$, entonces, dada cualquier otra carta compatible (V, ψ) en p, $\psi(p)$ también pertenece a las esquinas.*

Demostración. Supongamos que $\psi(p)$ no pertenece a las esquinas de $\mathbb{L}^d$. Como $\varphi(p)$ si es un punto de las esquinas, podemos suponer, reordenando las coordenadas, que $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ (en particular, $k \leq d-2$). Como $\psi(V) \subset \mathbb{L}^d$ es abierto y $\psi(p)$ tiene, al menos, $d-1$ coordenadas no nulas, existe un subespacio lineal $S \subset \mathbb{R}^d$ de dimensión $d-1$ tal que $\psi(p) \in \psi(V) \cap A$ y que $S = \psi(V) \cap A$ es abierto en A. Esto es cierto, aun si $\psi(p)$ tiene a lo sumo 2 coodenadas nulas, pero, como estamos suponiendo que $\psi(p)$ tiene a lo sumo una coordenada nula, es decir, que p es un punto del borde pero no de la esquina o un punto del interior, podemos elegir A de la forma $A = \{x^i = 0\}$ para algún (único) i, si $\varphi(p) \in \partial\mathbb{L}^d$ o de manera arbitraria, si $\psi(p) \in \operatorname{int}\left(\mathbb{L}^d\right)$.

Sea $S' = S \cap \psi(U \cap V) = A \cap \psi(U \cap V)$ y sea $\alpha : S' \to \mathbb{R}^d$ la restricción de $\varphi \circ \psi^{-1}$ a S'. Dado que $\varphi \circ \psi^{-1}$ es un difeomorfismo (es suave con inversa suave), por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \alpha &= \mathsf{id}_{S'} \quad \text{y} \\ \mathrm{D}_{\alpha(x)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \cdot \mathrm{D}_x\alpha &= I \ . \end{aligned}$$

donde I es una matriz que es la identidad en los vectores de A. Definiendo adecuadamente los tangentes en las esquinas, podríamos hablar del diferencial, en lugar de usar la matriz jacobiana, pero es esencialmente lo mismo: las derivadas parciales en $\partial\mathbb{L}^d$ están determinadas por su valor en el interior. En particular, se deduce que $\mathrm{D}_x\alpha$ es una matriz de rango máximo (es decir, la transformación lineal asociada es inyectiva). Con tales definiciones, deberíamos tener $\mathsf{id}_{T_xS'}$ en lugar de la matriz I. Como $\dim S = d-1$, vale que $\mathsf{rg}\,(\mathrm{D}_x\alpha) = d-1$. Entonces existe un vector $v = (v^1, \ldots, v^d) \in \mathbb{R}^d$ que pertenece al espacio columna de la matriz $\mathrm{D}_x\alpha$ y tal que $v^{d-1} \neq 0$ o $v^d \neq 0$. Reordenando o multiplicando, de ser necesario, por -1, podemos asumir que $v^d < 0$.

Sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una curva suave con origen en $\psi(p)$ y velocidad $\dot\gamma(0)$ tal que $\mathrm{D}_{\psi(p)}\alpha(\dot\gamma(0)) = v$. En particular, la última coordenada de la composición $\alpha\circ\gamma(t)$ verifica

$$(\alpha \circ \gamma(t))^d \,<\, 0$$

para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ suficientemente chico. Esto contradice el hecho de que α tiene imagen en $\mathbb{L}^d$ en donde todas las coordenadas son no negativas. $\square$

Con este teorema, podemos definir sin ambigüedad la noción de *puntos de borde*, es decir puntos tales que, respecto de alguna (y por lo tanto toda) carta compatible (U, φ), en coordenadas, $\varphi(p)$ pertenece a las esquinas de $\mathbb{L}^d$. Un punto del borde, como antes, es un punto para el cual debe valer que $\varphi(p) \in \partial\mathbb{L}^d$, bajo cualquier carta φ (con codominio un abierto de $\mathbb{L}^d$).

Observación 1.3.1. A diferencia de las variedades (diferenciales) con borde, el borde de una variedad con esquinas no es una variedad (con ni sin esquinas). Basta considerar $\mathbb{L}^d$ (para $d \geq 2$). En este caso,

$$\partial\mathbb{L}^d \,=\, H_1 \cup \cdots \cup H_d \;,$$

donde $H_i = \{(x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{L}^d \,:\, x^i = 0\}$. Notemos que los subconjuntos H_i sí son variedades. Precisamente, H_i es una variedad con esquinas de dimensión $d-1$.

Capítulo 2

Transformaciones suaves

2.1 Funciones y transformaciones suaves

Sea M una variedad y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Para describir a f, para poder decir algo acerca de sus propiedades, estudiamos la función en coordenadas. La *representación de f en coordenadas* o la función *f en coordenadas* es cualquier composición de f con la inversa de una carta para M, es decir, algo de la forma $f \circ \varphi^{-1}$, donde φ es la función coordenada de una carta (U, φ) para M. Para hacer uso de esta idea, no es necesario que el codominio de f sea $\mathbb{R}$. La idea es que todo, o mucho de lo que se puede conocer de M se conoce a través de las cartas.

2.1.1 Funciones suaves

Una función $f : M \to \mathbb{R}$ o, más en general, una función $f : M \to \mathbb{R}^l$ es una *función suave*, si, para todo punto $p \in M$, existe una carta compatible (U, φ) para M en p tal que la composición

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$$

es suave en el sentido *usual*: diremos que f es diferenciable, de clase C^1, de clase C^k, *etcetera*, si todas las composiciones $f \circ \varphi^{-1}$ tienen la propiedad correspondiente, propiedades que dependen de la existencia de ciertos límites y de la continuidad de los mismos. En general, toda propiedad local acerca de funciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^d$ se puede definir también para funciones definidas en abiertos de variedades usando las cartas (compatibles) para la variedad. Decimos que f es *regular*, si vista en coordenadas es regular.

Si U es un abierto euclideo, entonces hay dos nociones de suavidad de funciones. Si $f : U \to \mathbb{R}^l$ es una función, podemos decir que f es suave porque es de clase C^k en U para todo $k \geq 1$, en el sentido de que existen las derivadas parciales de orden k y son continuas para todo $k \geq 1$; o bien podemos decir que es suave porque para todo punto $p \in U$ existe una carta (U', φ) en p tal que $f \circ \varphi^{-1}$ es suave. Ambas nociones coinciden: si f es suave en el sentido usual, entonces, tomando la carta global (U, id_U), se ve que $f \circ \mathsf{id}_U^{-1} = f$ es suave (en el sentido usual) y que, por lo tanto, para todo punto se puede hallar una carta tal que la función en coordenadas es suave en el sentido usual; recíprocamente, basta notar que, dada una carta (V, ψ) para U, las funciones ψ y ψ^{-1} son funciones suaves en sentido usual, ya que ψ es la función de una carta compatible con la estructura en U determinada por el atlas C^∞ $\{(U, \mathsf{id}_U)\}$.

Observación 2.1.1. Veamos esto último en detalle. La estructura diferencial usual en U es aquella determinada por el atlas que consiste en la única carta (U, id_U) que se obtiene de restringir la carta $(\mathbb{R}^d, \mathsf{id})$ que define la estructura diferencial usual de $\mathbb{R}^d$. Sea (V, ψ) una carta para U compatible con esta estructura. Como (U, id_U) y (V, ψ) son cartas compatibles, las funciones

$$\psi(U \cap V) \to \mathsf{id}_U(U \cap V) \quad \text{e} \quad \mathsf{id}_U(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

son diferenciables (en el sentido usual, naturalmente). Pero estas funciones son, precisamente, $\psi^{-1} : \psi(V) \to V$ y $\psi : V \to \psi(V)$. Es decir, ψ y ψ^{-1} son suaves en el sentido usual y ψ es un difeomorfismo, en el sentido usual.

Observación 2.1.2. Sea M una variedad diferencial y sea $f : M \to \mathbb{R}^l$ una función suave. Sea (U, φ) una carta compatible para M. Entonces $f \circ \varphi^{-1}$ es suave: si $p \in U$ y (V, ψ) es una carta tal que $p \in V$ y $f \circ \psi^{-1}$ es suave,

$$f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)} = (f \circ \psi^{-1})|_{\psi(U \cap V)} \circ (\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap V)} \;.$$

Esta descomposión muestra que $f \circ \varphi^{-1}$ es suave "en p". Como $p \in U$ era arbitrario, $f \circ \varphi^{-1}$ es suave.

Si $f : M \to \mathbb{R}^l$ es suave y (U, φ) es una carta (compatible) para M, la composición $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ se denomina *representación de f en coordenadas (respecto de la carta φ).* La observación 2.1.2 muestra que la suavidad de las representaciones no depende de la carta.

2.1.2 Transformaciones suaves

Una función $F : M \to N$ entre variedades diferenciales se dice *suave* o *transformación suave* (para distinguirlas de aquellas con codominio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^l$), si, para todo punto $p \in M$ existen cartas (U, φ) para M en p y (V, ψ) para N en $F(p)$ tales que

i $F(U) \subset V$ y

ii $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es suave en sentido usual entre abiertos de $\mathbb{R}^{\dim M}$ y de $\mathbb{R}^{\dim N}$.

Esta definición coincide con la definición de función suave pensando al codominio $\mathbb{R}^l$ como una variedad diferencial con su estructura usual argumentando como en la observación 2.1.1. De manera similar al caso de funciones en $\mathbb{R}^l$, llamamos *representación en coordenadas de F* a $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$.

Observación 2.1.3. Sea $F : M \to N$ una función. Entonces F es suave, si y sólo si para todo $p \in M$ existen cartas (U, φ) en p y (V, ψ) en $F(p)$ tales que $U \cap F^{-1}(V)$ sea abierta en M y

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \,:\, \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \,\to\, \psi(V)$$

sea suave. Equivalentemente, F es suave, si y sólo si F es continua y existen atlas compatibles $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ de M y $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_\beta$ de N tales que las composiciones

$$\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} \,:\, \varphi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) \,\to\, \psi_\beta(V_\beta)$$

sean suaves.

2.1.3 Propiedades locales

Al igual que la continuidad de funciones, suavidad es una propiedad local.

Proposición 2.1.1 (Suavidad es una propiedad local)**.** *Sea $F : M \to N$ una función entre variedades diferenciales. Entonces, si F es suave, la restricción $F|_U : U \to N$ es suave para todo abierto $U \subset M$. Recíprocamente, si todo punto admite un entorno U tal que $F|_U$ sea suave, entonces F es suave. Diremos que F es suave en un punto $p \in M$, si exite un entorno U de p tal que la restricción $F|_U$ sea suave.*

Dado que las cartas son homeomorfismo podemos deducir la siguiente propiedad *deseable.*

Proposición 2.1.2. *Toda función suave $F : M \to N$ es continua.*

Demostración. Para cada punto p existen cartas (U, φ) en p y (V, ψ) en $F(p)$ tales que $F(U) \subset V$. Entonces

$$F|_U \,=\, \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$$

implica que F es continua restringida a U. Como esto es válido para todo punto $p \in M$, F es continua en M. $\square$

De manera similar, el lema del pegado para funciones continuas también tiene su análogo acerca de funciones suaves.

Proposición 2.1.3 (Lema del pegado)**.** *Sean M y N variedades diferenciales. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento de M por abiertos. Si, para cada α, existe una función suave $F_\alpha : U_\alpha \to N$ de manera que*

$$F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \,=\, F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

para todo par α, β, entonces existe una única función suave $F : M \to N$ tal que $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ para todo α.

Proposición 2.1.4. *Las funciones constantes $c : M \to N$ son suaves. La identidad $\mathsf{id}_M : M \to M$ es suave. La inclusión $U \hookrightarrow M$ de una subvariedad abierta es suave.*

Si $M_1, \ldots, M_k$ y N son variedades diferenciales (y, a lo sumo, una de las M_i posee borde no vacío), entonces una función $F : N \to M_1 \times \cdots \times M_k$ es suave, si y sólo si las composiciones $\pi_i \circ F : N \to M_i$ son suaves.

La composición de funciones suaves es suave.

Demostración. Demostramos la última afirmación. Supongamos que $F : M \to N$ y que $G : N \to \tilde{N}$ son funciones suaves. Sea $p \in M$. Por hipótesis, existen cartas (V, φ) en $F(p)$, (W, ψ) en $G(F(p))$ tales que $G(V) \subset W$ y de manera que $\psi \circ G\varphi^{-1}$ es suave en $\varphi(V)$. Porque F es continua, $F^{-1}(V)$ es abierta en M y contiene a p. Existe, entonces, una carta $(U, \tilde{\varphi})$ tal que $p \in U \subset F^{-1}(V)$. En particular, $\varphi \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}(U) \to \varphi(V)$. Se deduce entonces que $G \circ F(U) \subset G(V) \subset W$ y que

$$\psi \circ (G \circ F) \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\psi \circ G \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ F\tilde{\varphi}^{-1})$$

es suave por ser composición de funciones suaves entre abiertos de espacios euclideos. $\square$

2.2 Particiones de la unidad

El objetivo de esta sección es demostrar que las variedades diferenciales adminten particiones de la unidad subordinadas a cualquier cubrimiento por abiertos. Comenzamos por el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Sea X un espacio topológico y sea $\{X_\alpha\}_\alpha$ una colección de subconjuntos. Entonces, si $\{X_\alpha\}_\alpha$ es localmente finito en X, la colección $\{\overline{X_\alpha}\}_\alpha$ también lo es y, además,*

$$\overline{\bigcup_\alpha X_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{X_\alpha}\ .$$

Demostración. Sea $p \in X$. Si $\{X_\alpha\}_\alpha$ es localmente finito, existe un abierto $U \subset X$ tal que $p \in U$ y $U \cap X_\alpha = \varnothing$ para todo α salvo finitos. Si $x \in U \cap \overline{X_\alpha}$, entonces existe un abierto V tal que $x \in V$ y $V \subset U$. Como $x \in \overline{X_\alpha}$, la intersección $V \cap X_\alpha$ es no vacía. Pero entonces $U \cap X_\alpha \neq \varnothing$. En definitiva, el abierto U interseca a lo sumo finitos subconjuntos $\overline{X_\alpha}$.

En cuanto a la última afirmación, como $X_\beta \subset \bigcup_\alpha X_\alpha$ para todo β, $\overline{X_\beta} \subset \overline{\bigcup_\alpha X_\alpha}$ para todo β. Recíprocamente, si $\{X_\alpha\}_\alpha$ es localmente finita y $x \in \overline{\bigcup_\alpha X_\alpha}$, entonces existe un abierto U tal que $x \in U$ y $U \cap \overline{X_\alpha} = \varnothing$ para todos salvo finitos α. Por otro lado, como x pertenece a la clausura de $\bigcup_\alpha X_\alpha$,

$$\begin{aligned} U \cap \bigcup_\alpha X_\alpha &= \bigcup_\alpha (U \cap X_\alpha) = \big(U \cap X_{\alpha_1}\big) \cup \cdots \cup \big(U \cap X_{\alpha_k}\big) \\ &= U \cap \big(X_{\alpha_1} \cup \cdots \cup X_{\alpha_k}\big) \end{aligned}$$

es no vacía. Dicho de otra manera, si $\alpha \neq \alpha_i$ para algún i, entonces $U \cap X_\alpha = \varnothing$ y, al menos para un valor de i, $U \cap X_{\alpha_i} \neq \varnothing$. Además, lo mismo es cierto si se reemplaza U por algún otro abierto $U' \subset U$ tal que $p \in U'$. En definitiva,

$$x \in \overline{X_{\alpha_1} \cup \cdots \cup X_{\alpha_k}} = \overline{X_{\alpha_1}} \cup \cdots \cup \overline{X_{\alpha_k}} .$$

□

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento por abiertos de X. Una *partición de la unidad para X subordinada al cubrimiento $\mathcal{U}$* es una familia $\{\psi_\alpha\}_\alpha$ de funciones $\psi_\alpha : X \to \mathbb{R}$ que cumplen:

i $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ en X para todo α;

ii $\mathsf{sop}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$;

iii la colección $\{\mathsf{sop}(\psi_\alpha)\}_\alpha$ es localmente finita; y

iv $\sum_\alpha \psi_\alpha = 1$ en X.

La suma en *(iv)* está bien definida pues, siendo los soportes localente finitos, para todo $x \in X$, $\psi_\alpha(x) = 0$ para todo α salvo finitos. Una partición de la unidad se dirá *suave*, si las funciones ψ_α son todas suaves.

2.2.1 Particiones en variedades topológicas

Empecemos recordando algunos resultados para espacios localmente compactos.

Proposición 2.2.2. *Sea X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff y sea $K \subset X$ un compacto. Sea $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ un cubrimiento de K por abiertos de X. Entonces existe una partición de la unidad para K subordinada a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Por el lema 1.1.8, existen, para cada $x \in K$, abiertos V_x tales que $x \in V_x$, $\overline{V_x} \subset U_j$ para algún j y $\overline{V_x}$ sea compacto. Como K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_m$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^m \operatorname{int}(N_{x_i})$. Para cada $j \in [\![1, k]\!]$, definimos

$$F_j = \bigcup \{N_{x_i} : i \in [\![1, m]\!], N_{x_i} \subset U_j\} .$$

Entonces cada F_j está contenido en U_j y es compacto. Por 1.1.10, existen funciones continuas $g_1, \ldots, g_k$ de soporte compacto en X tales que $0 \leq g_j \leq 1$, $g_j = 1$ en F_j y $\mathsf{sop}(g_j) \subset U_j$. En particular, en K, $\sum_j g_j \geq 1$ y $K \subset \{\sum_j g_j > 0\} =: U$. Aplicando 1.1.10 nuevamente, se obtiene una función f de soporte compacto contenido en el abierto U, que toma valores entre 0 y 1, que restringida a K es constantemente 1.

Sea $g_{k+1} := 1 - f$. Entonces $\sum_{j=1}^{k+1} g_j > 0$ en todo el espacio X. Para $j \leq k$, sea h_j la función

$$h_j = \frac{g_j}{\sum_{t=1}^{k+1} g_t} .$$

Entonces $\mathsf{sop}(h_j) = \mathsf{sop}(g_j) \subset U_j$ y $\sum_{j=1}^k h_j = 1$ en K. □

Proposición 2.2.3. *Si X es un espacio localmente compacto Hausdorff y σ-compacto, entonces, dado un cubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ de X, existe una partición de la unidad para X subordinada a $\mathcal{U}$ que consiste en funciones de soporte comapcto.*

Como corolario del resultado anterior, deducimos la existencia de particiones de la unidad para variedades topológicas.

Corolario 2.2.4. *Sea M una variedad topológica y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de M. Existe una partición de la unidad para M subordinada a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Las variedades topológicas son espacios localmente compactos Hausdorff y σ-compactos. Una dmostraci'on un poco más *explícita* podría ir por el lado de la exitencia de bolas coordenadas regulares y de poder refinar cualquier cubrimiento por uncubrimiento que esté conformado por tales abiertos. □

2.2.2 Particiones en variedades diferenciales

Para establecer la existencia de particiones suaves de la unidad, primero es necesario demostrar los resultados específicos para los espacios euclideos.

Lema 2.2.5. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}_{>0}}(t)e^{-\frac{1}{t}}$ es suave.*

Lema 2.2.6. *Dados $r_1 < r_2$ números reales, existe una función suave $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = 0$ si $t \geq r_2$, $h(t) = 1$ si $t \leq r_1$ y $0 < h < 1$ en otro caso.*

Demostración. Una función con estas propiedades es aquella dada por

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(t - r_1) + f(r_2 - t)} ,$$

donde f es la función del lema 2.2.5. □

Lema 2.2.7. *Dados números reales $0 < r_1 < r_2$, existe una función suave $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tal que $H(x) = 0$ si $x \notin \mathrm{B}_{r_2}(0)$, $H(x) = 1$ si $x \in \overline{\mathrm{B}_{r_1}(0)}$ y $0 < H < 1$ en otro caso.*

Demostración. Una función con estas propiedades es $H(x) = h(|x|)$. □

Proposición 2.2.8. *Sea M una variedad diferencial y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento por abiertos. Existe una partición suave de la unidad para M subordinada a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Los abiertos U_α son subvariedades abiertas de M. En particular, cada uno de ellos admite una base $\mathcal{B}_\alpha$ de bolas coordenadas regulares. La unión de dichas bases, $\mathcal{B} = \bigcup_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ es una base para M. Por lo tanto, existe un refinamiento $\mathcal{V}$ numerable y localmente finito de $\mathcal{U}$ compuesto por bolas coordenadas regulares de $\mathcal{B}$. Sea

$$\mathcal{V}_\alpha = \{B \in \mathcal{B} : B \subset \mathcal{B}_\alpha\} .$$

Cada bola de $\mathcal{V}_\alpha$ es una bola coordenada regular en U_α y, por lo tanto, existen una bola coordenada (B', φ) (compatible con la estructura diferncial de U_α) tal que $\overline{B} \subset B' \subset U_\alpha$,

$\varphi(B) = \mathrm{B}_{r_1}(0)$ y $\varphi(B') = \mathrm{B}_{r_2}(0)$ para ciertos números reales $r_2 > r_1 > 0$. Definimos entonces una función $f_B : M \to \mathbb{R}$ por

$$f_B = \begin{cases} H \circ \varphi & \text{en } B' \\ 0 & \text{en } M \smallsetminus \overline{B} \ . \end{cases}$$

La función H que aparece en la definición de f_B es la función suave dada por el lema 2.2.7 para los valores de r_2 y r_1 correspondientes (es decir, la definición de H depende de B). Cada f_B es suave en M y $\mathsf{sop}(f_B) = \overline{B}$.

Como $\mathcal{V}$ es localmente finito, $\{\overline{B} : B \in \mathcal{V}\}$ es localmente finito por 2.2.1. Sea $f = \sum_{B\in\mathcal{V}} f_B$. Esta función está bien definida y es suave en M. Además, como $f_B \geq 0$ para todo en M y es estrictamente positiva en B para todo $B \in \mathcal{V}$, la suma f es estrictamente positiva en M. EN particular, si definimos $g_B = f_B/f$, esta función es suave en M, $0 \leq g_B \leq 1$ y $\sum_{B\in\mathcal{V}} g_B = 1$.

Para obtener una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\mathcal{U}$ es necesario reinexar y agrupar la funciones g_B. Para cada $B \in \mathcal{V}$, sea $a(B)$ algún índice tal que $B' \subset U_{a(B)}$ (por ejemplo, si $B \in \mathcal{V}_\alpha$, podemos tomar $a(B) = \alpha$ ya que B es una bola coordenada regular de U_α y $B' \subset U_\alpha$). Para cada α se define

$$\psi_\alpha = \sum_{B\in\mathcal{V} \,:\, a(B)=\alpha} g_B \ .$$

Si la suma es vacía la función se define como la función 0 en M. En particular, las funciones ψ_α son suaves en M, $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$,

$$\mathsf{sop}(\psi_\alpha) = \overline{\bigcup_{B\,:\,a(B)=\alpha} B} = \bigcup_{B\,:\,a(B)=\alpha} \overline{B} \subset U_\alpha \ .$$

Además, $\{\mathsf{sop}(\psi_\alpha)\}$ es una familia localmente finita y $\sum_\alpha \psi_\alpha = \sum_B g_B = 1$ en M.

Si M es una variedad con borde, las bolas regulares B pueden ser, en realidad, semibolas regulares. Aun así, esto quiere decir que para cada B semibola regular de U_α, existen $B' \subset U_\alpha$, $\varphi : B' \to \mathbb{R}^d$ de manera que (B', φ) es una carta comatible para U_α, $\overline{B} \subset B'$ y

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= \mathrm{B}_{r_1}(0) \cap \{x^d \geq 0\} \quad \text{y} \\ \varphi(B') &= \mathrm{B}_{r_2}(0) \cap \{x^d \geq 0\} \end{aligned}$$

con $r_2 > r_1 > 0$. En particular, podemos tomar la función suave H correspondiente a las bolas de radios r_1 y r_2 y definir f_B como antes. Estas funciones f_B siguen siendo suaves porque, donde no es cero, $f_B \circ \varphi^{-1} = H|_{\varphi(B')}$, que es suave en la semibola $\varphi(B')$, porque H es una extensión suave a $\mathbb{R}^d$. El resto de la demostración continúa de la misma manera. $\square$

2.2.3 Algunos corolarios

Sea M una variedad diferencial. Como en el lema de Tietze para funciones continuas, queremos ver si es posible extender funciones definidas en un subconjunto de M de manera suave.

Proposición 2.2.9. *Sea M una variedad diferencial, sea $A \subset M$ un subconjunto cerrado y sea $U \supset A$ un abierto que lo contiene. Entonces existe una función suave $\psi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\mathsf{sop}(\psi) \subset U$, $\psi = 1$ en A y $0 \leq \psi \leq 1$ en M.*

Demostración. Sea $U_0 = U$ y sea $U_1 = M \setminus A$. Sea $\{\psi_0, \psi_1\}$ una partición suave de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_0, U_1\}$. Como $\psi_1 = 0$ en A y $\psi_0 + \psi_1 = 1$ en M, debe ser $\psi_0 = 1$ en A. □

Sea M una variedad y sea $f : A \to N$ una función definida en un subconjunto arbitrario $A \subset M$. La noción de suavidad de la función f requiere que el dominio de la misma sea, o bien toda la variedad M, o bien un abierto $U \subset M$. No hemos definido aun lo que significa que f sea suave si su dominio de definición es un subconjunto arbitrario de M. Decimos que $f : A \to N$ es suave, si, dado $p \in A$, existe un abierto $W \subset M$ tal que $p \in W$ y una extensión suave $\tilde{f} : W \to N$, es decir, $\tilde{f}$ es suave de W en N y $\tilde{f} = f$ en $W \cap A$.

Proposición 2.2.10. *Sea M una variedad diferencial y sea $A \subset M$ un subconjunto cerrado. Si $f : A \to \mathbb{R}^l$ es suave, para todo abierto $U \supset A$ existe una función suave $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^l$ tal que $\tilde{f}|_A = f$ y $\mathsf{sop}(\tilde{f}) \subset U$.*

Demostración. Para cada punto $p \in A$, existe un entorno W_p de p y una función suave $\tilde{f}_p : W_p \to \mathbb{R}^l$ tales que $\tilde{f}_p$ coincide con f en $W_p \cap A$. Podemos asumir que $W_p \subset U$, reemplazando W_p por $W_p \cap U$. La familia de abiertos $\{W_p : p \in A\}$, junto con $M \setminus A$, es un cubrimiento por abiertos de M. Sea $\{\psi_p : p \in A\} \cup \{\psi_0\}$ una partición de a unidad subordinada a la cubrimiento, con $\mathsf{sop}(\psi_p) \subset W_p$ y $\mathsf{sop}(\psi_0) \subset M \setminus A$.

Para cada $p \in A$, el producto $\psi_p \tilde{f}_p$ coincide con $\tilde{f}_p$ en (la clausura de) algún entorno de p dentro de W_p. Además, como $\mathsf{sop}(\psi_p) \subset W_p$, podemos extender $\psi_p \tilde{f}_p$ a una función definida en M, por cero fuera de W_p (se define por cero fuera del soporte de ψ_p y, donde los abiertos W_p y $M \setminus \mathsf{sop}(\psi_p)$ se intersecan, las definiciones coinciden). Esta extensión es suave por 2.1.3. Porque los soportes de las funciones ψ_p forman una colección localmente finita, la función definida por la expresión

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x) \tilde{f}_p(x)$$

está bien definida y es suave. Si tomamos $x \in A$, entonces $\psi_0(x) = 0$ y $\tilde{f}_p(x) = f(x)$ para todo $p \in A$. Entonces $\tilde{f}(x) = f(x)$ porque $\sum_{p \in A} \psi_p(x) = 1$.

En cuanto al soporte de $\tilde{f}$,

$$\mathsf{sop}(\tilde{f}) \subset \overline{\bigcup_{p \in A} \mathsf{sop}(\psi_p)} = \bigcup_{p \in A} \mathsf{sop}(\psi_p) \subset U \ .$$

□

Corolario 2.2.11. *Toda variedad (diferencial) admite una función exhaustiva (suave).*

Una *función exhaustiva* para una variedad M es una función (continua) $f : M \to \mathbb{R}$ tal que los conjuntos $\{f \leq c\} = f^{-1}((-\infty, c])$ sean compactos para todo $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea M una variedad diferencial. Sabemos que existe una familia numerable de subconjuntos abiertos con clausura compacta $\{V_j\}_{j\geq 1}$ que cubren a M. También sabemos que, por ser cubrimiento de M, admite una partición (suave) de la unidad $\{\psi_j\}_{j\geq 1}$ subordinada al mismo.

Definimos $f : M \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{j\geq 1} j\psi_j(x) .$$

Esta función está bien definida porque los soportes de las funciones ψ_j son una colección localmente finita (y es suave). Además, $f \geq \sum_j \psi_j = 1$ en M.

Para ver que f es una función exhaustiva, sea $c \in \mathbb{R}$. Veamos que $\{f \leq c\}$ está contenida en una unión finita de compactos $\overline{V_j}$. Si $N > c$ es un entero cualquiera mayor que c y si $x \notin \bigcup_{j=1}^N \overline{V_j}$, entonces

$$f(x) = \sum_{j\geq N+1} j\psi_j(x) \geq N \sum_{j\geq N+1} \psi_j(x) \geq N > c .$$

Dicho de otra manera, si $f(x) \leq c$, entonces $x \in \bigcup_{j=1}^N \overline{V_j}$. Como $\{f \leq c\}$ es cerrado y está contenido en un compacto, resulta ser compacto. $\square$

Capítulo 3

Espacio tangente y fibrado tangente

3.1 El espacio tangente

3.1.1 Vectores tangentes geométricos

Sea $a \in \mathbb{R}^d$ un punto en el espacio euclideo de dimensión d. El *espacio tangente geométricoa* $\mathbb{R}^d$ *en el punto* a, denotado $\mathbb{R}^d_a$ es el conjunto de pares de la forma (a, v), con $v \in \mathbb{R}^d$, es decir, $\mathbb{R}^d_a \simeq \{a\} \times \mathbb{R}^d$. Los elementos de este espacio serán denominados *vectores tangentes geométricos*. Denoteamos al punto correspondiente al par (a, v) por v_a o por $v|_a$. El espacio tangente geomético al punto a es un espacio vectorial de dimensión d, si definimos las operaciones en $\mathbb{R}^d_a$ trasladando los vectores al origen. Es decir, si $v_a, w_a \in \mathbb{R}^d_a$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_a &\equiv (\lambda \cdot v)_a \quad \text{y} \\ v_a + w_a &\equiv (v + w)_a \ . \end{aligned}$$

La base canónica en $\mathbb{R}^d$ proporciona una base para el tangente en a: $\{e_1|_a, \ldots, e_d|_a\}$. Notemos, además, que $\mathbb{R}^d_a \simeq \mathbb{R}^d$ canónicamente vía $v_a \mapsto v$.

3.1.2 Derivaciones

Fijemos un punto $a \in \mathbb{R}^d$. Asociada a cada elemento $v_a \in \mathbb{R}^d_a$, está la noción de dervada direccional de una función: dada una función $f : U \to \mathbb{R}$ definida en un entorno U de a, siempre que tenga sentido, definimos la *derivada direccional de f en a en la dirección del vector v* como el límite

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a f &\equiv \frac{\partial f}{\partial v}(a) \equiv \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \\ &\equiv \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} f(a + tv) \ . \end{aligned}$$

Por la linealidad del límite, la operación $f \mapsto \frac{\partial}{\partial v}|_a f$ es lineal en f (en donde esté definida la aplicación). Además, si las derivadas direccionales de f y de g existen, entonces

$$\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a (fg) \;=\; \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a f \cdot g(a) + f(a) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a g \; .$$

Si $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en a, entonces $\frac{\partial}{\partial v}|_a f$ es lineal en v_a, es decir,

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a + \lambda \left.\frac{\partial}{\partial w}\right|_a \right) f \;=\; \left.\frac{\partial}{\partial (v + \lambda w)}\right|_a f \; .$$

En particular, si $v_a = v^i e_i|_a$, entonces, para toda f diferenciable en a, definiendo $\frac{\partial}{\partial e_i}|_a = \frac{\partial}{\partial x^i}|_a$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a f \;=\; v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a f \; .$$

La existencia de particiones de la unidad en $\mathbb{R}^d$ permite simlificar las definiciones, permitiendo asumir que las funciones f diferenciables cerca de un punto a están definidas en todo el espacio y no sólo en un entorno del punto. De todas maneras, supongamos, para mantener cierta generalidad, que $\mathcal{O}_a$ es un *anillo de funciones regulares* en a. En general, $\mathcal{O}_a$ será uno de los siguientes: *(i)* $C^\infty(a)$, donde

$$C^\infty(a) \;=\; \Big\{ (U, f) \;:\; a \in U \subset \mathbb{R}^d \text{ abierto, } f \in C^\infty(U) \Big\} \;,$$

(ii) el espacio de pares (U, f), donde $a \in U$ es un abierto de $\mathbb{R}^d$, $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en U y las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x^i} : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en a, es decir, el espacio de funciones dos veces diferenciables en a, *(iii)* el anillo de gérmenes de funciones *regulares* en a (para alguna interpretación de "regular"), o bien *(iv)* $C^\infty(U)$ o $C^\infty(M)$. Una *derivación en a* en el anillo $\mathcal{O}_a$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $w : \mathcal{O}_a \to \mathbb{R}$ que verifica la regla de Leibnitz: si $f, g \in \mathcal{O}_a$,

$$w(fg) \;=\; w(f) \cdot g(a) + f(a) \cdot w(g) \; .$$

El conjunto de todas las derivaciones en a del anillo ($\mathbb{R}$-álgebra) $\mathcal{O}_a$ se denomina *espacio de derivaciones en a* y lo denotaremos $\mathrm{Der}\,(\mathcal{O}_a)$, o bien $\mathrm{Der}_a\,(\mathcal{O}_a)$, cuando sea necesario aclarar el punto, particularmente, cuando el álgebra $\mathcal{O}_a$ no hace referncia al punto a en donde están *basadas* las derivaciones. Este será el caso, por ejemplo, de $\mathcal{O}_a = C^\infty(U)$, cuando U es un abierto que contiene al punto a.

Observación 3.1.1. Si w es una derivación en a, entonces $w(1) = 0$ y $w(fg) = 0$, si $f(a) = g(a) = 0$. Es decir, las derivaciones se anulan en las funciones constantes y en el cuadrado del ideal $\{f \in \mathcal{O}_a \;:\; f(a) = 0\}$.

Ya vimos que todo elemento del espacio tangente geométrico $v_a \in \mathbb{R}^d_a$ determina una derivación, $\frac{\partial}{\partial v}|_a f$. Además, vimos que, si nos restringimos a evaluar derivaciones en el espacio de funciones diferenciables en a, la aplicación

$$\Phi \,:\, v_a \mapsto \left(\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a \,:\, f \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a f \right)$$

es lineal. En particular, $\frac{\partial}{\partial v}|_a = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_a$, si $v_a = v^i e_i|_a$, donde $\frac{\partial}{\partial x^i}|_a$ es la derivación correspondiente al vector canónico $e_i|_a$, es decir, la derivada parcial i-ésima.

Ahora bien, las funciones $x^i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por $x^i(a) = a^i$ es diferenciable en todo punto a. Entonces tomando la derivada direccional respecto de v_a, se deduce que

$$\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a x^i \;=\; v^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_a x^i \;=\; v^i \;.$$

De esta igualdad podemos concluir que la aplicación Φ es inyectiva.

La inyectividad de Φ se puede demostrar de otra manera, sin hacer referencia a una base canónica. Sea $v_a \in \mathbb{R}^d_a$. Entonces v_a se corresponde con el par (a, v) para un cierto vector $v \in \mathbb{R}^d$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función lineal. Como

$$\varphi(a + v) - \varphi(a) - \varphi(v) \;=\; 0$$

por linealidad, se deduce que φ es diferenciable. La deriada direccional de φ en a está dada por

$$\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a \varphi \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a + tv) - \varphi(a)}{t} \;=\; \varphi(v) \;.$$

En particular, si $\frac{\partial}{\partial v}|_a \varphi = 0$ para toda φ en el dual $\mathbb{R}^{d*}$, como $\mathbb{R}^{d*}$ separa puntos en $\mathbb{R}^d$, debe ser $v = 0$. Notemos que toda función lineal es derivable en todas direcciones, pero es derivable, si y sólo si es continua.

Veamos condiciones suficientes para garantizar la sobreyectividad de Φ. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un abierto U que contiene al punto a. Entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x^i} : U \to \mathbb{R}$ están definidas en U. Sabemos que, si $b \in U$, tomando $v = b - a$, vale que

$$f(a + v) \;=\; f(a) + \mathrm{d}_a f(v) + r(v)$$

donde

$$\mathrm{d}_a f(v)\, v^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_a$$

y r es una función tal que el cociente $r(w)/|w|$ tiende a cero con $|w|$. Equivalentemente, si $v \in \mathbb{R}^d$ y $a + v \in U$, la función

$$r(v) \;=\; f(a + v) - f(a) - v^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_a$$

verifica que $r(v)/|v|$ tiende a cero con v.

Sea, para cada i, $g_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Por el Teorema fundamental del cálculo, e integrando por partes,

$$\begin{aligned} f(a+v) - f(a) \;&=\; \int_0^1 v^i g_i(a+tv)\,dt \;=\; v^i g_i(a+v) - \int_0^1 t v^i v^j \left.\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\right|_{a+tv} dt \\ &=\; v^i g_i(a) + v^i v^j \int_0^1 (1-t) \left.\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\right|_{a+tv} dt \;. \end{aligned}$$

Para que esto se válido, asumimos que cada g_i es diferenciable en ((casi todo punto de) un entorno de) a. Si w es una derivación en a en $C^\infty(a)$, definimos un elemento $v_a \in \mathbb{R}^d_a$ evaluando w en las funciones coordenadas: para cada i, tomamos $v^i = w(x^i)$ y definimos $v_a = v^i e_i|_a$. En particular,

$$w(x^i) \;=\; v^i \;=\; \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a (x^i) \;.$$

Sea $f \in C^\infty(a)$. En un entorno de a,

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; f(a) + (x^k - a^k) \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_a \\ &\quad + (x^i - a^i)(x^j - a^j) \int_0^1 (1-t) \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right|_{a+t(x-a)} dt \;. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Entonces, evaluando w en f,

$$w(f) \;=\; w(x^k) \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_a \;=\; v^k \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_a \;=\; \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_a (f) \;.$$

Así, queda demostrado que $\Phi_a : \mathbb{R}^d_a \to \mathrm{Der}\,(C^\infty(a))$ es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal. Definimos el *espacio tangente a* $\mathbb{R}^d$ *en* a *en sentido de derivaciones* como el espacio $\mathrm{Der}\,(C^\infty(a))$. La existencia del isomorfismo Φ_a justifica en cierta medida este nombre.

Observación 3.1.2. El argumento anterior usando el desarrollo de Taylor con su expresión integral para el resto sigue siendo válido si asumimos que las funciones f son dos veces diferenciables en a (o C^2 en un entorno de a, o que las g_i son diferenciables en casi todo punto de un entorno compacto de $a\ldots$). Dicho de otra manera, si asumimos que la derivación w está definida en un anillo más grande, por ejemplo, para toda f dos veces diferenciable en (un entorno de) a, entonces la derivación $\Phi_a(v_a)$ coincide con w al ser evaluadas en cualquier función para la cual el desarrollo de Taylor (3.1) sea válido. Es decir, Φ_a sigue siendo sobreyectiva, si su codominio fuese algún otro espacio de derivaciones. Pero es casi inmediato que, si $\mathcal{O}_a \supset \mathcal{O}'_a$, entonces $\mathrm{Der}\,(\mathcal{O}_a) \subset \mathrm{Der}\,(\mathcal{O}'_a)$, es decir, condiciones menos restrictivas sobre el parámetro f resulta en condiciones más restrictivas para w.

De ahora en adelante, denotaremos por v_a tanto al elemento en el espacio tangente geométrico $\mathbb{R}^d_a$ como a la derivación correspondiente $f \mapsto \frac{\partial}{\partial v}|_a f$.

Observación 3.1.3. El espacio de funciones suaves definidas en algún entorno de un punto $a \in \mathbb{R}^d$, $C^\infty(a)$ contiene al espacio de funciones suaves definidas en todo el espacio, es decir, hay una inclusión

$$C^\infty(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^\infty(a)$$

dada por $f \mapsto (\mathbb{R}^d, f)$.

Recíprocamente, a los fines de estudiar derivaciones, podemos pensar que $C^\infty(a)$ está incluido en $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Específicamente, dada $(U, f) \in C^\infty(a)$, existe un entorno V de a tal que $\overline{V} \subset U$. Asociada al cubrimiento $\{U, \left(\overline{V}\right)^{\mathsf{c}}\}$ de $\mathbb{R}^d$, existe una partición suave de la unidad $\{\psi_0, \psi_1\}$ tal que $\mathsf{sop}(\psi_0) \subset U$ y $\mathsf{sop}(\psi_1) \subset \left(\overline{V}\right)^{\mathsf{c}}$. Definimos una función $\tilde{f}$ en $\mathbb{R}^d$ por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\psi(x) & \text{si } x \in U \ , \\ 0 & \text{si } x \notin \overline{V} \ . \end{cases}$$

Esta función es suave y definida en todo $\mathbb{R}^d$. Además, $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in V$. Elegir de esta manera una partición de la unidad y definir luego una extensión de f, *define* una aplicación $f \mapsto \tilde{f}$ de $C^\infty(a)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Esta aplicación está lejos de ser inyectiva, con lo cual no da una inclusión de $C^\infty(a)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. De todas maneras, esta observación muestra que hay, para cada elemento de $C^\infty(a)$, al menos una manera de extenderlo a un objeto en $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Este argumento no es otra cosa que la proposición 2.2.10 en el caso en que el conjunto A es un punto, o, más en general, un compacto en $M = \mathbb{R}^d$.

3.1.3 El espacio tangente a una variedad

El espacio tangente a $\mathbb{R}^d$ en un punto a, ya sea el tangente geométrico $\mathbb{R}^d_a$ o el tangente en sentido de derivaciones $\mathrm{Der}\,(C^\infty(a))$, son nociones locales. Por lo tanto, haciendo uso de las cartas compatibles de una variedad diferencial, queda más o menos clara una manera de definir el espacio tangente a una variedad. Aun así, la noción de derivación es lo suficientemente abstracta como para permitir generalizarla al contexto de variedades y dar una definición *intrínseca* del tangente, sin necesidad de un argumento del estilo de tomar cartas.

Sea M una variedad diferencial y sea $a \in M$ un punto arbitrario. Decimos que una transformación lineal $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es una *derivación en* a, si satisface la regla de Leibnitz: para todo par $f, g \in C^\infty(M)$, se cumple que $v(fg) = v(f)g(a) + f(a)v(g)$. Al igual que en $\mathbb{R}^d$, toda derivación en a de $C^\infty(M)$ se anula en las constantes y, si $f(a) = g(a) = 0$, entonces $v(fg) = 0$ (c. f. la observación 3.1.1). Definimos el *espacio tangente a* M *en* a *en sentido de derivaciones* como el espacio de derivaciones en a de $C^\infty(M)$ y lo denotamos $\mathrm{Der}_a\,(C^\infty(M))$, o bien $\mathrm{Der}_a\,(M)$.

Sea ahora $F : M \to N$ una función suave. Asociada a F hay una transformación lineal (notar la similitud con la *definición* de diferenciabilidad)

$$\mathrm{d}_a F \,:\, \mathrm{Der}_a\,(M) \,\to\, \mathrm{Der}_{F(a)}\,(N)$$

dada por $\mathrm{d}_aF(v) : f \mapsto v(f \circ F)$ para todo elemento $f \in C^\infty(N)$. La aplicación $\mathrm{d}_aF(v)$ es, efectivamente una derivación en N en el punto $F(a)$. La trasformación lineal d_aF se llama el *diferencial de F en a.*

Proposición 3.1.1. *Si $F : M \to N$ es una transformación suave, entonces $\mathrm{d}_aF : \mathrm{Der}_a(M) \to \mathrm{Der}_{F(a)}(N)$ es lineal. Si $G : N \to P$ es otra función suave, entonces*

$$\mathrm{d}_a(G \circ F) = \mathrm{d}_{F(a)}G \circ \mathrm{d}_aF .$$

Para toda variedad diferencial M y todo punto $a \in M$,

$$\mathrm{d}_a(\mathsf{id}_M) = \mathsf{id}_{\mathrm{Der}_a(M)} .$$

El siguiente resultado será fundamental para poder calcular la dimensión del espacio tangente a una variedad.

Lema 3.1.2. *Sea M una variedad diferencial, sea $a \in M$ y sean $f, g \in C^\infty(M)$ funciones suaves. Si existe un abierto $U \subset M$, entorno de a, en donde f y g coinciden, entonces $vf = vg$ para toda $v \in \mathrm{Der}_a(C^\infty(M))$.*

Demostración. Por linealidad de las derivaciones es suficiente ver que toda función suave $f \in C^\infty(M)$ que se anula en un entorno U de a evalúa a 0. Sea entonces f una función suave tal que $\mathsf{sop}(f) \subset M \setminus \{a\}$. Sea ψ una función suave tal que $0 \leq \psi \leq 1$ en M, $\psi = 1$ en $\mathsf{sop}(f)$ y $\mathsf{sop}(\psi) \subset M \setminus \{a\}$. Tal función existe por la proposición 2.2.9. Notemos que $\psi(x)f(x) = f(x)$ para todo punto $x \in M$. Es decir, como funciones en M, $\psi \cdot f$ y f son iguales. Así, dada $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, vale que $v(f) = v(\psi f)$. Si, además, v es una derivación en a, $v(\psi f) = v(\psi)f(a) + \psi(a)v(f) = 0$, ya que $f(a) = \psi(a) = 0$. En definitiva, $v(f) = 0$ para toda derivación $v \in \mathrm{Der}_a(C^\infty(M))$. □

Observación 3.1.4. Siguiendo con el comentario de la observación 3.1.3, demostraremos que los espacios $\mathrm{Der}(C^\infty(a))$ y $\mathrm{Der}_a\left(C^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ son (naturalmente) isomorfos, es decir que la inclusión natural $C^\infty(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^\infty(a)$ determina un isomorfismo a nivel de los espacios de derivaciones en a, aunque no haya una manera clara o canónica de incluir $C^\infty(a)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Una manera de ver que $\mathrm{Der}_a\left(C^\infty(\mathbb{R}^d)\right) \simeq \mathrm{Der}(C^\infty(a))$, es notar que, al igual que existe un isomorfismo $\Phi_a : \mathbb{R}^d_a \to \mathrm{Der}(C^\infty(a))$, existe un isomorfismo análogo $\tilde{\Phi}_a : \mathbb{R}^d_a \to \mathrm{Der}_a\left(C^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$. Otra manera de demostrar que son espacios isomorfos es usar el lema 3.1.2. Este argumento nos muestra cómo en muchas ocasiones vamos a poder reemplazar el espacio de funciones regulares en un punto a, $C^\infty(a)$, por el espacio de funciones regulares en toda la variedad $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Como este argumento está dado exclusivamente en términos de derivaciones, es igualmente válido reemplazando $\mathbb{R}^d$ por una variedad diferencial arbitraria M.

Sea $v \in \mathrm{Der}(C^\infty(a))$ y sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ una función suave. La inclusión $f \mapsto (\mathbb{R}^d, f)$ nos permite definir un elemento $\tilde{v} \in \mathrm{Der}_a\left(C^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ a partir de v:

$$\tilde{v}(f) = v((\mathbb{R}^d, f)).$$

Supongamos que $\tilde{v}$ es la derivación cero y sea $(U, f) \in C^\infty(a)$. Sea $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función suave que coincide con f en (la clausura de) cierto entorno V de a contenido en U (c. f. la observación 3.1.3). Sin importar cuál sea esta extensión, como $\tilde{f}$ y f coinciden en un entorno de a, por 3.1.2,

$$0 = \tilde{v}\tilde{f} \equiv v(\mathbb{R}^d, \tilde{f}) = v(U, f) .$$

Así, se ve que v tenía que ser la derivación cero en $C^\infty(a)$. Es decir, $v \mapsto \tilde{v}$ es lineal e inyectiva.

Sea, ahora, $w \in \mathrm{Der}_a\left(C^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$. Sea $v : C^\infty(a) \to \mathbb{R}$ la función

$$v(U, f) = w(\tilde{f}) ,$$

donde $\tilde{f}$ es una (alguna) función suave, definida globalmente y que coincide con f en un entorno de a contenido en U. Nuevamente, por el lema 3.1.2, no importa cuál sea la elección $\tilde{f}$, el resultado es el mismo. Entonces v está bien definida y es una derivación en $C^\infty(a)$. Sea $\tilde{v} \in \mathrm{Der}_a\left(C^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ la derivación determinada por v y sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Evaluando,

$$\tilde{v}(g) \equiv v(\mathbb{R}^d, g) \equiv w(g) .$$

Entonces $\tilde{v}$ y w, como funciones $C^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, son iguales. En definitiva, $v \mapsto \tilde{v}$ es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal de $\mathrm{Der}\left(C^\infty(a)\right)$ en $\mathrm{Der}_a\left(C^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$.

Sea M una variedad diferencial y sea $a \in M$. Denotemos por $C^\infty(a)$ al espacio de funciones suaves definidas en un entorno de a, es decir, $C^{infty}(a)$ es el conjunto de pares (U, f) donde $U \subset M$ es abierto y contiene a a y $f \in C^\infty(U)$.

Proposición 3.1.3. *Los espacios de derivaciones* $\mathrm{Der}_a\left(C^\infty(M)\right)$ *y* $\mathrm{Der}\left(C^\infty(a)\right)$ *son isomorfos.*

De la misma manera en que pudimos identificar el espacio de derivaciones en $C^\infty(a)$ y el espacio de derivaciones en a en $C^\infty(M)$, podemos identificar, dado un abierto $U \subset M$ tal que $a \in U$, los espacios $\mathrm{Der}_a(M)$ y $\mathrm{Der}_a(U)$. La identificación, en este caso, está dada por el isomorfismo $\mathrm{d}_a i$, donde $i : U \hookrightarrow M$ es la inclusión.

Proposición 3.1.4. *Sea M una variedad diferencial, sea $U \subset M$ un abierto y sea $i : U \hookrightarrow M$ la inclusión. Si $a \in U$, el diferencial* $\mathrm{d}_a i : \mathrm{Der}_a(U) \to \mathrm{Der}_{i(a)}(M)$ *es un isomorfismo lineal.*

La demostración es análoga al argumento dado en la obsevación 3.1.4. La identificación $v \mapsto \tilde{v}$ definida en las derivaciones $v : C^\infty(a) \to \mathbb{R}$, está dada explícitamente en este caso por la aplicación diferencial $\mathrm{d}_a i$.

El isomorfismo $\mathbb{R}^d_a \to \mathrm{Der}_a\left(\mathbb{R}^d\right)$ dado por $e_i|_a \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}|_a$, donde $\{e_1|_a, \ldots, e_d|_a\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^d_a$, muestra que $\mathrm{Der}_a\left(\mathbb{R}^d\right)$ es una espacio de dimensión finita y que su dimensión es d. Por la proposición 3.1.4, $\mathrm{Der}_a(U) \simeq \mathrm{Der}_a\left(\mathbb{R}^d\right)$ para todo abierto $U \subset \mathbb{R}^d$ que contenga a a. En una variedad M, dada una carta compatible (U, φ) en un punto a, la función $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un difeomorfismo. En particular, por 3.1.1, el diferencial $\mathrm{d}_a\varphi : \mathrm{Der}_a(U) \to \mathrm{Der}_{\varphi(a)}(\varphi(U))$ es un isomorfismo determinado por la (elección de) carta (U, φ) en a. Esto permite deducir que

$$\mathrm{Der}_a(M) \simeq \mathrm{Der}_a(U) \simeq \mathrm{Der}_{\varphi(a)}(\varphi(U))$$

de manera canónica. En particular, $\dim \mathrm{Der}_a(M) = \dim M$.

Esta última afirmación no es cierta en el caso de variedades con borde, mejor dicho, en puntos del borde de una variedad. Para determinar la dimensión de los espacios tangentes a variedades con borde en puntos del borde será suficiente, por el mismo argumento del párrafo anterior, determinar la dimensión del tangente al semiespacio $\mathcal{H}^d$ en un punto del borde $\partial\mathcal{H}^d = \{x^d = 0\}$.

3.2 Algunas cuentas en coordenadas

Dados un punto $p \in M$ y su imagen $F(p) \in N$ por una transformación suave, para estudiar a la función $F : M \to N$ cerca de p, tomamos cartas (U, φ) en p y (V, ψ) en $F(p)$, de manera que $F(U) \subset V$. El hecho de que F sea suave, se reflejará en que su expresión en coordenadas $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ sea suave. El espacio tangente en p tiene como base a los vectores $\{\frac{\partial}{\partial\varphi^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi^n}|_p\}$ que, en una función suave $f : U \to \mathbb{R}$ toman los valores

$$\left.\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\right|_p f \equiv \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \equiv \mathrm{d}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) f \ .$$

Es decir, $\frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_p f$ es igual a la derivada parcial i-ésima respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ de la expresión de f en las coordenadas $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$. Si queremos saber cuál es la imagen de estos vectores vía el diferencial de la transformación F, usamos la igualdad $\psi^{-1} \circ \widehat{F} = F \circ \varphi^{-1}$. Para simplificar la notación, llamamos $\widehat{p} = \varphi(p)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_pF\Big(\left.\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\right|_p\Big) &= \mathrm{d}_pF\Big(\mathrm{d}_{\widehat{p}}\varphi^{-1}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}}\Big)\Big) = \mathrm{d}_{\widehat{p}}(F \circ \varphi^{-1})\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}}\Big) \\ &= \mathrm{d}_{\widehat{p}}(\psi^{-1} \circ F)\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}}\Big) = \mathrm{d}_{\widehat{F}(\widehat{p})}\psi^{-1}\Big(\mathrm{d}_{\widehat{p}}\widehat{F}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}}\Big)\Big) \ .\end{aligned}$$

Si llamamos $y^1, \ldots, y^m$ a las coordenadas en $\mathbb{R}^m$ y $\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^m}$ a las derivadas parciales en las direcciones canónicas y, si $f : \psi(V) \to \mathbb{R}$ es suave,

$$\mathrm{D}_{\widehat{p}}\widehat{F}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}}\Big) f \equiv \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}} (f \circ \widehat{F}) \ ,$$

que es igual, por la regla de la cadena, a

$$\frac{\partial f}{\partial y^j}(\widehat{F}(\widehat{p})) \cdot \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) = \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\widehat{F}(\widehat{p})} f \ .$$

Notemos que $\widehat{F(p)} = \widehat{F}(\widehat{p})$. Entonces, en la base $\{ \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{\widehat{F(p)}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_{\widehat{F(p)}}\}$,

$$\mathrm{d}_{\widehat{p}}\widehat{F}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\widehat{p}} \Big) \;=\; \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\widehat{F(p)}} \;.$$

Volviendo a F,

$$\mathrm{d}_p F\Big(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \Big) \;=\; \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) \cdot \mathrm{d}_{\widehat{F(p)}}\psi^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\widehat{F(p)}} \Big) \;=\; \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) \cdot \frac{\partial}{\partial \psi^j}\Big|_{F(p)} \;.$$

Es decir, la expresión del diferencial $\mathrm{d}_p F$ en las bases $\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p\}_i$ y $\{ \frac{\partial}{\partial \psi^j}\Big|_{F(p)}\}_j$ es igual a la matriz jacobiana $\mathrm{D}_{\widehat{p}}\widehat{F}$.

Un caso importante de todo esto es el de los cambios de carta (cambios de coordenada, o funciones de transición): sea $p \in M$ un punto arbitrario de la variedad M y sean $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ y $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ dos cartas en p. Primero, veamos un tema de notación. Si

$$\widehat{\varphi} \;=\; (\widehat{\varphi}^1, \ldots, \widehat{\varphi}^n) \quad \text{y} \quad \widetilde{\varphi} \;=\; (\widetilde{\varphi}^1, \ldots, \widetilde{\varphi}^n) \;,$$

entonces, dado un punto $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \widehat{\varphi}(\widehat{U} \cap \widetilde{U})$, la función de transición está dada explícitamente por

$$\widetilde{\varphi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}(\xi^1, \ldots, \xi^n) \;=\; \big(\widetilde{\varphi}^1(\widehat{\varphi}^{-1}(\xi)), \ldots, \widetilde{\varphi}^n(\widehat{\varphi}^{-1}(\xi))\big) \;.$$

Si pensamos en un punto $\widehat{x} \in \widehat{\varphi}(\widehat{U})$ podemos escribir $\widehat{\varphi} = (\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)$, pensando a las funciones coordenadas de $\widehat{\varphi}$, no como funciones en $\mathbb{R}$, sino como las coordenadas de un punto en un abierto de un espacio euclideo. Análogamente, podemos escribir $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n)$. La expresión explícita para las funciones de transición la podemos reemplazar por una expresión un poco más clara para el cambio de coordenadas correspondiente:

$$\widetilde{\varphi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n) \;=\; \big(\widetilde{x}^1(\widehat{x}), \ldots, \widetilde{x}^n(\widehat{x})\big) \;.$$

Volviendo a las cartas, si las mismas son compatibles, la transformación $\widetilde{\varphi} \circ \widehat{\varphi}^{-1} : \widehat{\varphi}(\widehat{U} \cap \widetilde{U}) \to \widetilde{\varphi}(\widehat{U} \cap \widetilde{U})$ y su inversa son diferenciables en sentido usual. La matriz jacobiana de esta transformación, o, equivalentemente, su diferencial, está dada por:

$$\mathrm{d}_{\widehat{x}}(\widetilde{\varphi} \circ \widehat{\varphi}^{-1})\Big(\frac{\partial}{\partial \widehat{x}^i}\Big|_{\widehat{x}} \Big) \;=\; \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial \widehat{x}^i}(\widehat{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}\Big|_{\widetilde{x}(\widehat{x})} \;,$$

o, explícitamente en términos de p,

$$\mathrm{d}_{\widehat{\varphi}(p)}(\widetilde{\varphi} \circ \widehat{\varphi}^{-1})\Big(\frac{\partial}{\partial \widehat{x}^i}\Big|_{\widehat{\varphi}(p)} \Big) \;=\; \frac{\partial (\widetilde{\varphi} \circ \widehat{\varphi}^{-1})^j}{\partial \widehat{x}^i}(\widehat{\varphi}(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}\Big|_{\widetilde{\varphi}(p)} \;.$$

Por regla de la cadena y definición de los $\frac{\partial}{\partial\widehat{\varphi}^i}$ y los $\frac{\partial}{\partial\widetilde{\varphi}^i}$,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial\widehat{\varphi}^i}\right|_p &= \mathrm{d}_{\widehat{\varphi}(p)}\widehat{\varphi}^{-1}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial\widehat{x}^i}\right|_{\widehat{\varphi}(p)}\Big) = \mathrm{d}_{\widetilde{\varphi}(p)}\widetilde{\varphi}^{-1}\Big(\mathrm{d}_{\widehat{\varphi}(p)}(\widetilde{\varphi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})\Big(\left.\frac{\partial}{\partial\widehat{x}^i}\right|_{\widehat{\varphi}(p)}\Big)\Big) \\
&= \frac{\partial(\widetilde{\varphi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})^j}{\partial\widehat{x}^i}(\widehat{\varphi}(p))\cdot\mathrm{d}_{\widetilde{\varphi}(p)}\widetilde{\varphi}^{-1}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^j}\right|_{\widetilde{\varphi}(p)}\Big) \\
&= \frac{\partial(\widetilde{\varphi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})^j}{\partial\widehat{x}^i}(\widehat{\varphi}(p))\cdot\left.\frac{\partial}{\partial\widetilde{\varphi}^j}\right|_p ,
\end{aligned}$$

o, expresado de manera más concisa,

$$\left.\frac{\partial}{\partial\widehat{\varphi}^i}\right|_p = \frac{\partial\widetilde{x}^j}{\partial\widehat{x}^i}(p)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial\widetilde{\varphi}^j}\right|_p . \tag{3.2}$$

Notemos que estamos pensando en $\frac{\partial\widetilde{x}^j}{\partial\widehat{x}^i}$ tanto como una función en $\widehat{\varphi}(\widehat{U}\cap\widetilde{U})$, como una función en $\widehat{U}\cap\widetilde{U}$.

De ahora en adelante, salvo talvez en algunos casos particulares en donde sea necesario o conveniente hacer la distinción, denotaremos $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ tanto a la derivada parcial i-ésima en un abierto de un espacio euclideo en un punto p del abierto, como a la derivación –o, mejor dicho, al *campo*– definida en el dominio de una carta $\left.\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\right|_p$ (dependiendo del punto). Es decir, con esta notación, la relación entre las derivaciones provenientes de dos cartas compatibles con intersección no vacía, por ejemplo, quedaría escrita de la siguiente manera:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\widehat{x}^i}\right|_p = \frac{\partial\widetilde{x}^j}{\partial\widehat{x}^i}(p)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^j}\right|_p .$$

Notemos, además, que la expresión $\frac{\partial\widetilde{x}^j}{\partial\widehat{x}^i}(p)$ para cada j e i, es, en realidad, una función de $p\in\widehat{U}\cap\widetilde{U}$, estando definida en toda la intersección. Como función $\widehat{U}\cap\widetilde{U}\to\mathbb{R}$, es una función continua y, más aun, suave.

Observación 3.2.1. ¿Qué pasa si no asumimos que $\widehat{\varphi}$ y $\widetilde{\varphi}$ son cartas compatibles? De la misma manera que como se hizo antes, podemos, localmente, con cada carta, definir una estructura diferencial *local*, únicamente en $\widehat{U}$ y en $\widetilde{U}$, usando las cartas $(\widehat{U},\widehat{\varphi})$ y $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$, respectivamente. En $\widehat{U}\cap\widetilde{U}$, hay, pues, dos estructuras posibles. Si p pertenece a la intersección, hay dos espacios tangentes, $T_p\widehat{U}$ y $T_p\widetilde{U}$, cada uno con su base canónica $\{\frac{\partial}{\partial\widehat{\varphi}^i}\}_i$ y $\{\frac{\partial}{\partial\widetilde{\varphi}^j}\}_j$. Si las cartas no son compactibles, no hay una manera natural de relacionar estos espacios tangentes. Es decir, no hay, aunque no sean regulares, funciones $\alpha_i^j : \widehat{U}\cap\widetilde{U}\to\mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\partial}{\partial\widehat{\varphi}^i} = \alpha_i^j\cdot\frac{\partial}{\partial\widetilde{\varphi}^j}$$

bajo alguna identificación de los tangentes –justamente, porque no hay, en general, una identificación.

3.3 Curvas en variedades y relación con el tangente

Dada una variedad M, una *curva en* M (o *curva parametrizada*) es una función $\gamma : J \to M$ definida en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$. El intervalo J tiene una estructura de variedad diferencial (posiblemente con borde) y podemos preguntarnos si γ es regular. Si γ es de clase C^k ($k \geq 1$) o suave, dado $t_0 \in J$, llamamos *velocidad de la curva* γ en $t = t_0$ a su derivada en t_0, es decir, al elemento de $T_{\gamma(t_0)}M$ dado por

$$\gamma'(t_0) \;\equiv\; \dot\gamma(t_0) \;\equiv\; \mathrm{d}_{t_0}\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0} \Big) \;,$$

donde $\mathrm{d}_{t_0}\gamma$ es el diferencial de γ, vista como función entre las variedades J y M, en el punto $t_0 \in J$ y $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t_0}$ es el elemento de la base de $T_{t_0}J$.

Dado $p \in M$, decimos que γ es una curva con origen en p, si $0 \in J$ y $\gamma(0) = p$, o si, más en general, fijado $t_0 \in J$, $\gamma(t_0) = p$. Dada una carta (U, φ) para M en p, sabemos que, al ser γ suave, su expresión en coordenadas, $\varphi \circ \gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ es suave. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función suave,

$$\dot\gamma(t_0)\, f \;\equiv\; \mathrm{d}_{t_0}\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0} \Big) f \;=\; (f \circ \gamma)'(t_0)$$

y, en coordenadas,

$$\begin{aligned}
\dot\gamma(t_0)\, f \;&=\; \mathrm{d}_{\varphi(\gamma(t_0))}\varphi^{-1}\Big(\mathrm{d}_{t_0}(\varphi \circ \gamma)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0} \Big)\Big) f \\
&=\; \mathrm{d}_{\varphi(\gamma(t_0))}\varphi^{-1}\Big(\frac{\partial(\varphi \circ \gamma)^k}{\partial t}(t_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\varphi(\gamma(t_0))} \Big) f \\
&=\; \frac{\partial \gamma^k}{\partial t}(t_0) \cdot \mathrm{d}_{\varphi(\gamma(t_0))}\varphi^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\varphi(\gamma(t_0))} \Big) f \\
&=\; \frac{\partial \gamma^k}{\partial t}(t_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^k}\Big|_{\varphi(\gamma(t_0))} f \;.
\end{aligned}$$

En definitiva,

$$\dot\gamma(t_0) \;=\; \frac{\partial \gamma^k}{\partial t}(t_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^k}\Big|_{\varphi(\gamma(t_0))} \tag{3.3}$$

donde $\gamma^k = (\varphi \circ \gamma)^k = \varphi^k \circ \gamma$.

Proposición 3.3.1. *Sea M una variedad diferencial y sea $p \in M$. Si $v \in T_pM$ es un vector tangente en p, existe una curva $\gamma : J \to M$ con origen en p tal que $\dot\gamma(t_0) = v$.*

Demostración. Sea (U, φ) una carta en p. Sea $\widehat{v} \in T_{\widehat{p}}\varphi(U) \simeq \mathbb{R}^n$ el vector dado por $\widehat{v} = (v^1, \ldots, v^n) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\widehat{p}}$, donde $v^1, \ldots, v^n$ son las coordenadas de v en la base $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$. Es decir, si $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, definimos $\widehat{v} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\widehat{p}}$.

Supongamos que $p \in \operatorname{int}(M)$. Sea $\widehat{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \to \varphi(U)$ la curva dada por $\widehat{\gamma}(t) = (v^1 t, \ldots, v^n t) + \widehat{p}$ y sea $\gamma = \varphi^{-1} \circ \widehat{\gamma}$. En $t = 0$, $\gamma(0) = p$ y

$$\dot{\gamma}(0) = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = v \ .$$

Si U es una carta del borde de M y $p \in \partial M$, no es cierto que $\widehat{\gamma}(t) \in \mathcal{H}^n$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, excepto en el caso $v^n = 0$. En otro caso, si $v^n > 0$, entonces, la restricción de $\widehat{\gamma}$ a $[0, \epsilon)$ sí es una curva contenida en $\varphi(U)$ y si $v^n < 0$, entonces su restricción a $(-\epsilon, 0]$ lo es. Definiendo γ como la composición de φ^{-1} con la restricción correspondiente, se obtiene una curva en M con origen en p y velocidad $\dot{\gamma}(0) = v$. $\square$

Las curvas suaves en una variedad dan una idea local de la estructura de la misma. En este sentido, las curvas suaves tienen dos aplicaciones principales: por un lado, son útiles para el cálculo de diferenciales de transformaciones suaves, como veremos a continuación; por otro lado, aunque todavía no haya sido definida esta noción, dada una subvariedad S de una variedad ambiente M, la interpretación de los vectores tangentes como velocidades o clases de equivalencia de curvas suaves nos permitirá identificar el espacio tangente a S en un punto $p \in S$ con un subespacio vectorial del espacio tangente a M en p (ver el capítulo relacionado con subvariedades).

Si queremos saber cómo afecta una transformación suave $F : M \to N$ a una curva $\gamma : J \to M$, sólo debemos componer: $F \circ \gamma : J \to N$ es una curva suave y

$$\begin{aligned} (F \circ \gamma)'(t_0) &\equiv \mathrm{d}_{t_0}(F \circ \gamma)\Big(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0} \Big) = \mathrm{d}_{\gamma(t_0)}F \cdot \mathrm{d}_{t_0}\gamma\Big(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0} \Big) \\ &= \mathrm{d}_{\gamma(t_0)}F\big(\dot{\gamma}(t_0)\big) \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Este resultado se puede usar de dos maneras, o con dos propósitos distintos: o bien para determinar la velocidad de la curva $F \circ \gamma$, conociendo $\dot{\gamma}(t_0)$ y $\mathrm{d}_{\gamma(t_0)}F$, o bien para calcular el diferencial $\mathrm{d}_p F$ estudiando el efecto que tiene sobre las curvas γ con origen en p. En esta segunda situación, dado un vector tangente $v_p \in T_p M$, si tomamos una curva suave $\gamma : J \to M$ con origen en p y velocidad v_p, entonces $\mathrm{d}_p F(v_p) = (F \circ \gamma)'(t_0)$.

3.4 El fibrado tangente

El *fibrado tangente* es la construcción que permite estudiar de manera coherente los espacios tangentes a una variedad. Si M es una variedad diferencial, como conjunto, el fibrado tangente a/de M es la unión disjunta de todos los espacios tangentes:

$$TM = \sqcup_{p \in M} T_p M \ .$$

A los elementos de TM los denotamos (p, v), donde $p \in M$ y $v \in T_p M$. El fibrado tangente tiene asociada una proyección $\pi : TM \to M$ que a un par (p, v) le asigna $\pi(p, v) = p$. La coherencia a la que se hizo alusión se refiere a la posibilidad de dar a TM una estructura natural de variedad diferencial.

Proposición 3.4.1. *Si M es una variedad diferencial de dimensión n, el fibrado tangente TM tiene una topología y una estructura diferencial naturales de manera que, con ellas, TM sea una variedad diferencial de dimensión $2 \cdot n$ y respecto a las cuales $\pi : TM \to M$ sea diferenciable.*

Demostración. Para demostrar esta proposición, haremos uso del lema de las cartas (lema 1.2.3). Sea (U, φ) una carta para M. Su preimagen vía π es el conjunto $\pi^{-1}(U)$ de pares (p, v_p) con $p \in U$ y $v_p \in T_pM$. Es decir, $\pi^{-1}(U)$ consiste en los vectores tangentes a M en puntos de U. En $\pi^{-1}(U)$, definimos una aplicación $\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\widetilde{\varphi}(p, v_p) = (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) ,$$

donde $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ y $v_p = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p \in T_pM$ es la escritura de v_p en la base canónica $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ (o, explícitamente, $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p$) del espacio tangente a M en p. La imagen $\widetilde{\varphi}(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en biyección con $\pi^{-1}(U)$ vía $\widetilde{\varphi}$: su inversa está dada por

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(\varphi^{-1}(x),\, v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi^{-1}(x)}\right) .$$

Dadas dos cartas (U, φ) y (V, ψ) con intersección no vacía, se cumple que $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \varnothing$ y

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) &= \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \quad \text{y} \\ \widetilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) &= \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

Estos conjuntos son abiertos en $\mathbb{R}^{2n}$ y las funciones de transición $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}^{-1}$ y $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ son suaves, pues:

$$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(\widetilde{x}^1(x), \dots, \widetilde{x}^n(x), \frac{\partial \widetilde{x}^1}{\partial x^i}(x)v^i, \dots, \frac{\partial \widetilde{x}^n}{\partial x^i}(x)v^i\right) .$$

(Notemos que, si M es C^1, entonces TM no llegará a ser una variedad C^1, pues las funciones $\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}$ son meramente continuas). Por otro lado, si $\{U_i\}_i$ es un cubrimiento (numerable) de M por cartas compatibles, entonces $\{\pi^{-1}(U_i)\}_i$ será un cubrimiento (numerable) de TM. Finalmente, para verificar la hipótesis de separabilidad (T_2) del lema, si (p, v_p) y (q, w_q) son dos puntos distintos en TM con $p \neq q$, entonces, eligiendo cartas con dominios disjuntos que separen a p y a q obtenemos, tomando preimagen por π, conjuntos disjuntos en TM de la forma $\pi^{-1}(U)$, donde U es el dominio de una carta, que separan a (p, v_p) y a (q, w_q). Si, por otro lado, $p = q$, entonces, tomando cualquier carta U que contenga a p, el conjunto $pi^{-1}(U)$ contiene a ambos puntos del fibrado. Con esto se terminan de verificar las hipótesis del lema 1.2.3.

Para ver que $\pi : TM \to M$ es suave, basta tomar una carta (U, φ) para M y la carta correspondiente $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ para TM. Con respecto a estas coordenadas,

$$\varphi \circ \pi \widetilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = (x^1, \dots, x^n) ,$$

es decir, $\widehat{\pi}$ es, también, la proyección en las primeras coordenadas. En el caso de variedades con borde, podemos tomar la expresión (v,p) para que, al tomar coordenadas, $\widetilde{\varphi}(v_p, p) = (v^1, \ldots, v^n, x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}^n = \mathcal{H}^{2n}$. $\square$

Una función suave $F : M \to N$ determina una función suave a nivel de los fibrados tangentes. Esta función es el *diferencial* (o *diferencial global* o *diferencial total*) de F, $\mathrm{d}F : TM \to TN$, dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(v_p, p) &= \mathrm{d}_pF(v_p) \in T_{F(p)}N \quad \text{, o bien} \\ \mathrm{d}F(v_p, p) &= (\mathrm{d}_pF(v_p), F(p)) \end{aligned}$$

En coordenadas,

$$\widehat{\mathrm{d}F}(v^1, \ldots, v^n, x^1, \ldots, x^n) = \Big(\frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial x^i}(x)v^i, \ldots, \frac{\partial \widehat{F}^m}{\partial x^i}(x)v^i, \widehat{F}^1(x), \ldots, \widehat{F}^m(x)\Big) .$$

Al igual que en el caso de la diferencial en un punto, $\mathrm{d}F$ posee las siguientes propiedades funtoriales:

Proposición 3.4.2. (a) *Si $F : M \to N$ y $G : N \to \tilde{N}$ son transformaciones suaves, la composición $G \circ F : M \to \tilde{N}$ es suave y* $\mathrm{d}(G \circ F) = \mathrm{d}G \cdots \mathrm{d}F$*;* (b) *la identidad* $\mathsf{id}_M : M \to M$ *es suave y su diferencial está dado por* $\mathrm{d}\mathsf{id}_M = \mathsf{id}_{TM}$*;* (c) *si $F : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces* $\mathrm{d}F : TM \to TN$ *es un difeomorfismo y* $(\mathrm{d}F)^{-1} = \mathrm{d}(F^{-1})$.

Capítulo 4

El teorema del rango constante

4.1 Los teoremas de la función inversa y de la función implícita

En esta sección recordamos los teoremas de la función inversa y de la función implícita para funciones definidas en abiertos de un espacio euclideo.

Teorema 4.1.1 (de la función inversa)**.** *Sean $U, V \subset \mathbb{R}^d$ abiertos. Sea $F : U \to V$ una función de clase $C^k(U, V)$ $(k \geq 1)$. Si la matriz jacobiana de F en un punto $p \in U$,*

$$\mathrm{D}_pF \;\equiv\; \mathrm{D}F(p) \;\equiv\; \mathrm{D}F\big|_p \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^d}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^d}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^d}{\partial x^d}(p) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \mathrm{D}_pF^1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{D}_pF^d \end{bmatrix} \,,$$

es invertible, existen entornos conexos U_0 y V_0 de p y de $F(p)$, respectivamente, tales que $F_0 \equiv F|_{U_0}^{V_0} : U_0 \to V_0$ es un difeomorfismo.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, $p = 0$ y $F(0) = 0$, componiendo con las traslaciones $x \mapsto x + p$ e $y \mapsto y - F(p)$. También podemos asumir que $\mathrm{D}F(0) = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^d}$, componiendo con el difeomorfismo $y \mapsto \mathrm{D}F(0)^{-1} \cdot y$ (esto sólo es posible porque el tangente de un abierto de $\mathbb{R}^d$ se identifica con $\mathbb{R}^d$, el espacio ambiente, de manera natural). Más aun, $\mathsf{det} \circ \mathrm{D}F : U \to \mathbb{R}$ es continua y no nula en $p = 0$. Se puede suponer que $\mathrm{D}F$ es invertible en U, achicando U, de ser necesario.

Sea $H(x) = x - F(x)$. Esta función es diferenciable y $\mathrm{D}H(0) = 0$. Por continuidad de $\mathrm{D}H$, para cierto $\delta > 0$, vale que $\|\mathrm{D}H(x)\| \leq 1/2$ en la bola cerrada $\overline{\mathrm{B}_\delta\,(0)}$. Entonces

$$\begin{aligned} |H(x') - H(x)| \;&\leq\; \frac{1}{2}|x' - x| \quad \text{y} \\ |x' - x| \;&\leq\; 2|F(x') - F(x)| \;. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Esto muestra que F es inyectiva en $\overline{\mathrm{B}_\delta\,(0)}$.

Sea ahora y un elemento fijo perteneciente a $\mathrm{B}_{\delta/2}\,(0) \subset V$. Sea $G(x) = y + H(x)$ definida en U. Si $|x| \leq \delta$, entonces, como $H(0) = 0$,

$$|G(x)| \;\leq\; |y| + |H(x)| \;<\; \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}|x| \;\leq\; \delta \;.$$

En particular, $G(\overline{\mathrm{B}_\delta(0)}) \subset \overline{\mathrm{B}_\delta(0)}$ y, como $|G(x') - G(x)| \leq 1/2|x' - x|$, se deduce que G es una contracción en un espacio métrico completo. Por el teorema del punto fijo, existe un (úinico) punto $x \in \overline{\mathrm{B}_\delta(0)}$ tal que $G(x) = x$. Pero esto significa que $F(x) = y$. Además, para este punto, $|x| = |G(x)| < \delta$. Como la desigualdad es estricta, se deduce que todo punto $y \in \mathrm{B}_{\delta/2}(0)$ es imagen de un único punto $x \in \mathrm{B}_\delta(0)$ vía F.

Sea $V_0 = \mathrm{B}_{\delta/2}(0) \subset V$ y sea $U_0 = \mathrm{B}_\delta(\cap) F^{-1}(V_0)$. Entonces $F_0 = F| : U_0 \to V_0$ es biyectiva. La inversa F_0^{-1} existe y es continua por (4.1). Resta ver que F_0^{-1} es suave.

Sean $y_0 \in V_0$, $x_0 \in U_0$ tales que $F_0(x_0) = y_0$ y sea L la transformación lineal dada por $\mathrm{D}F_0(x_0)$. Dados $y \in V_0 \setminus \{y_0\}$ y el punto correspondiente $x \in U_0$ tal que $F(x) = y$, el cociente incremental de F_0^{-1} en y_0 verifica:

$$\frac{F_0^{-1}(y) - F_0^{-1}(y_0) - L^{-1}(y - y_0)}{|y - y_0|} = \\ \frac{|x - x_0|}{|y - y_0|} \cdot L^{-1}\left(-\frac{F_0(x) - F_0(x_0) - L(x - x_0)}{|x - x_0|}\right) ,$$

por la linealidad de L^{-1}. Como L^{-1} es lineal entre espacios de dimensión finita y, de nuevo, por (4.1), $\|L^{-1}\| < \infty$ y

$$\frac{F_0^{-1}(y) - F_0^{-1}(y_0) - L^{-1}(y - y_0)}{|y - y_0|} \leq \\ \frac{1}{2}\|L^{-1}\| \cdot \left|-\frac{F_0(x) - F_0(x_0) - L(x - x_0)}{|x - x_0|}\right| ,$$

que tiende a cero, si $y \to y_0$, pues, en ese caso, $x \to x_0$. Así, F_0^{-1} es diferenciable y su diferenciale es igual a

$$\mathrm{D}(F_0^{-1})(y_0) = L^{-1} = \left[\mathrm{D}F_0(x_0)\right]^{-1} = \left[\mathrm{D}F_0(F_0^{-1}(y_0))\right]^{-1} .$$

Esto es cierto para todo punto $y_0 \in V_0$. Por otro lado, la función $y \mapsto \mathrm{D}(F_0^{-1})(y)$ se descompone de la siguiente manera:

$$y \mapsto F_0^{-1}(y) \mapsto (\mathrm{D}F_0)(F_0^{-1}(y)) \mapsto \left[(\mathrm{D}F_0)(F_0^{-1}(y))\right]^{-1} ,$$

como composición de funciones continuas (porque F_0 es C^1, F_0^{-1} es continua y a inversión de matrices es continua (suave) en los coeficientes (por Cramer)). Entonces las derivadas parciales de F_0^{-1}, las componenetes de $\mathrm{D}F_0^{-1}$, son continuas y F_0^{-1} es de clase C^1. En general, si F_0^{-1} es de clase $C^t(V_0, U_0)$ y F_0 es de clase $C^{t+1}(U_0, V_0)$, el argumento anterior muestra que F_0^{-1} es $C^{t+1}(V_0, U_0)$, que sus derivadas parciales de orden $t + 1$ existen y que son continuas. Inductivamente, F_0^{-1} es tan regular como F_0. En particular, si F_0 es C^∞, F_0^{-1} también lo es. □

Corolario 4.1.2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ un abierto y sea $F : U \to \mathbb{R}^d$ una función de clase C^k ($k \geq 1$) o suave. Si* $\mathsf{det}(\mathrm{D}F) \neq 0$ *en U, entonces* (a) *F es abierta y* (b) *si F es inyectiva, entonces $F : U \to F(U)$ es invertible con inversa C^k (o suave).*

Demostración. Sea $p \in U$. Por hipótesis, $\mathrm{D}F(p)$ es invertible. Por el Teorema de la función inversa 4.1.1, existen abiertos $U_p \subset U$ y $V_p \subset \mathbb{R}^d$ tales que $p \in U_p$, $F(p) \in V_p$ y la restricción $F| : U_p \to V_p$ es un difeomorfismo. El subconjunto V_p es abierto y está contenido en $F(U)$. Por lo tanto, si ahora tomamos un punto arbitrario $q \in F(U)$ y un punto $p \in U$ talque $F(p) = q$, el abierto correspondiente V_p es un entorno de q contenido en $F(U)$. En definitiva, $F(U)$ es un subespacio abierto de la imagen $\mathbb{R}^d$. Si $U_0 \subset U$ es un subconjunto abierto, reemplazando U por U_0 en el argumento anterior, se ve que $F(U_0)$ es abierto en la imagen. Entonces F es una función abierta.

En cuanto al ítem *(b)*, si F es inyectiva, la correstricción de F a $F(U)$ es invertible. En un punto $p \in U$, si $q = F(p)$ y U_p y V_p son los abiertos difeomorfos dados por el teorema 4.1.1, la inversa de F restringida a V_p, $F^{-1}|_{V_p}$, conincide con la inversa de la restricción $F| : U_p \to V_p$. Pero esta función es C^k, invertible y con inversa C^k. Así, como F es globalmente invertible y esta inversa coincide localmente con funciones C^k, debe ser C^k también. $\square$

Pasamos ahora al Teorema de la función implícita.

Teorema 4.1.3 (de la función implícita)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ un abierto. Sea $\Phi : U \to \mathbb{R}^l$ una función suave (o de clase C^k) y sean $c \in \mathbb{R}^l$ y $(a, b) \in U$ un punto en la preimagen $\Phi(a, b) = c$. Si la transformación determinada por la matriz*

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^l} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial \Phi^l}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^l}{\partial y^l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi^i}{\partial y^j} \end{bmatrix}$$

de derivadas parciales respecto de las variables $y^1, \ldots, y^l$ es no singular en (a, b), entonces existen entornos V_0 de a y W_0 de b y una función suave $F : V_0 \to W_0$ tales que

$$\Phi^{-1}(c) \cap \big(V_0 \times W_0\big) = \Gamma(F) = \{(x, F(x)) : x \in V_0\} .$$

Dicho de otra manera, en $V_0 \times W_0$, un punto (x, y) verifica $\Phi(x, y) = c$, si y sólo si $y = F(x)$.

Demostración. Sea define $\Psi : U \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ por $\Psi(x, y) = (x, \Phi(x, y))$. La matriz jacobiana de Ψ es igual a

$$\mathrm{D}\Psi = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^d} & \frac{\partial \Psi^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^1}{\partial y^l} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \frac{\partial \Psi^d}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^d}{\partial x^d} & \frac{\partial \Psi^d}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^d}{\partial y^l} \\ \hline \frac{\partial \Psi^{d+1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^{d+1}}{\partial x^d} & \frac{\partial \Psi^{d+1}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^{d+1}}{\partial y^l} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \frac{\partial \Psi^{d+l}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^{d+l}}{\partial x^d} & \frac{\partial \Psi^{d+l}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^{d+l}}{\partial y^l} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{id}_{\mathbb{R}^d} & \\ \hline \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} & \frac{\partial \Phi^i}{\partial y^j} \end{array}\right] .$$

Como la submatriz inferior derecha es invertible, por el teorema 4.1.1, existen entornos $U_0 \subset U$ de (a,b) y $\widehat{U}_0 \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ de $\Psi(a,b)$ ambos conexos y tales que $\Psi| : U_0 \to \widehat{U}_0$ es invertible y con inversa C^k. Podemos tomar U_0 de la forma $V \times W$ achicando, de ser necesario, y $\widehat{U}_0 = \Psi(U_0) = \Psi(V \times W)$.

La inversa de Ψ restringida e U_0 es de la forma

$$\Psi^{-1}(\xi, \upsilon) \;=\; (A(\xi,\upsilon), B(\xi,\upsilon))$$

para ciertas funciones de clase C^k definidas en $\widehat{U}_0$. En particular, estas funciones deben verificar

$$(\xi,\upsilon) \;=\; \Psi \circ \Psi^{-1}(\xi,\upsilon) \;=\; (A, \Phi(A,B)) \; .$$

Así, se ve que $A(\xi,\upsilon) = \xi$ y que $\Psi^{-1}(\xi,\upsilon) = (\xi, B(\xi,\upsilon))$.

Sea, ahora, $\iota_c : V \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ la función $\iota_c(x) = (x,c)$. Sea V_0 el subconjunto

$$V_0 \;=\; \left\{ x \in V \;:\; (x,c) \in \widehat{U}_0 \right\} \;=\; \iota_c^{-1}(\widehat{U}_0) \; .$$

Como ι_c es continua (más aun, es un embedding), V_0 es abierto en V. Tomamos $W_0 = W$ y definimos $F : V_0 \to W_0$ por $x \mapsto B(x,c)$. Es decir, $F = \pi_2 \circ \Psi \circ \iota_c$, donde π_2 es la proyección $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ en el segundo factor. En particular, F es de clase C^k (tan regular como Ψ). Además, si $x \in V_0$,

$$\begin{aligned} (x,c) \;&=\; \Psi \circ \Psi^{-1}(x,c) \;=\; \Psi(x, B(x,c)) \\ &=\; (x, \Phi(x, F(x))) \quad \text{y} \\ c \;&=\; \Phi(x, F(x)) \; . \end{aligned}$$

Finalmente, si $(x,y) \in V_0 \times W_0$, es tal que $\Phi(x,y) = c$,

$$\begin{aligned} \Psi(x,y) \;&=\; (x, \Phi(x,y)) \;=\; (x,c) \quad \text{y} \\ (x,y) \;&=\; \Psi^{-1}(x,c) \;=\; (x, B(x,c)) \\ &=\; (x, F(x)) \; . \end{aligned}$$

□

4.2 El rango de una transformación

Sea $F : M \to N$ una transformación suave. Dado un punto $p \in M$, el *rango de F en p* se define como el rango de la transformación lineal asociada $\mathrm{d}_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$. Este número es igual al rango de la matriz jacobiana de F en cualquiera de sus representaciones en coordenadas $\mathrm{D}_{\widehat{p}}\widehat{F}$, siendo ésta la matriz de la transformación lineal d_pF con respecto a las bases determinadas por tomar cartas compatibles en p y en $F(p)$, por lo que, equivalentemente, podríamos definir el rango de esta manera, sin hacer referencia directamente a los tangentes y al diferencial. Denotamos el rango de F en p por $\mathsf{rg}_p\,(F)$ y, por definición $\mathsf{rg}_p\,(F) = \mathsf{rg}\,(\mathrm{d}_pF)$.

Si existe $r \geq 0$ tal que $\mathsf{rg}\,(\mathrm{d}_pF) = r$, para todo punto p, se dice que F *tiene rango constante* r *en* M o que *es de rango constante*. En todo caso, el rango de F está acotado:

$$0 \leq \mathsf{rg}\,(F) \leq \min\{\dim M, \dim N\}\ .$$

Si la cota superior es alcanzada en un punto $p \in M$, se dice que F *tiene rango máximo en* p. Esto se puede deber a cualquiera de dos cosas: o bien $\mathrm{d}_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ es inyectivo ($\mathsf{rg}\,(\mathrm{d}_pF) = \dim M$), o bien es sobreyectivo ($\mathsf{rg}\,(\mathrm{d}_pF) = \dim N$).

El rango de una transformación suave F verifica que

$$\{\mathsf{rg}\,(F) > k\} = \{\mathsf{rg}\,(F) \geq k+1\}$$

es abierto para todo $k \geq 0$. En particular, si F tiene rango máximo en p, entonces tendrá rango máximo en todo un entorno del punto, en particular, el rango de F será constante en el entorno. Si d_pF es sobreyectivo para todo punto p en el dominio de F, decimos que F es una *submersión*; si es inyectivo, decimos que es una *inmersión*. Con estas definiciones, podemos afirmar que, si d_pF es inyectivo, entonces la restricción $F|_U : U \to N$ es una inmersión en algún entorno U de p. Análogamente, si d_pF es sobreyectivo, $F|_U$ es una submersión.

Un ejemplo de esto está dado por una funció diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$ definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$. En las coordenadas usuales, la matriz jacobiana de f está dada por el vector de derivadas parciales evaluadas en el punto:

$$\mathrm{D}_xf = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \end{bmatrix}\ .$$

La transformación lineal asociada es sobreyectiva, si y sólo si alguna derivada es distinta de cero en el punto. Los puntos en donde el diferencial de esta función es sobreyectivo (en este caso esto quiere decir distinto de cero) son precisamente los puntos *no singulares* de f.

Para ver una clase de casos en donde el diferencial es inyectivo, podemos tomar una función en la dirección opuesta. Si $f : \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^n$ es diferenciable, entonces la matriz jacobiana en este caso también está dada por el vector de derivadas parciales, ahora visto como una matriz de tamaño $n \times 1$. Esta matriz será la matriz de una transformación lineal inyectiva, siempre y cuando, de nuevo, alguna de las derivadas parciales no sea nula. La función f describe una curva –no en tanto variedad de dimensión, sino en tanto parametrización– en el espacio. Que el diferencial de f sea inyectivo en un insante t significa que la velocidad de la curva en dicho instante, $\dot{f}(t)$ no es cero.

Un *difeomorfismo local* es una transformación suave $F : M \to N$ tal que, para todo punto $p \in M$, existe un entorno $U \subset M$ de p que verifica que $F(U) \subset N$ es abierta y que $F|_U : U \to F(U)$ es un difeomorfismo. Como los tangentes están definidos localmente, si F es un difeomorfismo local, entonces $\mathrm{d}_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo lineal en todo punto. En particular, todo difeomorfismo local es, a la vez, una submersión y una inmersión. Aunque sólo válido para una transformacióm entre variedades *sin* borde, el teorema de la función inversa es la afirmación recíproca:

Teorema 4.2.1. *Sean M y N variedades* sin *borde y sea $F : M \to N$ una transformación suave. Si $p \in M$ es un punto en donde $\mathrm{d}_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ es invertible, existen entonces entornos conexos $U_0 \subset M$ de p y $V_0 \subset N$ de $F(p)$ tales que la restricción $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ es difeomorfismo.*

Demostración. Aunque parezca trivial, el hecho de que d_pF es isomorfismo implica que $\dim M = \dim N$. Tomando coordenadas (U, φ) en p y (V, ψ) en $F(p)$ tales que $F(U) \subset V$, como tanto φ como ψ son difeomorfismos, la matriz jacobiana $\mathrm{D}_{\widehat{p}}\widehat{F}$ es invertible. Por el teorema usual de la función inversa, existen entornos (conexos) $\widehat{U}_0 \subset \varphi(U)$ y $\widehat{V}_0 \subset \psi(V)$ tales que $\widehat{F}|_{\widehat{U}_0} : \widehat{U}_0 \to \widehat{V}_0$ es un difeomorfismo. Si $U_0 = \varphi^{-1}(\widehat{U}_0)$ y $V_0 = \psi^{-1}(\widehat{V}_0)$, entonces $p \in U_0$, $F(p) \in V_0$, U_0 y V_0 son conexos y $F|_{U_0} \to V_0$ es difeomorfismo. $\square$

A continuación enunciamos algunas propiedades importantes de los difeomorfismos locales.

Proposición 4.2.2. (a) *La composición de difeomorfismos locales es un difeomorfismo local;* (b) *el producto de dos difeomorfismos locales es un difeomorfismo local, su inversa está dada por el producto de las respectivas transformaciones inversas;* (c) *la restricción de un difeomorfismo local a un abierto sigue siendo un difeomorfismo local;* (d) *todo difeomorfismo local biyectivo es un difeomorfismo.*

Por ejemplo, para demostrar *(d)*, si $F : M \to N$ es biyectiva y difeomorfismo local, entonces, localmente, su inversa F^{-1} coincide con una función suave: si $q \in N$ y $p \in M$ es el (único) punto tal que $F(p) = q$, existe un entorno U de p tal que $F(U)$ es abierta y $F|_U : U \to F(U)$ es difeomorfismo. En particular, $F^{-1}|_{F(U)} = (F|_U)^{-1}$ que es una función suave.

Para determinar si una transformación (suave) es un difeomorfismo local, alcanza con ver lo que sucede en entornos coordenados.

Observación 4.2.1. Una transformación suave $F : M \to N$ es un difeomorfismo local, si y sólo si ara cada punto $p \in M$ existe un entorno $U \subset M$ de p tal que la representación en coordenadas de F en U es un difeomorfismo local.

Corolario 4.2.3. *Si $F : M \to N$ es una transformación suave, entonces F es un difeomorismo local, si y sólo si es una submersión y una inmersión.*

Demostración. Ya demostramos que todo difeomorfismo local es submersión e inmersión. Recíprocamente, si F es, a la vez, una submersión y una inmersión, entonces $\mathrm{d}_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa, existen entornos de p y de $F(p)$ tales que F restringida a los mismos es un difeomorfismo. $\square$

Corolario 4.2.4. *Si $F : M \to N$ es una transformación suave,* $\dim M = \dim N$ *y F es una submersión o una inmersión, entonces F es un difeomorfismo local.*

Demostración. Dado que las dimensiones del dominio y del codominio de F son iguales, F es una inmersión, si y sólo si es una submersión. $\square$

4.3 Más propiedades de los difeomorfismos locales

Bajo ciertas condiciones sobre $F : M \to N$ podemos garantizar la validez de las conclusiones del teorema de la función inversa en contextos un poco más generales.

Corolario 4.3.1. *Sea $F : M \to N$ una transformación suave, donde M es una variedad* sin *borde y N es arbitraria. Si $F(M) \subset \operatorname{int}(N)$ y $p \in M$ es tal que $\mathrm{d}_p F$ es invertible, entonces existen entornos conexos $p \in U_0$ y $F(p) \in V_0$ tales que $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ es un difeomorfismo.*

El contenido de este corolario es un caso particular del caso en que una transformación suave tiene imagen en una *subvariedad regular*. Sabemos que, en una variedad M, el interior $\operatorname{int}(M)$ es un subconjunto abierto y que –con la topología de subespacio y la estructura heredada de M– es una variedad diferencial de la misma dimensión que M. El borde ∂M de M es un subconjunto cerrado al cual se le puede dar, naturalmente también, una estructura de variedad diferencial de dimensión $\dim(M) - 1$. Como se verá luego, con dicha estructura, ∂M resulta una subvariedad regular de M, debido a la presencia de *cartas preferenciales* (de hecho, éstas son las cartas utilizadas para definir la estructura a la que se hizo alusión).

Repasemos la demostración de estas afirmaciones. Sea $n = \dim M$. Por definición, un punto $p \in M$ pertenece al interior $\operatorname{int}(M)$, si existe una *carta de interior* en p, es decir, una carta (U, φ) *para* M tal que $p \in U$ y $\varphi(U)$ sea un abierto de $\mathbb{R}^n$. En particular, de esto se deduce que $\operatorname{int}(M)$ es un subconjunto abierto de M, pues, por ejemplo, dados p y (U, φ) como antes, vale que $U \subset \operatorname{int}(M)$. La colección de cartas

$$\mathcal{A}_0 = \{(U, \varphi) \text{ carta para } M : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \text{ es abierto}\} ,$$

es un atlas compatible para un subconjunto de M, precisamente para el interior de M. El subconjunto $\operatorname{int}(M)$ con la topología de subespacio y la estructura determinada por dicho atlas resulta una variedad diferencial. La inclusión $\iota_{\operatorname{int}(M)} : \operatorname{int}(M) \hookrightarrow M$ es suave y tiene la propiedad de que una función $F : N \to \operatorname{int}(M)$ es suave, si y sólo si $\iota_{\operatorname{int}(M)} \circ F : N \to M$ lo es. Esto es cierto, más en general, para cualquier abierto de M.

Proposición 4.3.2. *Sea M una variedad diferencial y sea $U \subset M$ un abierto al que se le da la estructura diferencial heredada de M, es decir, U tiene la estructura dada por el atlas compatible*

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \psi) \textit{ carta para } M : V \subset U\} .$$

Entonces la inclusión $\iota_U : U \hookrightarrow M$ es suave, $\mathrm{d}_p \iota_U$ es isomorfismo y, además, una función $F : N \to U$ es una transformación suave, si y sólo si $\iota_U \circ F$ lo es.

Aunque demostraremos luego un resultado más general, damos ahora una demostración de esta proposición.

Demostración. Sea $p \in U$ y sea $(V, \psi) \in \mathcal{A}_U$ con $p \in V$. Entonces (V, ψ) también es una carta en p en tanto punto de M y $\psi \circ \iota_U \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \psi(V)$ es igual, como función, a $\mathsf{id}_{\psi(V)}$, que es suave. Que el diferencial $\mathrm{d}_p\iota_U : T_pU \to T_pM$ es un isomorfismo, se vio en 3.1.4.

Sea ahora $F : N \to U$ una transformación arbitraria. En primer lugar, como U es un subespacio de M, $F : N \to U$ es continua, si y sólo si $\iota_U \circ F : N \to M$ lo es. Si asumimos que F es suave, entonces $\iota_U \circ F$ es suave por ser composición de funciones suaves. Si, recíprocamente, $\iota_U \circ F$ es suave y $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ es una carata en $p = F(q) = \iota \circ F(q)$ para M y $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ es una carta en q para N, sabemos que la composición

$$\widetilde{\psi} \circ (\iota_U \circ F) \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \,:\, \widetilde{\varphi}\big((\iota_U \circ F)^{-1}(\widetilde{V}) \cap \widetilde{U}\big) \;\to\; \widetilde{\psi}(\widetilde{V})$$

es suave. Ahora bien, $\widetilde{V} \cap U$ es abierto en U y $(\iota \circ F)^{-1}(\widetilde{V}) = F^{-1}(\widetilde{V} \cap U)$ es abierto porque F es continua. La carta (V, ψ), donde $V = \widetilde{V} \cap U$ y $\psi = \widetilde{\psi}|_V$, pertenece a $\mathcal{A}_U$ y $\psi \circ F \circ \widetilde{\varphi}^{-1} : \widetilde{\varphi}(F^{-1}(V) \cap \widetilde{U}) \to \psi(V)$ es igual a $\widetilde{\psi} \circ \iota \circ F \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ que es suave. $\square$

Pasemos ahora a ∂M. Por definición, los puntos del borde son aquellos puntos $p \in M$ que verifican que existe un abierto $U \subset M$ tal que $p \in U$ y una función continua φ de U en un abierto de $\mathcal{H}^n$ tal que $\varphi(p) \in \partial\mathcal{H}^n$. Por el teorema de invarianza del dominio, sabemos que $\partial M = M \smallsetminus \mathrm{int}\,(M)$ y que, por lo tanto, ∂M es cerrado. Pero, además, si (U, φ) es una carta para M,

$$\varphi(U \cap \partial M) \;=\; \partial\mathcal{H}^n \cap \varphi(U)$$

exactamente, es decir, si $p' \in U$ y $\varphi(p') \notin \partial\mathcal{H}^n$, entonces p' debe ser un punto del interior de M. Dicho de otra manera, a nivel de cartas para M, $\mathrm{int}\,(M)$ se ve como $\mathrm{int}\,(\mathcal{H}^n)$ y ∂M como $\partial\mathcal{H}^n$. Para cada punto $p \in \partial M$ del borde, existe una carta del borde (U_p, φ_p) para M en p. Si $\varphi_p = (x^1, \ldots, x^n)$, entonces

$$\begin{aligned} \partial M \cap U_p \;&=\; \{x^n = 0\} \quad \text{e} \\ \mathrm{int}\,(M) \cap U_p \;&=\; \{x^n > 0\}\ . \end{aligned}$$

Para cada una de estas cartas consideramos la proyección en las primeras $n-1$ coordenadas de la restricción a ∂M. Es decir, para cada p definimos una función $\overline{\varphi_p} : \partial M \cap U_p \to \mathbb{R}^{n-1}$ por

$$\overline{\varphi_p} \;=\; \pi \circ \varphi_p \circ \iota_{\partial M \cap U_p}\ .$$

La imagen de esta función es igual a

$$\overline{\varphi_p}(\partial M \cap U_p) \;=\; \pi(x^n = 0)]\ ,$$

que es un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$. Sea $\overline{U_p} = \partial M \cap U_p$ y sea

$$\mathcal{A}_{\partial M} \;=\; \big\{(\overline{U_p}, \overline{\varphi_p}) \,:\, p \in \partial M\big\}\ .$$

La colección $\mathcal{A}_{\partial M}$ cubre a ∂M y las funciones $\overline{\varphi_p}$ son homeomorfismos con abiertos de $\mathbb{R}^{n-1}$. Dados $p, q \in \partial M$ con $\overline{U_p} \cap \overline{U_q} \neq \varnothing$, la composición $\overline{\varphi_p} \circ \overline{\varphi_q}^{-1} : \overline{\varphi_p}(\overline{U_p} \cap \overline{U_q}) \to \overline{\varphi_q}(\overline{U_p} \cap \overline{U_q})$ es igual a

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_p} \circ \overline{\varphi_q}^{-1}(u^1, \ldots, u^{n-1}) &= \pi \circ \varphi_p \iota_{\overline{U_p}}(\varphi_q^{-1}(u^1, \ldots, u^{n-1}, 0)) \\ &= \pi \varphi_p \varphi_q^{-1}(u^1, \ldots, u^{n-1}, 0) \\ &= \pi \circ (\varphi_p \circ \varphi_q^{-1}) \circ j_0(u^1, \ldots, u^{n-1}) \ , \end{aligned}$$

donde $j_0(u^1, \ldots, u^{n-1}) = (u^1, \ldots, u^{n-1}, 0) \in \overline{\varphi_q}(\overline{U_q})$. Esta composición es suave en las coordenadas $u^1, \ldots, u^{n-1}$. Vemos, entonces, que ∂M tiene una estructura de variedad diferencial determinada por el *atlas* $\mathcal{A}_{\partial M}$. Este atlas consiste, esencialmente, en las restricciones de las cartas compatibles con la estructura de M al borde, de maner análoga a lo que se hizo con $\mathrm{int}\,(M)$ o, en general, con un abierto U de M.

Proposición 4.3.3. *Sea M una variedad dierencial. La inclusión $\iota_{\partial M} : \partial M \hookrightarrow M$ es suave. Dada una función $F : N \to \partial M$ arbitraria, F es suave, si y sólo si $\iota_{\partial M} \circ F$ lo es.*

Demostración. Notemos que, como ∂M es un subespacio topológico, $F : N \to \partial M$ es continua, si y sólo si $\iota \circ F$ es continua. Sea $p \in \partial M$ y sea (U, φ) una carta para M en p. Como p es un punto del borde, cualquiera sea la carta (U, φ) en p, debe valer que $\varphi(p) \in \varphi(U) \cap \partial\mathcal{H}^n$. Notemos, además, que, si $\overline{U} = \partial M \cap U$ y $\overline{\varphi} = \pi \circ \varphi \circ \iota$, el par $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ es una carta compatible para ∂M. Con respecto a las cartas (U, φ) en M y $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ en ∂M,

$$\varphi \circ \iota_{\partial M} \circ \overline{\varphi}^{-1}(u^1, \ldots, u^{n-1}) = (u^1, \ldots, u^{n-1}, 0) = j(u^1, \ldots, u^{n-1}) \ .$$

Con lo cual, $\iota_{\partial M} : \partial M \hookrightarrow M$ es suave. Localmente, $\iota_{\partial M}$ es la inclusión de un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$ como la tajada con $\{x^n = 0\}$ en un abierto de $\mathcal{H}^n$ (o de $\mathbb{R}^n$).

Si $F : N \to \partial M$ es suave, entonces $\iota \circ F : N \to M$ es suave por ser composición de funciones suaves. Si, recíprocamente, $\iota \circ F$ es suave, entonces debe ser suave en sentido usual con respecto a cualquier par de cartas para N y para M. Sea $F(q) = p \in \partial M$. Sean (V, ψ) una carta para M en p y (U, φ) una carta para N en q. Definimos $\overline{V} = V \cap \partial M$ y $\overline{\psi} = \pi \circ \psi \circ \iota_{\partial M}$, como antes. En el abierto $\varphi(F^{-1}(V) \cap U)$,

$$\overline{\psi} \circ F \circ \varphi^{-1} = \pi \circ \psi \circ (\iota_{\partial M} \circ F) \circ \varphi^{-1} \ .$$

Como $\psi \circ \iota \circ F \circ \varphi^{-1}$ es suave y $\pi : \mathcal{H}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ también lo es, la representación $\overline{\psi} \circ F \circ \varphi^{-1}$ es suave. Notemos que $\varphi(F^{-1}(V) \cap U)$ es abierto porque F es continua como función en ∂M. □

Volvamos, ahora, a la demostración corolario.

Demostración de 4.3.1. Si $F : M \to N$ es suave y $F(M) \subset \mathrm{int}\,(N)$, entonces $F| : M \to \mathrm{int}\,(N)$ es suave e $\mathrm{int}\,(N)$ es abierto en N. Además, $\partial \mathrm{int}\,(N) = \varnothing$, con lo cual podemos intentar aplocar el teorema 4.2.1. Notemos que $F = \iota_{\mathrm{int}(N)} \circ F|$. Por la funtorialidad del diferencial,

$$\mathrm{d}_p F \;=\; \mathrm{d}_{F(p)}\iota_{\mathrm{int}(N)} \circ \mathrm{d}_p(F|)\ .$$

Como $\mathrm{d}_{F(p)}\iota_{\mathrm{int}(N)}$ es un isomorfismo, en particular, es inyectivo y

$$\mathsf{rg}\,(\mathrm{d}_p F) \;=\; \mathsf{rg}\,(\mathrm{d}_p(F|))\ .$$

Por hipótesis, $\mathrm{d}_p F$ es invertible. Entonces $\mathrm{d}_p(F|)$ lo es, también. Por el teorema 4.2.1, existen abiertos $V_0 \subset \mathrm{int}\,(N)$ y $U_0 \subset M$ tales que $p \in U_0$, $F(p) \in V_0$ y $(F|)|_{U_0} : U_0 \to V_0$ es difeomorfismo. Pero, como $\mathrm{int}\,(N)$ es abierto en N, el conjunto V_0 es abieto en N. En definitiva, existen entornos conexos U_0 de p en M y V_0 de $F(p)$ en N (conexos) tales que $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ es difeomorfismo. □

Proposición 4.3.4. *Sea M una variedad* sin *borde y sea N una variedad (arbitraria). Sea $F : M \to N$ una transformación suave. Si $p \in M$ es tal que* $\mathrm{d}_p F$ *es no singular, entonces $F(p) \in \mathrm{int}\,(N)$.*

Esta proposición nos permite omitir la hipótesis $F(M) \subset \mathrm{int}\,(N)$ en el enunciado del corolario 4.3.1.

Demostración. Sean $m = \dim M$ y $n = \dim N$. Supongamos que $F(p) \in \partial N$. Sea (U, φ) una carta para M en p, con $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U) = \mathrm{B}_1^m(0)$ y sea (V, ψ) carta para N en $F(p)$ con $\psi(F(p)) = 0$ y $\psi(V) = \mathrm{B}_1^n(0) \cap \mathcal{H}^n$. Expresado de manera más concisa, U es una bola coordenada centrada en p y V es una semibola coordenada centrada en $F(p)$. Supongamos que elegimos los entornos de las cartas de manera que se cumpla que $F(U) \subset V$, para simplificar. Sea $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ la representación de F en estas coordenadas. Por hipótesis, $\mathrm{d}_p F : T_p M \to T_{F(p)} N$ es un isomorfismo (en p), con lo que la matriz jacobiana $\mathrm{D}\widehat{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ también lo es. En particular, $m = n$. Pero, además, como $\iota = \iota_{\mathcal{H}^n} : \mathcal{H}^n \to \mathbb{R}^n$ es suave, $\iota \circ \widehat{F} : \mathrm{B}_1^n(0) \to \mathrm{B}_1^n(0)$ es suave y

$$\mathrm{D}_{\widehat{F}(\widehat{p})}\iota \cdot \mathrm{D}_{\widehat{p}}\widehat{F} \;=\; \mathrm{D}_{\widehat{p}}(\iota \circ \widehat{F})\ .$$

Como $\mathsf{rg}\left(\mathrm{D}_{\widehat{F(p)}}\iota\right) = n$, es decir, $\mathrm{D}_{\widehat{F(p)}}\iota$ es invertible, la matriz $\mathrm{D}_{\widehat{p}}(\iota \circ \widehat{F})$ también debe serlo. Por el teorema de la función inversa, existen abiertos $\widehat{U}_0 \subset \varphi(U) = \mathrm{B}_1(0)$ y $W_0 \subset \mathrm{B}_1(0)$ tales que $\iota \circ \widehat{F}|_{\widehat{U}_0} : \widehat{U}_0 \to W_0$ es difeomorfismo. Pero $W_0 = \iota \circ \widehat{F}(\widehat{U}_0) \subset \iota(\mathcal{H}^n)$ y el punto 0 pertenece a $\iota \circ \widehat{F}(\widehat{U}_0)$ y, entonces, W_0 no puede ser abierto pues todo entorno de 0 en $\mathbb{R}^n$ contiene puntos que no pertenecen a $\mathcal{H}^n$. □

Corolario 4.3.5. *Si M es una variedad* sin *borde y N es una variedad diferencial posiblemente con borde, entonces* (a) *una transformación suave $F : M \to N$ es difeomorfismo local, si y sólo si es submersión e inmersión;* (b) *si* $\dim M = \dim N$ *y F es submersión o inmersión, entonces F es difeomorfismo local.*

Demostración. Si F es difeomorfismo local, entonces d_pF es isomorfismo lineal. En particular, $\dim M = \dim N$ y F tiene rango máximo en todo punto p. Recíprocamente, si F submersión e inmersión, d_pF es isomorfismo en todo punto p. Por la proposición 4.3.4, $F(M) \subset \mathrm{int}\,(N)$ y, por el corolario 4.3.1 F es difeomorfismo local. Esto demuestra *(a)*. En cuanto a *(b)*, si $\dim M = \dim N$, entonces las condiciones para ser submersión y para ser inmersión coinciden. Con lo cual, si se sabe, por ejemplo, que F es submersión, entonces debe ser inmersión y, por *(a)*, debe ser difeomorfismo local. □

Proposición 4.3.6. *Sean M, N, P, P' variedades diferenciales con o sin borde. Sea $F : M \to N$ un difeomorfismo local. Entonces* (a) *si $G : P \to M$ es continua, entonces G es suave, si y sólo si $F \circ G$ lo es;* (b) *si F es sobreyectiva y $G' : N \to P'$ e s una función arbitraria, entonces G' es (continua y) suave, si y sólo si $G' \circ F$ lo es.*

Demostración. (a) Supongamos que $F \circ G$ es suave y que G es continua. Si $p \in P$, como F es un difeomorfismo local, existe un entorno $U_0 \subset M$ de $G(p)$ y existe un entorno $V_0 \subset N$ de $F(G(p))$ tales que $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ es difeomorfismo. Sea $V \subset V_0$ el dominio de una carta (V, ψ) para N en $F(G(p))$. Sea $U = F^{-1}(V)$ y sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi = \psi \circ F|_U$. Entonces (U, φ) es una carta para M en $G(p)$ contenida en U_0. Como G es continua, $G^{-1}(U) \subset P$ es abierto y contiene a p. Sea (W, γ) una carta en p con $W \subset G^{-1}(U)$. Como $F \circ G$ es suave,

$$\psi \circ (F \circ G) \circ \gamma^{-1} \,:\, \gamma(W) \,\to\, \psi(V)$$

es suave. Pero $\psi \circ (F \circ G) \circ \gamma^{-1} = (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ G \circ \gamma^{-1})$ y $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es difeomorfismo (de hecho, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = \psi$). Entonces $\varphi \circ G \circ \gamma^{-1}$ es suave, de lo que se deduce que G es suave.

*(b)*sea $F : M \to N$ un difeomorfismo local sobreyectivo y sea $G' : N \to P'$ una función tal que $G' \circ F : M \to P'$ es suave. Sea $p \in N$. Por sobreyectividad, existe $q \in M$ tal que $F(q) = p$. Como $G' \circ F$ es suave, existen cartas (U, φ) para M en q y (V, ψ) para P' en $G'(p)$ tales que $G' \circ F(U) \subset V$ y $\psi \circ (G' \circ F) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es suave. Como F es un difeomorfismo local, F es abierta y $F(U) \subset N$ es un subconjunto abierto que contiene a p. Podemos tomar, entonces, una carta (W, γ) para N en p, con dominio $W \subset F(U)$. En particular,

$$\begin{gathered} G'(W) \,\subset\, G'(F(U)) \,\subset\, V \quad \text{y} \\ \psi \circ (G' \circ F) \circ \varphi^{-1} \,=\, (\psi \circ G' \circ \gamma^{-1}) \circ (\gamma \circ F \circ \varphi^{-1}) \;. \end{gathered}$$

Tomando la carta (U, φ) de manera que $F|_U : U \to F(U)$ sea difeomorfismo –esto se puede hacer si primero fijamos entornos U_0 de q y V_0 de p de manera que $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ sea difeomorfismo y eligiendo (U, φ) con $U \subset U_0$–, la composición $\gamma \circ F \circ \varphi^{-1}$ resulta ser un difeomorfismo y, entonces, $\psi \circ G' \circ \gamma^{-1}$ debe ser suave, por ser composición de dos funciones suaves:

$$\psi \circ G' \circ \gamma^{-1} \,=\, (\psi \circ (G' \circ F) \circ \varphi^{-1}) \circ (\gamma \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1} \;.$$

□

4.4 El teorema del rango constante

Empezamos enunciando y demostrando el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.4.1 (del rango)**.** *Sea $F : M \to N$ una transformación suave entre variedades* sin *borde. Si F tiene rango constante r, entonces, para cada punto $p \in M$, existen una carta (U, φ) para M centrada en p y otra carta (V, ψ) para N centrada en $F(p)$ tales que $F(U) \subset V$ y $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es de la forma*

$$\widehat{F}(x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0) .$$

Demostración. Sea $p \in M$ y sean U y V dominios de cartas en p y en $F(p)$, respectivamente, tales que $F(U) \subset V$. Tomando coordenadas, si el teorema se demuestra reemplazando M por U, N por V y F por $\widehat{F}$, componiendo las cartas obtenidas con las anteriores, quedará demostrado el caso general. Supongamos, entonces, sin pérdida de generalidad, que $M = U \subset \mathbb{R}^m$ y que $N = V \subset \mathbb{R}^n$ son abiertos, $p = 0 \in U$ y $F(p) = 0 \in V$. como $\mathsf{rg}\,(\mathrm{D}_p F) = r$, algún menor de la matriz jacobiana de tamaño $r \times r$ es no nulo. Reordenando las coordenadas de U, podemos asumir que es el menor correspondiente a la submatriz $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right]_{i,j \in [\![1,r]\!]}$. Sean $(x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^{m-r})$ las coordenadas en U y sean $(v^1, \ldots, v^r, w^1, \ldots, w^{n-r})$ las coordenadas en V. Con respecto a estas coordenadas,

$$F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$$

para ciertas funciones suaves $Q : U \to \mathbb{R}^r$ y $R : U \to \mathbb{R}^{n-r}$. Por hipótesis, la matriz $\left[\frac{\partial Q^i}{\partial x^j}\right]_{i,j \in [\![1,r]\!]}$ es no singular. Extendemos Q como en el teorema de la función implícita: sea $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ dada por $\Phi(x, y) = (Q(x, y), y)$. La matriz jacobiana de Φ en (x, y) es igual a

$$\mathrm{D}_{(x,y)}\Phi = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial Q^i}{\partial x^j} & \frac{\partial Q^i}{\partial y^j} \\ \hline 0 & \mathsf{id}_{m-r} \end{array}\right] .$$

Por hipótesis, $\left|\mathrm{D}_{(0,0)}\Phi\right| \neq 0$, con lo cual, por el teorema de la función inversa, existen entornos (conexos) U_0 de $(0,0)$ y $\widehat{U}_0$ de $\Phi(0,0) = (0,0)$ tales que $\Phi|_{U_0} : U_0 \to \widehat{U}_0$ es difeomorfismo. Cambiamos $\widehat{U}_0$ por un cubo de la forma $\mathrm{C}_\epsilon\,(0,0) \subset \widehat{U}_0$ y U_0 por $\Phi|_{U_0}^{-1}\big(\mathrm{C}_\epsilon\,(0,0)\big)$. Sea $\varphi = \Phi|_{U_0}$.

Ahora bien, la inversa $\varphi^{-1} : \widehat{U}_0 \to U_0$ también es de la forma

$$\varphi^{-1}(\xi, \upsilon) = (A(\xi, \upsilon), B(\xi, \upsilon))$$

para ciertas funciones suaves A, B. Entonces

$$\begin{aligned} (\xi, \upsilon) &= \varphi \circ \varphi^{-1}(\xi, \upsilon) = (Q(A, B), B) \quad \text{y} \\ B(\xi, \upsilon) &= \upsilon \quad \text{y} \\ \xi &= Q(A(\xi, \upsilon), \upsilon) . \end{aligned}$$

Componiendo con F,

$$F \circ \varphi^{-1}(\xi, \upsilon) = (Q(A,B), R(A,B)) = (\xi, R(A(\xi,\upsilon),\upsilon)) \ .$$

Sea $\tilde{R}(\xi,\upsilon) = R(A(\xi,\upsilon),\upsilon)$. La matriz jaconiana de la composición en un punto (ξ,υ) está dada por

$$\mathrm{D}_{(0,0)}(F \circ \varphi^{-1}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{id}_r & 0 \\ \hline \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial \xi^j} & \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial \upsilon^j} \end{array}\right] \ .$$

Como F tiene rango exactamente r en todo U y φ es difeomorfismo, $\mathrm{D}_{(\xi,\upsilon)}(F \circ \varphi^{-1})$ tiene rango r en todo par (ξ,υ). Entonces debe valer que $\left[\frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial \upsilon^j}\right]$ es la matriz nula, es decir, $\frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial \upsilon^j}(\xi,\upsilon) = 0$ para todo $(\xi,\upsilon) \in \widehat{U}_0 = \mathrm{C}_\epsilon(0,0)$. En otras palabras, $\tilde{R}$ no depende de υ. Sea $S(\xi) = \tilde{R}(\xi,0)$. Entonces

$$F \circ \varphi^{-1}(\xi,\upsilon) = (\xi, \tilde{R}(\xi,\upsilon)) = (\xi, S(\xi)) \ .$$

Esto es casi lo que buscamos, pues $F \circ \varphi^{-1}$ es la identidad en las primeras r coordenadas.

Sea V_0 el subconjunto definido por

$$V_0 = \left\{(v,w) \in V \ : \ (v,0) \in \widehat{U}_0 = \mathrm{C}_\epsilon(0,0)\right\} \ .$$

Es decir, V_0 es la preimagen por

$$\lambda v.\lambda w.(v,0) : V \to \widehat{U}_0 \ ,$$

que es continua. Entonces V_0 es abierto y contiene al punto $(0,0)$. Ahora bien, si $(\xi,\upsilon) \in \widehat{U}_0$, entonces

$$F \circ \varphi^{-1}(\xi,\upsilon) = (\xi, S(\xi)) \ .$$

Como $(\xi,0) \in \widehat{U}_0$ (porque es un cubo), vale que $F \circ \varphi^{-1}(\xi,\upsilon) \in V_0$. Así, $F \circ \varphi^{-1}(\widehat{U}_0) \subset V_0$ y $F(U_0) \subset V_0$. Ahora hay que definir un cambio de coordenadas, un difeomorfismo, en V_0 de manera que, al ser restringido a la imagen $F(U_0)$, coincida con la proyección en las primeras r coordenadas. Sea $\psi : V_0 \to \mathbb{R}^n$ dada por $\psi(v,w) = (v, w - S(v))$. Esta función es invertible, con inversa dada por $\psi^{-1}(t,u) = (t, u + S(t))$. En particular, ψ y ψ^{-1} son suaves y ψ es un difeomorfismo en la imagen. Componiendo,

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(\xi,\upsilon) = \psi(\xi, S(\xi)) = (\xi, 0) \ .$$

□

Corolario 4.4.2. *Sea $F : M \to N$ una transformació suave entre variedades sin borde. Supongamos que M es conexa. Entonces F es de rango constante, si y sólo si, para cada $p \in M$, existen entornos coordenados de p y de $F(p)$ con respecto a los cuales la representación de F en coordenadas es lineal.*

Demostración. Si F tiene rango constante, por el teorema 4.4.1, F tiene una expresión lineal en coordenadas (más precisamente, es una proyección). Recíprocamente, si F tiene una expresión lineal en coordenadas cerca de cada punto, entonces, como el rango de una transformación lineal es constante, $\mathsf{rg}\,(F)$ es localmente constante. Como M es conexa, $\mathsf{rg}\,(F)$ debe ser constante. $\square$

Corolario 4.4.3. *Sean M y N variedades sin borde y sea $F : M \to N$ de rango constante r. si F es sobreyectiva, entonces es submersión ($r = \dim N$); si F es inyectiva, entonces es inmersión ($r = \dim M$); si F es biyectiva, entonces es un difeomorfismo.*

Demostración. Si $r < \dim N$, para cada punto $p \in M$, existen entorns coordenados U_p de p y V_p de $F(p)$ tales que $\widehat{F}(x) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0)$. Sea $U_p' \subset U_p$ un entorno de p con clausura compacta contenida en U_p. Entonces $F(\overline{U_p'})$ es compacto y está contenido en $V \cap \{y^{r+1} = \cdots = y^n = 0\}$. Los conjuntos U_p' cubren M. Sea $\{U_i\}_i$ un subcubrimiento numerable. Como los conjuntos $F(\overline{U_i})$ son cerrados nunca densos y

$$F(M) \;=\; F\Big(\bigcup_{i\geq 1} \overline{U_i}\Big) \;=\; \bigcup_{i\geq 1} F(\overline{U_i}) \;,$$

no puede ser que $F(M) = N$, pues N es localmente compacto Hausdorff.

Si F no es una inmersión ($r < \dim M$), entonces, dado un punto $p \in M$, en un entorno suficientemente pequeño,

$$\widehat{F}(x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^m) \;=\; (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0) \;.$$

En particular, $\widehat{F}(0, dots, 0, x^{r+1}, \ldots, x^m) = \widehat{F}(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$ para $|x^i| < \epsilon$ y F no es inyectiva.

So F es biyectiva, entonces debe ser inmersión y submersión. Por el teorema de la función inversa, es difeomorfismo local. Como es biyectiva, su inversa coincide localmente con una función suave. En definitiva, F es difeomorfismo. $\square$

Consideremos la inclusión del semiespacio $\mathcal{H}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Esta función es suave y su diferencial es un isomorfismo en todos los puntos. Pero, por invarianza de dominio, no pueden ser localmente difeomorfos. Específicamente, no hay ningún entorno de un punto $x \in \partial\mathcal{H}^n$ que sea difeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. En otras palabras, no hay un teorema general de la función inversa como 4.2.1 para transformaciones $F : M \to N$ en donde $\partial M \neq \varnothing$. Aun así, como vimos al definir la estructura diferencial natural en el borde de una variedad con borde, es posible obtener un resultado similar al teorema del rango constante en algunos casos particulares. En el caso del borde de una variedad, $\partial M \hookrightarrow M$, sabemos que, dada una carta (U, φ) para M en $p \in \partial M$, la composición

$$\varphi \circ \iota_{\partial M} \circ \overline{\varphi}^{-1}(u^1, \ldots, u^{n-1}) \;=\; (u^1, \ldots, u^{n-1}, 0) \;,$$

donde $\overline{\varphi} = \pi \circ \varphi \circ \iota_{\partial M} : \partial M \cap U \to \pi(\varphi(U))$.

Sea M una variedad *con* borde $\partial M \neq \varnothing$ y sea $F : M \to N$ una transformación suave. Como la inclusión $\iota_{\text{int}(M)} : \text{int}\,(M) \hookrightarrow M$ es suave y tiene rango máximo, en los puntos del interior de M, podemos aplicar el teorema del rango constante, de cumplir F con las condiciones del mismo, para obtener una representación de F alrededor de cada punto del interior como una proyección. Pero, en un punto $p \in \partial M$ del borde de M, esto no es cierto *a priori*.

Teorema 4.4.4 (Inmersión de variedades con borde)**.** *Sea M una variedad con borde $\partial M \neq \varnothing$ y sea $m = \dim M$. Sea N una variedad* sin *borde de dimensión n y sea $F : M \to N$ una inmersión suave. Si $p \in \partial M$, existe una carta (U, φ) para M en p y existe una carta (V, ψ) para N en $F(p)$ tales que $F(U) \subset V$ y*

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) ,$$

donde $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$.

Demostración. Podemos suponer que $N = V \subset \mathbb{R}^n$ y que $M = U \subset \mathcal{H}^n$ son abiertos y que $p = 0$ y que $F(p) = 0$. Por definición, existe $\widetilde{F} : W \to V$ definida en un abierto de $\mathbb{R}^m$ con $p \in W$ y $\widetilde{F}|_{W \cap U} = F$. En particular,

$$\mathrm{d}_0 \widetilde{F} = \mathrm{d}_0 F .$$

Como F tiene rango máximo en 0, la extensión $\widetilde{F}$ debe tener rango máximo en 0. Achicando W, podemos suponer que $\widetilde{F}$ tiene rango máximo en todo el abierto W. Por el teorema del rango, existen cartas (W_0, γ_0) para $\mathbb{R}^m$ centrada en 0 y (V_0, ψ_0) para $\mathbb{R}^n$ centrada en 0 tales que

$$\psi_0 \circ \widetilde{F} \circ \gamma_0^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) .$$

Pero, al elegir estas cartas, no hay control sobre lo que pasa con el borde de M: la imagen $\gamma_0(\partial M \cap W_0)$ podría ser cualquier cosa –casi. Como $\gamma_0 : W_0 \to \widehat{W_0} = \gamma_0(W_0) \subset \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo, el producto $\gamma_0 \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{n-m}} : W_0 \times \mathbb{R}^{n-m} \to \widehat{W_0} \times \mathbb{R}^{n-m}$ es un difeomorfismo, también. La composición $\psi = (\gamma_0^{-1} \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{n-m}}) \circ \psi_0$ es un difeomorfismo definido en un entorno $V_1 \subset V_0$ de 0. Así, (V_1, ψ) es una carta para V centrada en 0 y

$$\begin{aligned} \psi \circ F(x) &= (\gamma_0^{-1} \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{n-m}}) \circ (\psi_0 \circ F \circ \gamma_0^{-1}) \circ \gamma_0(x) \\ &= (\gamma_0^{-1} \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{n-m}})(\gamma_0^1(x), \dots, \gamma_0^m(x), 0, \dots, 0) = (x, 0) . \end{aligned}$$

En definitiva, usando las coordenadas originales de M y ψ se obtiene una erpresentación de F de la forma deseada. $\square$

Observación 4.4.1. Supongamos que F es submersión y $\partial M \neq \varnothing$ como en el teorema 4.4.4. Entonces argumentando de manera similar, podemos hallar cartas tales que

$$\begin{aligned} &F \circ (\gamma_0^{-1} \circ (\psi_0 \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}))(x) \\ &\quad = \psi_0^{-1}(\psi_0 \circ F \circ \gamma_0^{-1})(\psi_0(x^1, \dots, x^n), x^{n+1}, \dots, x^m) \\ &\quad = (x^1, \dots, x^n) . \end{aligned}$$

Pero ¿ es $(\psi_0^{-1} \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}) \circ \gamma_0$ una carta de borde? En general, no, pues será de borde, si y sólo si γ_0 lo es. . .

¿Qué pasa en el caso en que $\partial N \neq \varnothing$ y $\partial M = \varnothing$ y $F : M \to N$ sea submersión? En vez de considerar una extensión $\widetilde{F}$, habrá que considerar la composición $F_0 = \iota_{\mathcal{H}^n} \circ F$. Como N tiene borde, no está garantizado que existan secciones locales suaves para F y que, por lo tanto, F sea abierta. Pero F_0 es submersión (una cuestión de números y regla de la cadena) entre variedades *sin* borde. Sea U un entorno coordenado en M centrado en p y sea V un entorno coordenado en N centrado en $F(p)$. Entonces, el problema queda reducido al caso en que M es un abierto de $\mathbb{R}^m$ y N es un abierto de $\mathcal{H}^n$ $(n \leq m)$, $p = 0$ y $F(p) = 0$. Componiendo con la inclusión de $\mathcal{H}^n$ en $\mathbb{R}^n$, la función F_0 es submersión (su rango es igual al rango de F). Por el teorema del rango, existen cartas (U_0, φ_0) para $\mathbb{R}^m$ centrada en $p = 0$ y (V_0, ψ_0) para $\mathbb{R}^n$ centrada en $F(p) = 0$ de manera que

$$\psi_0 \circ (\iota_{\mathcal{H}^n} \circ F) \circ \varphi_0^{-1}(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^n) .$$

Completamos ψ_0 a un difeo definido en un abierto de $\mathbb{R}^m$: concretamente, $\psi_0 \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}$ es un difeomorfismo de $V_0 \times \mathbb{R}^{m-n}$ en $\widehat{V}_0 \times \mathbb{R}^{m-n}$, digamos, que es un entorno de $0 \in \mathbb{R}^m$. Entonces la composición $(\psi_0^{-1} \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}) \circ \varphi_0^{-1}$ es un difeomorfismo definido en algún entorno de 0 y vale que

$$\begin{aligned}
\iota_{\mathcal{H}^n} \circ F \circ (\varphi_0^{-1} \circ (\psi_0 \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}))(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m)& \\
= \psi_0^{-1} \circ (\psi_0 \circ F_0 \circ \varphi_0^{-1})(\psi_0(x^1, \ldots, x^n), x^{n+1}, \ldots, x^m)& \\
= \psi_0^{-1}(\psi_0^1(x), \ldots, \psi_0^n(x))& \\
= (x^1, \ldots, x^n) .&
\end{aligned}$$

Del hecho de que F_0 es submersión, podemos deducir que $F_0 : U \to \widetilde{V}$ es abierta (porque existen secciones locales suaves), donde $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ es abierto tal que $V = \mathcal{H}^n \cap \widetilde{V}$ (podemos tomar una semibola y la bola correspondiente). Pero, como su imagen está contenida en $\mathcal{H}^n$, los puntos de $F_0(U)$ deben pertenecer al interior de V, a $\operatorname{int}(\mathcal{H}^n) \cap V$. Sabiendo que F se correstringe a una submersión entre variedades sin borde, podemos aplicar el teorema del rango sin problema.

Capítulo 5

Subvariedades

5.1 Embeddings

Un *embedding (suave)* es una inmersión (suave) $F : M \to N$ que es, además, un *embedding topológico*, es decir, un subespacio. Un embedding suave es un subespacio (embedding topológico) que es suave *y que, además,* tiene diferencial inyectivo, de rango máximo en toda M.

Proposición 5.1.1. *Sean M y N variedades diferenciales y $F : M \to N$ una inmersión suave. Si F es inyectiva y cumple con cualquiera de las siguientess propiedades, entonces F es (subespacio y, por lo tanto,) embedding:* (a) *F es abierta o cerrada;* (b) *F es propia;* (c) *M es compacta;* (d) *$\partial M = \varnothing$ y $\dim M = \dim N$.*

Demostración. Si F es abierta o cerrada, entonces es subespacio. Si F es propia, entonces es cerrada. Si M es compacta, como F es continua, todo cerrado de M es compacto y todo compacto de N es cerrado, entonces F es propia y cerrada. Si $\partial M = \varnothing$ y $\dim M = \dim N$, sabemos que $F = \iota_{\mathrm{int}(N)} \circ F|$, donde $F| : M \to \mathrm{int}\,(N)$ es la correstricción de F. Como $F|$ es difeomorfismo local (por dimensión), resulta ser abierta. La inclusión $\iota_{\mathrm{int}(N)}$ también es abierta. Entonces F es abierta y luego embedding. $\square$

Hay embeddings que no son ni abiertos ni cerrados: por ejemplo, $\mathcal{H}^n = \{x^n \geq 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ no es abierta, $\{x^n < 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ no es cerrada y $\{x^n \geq 0\} \cap \{x^n < 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ no es ni abierta, ni cerrada, pero todas son embeddings.

Toda inmersión es localmente un embedding.

Teorema 5.1.2. *Sean M y N variedades diferenciales. Sea $F : M \to N$ una transformación suave. Entonces F es una inmersión, si y sólo si, para todo punto $p \in M$, existe un entorno $p \in U \subset M$ tal que $F|_U : U \to N$ es embedding.*

Demostración. Supongamos que F tiene rango completo. Si $F(p) \notin \partial N$, entonces F no toma valores en ∂N en un entorno de p. Podemos aplicar, o bien el teorema del rango constante, o el teorema de inmersión de una variedad con borde (dependiendo de M) para concluir que $\widehat{F}(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$ en un entorno de p. En particular, F es inyectiva en dicho entorno. Sabiendo que F es inyectiva en un entorno $U_1 \subset M$ de p, podemos elegir $U \subset M$ abierto, con $p \in U$ y $\overline{U}$ compacta y contenida en U_1. Entonces $F|_{\overline{U}} : \overline{U} \to N$ es continua e inyectiva con dominio compacto y codominio Hausdorff. La restricción $F|_{\overline{U}}$ es subespacio. En particular, $F|_U : U \to N$ es subespacio, es suave y es inmersión, es decir, $F|_U$ es embedding.

Si $F(p) \in \partial N$, podemos hallar un entorno de p en donde F es inyectiva y, con el mismo argumente que en el caso anterior, probar que F es un embedding restringida a un entorno de p. Si (W, ψ) es una carta para N centrada en $F(p)$, una carta de borde, como $F : M \to N$ es continua, la preimagen $U = F^{-1}(W)$ es abierta y contiene a p. La composición

$$\iota_{\mathcal{H}^n} \circ \psi \circ F \ : U \ \to \ \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

es suave y su diferencial, $\mathrm{d}_p(\iota_{\mathcal{H}^n} \circ \psi \circ F)$, es inyectivo. En definitiva, $\iota_{\mathcal{H}^n} \circ \psi \circ F$ es una inmersión de U en $\mathbb{R}^n$, por lo que, aplicando el teorema del rango **??** (si $p \notin \partial M$) o el teorema de la inmersión **??**, existe un entorno U_1 de p contenido en U tal que $\iota_{\mathcal{H}^n} \circ \psi \circ F|_{U_1}$ es inyectiva. Pero entonces $F|_{U_1}$ es inyectiva.

Recíprocamente, si F es localmente embeddingm entonces en todo punto $p \in M$ el difernecial $\mathrm{d}_p F$ es inyectivo. □

Observación 5.1.1. Notemos que este argumento es bastante similar al usado en la demostración de la proposición **??**.

Podemos definir una *inmersión topológica* como una función $f : X \to Y$ tal que, para todo punto $p \in X$, existe un entorno $U \subset X$ tal que $f|_U : U \to Y$ es un *embedding topológico*, es decir, un subespacio. Una inmersión suave es una inmersión topológica que es suave y que, además, tiene rango máximo.

5.2 Submersiones

Empecemos con la siguiente definición: una *sección* de un morfismo $\pi : M \to N$ es un morfismo $\sigma : N \to M$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_N$, El siguiente diagrama es ilustrativo en este sentido:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \\ N \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Si π es una función continua, una sección σ de π es una función *continua* tal que $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_N$; si π es suave, una sección σ de π es una función *suave* tal que $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_N$. En general, usaremos los términos *sección continua* o, respectivamente, *sección suave* para evitar ambigüedades. una *sección local* de una función (*continua*) π es una función (continua) $\sigma : U \to M$ definida en un abierto $U \subset N$ y tal que $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_U$.

Teorema 5.2.1. *Sean M y N variedades diferenciales (*sin *borde) y sea $\pi : M \to N$ una transformación suave. Entonces π es una submersión, si y sólo si, para cada punto $p \in M$, existe una seccción (suave) local $\sigma : U \to M$ de π tal que $p \in \sigma(U)$.*

Es decir, π es una submersión, si todo punto del dominio pertenece a la imagen de una sección local.

Demostración. Supongamos que $\pi : M \to N$ es una submersión y sea $p \in M$. Por el teorema del rango 4.4.1, como estamos suponiendo que las variedades no tienen borde, existen coordenadas (U, φ) en p y (V, ψ) en $\pi(p) =: q$ tales que $\pi(U) \subset V$ y

$$\widehat{\pi}(x^1, \ldots, x^m) = \psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^n) .$$

Achicando U de ser necesario, podemos asumir que $\varphi(U) = \mathrm{C}_\epsilon^m(0)$. La imagen por $\widehat{\pi}$ de este cubo es exactamente el cubo $\mathrm{C}_\epsilon^n(0) = \{(y^1, \ldots, y^n) : |y^j| < \epsilon\}$. Definimos entonces

$$\begin{aligned} &\widehat{\sigma} : \mathrm{C}_\epsilon^n(0) \to \mathrm{C}_\epsilon^m(0) \ , \quad \widehat{\sigma}(y^1, \ldots, y^n) = (y^1, \ldots, y^n, 0, \ldots, 0) \quad \text{y} \\ &\sigma : \psi^{-1}(\mathrm{C}_\epsilon^n(0)) \to \varphi^{-1}(\mathrm{C}_\epsilon^m(0)) \ , \quad \sigma = \varphi^{-1} \circ \widehat{\sigma} \circ \psi \ . \end{aligned}$$

Entonces $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_{\psi^{-1}(\mathrm{C}_\epsilon^n(0))}$ y σ es una sección suave de π defininida en el abierto $\psi^{-1}(\mathrm{C}_\epsilon^n(0)) \subset V$ y $\sigma(\pi(p)) = p$.

Recíprocamente, si $p \in M$ y existe una transformación suave $\sigma : U \to M$ definida en un abierto $U \subset N$ tal que $p \in \sigma(U)$ y tal que $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_U$, entonces, tomando diferencial en $q \in U$ tal que $\sigma(q) = p$ y aplicando la regla de la cadena,

$$\mathsf{id}_{T_qN} = \mathrm{d}_q(\pi \circ \sigma) = \mathrm{d}_p\pi \cdot \mathrm{d}_q\sigma ,$$

de lo que se deduce que $\mathrm{d}_p\pi$ es sobreyectivo (y que $\mathrm{d}_q\sigma$ es inyectivo). □

Como en el caso de las inmersiones, podemos usar esta equivalencia para definir una submersión topológica. Una función continua $\pi : X \to Y$ se dice *submersión*, si admite una cantidad suficiente de secciones locales, es decir, es tal que cada punto $p \in X$ pertenece a la imagen de alguna sección local de π.

Proposición 5.2.2. *Una submersión $\pi : M \to N$ con M y N* sin *borde, es abierta.*

Demostración. Sea $U \subset M$ un subconjunto abierto y sea $q \in \pi(U)$. Sea $p \in U$ tal que $\pi(p) = q$ cualquier punto en la preimagen. Por el teorema 5.2.1, existe una sección local suave $\sigma : W \to M$ de π tal que $\sigma(q) = p$. El conjunto $\sigma^{-1}(U)$ es abierto, está contenido en W y contiene a q. Pero, además, si $y \in \sigma^{-1}(U)$, vale que $y = \pi(\sigma(y)) \in \pi(U)$. Entonces q pertenece a $\sigma^{-1}(U)$ que está contenido en $\pi(U)$, de lo que se deduce que $\pi(U)$ es abierto. □

Corolario 5.2.3. *Si $\pi : M \to N$ es una submersión sobreyectiva (M y N sin borde), entonces es cociente.*

Demostración. Por 5.2.2, $\pi : M \to N$ es sobreyectiva y abierta. En particular, es cociente. □

Las submersiones presentan algunas propiedades similares a las de los difeomorfismos locales (c. f. 4.3.6).

Proposición 5.2.4. *Sean M y N variedades sin borde y sea $\pi : M \to N$ una submersión suave y sobreyectiva. Si P es una variedad (con o sin borde) entonces* (a) *una transformación (no necesariamente continua) $F : N \to P$ es suave, si y sólo si $F \circ \pi : M \to P$ lo es;* (b) *si $G : M \to P$ es una función constante en las fibras de π, existe una única función $\tilde{G} : N \to P$ tal que $G = \tilde{G} \circ \pi$ y G es suave, si y sólo si $\tilde{G}$ lo es.*

Estas propiedades caracterizan a las submersiones sobreyectivas. Las submersiones sobreyectivas son la versión análoga a las funciones cociente en espacios topológicos. Más adelante veremos quéclase de transformaciones suaves cumplen un rol similar al de los subespacios.

Observación 5.2.1. Sea $\pi : M \to N$ como en 5.2.4. Si $\tilde{N}$ representa al mismo conjunto subyacente a N con una topología posiblemente distinta (con respecto a la cual es una variedad topológica) y una estructura diferencial (posiblemente) distinta, pero de manera que el ítem *(a)* siga siendo válido reemplazando N por $\tilde{N}$, entonces $\mathsf{id} : N \to \tilde{N}$ es difeomorfismo.

Para demostrar esta afirmación, consideramos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & M \arrow[d, "\pi"] & M \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dr, dashed, "\tilde{\pi}"] & \\ \tilde{N} \arrow[r, shift left, "\mathsf{id}"] & N \arrow[l, shift left] & \tilde{N} \arrow[r, "\mathsf{id}_{\tilde{N}}"'] & \tilde{N} \end{tikzcd}$$

Por hipótesis, $\pi = \mathsf{id}_{\to} \circ \tilde{\pi}$ es suave, si y sólo si $\mathsf{id}_{\to}$ es suave. Pero, también sabemos que π es suave. Entonces $\mathsf{id}_{\to}$ es suave. Por otro lado, por *(a)*, $\tilde{\pi} = \mathsf{id}_{\leftarrow} \circ \pi$ es suave, si y sólo si $\mathsf{id}_{\leftarrow}$ es suave. Pero $\tilde{\pi}$ es suave, pues: $\tilde{\pi}$ es suave, si y sólo si $\mathsf{id}_{\tilde{N}}$ lo es, e $\mathsf{id}_{\tilde{N}}$ siempre es suave. En definitiva, $\mathsf{id}_{\leftarrow}$ también es suave, con lo que la identidad id en el conjunto subyacente a N determina un difeomorfismo entre las estructuras diferenciales de N y de $\tilde{N}$. La conclusión es igual en el contexto de variedades topológicas.

Corolario 5.2.5. *Sean M, N_1 y N_2 variedades* sin *borde y sean $\pi_1 : M \to N_1$ y $\pi_2 : M \to N_2$ submersiones suaves y sobreyectivas. Supongamos, además, que $\pi_1(q) = \pi_1(q') \Leftrightarrow \pi_2(q) = \pi(q')$, es decir, cada una de las submersiones es constante en las fibras de la otra –dicho de otra manera, realizan las mismas identificaciones. Entonces existe un único difeomorfismo $F : N_1 \to N_2$ tal que $F \circ \pi_1 = \pi_2$.*

5.3 Subvariedades

Dicho rápidamente, una *subvariedad* es un subconjunto de una variedad que posee, a su vez, una topología y una estructura diferencial (de manera que la inclusión sea suave). En esta sección indagamos un poco más en las propiedades de los embeddings y de las inmersiones con el objetivo de poder estudiar los distintos tipos de subvariedades.

5.3.1 Subvariedades regulares

En primer lugarm dada una variedad M, un subconjunto $S \subset M$ se dice *subvariedad regular* (o, a veces, *subvariedad* a secas), si, en tanto subespacio topológico es una variedad topológica *sin borde* y posee una estructura diferencial respecto de la cual $\iota_S : S \to M$ es un embedding (suave). Las subvariedades con borde se definen de manera análoga, pero algunos resultados válidos para subvariedades sin borde no lo son para subvariedades con borde; las definiremos más adelante.

La última condición en la definición de subvariedad regular se puede reemplazar por la condición de que ι_S sea suave y que el rango de ι_S sea $\dim S$ (que, necesariamente, es $\dim S \leq \dim M$), pues la condición de ser subespacio fue incluida explícitamente antes.

Aunque parezca inmediato de las definiciones, demostramos la siguiente proposición, pues, en algún sentido, introduce la idea de estructura natural en una subvariedad.

Proposición 5.3.1. *Sea M una variedad diferencial y sea N una variedad diferencial sin borde. Sea $F : N \to M$ un embedding suave. Sea $S = F(N)$ la imagen de F en M. Entonces* (a) *con la topología de subespacio de M, el subconjunto S es una variedad topológica y* (b) *admite una estructura diferencial de manera que S sea una subvariedad regular de M y $F| : N \to S$ sea un difeomorfismo. Esta topología y esta estructura diferencial en S son las únicas con estas propiedades.*

Demostración. Le damos a $S = F(N)$ la topología de subespacio de M. De la definición de subvariedad regular, se deduce que esta es la única topología posible con la que S puede ser una subvariedad regular. Como F es un embedding, es, en particular, un subespacio y un homeomorfismo entre N y S. Notemos también que, si deseamos que $F| : N \to S$ sea un *homeomorfismo*, como F es subespacio, S *debe* tener la topología de subespacio de M. En particular, como N es una variedad topológica, S también lo es.

De la misma manera, pasando a la estructura suave, si deseamos que $F| : N \to S$ sea un difeomorfismo, entonces los pares $(F(U), \varphi \circ F^{-1})$, donde (U, φ) es una carta para N, deben ser cartas compatibles con la estructura de S. Notemos que la colección

$$\mathcal{A}_S = \big\{(F(U), \varphi \circ F^{-1}) : (U, \varphi) \text{ carta para } N\big\}$$

es un atlas suavemente compatible (pues N tiene una estructura diferencial y las cartas (U, φ) consideradas son las cartas compatibles con dicha estructura). Con lo cual, la condición de que $F| : N \to S$ sea difeomorfismo impone una estructura suave sobre S. Finalmente, notemos que la inclusión $\iota_S : S \to M$ se descompone de la siguiente manera:

$$\iota_S = F \circ (F|^{-1}) ,$$

donde $F|^{-1}$ es un difeomorfismo y F es un embedding. En particular, ι_S es embedding. $\square$

Una subvariedad regular $S \subset M$ se dice *propia*, si la inclusión $\iota_S : S \to M$ es una función propia. Las subvariedades propias son, exactamente, las subvariedades *regulares* que son cerradas en M.

Proposición 5.3.2. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad regular. Entonces S es una subvariedad regular propia, si y sólo si $S \subset M$ es una subconjunto cerrado.*

Como toda función continua y propia entre variedades topológicas es cerrada, dichas funciones son, además, subespacio, con lo cual, si $\iota_S : S \to M$ es continua y propia, ι_S es embedding (topológico). Es decir, no existen subvariedades propias (tales que la inclusión sea propia) que no sean subvariedades regulares (es decir, subespacios topológicos). Aun así, existen subvariedades *cerradas* pero que no son regulares, es decir, subespacios.

Antes de demostrar la proposición recordamos algunos lemas acerca de funciones continuas propias.

Lema 5.3.3. (a) *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si f es cerrada y las fibras $f^{-1}(y)$ con $y \in Y$ son compactas, entonces f es propia;* (b) *en particular, si f es un embedding en un subespacio cerrado, entonces f es propia;* (c) *si $Y : T_2$ y f admite una rettracción $g : Y \to X$ con $g \circ f = \mathsf{id}_X$, entonces f es propia;* (d) *si f es propia y $A \subset X$ es saturado ($f^{-1}(f(A)) = A$), entonces $f|_A : A \to f(A)$ es propia.*

Demostración. (a): Sea $K \subset Y$ un compacto. Sea $\{A_i\}_i$ una familia de subconjuntos cerrados de $f^{-1}(K)$ con la propiedad de la intersección finita. Sea $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ un subconjunto finito de índices. La familia

$$\{A_I := A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \,:\, I = \{i_1, \ldots, i_k\}\}$$

donde I recorre todos los subconjuntos finitos de índices constituye una familia de cerrados de $f^{-1}(K)$ con la propiedad de la intersección finita, también. Como f es cerrada, $f(A_I)$ es cerrada en K para cada I (tomamos $\widetilde{A_I}$ cerrado en X tal que $A_I = f^{-1}(K) \cap \widetilde{A_I}$, entonces $f(\widetilde{A_I}$ es cerrado en Y y $K \cap f(\widetilde{A_I})$ es igual $f(A_I)$). La familia $\{f(A_I)\}_I$ está compuesta por cerrados (de K) y tales que

$$f(A_{I_1}) \cap \cdots \cap f(A_{I_t}) \supset f(A_{I_1} \cap \cdots \cap A_{I_t}) \neq \varnothing\ .$$

Concluimos entonces que $\{f(A_I)\}_I$ tiene la propiedad de la intersección finita, también. Como K es compacto, existe $y \in K$ tal que $y \in \bigcap_I f(A_I)$. Pero esto quiere decir que existen, para cada I, elementos $x_I \in A_I$ tales que $f(x_I) = y$, es decir, $x_I \in A_I \cap f^{-1}(y)$. Por hipótesis, $f^{-1}(y)$ es compacta. Además, por lo anterior,

$$\varnothing \neq \big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big) \cap f^{-1}(y) \,=\, \big(A_{i_1} \cap f^{-1}(y)\big) \cap \cdots \cap \big(A_{i_k} \cap f^{-1}(y)\big)\ .$$

Entonces $\{A_i \cap f^{-1}(y)\}_i$ es una familia de cerrados en el compacto $f^{-1}(y)$ con la propiedad de intersección finita. Por lo tanto,

$$\varnothing \neq \bigcap_i \big(A_i \cap f^{-1}(y)\big) \,=\, \big(\bigcap_i A_i\big) \cap f^{-1}(y) \,\subset\, \bigcap_i A_i\ .$$

(b) Si asumimos que $f : X \to Y$ es subespacio y que $f(X) \subset Y$ es cerrada, entonces $f^{-1}(y)$ es vacía o consiste en un único punto. En cualquier caso, $f^{-1}(y)$ es compacta

para todo $y \in Y$ y, como $f| : X \to f(X)$ es homeomorfismo, si $A \subset X$ es cerrado, entonces $f(A)$ es cerrada en $f(X)$ y, por lo tanto, en Y.

(c) Si Y es Hausdorff y f admite una retracción continua $g : Y \to X$, entonces, si $K \subset Y$ es compacto, entonces K es cerrado en Y, $f^{-1}(K)$ es cerrado en X y $g(K)$ es compacto (pues g es continua). Pero, si $f(x) \in K$, entonces $x = g(f(x))$ y

$$f^{-1}(K) \subset g(K) .$$

Por lo tanto, $f^{-1}(K)$ es compacto.

(d) Si $K \subset f(A)$ es compacto, entonces $K \subset Y$ es compacto y, por, hipótesis, $f^{-1}(K)$ es compacto. Pero $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(f(A)) = A$. □

Lema 5.3.4. *Si $f : x \to Y$ es continua, Y es localmente compacto Hausdorff y, además, f es propia, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea $A \subset X$ cerrado. Sea $y \in \overline{f(A)}$ y sea $U \subset Y$ un entorno de y con clausura compacta C. Entonces $y \in \overline{f(A) \cap C}$ (si V es entorno de y, entonces $V \cap U$ es abierta, $V \cap U \subset U \subset C$ y $(V \cap U) \cap f(A) \neq \varnothing$), con lo cual $(V \cap U) \cap (f(A) \cap C) \neq \varnothing$). Como f es propia, $f^{-1}(C)$ es compacto y $A \cap f^{-1}(C)$ también, por ser cerrado contenido en un compacto. Como f es continua, $f(A \cap f^{-1}(C)) = f(A) \cap C$ es compacto. Como Y es Hausdorff, $f(A) \cap C$ es cerrada e $y \in f(A) \cap C \subset f(A)$. Con lo cual $f(A)$ es cerrada. □

Ahora sí, pasamos a la demostración de la proposición.

Demostración de 5.3.2. Si $S \hookrightarrow M$ es propia, $S \subset M$ es cerrado, por 5.3.4. Si $S \subset M$ es cerrado, $\iota_S : S \to M$ es subespacio cerrado y, por lo tanto, propia por 5.3.3. □

5.3.2 Cartas preferenciales

Localmente, las subvariedadesregulares se pueden identificar con una subvariedad lineal de un espacio euclideo ambiente. Para ser precisos, llamamos, dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, *feta de dimensión k*, o *k-feta*, de U a los subconjuntos de la forma

$$S = \left\{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\right\}$$

para ciertas constantes reales $c^{k+1}, \ldots, c^n$. Es decir, S es igual a la intersección de U con un subesapcio lineal de $\mathbb{R}^n$. En general, una k-feta S es homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$.

Dada una variedad (topológica o diferencial) M, definimos una *feta de dimensión k* de manera análoga, tomando cartas. Si (U, φ) es una carta para M y $S \subset U$ es un subconjunto tal que $\varphi(S) \subset \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es una feta de dimensión k de $\varphi(U)$, decimos que S es una feta de dimensión k de U. En ese caso, S debe ser de la forma $S = \{\varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) : x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\}$. Como la aplicación

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^k, x^{k+1} - c^{k+1}, \ldots, x^n - c^n)$$

es un difeomorfismo (homeomorfismo), toda k-feta de un abierto coordenado U es igual a la preimagen de los puntos tales que las últimas coordenadas son iguales a cero.

Si, ahora, $S \subset M$ es un subconjunto arbitrario de la variedad, una *carta preferencial para S en M* es una carta (U, φ) tal que $S \cap U$ es, vía φ, una k-feta de U. Las funciones coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ de una carta preferencial para S en M se denominarán *coordenadas preferenciales.* Si existe $k \geq 0$ tal que para todo punto del subconjunto S existe un entorno coordenado U tal que $S \cap U$ es una k-feta de U, decimos que *S verifica localmente (en M) la condición de ser k-feta* o que *es localmente una k-feta.* Dicho de otra manera, S es localmente una feta de dimensión k, si existe un cubrimiento de S por entornos coordenados U tales que $S \cap U$ es una feta de dimensión k de U. Con el nombre de carta preferencial la dimensión de la feta resultante no queda especificada.

Las k-fetas de un abierto de $\mathbb{R}^n$ son homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^k$. Por lo tanto, es de esperar que un subconjunto de una variedad que verifica localmente la condición de ser k-feta tenga, naturalmente, una estructura de variedad. Por otro lado, si bien ser una subvariedad regular es una propiedad global de un subconjunto $S \subset M$ (o, mejor dicho, de la inclusión ι_S), es posible formular un criterio local para determinar si un subconjunto admite una estructura de subvariedad regular (es decir, determinar si ι_S es un embedding).

Teorema 5.3.5. *Sea M una variedad diferencial (sin borde) y sea $S \subset M$ una subvariedad regular de M de dimensión k, Entonces para todo punto $p \in S$ existe un carta (U, φ) para M en $p = \iota_S(p)$ tal que $S \cap U$ es una k-feta de U. Recíprocamente, si $S \subset M$ es un subconjunto que verifica localmente la condición de ser una k-feta, entonces, con la topología de subespacio de M, S es una variedad topológica de dimensión k y, además, admite una estructura diferencial de manera que resulta ser una subvariedad regular de M de dimensión k.*

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $S \subset M$ es una subvariedad regular de dimensión k. Por el teorema del rango 4.4.1, como $\iota_S : S \to M$ es una inmersión, si $p \in S$, existen coordenadas (V, ψ) para M en p y (U, φ) para S tales que

$$\psi \circ \iota_S \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) .$$

Notemos que $\psi \circ \iota_S \circ \varphi^{-1} = \iota_U : U \to V$. Es decir, U se incluye en V como una k-feta. El problema es que no podemos afirmar que U sea exactamente $V \cap \{x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}$.

Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $U_0 = \varphi^{-1}(\mathrm{B}^k_\epsilon(0)) \subset U$ y $V_0 = \psi^{-1}(\mathrm{B}^n_\epsilon(0)) \subset V$. Como $U_0 \subset S$ es abierto, existe $W \subset M$ tal que $U_0 = S \cap W$. Sea $V_1 = W \cap V_0$ y sea $\psi_1 = \psi|_{V_1}$. Entonces (V_1, ψ_1) es una carta para M en p y $S \cap V_1 = U_0 \cap V_0 = U_0$. Entonces $V_0 \cap \{x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\} = U_0$, U_0 es una k-feta de V_1 y (V_1, ψ_1) es una carta preferencial para S en M en p.

Recíprocamente, supongamos que $S \subset M$ es un subconjunto que verifica localmente la condición de ser una feta de dimensión k de M. En la topología de subespacio, S es T_2 y N_2. Veamos que es localmente euclideo y que su dimensión es k.

Sea $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ la proyección en las primeras k coordenadas. Sea $p \in S$ y sea (U, φ) una carta preferencial para S en M en p. Sea $V = S \cap U$ la k-feta propio, sea

$\widehat{V} = \pi \circ \varphi(V)$ lo que debería ser la imaen de la carta para S cuando ésta sea definida y sea $\psi = \pi \circ \varphi|_V : V \to \widehat{V}$ la función que será la carta. Por definición, $\varphi(V) = \varphi(U) \cap A$ para cierta subvariedad lineal $A \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que A está dada como el conjunto de ceros de las siguientes ecuaciones:

$$x^{k+1} = c^{k+1} , \dots ,x^n = c^n .$$

Como $\varphi(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, la k-feta $\varphi(V)$ es abierta en A. Como $\pi|_A : A \to \mathbb{R}^k$ es un difeomorfismo, $\widehat{V} = \pi(\varphi(V))$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$. Resta ver que ψ es un homeomorfismo. La función ψ es continua por ser composición de funciones continuas: $\psi = \pi \circ \varphi \circ \iota_V$; tiene inversa dada por

$$\varphi^{-1} \circ j \circ \iota_{\widehat{V}}(x^1, \dots, x^k) = \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^k, c^{k+1}, \dots, c^n) ,$$

que es continua.

En cuanto a la estructura diferencial en S, usamos las cartas recién definidas: dadas (U, φ) y (U', φ') cartas para M tales que $V = S \cap U$ y $V' = U' \cap S$ son k-fetas de U y de U', respectivamente, tenemos cartas (v, ψ) y (V', ψ') en S que verifican

$$\begin{aligned} \psi' \circ \psi^{-1} &= (\pi \circ \varphi' \circ \iota_{V'}) \circ (\pi \circ \varphi \circ \iota_V)^{-1} \\ &= \pi \circ \varphi' \circ \iota_{V'} \circ \varphi^{-1} \circ j \circ \iota_{\widehat{V}}(x^1, \dots, x^k) \\ &= \pi \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1}) \circ j(x^1, \dots, x^k) . \end{aligned}$$

Pero j y π son suaves y φ' y φ son suavemente compatibles. Entonces (V, ψ) y (V', ψ') son compatibles. Con respecto a la estructura determinada por estas cartas en S, $\widehat{\iota_S}(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, c^{k+1}, \dots, c^n)$ localmente, que resulta pues una inmersión suave. Como ι_S es, por definición de la topología de S, subespacio, la transformación ι_S es embedding suave. □

Demostraremos luego que esta estructura en S es la única posible que hace que S sea una subvariedad de M. Con lo cual, si imponemos que S sea subespacio, admite una única estructura de subvariedad (necesariamente regular). Pero S podría admitir otras topologías respecto a las cuales resulte variedad topológica y, por lo tanto, podría ser subvariedad (aunque no subvariedad regular). Para que esto quede claro, habrá que introducir una noción más general de subvariedad.

El borde de una variedad con borde es una subvariedad regular.

5.3.3 Conjuntos de nivel

Las subvariedades regulares se pueden expresar localmente como el gráfico de una función, como también como el conjunto de ceros de una función (cartas preferenciales). Dada una transformación $\Phi : M \to N$ y un punto $c \in N$, decimos que $\Phi^{-1}(c) \subset M$ es un *conjunto de nivel de* Φ. Todo subconjunto cerrado de una variedad M es el conjunto de ceros ($N = \mathbb{R}$, $c = 0$) de alguna función (suave). Para poder relacionar los conceptos de conjunto de nivel y de subvariedad es necesario imponer alguna condición adicional.

Teorema 5.3.6 (el conjunto de nivel de una función de rango constante)**.** *Sean M y N variedades diferenciales. Sea $\Phi : M \to N$ una transformación suave de rango constante r. Cada conjunto de nivel $\Phi^{-1}(c) \subset M$ es una subvariedad propia de codimensión r en M.*

Demostración. Sea $m = \dim M$ y sea $n = \dim N$. Por el teorema del rango constante, para cada punto $p \in M$ existe una carta (U, φ) para M en p y existe una carta (V, ψ) para N en $\Phi(p) = c$ tales que $\Phi(U) \subset V$ y

$$\widehat{\Phi}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) .$$

En particular, el *conjunto* $S = \Phi^{-1}(c)$ verifica la condición de ser localmente un k-feta con $k = m - r$, es decir, una feta de codimensión r. Por el teorema 5.3.5, S tiene estructura de subvariedad regular de M. Como Φ es continua, S es cerrada en M y, por lo tanto, subvariedad regular propia. □

Un caso particular de esto se da cuando Φ es una submersión. En concordancia con el hecho de que las transformaciones de rango constante son localmente como transformaciones lineales, el resultado anterior es análogo al resultado de Álgebra lineal que dice que, dada una transformación lineal $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ sobreyectiva (o $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de rango r), el núcleo $\ker(L)$ es un subespacio de codimensión r, determinado por un sistema de r ecuaciones lineales independientes igualadas a cero. En el caso de variedades, si $\Phi : M \to N$ es una submersión, entonces $\Phi^{-1}(c)$ –el análogo del núcleo de una t.l.– es una subvariedad de codimensión $n = \dim N$.

5.3.4 Puntos y valores regulares

Dada una transformación suave $\Phi : M \to N$, decimos que $p \in M$ es un *punto regular*, si la transformación lineal $\mathrm{d}_p\Phi : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{\Phi(p)}N$ es sobreyectiva. En otro caso, decimos que p es un *punto crítico.* El subconjunto de M de puntos regulares es igual al subconjunto en donde Φ tiene rango máximo. Este subconjunto es abierto en M y, por lo tanto, una subvariedad regular. Un punto $c \in N$ se dice *valor regular* de Φ, si todo punto perteneciente a $\Phi^{-1}(c)$ es un punto regular. Si al menos un punto de la preimagen es punto crítico, entonces decimos que c es un valor crítico de Φ. Un *conjunto de nivel regular* de Φ es el conjunto de nivel correspondiente a un valor regular de Φ.

Corolario 5.3.7 (teorema del valor regular)**.** *Sea $\Phi : M \to N$ una transformación suave entre variedades diferenciales* sin *borde. Todo conjunto de nivel regular de Φ es una subavariedad regular propia de M. Su codimensión es igual a la dimensión del codominio N.*

Demostración. Si $c \in N$ es un valor regular y $S = \Phi^{-1}(c)$ es el conjunto de nivel correspondiente, entonces $S \subset M'$, donde $M' \subset M$ es la subvariedad regular abierta comformada por los puntos p en los que $\mathrm{d}_p\Phi$ es sobreyectivo. La restricción $\Phi|_{M'} : M' \to N$ es una submersión, con lo cual, por el teorema 5.3.6, $\Phi^{-1}(c) \subset M'$ es una subvariedad regular. Pero $\iota_S : \Phi^{-1}(c) \to M$ es igual a la composición $\iota_{M'} \circ \iota'_S : S \to M' \to M$. Tanto

ι'_S como $\iota_{M'}$ son embeddings. Entonces la inclusión de S en M lo es, también. Como $\Phi^{-1}(c) \subset M$ es cerrada, por continuidad, $S = \Phi^{-1}(c)$ es una subvariedad regular propia de M. Como $\operatorname{codim}(S, M') = \operatorname{codim}(S, M)$, porque $M' \subset M$ es abierto, se deduce que $\operatorname{codim}(S, M) = \dim(N)$. □

Proposición 5.3.8. *Sea $S \subset M$ un subconjunto de una variedad diferencial M de dimensión m. Entonces S es una subvariedad regular de dimensión k, si y sólo si, para cada punto $p \in S$, es posible hallar una submersión $\Phi : U \to \mathbb{R}^{m-k}$ definida en un abierto U* de *M tal que $\Phi^{-1}(c) = S \cap U$ para algún valor $c \in \mathbb{R}^{m-k}$.*

Esto es casi una reformulación del criterio local de las fetas.

Demostración. Si $S \subset M$ es una subvariedad regular de dimensión k de M y $p \in S$, podemos hallar una carta (U, φ) para M tal que $S \cap U$ es una feta de dimensión k en U. Si $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$, entonces $S \cap U = \{x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}$. Si definimos $\Phi : U \to \mathbb{R}^{m-k}$ por

$$\Phi(x^1, \ldots, x^m) = (x^{k+1}, \ldots, x^m) ,$$

la proyección en las *últiimas* coordenadas, entonces $S \cap U = \Phi^{-1}(0)$. Recíprocamente, si $S \subset M$ es un subconjunto de M que verifica que, para cada punto, existe una función Φ como en el enunciado y $p \in S$, entonces podemos elegir un abierto $U \subset M$ y una submersión $\Phi : U \to \mathbb{R}^{m-k}$, de manera que $S \cap U = \Phi^{-1}(c)$ para cierto valor $c \in \mathbb{R}^{m-k}$. Hay dos maneras de concluir: o bien usamos esto para definir una carta preferencial para S en M en p, o bien, por el teorema 5.3.5, concluimos que $S \cap U$ es una subvariedad regular de U. En cualquier caso, $S \cap U$ es localmente en U una feta de codimensión $m - k$. Como $U \subset M$ es abierto, concluimos que S es localmente en M una feta de codimensión $m - k$ (pues $\operatorname{codim}(U, M) = 0$), o sea que S es una subvariedad regular de dimensión k en M. □

No sabemos, *a priori*, que existan cartas preferenciales para S en M, pero, por el teorema del conjunto de nivel de una submersión, sabemos que, para cada punto $p \in S$, existe un abierto U de M tal que $p \in U$ y que $S \cap U$ es subvariedad regular de U. Por lo tanto, existen cartas preferenciales para $S \cap U$ en U. Como U es abierto en M, podemos concluir que existen cartas preferenciales para S en M cerca de cada punto $p \in S$ y que, por lo tanto, S es una subvariedad regular de M.

5.3.5 Subvariedades inmersas

Una *subvariedad inmersa* de una variedad (diferencial, topológica) M es un subconjunto S con una topología con respecto a la cual resulta una variedad topológica y una estructura diferencial con respecto a la cual $\iota_S : S \to M$ es una inmersión (suave, continua).

Proposición 5.3.9. *Sea M una variedad diferencial y sea N una variedad diferencial sin borde. Sea $F : N \to M$ una inmersión suave e inyectiva y sea $S = F(N) \subset M$. Existen una única topología y una única estructura diferencial en S con respecto a las cuales $S \subset M$ es una subvariedad inmersa y $F| : N \to S$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Como queremos que F sea un difeorfismo entre N y S, en particular, la topología en S deberá ser tal que N y S sean homeomorfos vía F. Definimos una topología en S trasladando la topología de N: un subconjunto $U \subset S$ es abierto, si y sólo si $F^{-1}(U)$ es abierto en N. Esto determina una topología en S y es la única con respecto a la cual F puede ser un homeomorfismo. De la misma manera, con respecto a la estructura diferencial, cubrimos a S con los pares $(F(U), \varphi \circ F^{-1})$, donde (U, φ) es una carta compatible con la estructura de N. Si queremos que F sea un difeomorfismo, todas estas cartas deben pertenecer a la estructura de S. Estas cartas en N forman un atlas compatible y, por lo tanto, determinan una estructura diferencial en S. Finalmente, resta ver que, con esta topología y esta estructura suave, $\iota_S : S \to M$ es una inmersión. Pero $\iota_S = F \circ (F|^{-1})$, $F|$ es un difeomorfismo y F es una inmersión. En particular, la inclusión es composición de inmersiones suaves y, en consecuencia, inmersión suave, también. □

Observación 5.3.1. De la proposición 5.1.1 podemos deducir los siguientes criterios para determinar si una subvariedad inmersa es regular: *(a)* $\operatorname{codim}(S, M) = 0$; *(b)* $\iota_S : S \hookrightarrow M$ es propia; *(c)* S es compacta. En cualquiera de estos casos, S es una subvariedad regular. Además, usando el teorema 5.1.2, que dice que las inmersiones son localmente embeddings, deducimos que toda subvariedad inmersa es localmente regular. Precisamente, si M es una variedad diferencial y $S \subset M$ es una subvariedad inmersa, entonces, para cada punto $p \in S$, existe un abierto V *de* S, tal que $p \in V$ y $V \subset M$ es una subvariedad regular.

Terminamos esta sección definiendo el concepto de *parametrización* de una subvariedad. Sea M una variedad diferencial. Sea $S \subset M$ una subvariedad inmersa de dimensión k. Una función

$$X : U \subset \mathbb{R}^k \to M$$

se dice *parametrización (local)* de S, si $X : U \to M$ es continua en M, $U \subset \mathbb{R}^k$ es abierto, la imagen $X(U) \subset S$ es abierta en S y $X| : U \to X(U)$ es un homeomorfismo ($X| : U \to S$ es subespacio abierta). Si $X|$ es difeomorfismo, decimos que X es *parametrización local suave.*

Todo punto de una subvariedad inmersa está en la imagen de una parametrización local suave y toda parametrización da lugar a una carta.

Proposición 5.3.10. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad inmersa de dimensión k. Sea $U \subset \mathbb{R}^k$ un subconjunto abierto. Entonces una función $X : U \to M$ es una parametrización local suave de S, si y sólo si existe una carta (V, ψ) para S tal que $X = \iota_S \circ \psi^{-1}$.*

5.4 El tangente a una subvariedad

5.4.1 Restricción y correstricción de transformaciones

Ha surgido, en algunas ocasiones, la necesidad de restringir o de correstringir una transformación suave. Empecemos, pues, esta sección estudiando el comportamiento de una transformación suave al restringir su dominio o su codominio. En particular, veamos algunos casos en los que la suavidad de la transformación se preserva.

Teorema 5.4.1 (restricción de dominio)**.** *Sea $F : M \to N$ una transformación suave. Sea $S \subset M$ una subvariedad (inmersa o regular). Entonces $F|_S : S \to N$ es suave.*

Demostración. La restricción de F a la subvariedad S es una composición de funciones suaves: $F|_S = F \circ \iota_S$. □

Teorema 5.4.2 (correstricción del codominio)**.** *Sea M una variedad diferencial* sin *borde y sea $F : N \to M$ una transformación suave. Sea $S \subset M$ una subvariedad (inmersa o regular) tal que $F(N) \subset S$. Si $F|^S : N \to S$ es continua, entonces es suave.*

Demostración. Sean $p \in N$ y $q = F(p) \in S$. Sea $V \subset S$ un abierto tal que $q \in V$ y tal que $\iota_V : V \to M$ sea embedding. Como $V \subset M$ es una subvariedad regular, existe una carta preferencial (W, ψ) para V en M en q. A partir de esta carta preferencial, definimos una carta para V: sea $V_0 = V \cap W$ y sea $\psi_0 = \pi \circ \psi|_V = \pi \circ \psi \circ \iota_V$, donde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es la proyección en las primeras k coordenadas. El par (V_0, ψ_0) es una carta para V en q. Como ι_V es continua, $V_0 = \iota_V^{-1}(W)$ es abierta en V. Como V es abierto en S, V_0 es abierto en S. Asumiendo que la correstricción $F| : N \to S$ es continua, la preimagen $U = F^{-1}(V_0)$ es abierta en N. Además, $p \in U$. Sea (U_0, φ) una carta para N en p con $U_0 \subset U$. Entonces $\psi_0 \circ F| \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_0) \to \psi_0(v_0)$ es igual a

$$\psi_0 \circ F| \circ \varphi^{-1} = \pi \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \ .$$

Como $F : N \to M$ es suave, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es suave y, por lo tanto, $\psi_0 \circ F| \circ \varphi^{-1}$ es suave. En definitiva, la correstricción $F| : N \to S$ es suave. □

Una subvariedad inmersa $S \subset M$ se dice *débilmente regular* (?), si, para toda transformación suave $F : N \to M$ tal que $F(N) \subset S$, la correstricción $F|^S : N \to S$ es suave. Vale que

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subvariedades} \\ \text{regulares} \end{array} \right\} \supsetneq \left\{ \begin{array}{c} \text{subvariedades} \\ \text{débilmente regulares} \end{array} \right\} \supsetneq \left\{ \begin{array}{c} \text{subvariedades} \\ \text{inmersas} \end{array} \right\}$$

Por ejemplo, la lemniscata es inmersa pero no débilmente regular y la curva irracional en el toro es débilmente regular pero no regular.

Teorema 5.4.3 (unicidad de la estructura en una subvariedad regular)**.** *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad regular. La topología de subespacio y la estructura diferencial dad son las única con respecto a las cuales S es una subvariedad regular de M.*

Demostración. Sea $\tilde{S}$ una variedad diferencial obtenida a partir del conjunto S imponiendo una topología y una estructura diferencial posiblemente distintas. Sean $\iota = \iota_S : S \to M$ e $\tilde{\iota} = \iota_{\tilde{S}} : \tilde{S} \to M$ las respectivas inclusiones. Supongamos, además, que $\tilde{\iota}$ es una inmersión. Como ι es un embedding e $\tilde{\iota}(\tilde{S}) \subset S$, podemos concluir que la correstricción $\tilde{\iota}| : \tilde{S} \to S$ es suave (porque es continua). Entonces,

$$\begin{aligned} \iota \circ (\tilde{\iota}|) &= \tilde{\iota} \quad \text{y} \\ \mathrm{d}_p\iota \cdot \mathrm{d}_p(\tilde{\iota}|) &= \mathrm{d}_p\tilde{\iota} : \mathrm{T}_p\tilde{S} \to \mathrm{T}_pS \to \mathrm{T}_pM \ . \end{aligned}$$

Como $\mathrm{d}_p\tilde{\iota}$ es, por hipótesis, inyectivo, el diferencial $\mathrm{d}_p(\tilde{\iota}|)$ debe serlo, también. Pero esto es cierto para todo punto $p \in \tilde{S}$, con lo que $\tilde{\iota}| : \tilde{S} \to S$ es de rango constante. Como, además, $\tilde{\iota}|$ es biyectiva, el teorema global del rango **??** implica que $\tilde{\iota}|$ es difeomorfismo. Pero $\tilde{\iota}| = \mathsf{id}_S$ como función de conjuntos, con lo cual, concluimos que $\tilde{S}$ tiene exactamente *la misma* topología y *la misma* estructura diferencial que S. □

Observación 5.4.1. Por el teorema 5.3.5 toda subvariedad regular verifica localmente la propiedad de ser k-feta para algún entero $k \leq n$. A su vez, esta *estructura de k-feta* en el *subconjunto* S determina una estructura de subvariedad regular de M. Podemos concluir, por el teorema anterior, que estas dos estructuras coinciden. Además, si un subconjunto verifica la propiedad de ser k-feta localmente, entonces tiene estructura de subvariedad regular y dicha estructura es única.

Teorema 5.4.4. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad (inmersa). Fijada la topología de S, existe una única estructura diferencial con respecto a la cual $S \subset M$ es subvariedad.*

Demostración. El único obstáculo en la demostración en el caso en que S fuere una subvariedad meramente inmersa es que no queda garantizado que la correstricción $\tilde{\iota}| : \tilde{S} \to S$ sea suave. Pero, si asumimos que las topologías coinciden, como $\tilde{\iota}| = \mathsf{id}_S$, concluimos que es continua y, por lo tanto, suave. □

Teorema 5.4.5. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad débilmente regular. Entonces la topología y la estructura suave en S dadas son las únicas respecto de las cuales $S \subset M$ es una subvariedad (inmersa).*

Demostración. La demostración de este resultado es análoga a la de 5.4.3, la única diferencia está en la justificación de que la correstricción $\tilde{\iota}| : \tilde{S} \to S$ es suave. En aquel caso, esto se debía a que S era regular e $\tilde{\iota}|$ era la correstricción a S, un subespacio, de una transformación suave que resulta continua y, en consecuencia, suave. En este caso, esto queda garantizado porque S se supone débilmente regular. □

5.4.2 Extensión de funciones

Dada una subvariedad $S \subset M$, hemos dado dos definiciones de lo que significa que una función definida en S sea suave: por un lado, podemos decir que una función $f : S \to \mathbb{R}$ es suave, si es suave respecto de la estructura diferencial en S, es decir, si es suave en sentido usual tomando coordenadas; por otro lado, podemos decir que f es suave, si para cada punto $p \in S$ existe un abierto U de M tal que $p \in U$ y una extensión suave $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$, es decir, si f es suave en S como subconjunto de M. Usaremos la notación

$C^\infty(S)$ para referirnos a las funciones suaves en S en tanto variedad diferencial. En el caso de subvariedades regulares, las dos nociones coinciden. Notemos que, en el caso de las subvariedades que son meramente inmersas, también es posible hacer coincidir ambas nociones, si nos restringimos a un entorno *de la subvariedad* suficientemente pequeño alrededor de cada punto.

Lema 5.4.6. *Sea M una variedad diferencial. Sea $S \subset M$ una subvariedad y sea $f \in C^\infty(S)$.* (a) *Si S es subvariedad regular, entonces existen un entorno $S \subset U \subset M$ y una función suave $\tilde{f} \in C^\infty(U)$ tal que $\tilde{f}|_S = f$.* (b) *Si, además, S es cerrada (regular propia), entonces se puede tomar $U = M$.*

Demostración. Supongamos que $\dim S = k$. Para cada $p \in S$ existe una carta (U_p, φ_p) para M centrada en p tal que $S \cap U_p = \{x^{k+1} = 0, \ldots, x^n = 0\}$. Sea $U = \bigcup_p U_p$. Entonces $S \subset U$ y U es abierto en M. Para cada punto $p \in S$, definimos una función $f_p : U_p \to \mathbb{R}$:

$$f_p(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) \;=\; f(x^1, \ldots, x^k) \;.$$

Explícitamente, $f_p(q) = f(\varphi^{-1}(\pi \circ \varphi(q)))$, donde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es la proyección en las primeras k coordenadas. Cada función f_p es suave y, si $q \in S \cap U_p$, entonces $f_p(q) = f(q)$. Para pegar estas funciones y así definir una función en U, usamos particiones de la unidad. El abierto U es una variedad (diferencial) y $\{U_p\}_{p\in S}$ es un cubrimiento por abiertos. Entonces existe una partición suave de la unidad subordinada al cubrimiento, $\{\psi_p\}_p$. Para cada punto $p \in S$, el producto $\psi_p f_p$ está definido únicamente en U_p, pero $V_p = \{\psi_p \neq 0\}$ es abierto y $\overline{V_p} \subset U_p$. No es cierto *a priori* que $\psi_p(p) \neq 0$, pero podríamos tener un poco más de cuidado en la definición del cubrimiento como para que así sea (por ejemplo, tomando bolas coordenadas regulares dentro de cada U_p y una partición subordinada al cubrimiento formado por las bolas coordenadas que contienen a las bolas coordenadas regulares). De todas maneras, podemos extender el producto $\psi_p f_p$ a todo U por cero fuera de $\mathsf{sop}(\psi_p)$. Esta función sigue siendo suave. Sea, entonces

$$\tilde{f} \;=\; \sum_{p\in S} \psi_p f_p \;.$$

La función $\tilde{f}$ está definida en todo el abierto U y es suave. Si $q \in S$,

$$\tilde{f}(q) \;=\; \sum_{p\in S} \psi_p(q) f(q) \;=\; f(q) \;.$$

Entonces $\tilde{f} \in C^\infty(U)$ y $\tilde{f}|_S = f$.

Si asumimos que S es subvariedad regular propia, entonces $U_0 = S \subset M$ es un subconjunto cerrado y $\{U_p\}_{p\in S} \cup \{U_0\}$ es un cubrimiento de M por abiertos. Si $\{\psi_p\}_p \cup \{\psi_0\}$ es una partición suave subordinada a este cubrimiento, entonces, definiendo $\tilde{f} = \sum_{p\in S} \psi_p f_p$, como antes, pero sin incluir la función ψ_0, obtenemos una función suave definida en $U = U_0 \cup \bigcup_{p\in S} U_p = M$ que extiende a f. $\square$

En general, si S no es cerrada en M, no es posible extender una función arbitraria $f \in C^\infty(S)$ a toda la variedad: por ejemplo, si $S = (-1, 0) \cup (0, 1)$ y $M = \mathbb{R}^1$, entonces la función f que toma el valor -1 en $(-1, 0)$ y el valor 1 en $(0, 1)$, es suave, pero no se puede extender de manera suave a $\mathbb{R}^1$. De hecho, no se puede extender de manera continua. Si existe una extensión continua, ¿existe una extensión suave? Por otro lado, si S es una subvariedad inmersa, las funciones suaves en S, en tanto variedad, no son, en general, suaves como funciones definidas en el subconjunto $S \subset M$. Si $f \in C^\infty(S)$ y $f : S \to \mathbb{R}$ es continua en S como subespacio de M, ¿es f suave en S como subconjunto de M?

Dejamos de lado estas preguntas. Las propiedades enunciadas en el lema 5.4.6 son, en realidad, equivalencias.

Proposición 5.4.7. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad.* (a) *Si toda función $f \in C^\infty(S)$ se puede extender a una función suave definida en algún abierto $U \subset M$ tal que $S \subset U$, entonces S es subvariedad regular.* (b) *Si toda función $f \in C^\infty(S)$ se puede extender de manera suave a toda la variedad M, entonces S es una subvariedad propia.*

Demostración. Supongamos que S no es regular. Sea $p \in S$ un punto para el cual no existe una carta preferencial en M. Aun así, existe un abierto $V \subset S$ tal que V es una subvariedad regular de M. Como S es una variedad diferencial, existe una partición de la unidad $\{\psi_0, \psi_1\}$ para S subordinada al cubrimiento $\{S \smallsetminus \{p\}, V\}$. En particular, $f = \psi_1|_V$ es suave en V y $f(p) = 1$. Como V es una subvariedad regular de M, existe un abierto $U \subset M$ tal que $V \subset U$ y existe una función $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ suave tal que $\tilde{f}|_V = f$. Pero, en $U \cap S$, no es cierto que $\tilde{f}$ coincida con ψ_1: como p no admite una carta preferencial, si $\{U_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de entornos de p en M con $U_{n+1} \subset U_n \subset U$ y $\bigcap_n U_n = \{p\}$, entonces existe

$$y_n \in (S \cap U_n) \smallsetminus V \ .$$

Evaluando $\tilde{f}$ en estos puntos, por continuidad de $\tilde{f}$ en M, debe valer $\tilde{f}(y_n) \to \tilde{f}(p) = f(p) = 1$, pero $\psi_1(y_n) = 0$ para todo $n \geq 1$. En definitiva, la función ψ_1 no se puede extender de manera suave (continua) a un abierto que contenga a S, pues, si se pudiese, dicha extensión debería tomar valor 1 en p y 0 en puntos arbitrariamente cerca (en M) de p.

Supongamos que $S \subset M$ es una subvariedad (inmersa o regular), pero que no es cerrada como subconjunto de M. Entonces existe una sucesión de puntos $y_n \in S$ y un punto $y \in M \smallsetminus S$ tales que $y_n \to y$ en la topología de M y tales que $\{y_n\}_n$ es un subconjunto cerrado en S. Para cada entero $n \geq 1$ sea $f(y_n) = n$. Como $\{y_n\}_n$ es cerrado en S, podemos extender f de manera suave a S (por ejemplo, tomando entornos V_n de cada punto y_n de manera que $y_m \notin V_n$, si $m \neq n$, y una partición de la unidad subordinada a estos conjuntos y a $S \smallsetminus \{y_n\}_n$). Pero no hay manera de extender f a una función suave en y (ni siquiera de manera continua). $\square$

5.4.3 El espacio tangente a una subvariedad

Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad. Dado que la inclusión $\iota_S : S \to M$ es una inmersión, en cada punto $p \in S$, el diferencial $\mathrm{d}_p\iota : \mathrm{T}_pS \to \mathrm{T}_pM$ es una transformación lineal inyectiva. Ya vimos en alguna ocasión cómo el diferencial permite identificar el espacio tangente a un abierto en un punto dado. Aquella identificación funciona de manera general en el contexto de subvariedades. Sea $v \in \mathrm{T}_pS$ un vector tangente a S en p y sea $\tilde{v} = \mathrm{d}_p\iota$ su imagen en T_pM. En tanto derivación, dada $f \in C^\infty(M)$,

$$\tilde{v}\, f \;=\; \mathrm{d}_p\iota(v)\, f \;=\; v(f \circ \iota) \;=\; v(f|_S)\ .$$

Una forma alternativa de caracterizar el espacio tangente T_pS cuando S es una subvariedad arbitraria como subespacio de T_pM es en términos de curvas suaves. Sabemos que todo vector tangente a una variedad es igual a la velocidad de alguna curva. Supongamos, entonces, en primer lugar, que $\gamma : J \to M$ es una curva suave con origen en p tal que $\gamma(J) \subset S$ y $\eta = \gamma| : J \to S$ es suave, también. Entonces, tomando diferenciales,

$$\dot{\gamma}(0) \;=\; \mathrm{d}_p\iota(\dot{\eta}(0))\ ,$$

de lo que se deduce que el vector tangente $\dot{\gamma}(0) \in \mathrm{T}_pM$ pertenece a la imagen del diferencial $\mathrm{d}_p\iota$. Recíprocamente, si $v \in \mathrm{T}_pS$ y $\eta : J \to S$ es una curva suave con origen en p y velocidad $\dot{\eta}(0) = v$, entonces $\gamma = \iota \circ \eta : J \to M$ es suave y $\dot{\gamma}(0) = \mathrm{d}_p\iota(v) = \tilde{v}$. En definitiva, en términos de curvas, un vector v tangente a M en p *es tangente a la subvariedad* S, si y sólo si existe una curva suave en M cuya imagen esté contenida en S, que sea suave como curva en S y con velocidad v.

Proposición 5.4.8. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad. Sea $p \in S$ y sea $V \subset S$ un entorno de p que es subvariedad regular de M. Sea (U, φ) una carta para M en p tal que $V \cap U = \{x^{k+1} = 0, \ldots, x^n = 0\}$. Entonces*

$$\mathrm{T}_pS \;=\; \mathrm{T}_pV \;=\; \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \right\rangle \subset \mathrm{T}_pM\ .$$

Demostración. Sea $v \in \mathrm{T}_pS$. Entonces

$$\begin{aligned} v \;&\equiv\; \mathrm{d}_p\iota(v) \;=\; \mathrm{d}_pv(x^i)\, \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\ &=\; v(x^i|_{V\cap U})\, \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \;=\; \sum_{i=1}^{k} v(x^i|_{V\cap U})\, \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\ . \end{aligned}$$

Con lo cual $\mathrm{T}_pS \subset \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \right\rangle$. Podemos concluir sabiendo que $\dim \mathrm{T}_pS = k$. Otra manera de concluir que los subespacios coinciden es usando curvas: si $w = w^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ con $w^{k+1} = \cdot w^n = 0$, entonces, tomamos $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = w$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño de manera que $\gamma(J) \subset U$. Precisamente, elegimos $\gamma(t) = \varphi^{-1}(w^1t, \ldots, w^kt, 0, \ldots, 0)$. En particular, γ tiene imagen en V y, como V es una subvariedad regular de M, γ es suave como curva en V. En definitiva, $w \in \mathrm{T}_pS$. $\square$

En el caso en que $S \subset M$ sea una subvariedad regular, el subespacio $\mathrm{T}_pS \subset \mathrm{T}_pM$ está caracterizado como el conjunto de ceros de ciertas ecuaciones. Hay, al menos, dos maneras de interpretar esta afirmación.

Proposición 5.4.9. *Se M una variedad diferencial (sin borde) y sea $S \subset M$ una subvariedad regular. Sea $p \in S$. En tanto subespacio de T_pM,*

$$\mathrm{T}_pS = \{v \in \mathrm{T}_pM \,:\, v\,f = 0 \forall f \in C^\infty(M),\, f|_S = 0\} \ .$$

Proposición 5.4.10. *Sea M una variedad diferencial (sin borde) y sea $S \subset M$ una subvariedad regular. Si $\Phi : U \to N$ es una transformación suave definida en un abierto U de M tal que $S \cap U = \Phi^{-1}(c)$, para cierto valor regular $c \in N$, entonces, para todo punto $p \in S \cap U$,*

$$\mathrm{T}_pS = \ker\left(\mathrm{d}_p\Phi : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{\Phi(p)}N\right) \ .$$

Demostración de 5.4.9. Sea $v \in \mathrm{T}_pS$. Si $f \in C^\infty(M)$ es una función suave que se anula en S, entonces

$$v\,f \equiv v(f|_S) = 0 \ .$$

Recíprocamente, dado un vector tangente $w \in \mathrm{T}_pM$ que verifica $w\,f = 0$ para toda función suave $f \in C^\infty(M)$ tal que $f|_S = 0$, entonces podemos demostrar que $w \in \mathrm{T}_pS$. Para ver que esto es así, elegimos una carta (U, φ) para M en p tal que $S \cap U = \{x^{k+1} = 0, \ldots, x^n = 0\}$. (Aquí podríamos tomar, en lugar de S, un entorno V de p en S que sea subvariedad regular de M y una carta (U, φ) tal que $V \cap U$ sea el conjunto en donde las últimas coordenadas se anulan. Esto es válido incluso en el caso de una subvariedad meramente inmersa, pero más adelante se requerirá que S sea subvariedad regular). Por 5.4.8, sabemos que $w \in \mathrm{T}_pS$, si y sólo si, con respecto a las funciones coordenadas, $w(x^{k+1}) = \cdots = w(x^n) = 0$. Vamos a ver que esta última condición se cumple. Sea ψ una función chichón con soporte en U y que vale 1 en un entorno (de M) de p (por ejemplo, una de las dos funciones de alguna partición suave de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U, M \smallsetminus \overline{U'}\}$, donde U' es un entorno de p en M cuya clausura está contenida en U). Para cada $j > k$, la función $\psi(x)x^j \equiv \psi \cdot \varphi^j$ es suave en U y tiene soporte contenido en U. Si llamamos f a la extensión de esta función por cero fuera de U, entonces $f \in C^\infty(M)$ y $f|_S = 0$ (esto no es cierto, en general, si S no es regular). Así,

$$0 = w\,f = w^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = v^j$$

y concluimos que $w \in \mathrm{T}_pS$. $\square$

Demostración de 5.4.10. Si $S \cap U = \Phi^{-1}(c)$ para algún punto $c \in N$, entonces $\Phi|_{S\cap U}$ toma constantemente el valor c. Así,

$$\mathrm{d}_p\Phi \cdot \mathrm{d}_p\iota = 0$$

en tanto transformación lineal de T_pS en $\mathrm{T}_{\Phi(p)}N$. Es decir,

$$\operatorname{img} \mathrm{d}_p\iota \subset \ker \mathrm{d}_p\Phi \ .$$

Pero, como $\mathrm{d}_p\Phi$ es suryectivo,

$$\begin{aligned}\dim\bigl(\ker \mathrm{d}_p\Phi\bigr) &= \dim \mathrm{T}_pM - \mathrm{T}_{\Phi(p)}N = \dim M - \dim N \\ &= \dim S = \dim \mathrm{T}_pS = \dim\bigl(\operatorname{img} \mathrm{d}_p\iota\bigr) \ .\end{aligned}$$

En definitiva, $\ker \mathrm{d}_p\Phi = \operatorname{img} \mathrm{d}_p\iota$. □

Observación 5.4.2. Si la función que define localmente a S como conjunto de nivel regular es de la forma $\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^k) : U \to \mathbb{R}^k$, entonces $w \in \mathrm{T}_pM$ pertenece al núcleo $\ker \mathrm{d}_p\Phi$, si y sólo si $w\,\Phi^j = 0$ para cada una de las funionces que componen a Φ: si $\mathrm{d}_p\Phi(w) = 0$, entonces

$$w\,\Phi^j = w(y^j \circ \Phi) = \mathrm{d}_p\Phi(w)\, y^j = 0$$

para todo $j \in [\![1, k]\!]$ y, si w se anula en las funciones $\Phi^j = y^j \circ \Phi$, entonces

$$\mathrm{d}_p\Phi(w) = \mathrm{d}_p\Phi(w)(y^j)\, \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{\Phi(p)} = w(y^j \circ \Phi)\, \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{\Phi(p)} = 0 \ .$$

Observación 5.4.3. Supongamos que $S \subset M$ está dada como el conjunto de nivel de una transformación $\Phi : M \to N$ de rango constante, no necesariamente una submersión. Aun así, sabemos, por el teorema del reango 4.4.1, que $\operatorname{codim} S = \mathsf{rg}\ (\Phi)$. Pero $\operatorname{codim}(\ker \mathrm{d}_p\Phi)$ es igual al rango de $\mathrm{d}_p\Phi$. Entonces T_pS y $\ker \mathrm{d}_p\Phi$ tienen la misma dimensión. Por otro lado, sigue siendo cierto, en este caso también, que $\mathrm{T}_pS \subset \ker \mathrm{d}_p\Phi$. En definitiva, deben coincidir.

Ya hemos mencionado que el borde de una variedad con borde es una subvariedad regular. Sea M una variedad con borde $\partial M \neq \varnothing$. De acuerdo con las observaciones realizadas al comienzo de esta parte, podemos, en esta situación también, identificar el tangente a ∂M en un punto p con un subespacio de T_pM vía el diferencial de la inclusión $\iota_{\partial M} : \partial M \to M$ o en términos de curvas suaves. Las identificaciones que hacen uso de coordenadas, por otro lado, funcionaron porque teníamos a nuestra disposición las cartas preferenciales, que, en el caso de una variedad con borde no están definidas. En lugar de cartas preferenciales, contamos con las cartas de borde. Usando estas cartas, podemos intentar repetir los argumentos de las demostraciones de los resultados de esta parte.

Sea M una variedad con borde $\partial M \neq \varnothing$ y sea $p \in \partial M$. Sea $\iota = \iota_{\partial M}$ la includión del borde en la variedad. Si $v \in \mathrm{T}_p\partial M$, entonces, como antes, si llamamos $\tilde{v} = \mathrm{d}_p\iota(v)$, vale que

$$\tilde{v}\, f = v(f \circ \iota) = v(f|_{\partial M})$$

para toda función $f \in C^\infty(M)$. En coordenadas,

$$\tilde{v} = v^i\, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

donde $v^i = \tilde{v}(x^i) = v(x^i|_{\partial M})$. En particular, como $x^n|_{\partial M} = 0$, debe valer que $v^n = 0$. Entonces

$$\mathrm{T}_p\partial M \subset \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right\rangle = \left\{ w = w^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in \mathrm{T}_pM \,:\, w^n = 0 \right\} .$$

Ahora, como en la demostración de 5.4.8, hay varias maneras de concluir que estos subespacios son iguales. Podemos usar la dimensión: $\dim(\mathrm{T}_p\partial M) = n-1$; podemos usar la curva $\eta(t) = (w^1 t, \ldots, w^{n-1}t)$ en ∂M con origen en p, que es suave y, al componer con la inclusión, $\gamma = \iota \circ \eta$ es suave en M, tiene origen en p y velocidad $\dot{\gamma}(0) = w$. También podemos recurrir al hecho de que, como $\varphi(\partial M \cap U) = \partial\mathcal{H}^n \cap \varphi(U)$, localmente contamos con una descripción de ∂M como conjunto de nivel regular de una función suave: $x^n : U \to \mathbb{R}$ y $\partial M \cap U = \{x^n = 0\}$.

Esta descripción del tangente al borde de una variedad nos permite, también, descomponer el tangente a la variedad misma. Sea M una variedad diferencial con borde $\partial M \neq \varnothing$ y sea p un punto del borde. Sea (U, φ) una carta de borde centrada en p. En coordenadas, $w \in \mathrm{T}_pM$ se escribe como $w = w^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ y $w \in \mathrm{T}_p\partial M$, si y sólo si $w^n = 0$. El resto de los vectores tangentes, aquellos con $w^n \neq 0$, se dividen en dos clases: aquellos con $w^n > 0$ y aquellos con $w^n < 0$. Para ver que esta división no depende de la carta de borde elegida, usamos la descripción de los vectores tangentes como velocidades de curvas contenidas en la variedad. Supongamos que $w \in \mathrm{T}_pM$ es tal que $w^n < 0$, entonces la curva $\gamma(t) = (w^1 t, \ldots, w^{n-1}t, w^n t)$ definida en $(-\epsilon, 0]$ es una curva suave en M, $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = w$. Recíprocamente, si $w \in \mathrm{T}_pM$ es tal que existe una curva suave $\gamma : (-\epsilon, 0] \to M$ con origen en p y velocidad w, entonces en las coordenadas dadas, como en cualquier otra carta,

$$\begin{aligned} w^n &= \dot{\gamma}(0)(x^n) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 (x^n \circ \gamma) \\ &= \lim_{t\to 0,\, t<0} \frac{\gamma^n(t) - \gamma^n(0)}{t} < 0 , \end{aligned}$$

pues $\gamma^n(0) = 0$, $t < 0$ y $\gamma^n(t) > 0$. Análogamente, $w^n > 0$, si y sólo si existe una curva suave $\gamma : [0, \epsilon) \to M$ con origen en p y velocidad w.

Proposición 5.4.11. *Sea M una variedad diferencial y sea $p \in \partial M$. Sea (U, φ) una carta de borde para M centrada en p y sea $w \in \mathrm{T}_pM$ un vector tangente a M en p. Entonces* (i) *w es la velocidad de una curva suave $\gamma : (-\epsilon, 0] \to M$ con origen en p, si y sólo si, en coordenadas, $w^n = w(x^n) < 0$;* (ii) *w es la velocidad de una curva suave $\gamma : [0, \epsilon) \to M$ con origen en p, si y sólo si $w^n > 0$;* (iii) *$w \in \mathrm{T}_p\partial M$, si y sólo si $w^n = 0$, si y sólo si w es la velocidad de una curva suave con origen en p e imagen contenida en ∂M.*

Notemos que los tres conjuntos de la proposición anterior son disjuntos y que, además, si w es tal que $w^n > 0$ para alguna –y, por lo tanto, para todas– carta, entones $-w$ verifica la desigualdad opuesta. Aquellos vectores tangentes con $w^n < 0$ se dice que *apuntan* *hacia afuera* y aquellos con $w^n > 0$ que *apuntan hacia adentro.* Si w apunta hacia adentro, entonces $-w$ apunta hacia afuera.

Hemos mencionado, más arriba que ∂M se puede ver localmente como el conjunto de ceros de la función coordenada x^n (dada una carta de borde para la variedad). En general, decimos que una función $f : M \to [0, \infty)$ es una *función de definición del borde*, si $f^{-1}(0) = \partial M$ y $\mathrm{d}_p f \neq 0$ para todo $p \in \partial M$. Estas funciones son análogas a las funciones de definición de un conjunto de nivel.

Proposición 5.4.12. *Sea M una variedad diferencial con $\partial M \neq \varnothing$. Existe una función de definición del borde de M.*

Demostración. Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ un atlas compatible para M. Sea $\{\psi_\alpha\}_\alpha$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}_\alpha$. Para definir la función de definición de borde, definimos primero funciones en cada abierto U_α del cubrimiento. Si U_α es el dominio de una carta del interior, es decir, si $U_\alpha \cap \partial M = \varnothing$, entonces definimos $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ como la función suave que toma constantemente el valor 1. Si, en cambio, $U_\alpha \cap \partial M \neq \varnothing$, entonces $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta de borde. En este caso, definimos $f_\alpha = x^n$. En particular,

$$f_\alpha^{-1}(0) \;=\; \{x^n = 0\} \;=\; \partial M \cap U_\alpha \;.$$

La función ψ_α, por otro lado, tiene soporte en un cerrado contenido en U_α, entonces, si extendemos $f_\alpha \psi_\alpha$ por cero fuera de U_α, queda definida una función suave en M que se anula fuera de $\mathsf{sop}(\psi_\alpha)$. Sea $f = \sum_\alpha \psi_\alpha f_\alpha$. Entonces f está bien definida y es suave en M, porque los sumandos lo son y porque los soportes de los sumandos forman una familia localmente finita.

Si $p \in \partial M$, entonces $\psi_\alpha(p) \neq 0$ sólo si U_α interseca el borde, y, en ese caso, $f_\alpha(p) = 0$. Entonces $f(p) = 0$, si p es un punto del borde. Recíprocamente, si $p \in \operatorname{int}(M)$, entonces $f_\alpha(p) > 0$ para todo α. Como $\sum_\alpha \psi_\alpha = 1$, existe α tal que $\psi_\alpha(p) \neq 0$. Entonces $f(p) > 0$, si p es un punto del interior.

Resta verificar que el diferencial $\mathrm{d}_p f$ no es la transformación lineal (funcional lineal) nula para ningún punto $p \in \partial M$. Sea $w \in \mathrm{T}_p M$ un vector tangente que apunta hacia afuera. Como p es un punto del borde de M, si α es tal que $p \in U_\alpha$ y $\varphi_\alpha = (x^1, \ldots, x^n)$, entonces, por definición, $f_\alpha(p) = 0$ y

$$\mathrm{d}_p f_\alpha(w) \;=\; \mathrm{d}_p x^n(w) \;=\; w(x^n) \;<\; 0 \;.$$

En particular, como p pertenece a algún U_α, vale que $\mathrm{d}_p f_\alpha(w) \leq 0$ para todo α y que $\mathrm{d}_p f_\alpha(W) < 0$ estrictamente para, al menos, un α. En definitiva,

$$\mathrm{d}_p f(w) \;=\; \sum_\alpha \big(f_\alpha(p)\mathrm{d}_p\psi_\alpha(w) + \psi_\alpha(p)\mathrm{d}_p f_\alpha(w)\big) \;<\; 0 \;,$$

de lo que se deduce que $\mathrm{d}_p f$ no es la transformación cero. $\square$

Observación 5.4.4. De la última parte de la demostración anterior, se ve que, si, en lugar de tomar un vector que apunta hacia afuera, hubiésemos elegido un vector w que apunta hacia adentro, entonces $\mathrm{d}_p f(w) > 0$ estrictamente, y, si $w \in \mathrm{T}_p \partial M$, entonces $\mathrm{d}_p f(w) = 0$. En general, si f es cualquier función de definición de borde para M, entonces estas afirmaciones siguen siendo ciertas. Por ejemplo, si $w \in \mathrm{T}_p M$ apunta hacia afuera, entonces, dada una carta de borde (U, φ) centrada en p,

$$\mathrm{d}_p f(w) \,=\, w^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \,=\, w^n \frac{\partial f}{\partial x^n} \ ,$$

pues f es constantemente 0 en $\{x^n = 0\} = \partial M \cap U$. Pero $\frac{\partial f}{\partial x^n} > 0$ y $w^n < 0$. El mismo argumento, cambiando $w^n < 0$ por $w^n > 0$ o por $w^n = 0$ sigue valiendo, si, en lugar de tomar un vector que apunta hacia afuera, elegimos w apuntando hacia adentro o tangente al borde de la variedad.

Observación 5.4.5. Tanto en la demostración de 5.4.12, como en la observación 5.4.4 abusamos de la siguiente identificación entre elementos de $\mathbb{R}$ y elementos del tangente $\mathbb{R}$. Esta identificación consiste en identificar, paralelamente, el diferencial de una función $f : M \to \mathbb{R}$ con un elemento del dual de $\mathrm{T}_p M$. Concretamente, si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función suave y $w \in \mathrm{T}_p M$ es un vector tangente, entonces $w\, f \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{d}_p f(w) \in \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}$. La relación entre ambos está dada por evaluar el vector tangente a $\mathbb{R}$ en la función identidad $\mathsf{id}_\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es decir, identificamos el vector $\mathrm{d}_p f(w)$ con el número real

$$\mathrm{d}_p f(w)(\mathsf{id}_\mathbb{R}) \,=\, w(\mathsf{id}_\mathbb{R} \circ f) \,=\, w\, f \ .$$

Con esta identificación, tiene sentido decir que $\mathrm{d}_p f(w)$ es mayor, menor o igual a cero.

5.5 Subvariedades con borde

Completamos esta introducción a subvariedades considerando la posibilidad de la existencia de borde. En primer lugar, ampliamos la definición dada en la sección **??**. Sea M una variedad diferencial (topológica). Una *subvariedad con borde* de M es un subconjunto $S \subset M$ con una topología y una estructura diferencial de manera que S sea una variedad diferencial y que la inclusión $\iota_S : S \to M$ sea una inmersión (suave, topológica). Si la inclusión es un embedding, decimos que S es una *subvariedad regular*.

5.5.1 Dominios regulares

Un *dominio* o *dominio regular* en M es una subvariedad regular propia de codimensión 0 (por lo tanto, cerrada, a diferencia de un “dominio” en Ecuaciones diferenciales). Los dominios tienen la propiedad de que su interior y borde en tanto subespacio topológico de la variedad ambiente coinciden con su interior y borde, respectivamente, en tanto variedad.

Si $f \in C^\infty(M)$, entonces los conjuntos $\{f \leq b\}$ y $\{a \leq f \leq b\}$ son dominios regulares en M, siempre que a y b sean valores regulares de f. Si D es un dominio regular en M, existen una función suave $f \in C^\infty(M)$ y valores regulares a, b tales que $D = \{a \leq f \leq b\}$, o bien $D = \{f \leq b\}$. Una función con esta propiedad se dice *función de definición* para el dominio D.

5.5.2 Algunas propiedades de las subvariedades con borde

Enunciamos versiones análogas de algunas de las propiedades estudiadas anteriormente en el caso de subvariedades sin borde. Muchas de aquellas propiedades siguen siendo válidas en este contexto, pero no todas.

Sea M una variedad diferencial. Todo abierto de M es una subvariedad regular de codimensión 0 en M, pero no toda subvariedad de codimensión 0 es un subespacio abierto de M.

La imagen de un embedding $F : N \to M$ es una subvariedad regular con borde.

Una subvariedad regular se dice *propia*, si la inclusión es propia. Una subvariedad regular es propia, si y sólo si es subespacio cerrado.

Toda subvariedad con borde es localmente regular, es decir, para todo punto de la subvariedad, existe un entorno del punto que tiene estructura de subvariedad regular.

5.5.3 Fetas de borde

Sea M una variedad diferencial sin borde. Sea (U, φ) una carta de M. Una *media k-feta de U* es un subconjunto de la forma

$$\left\{(x^1, \ldots, x^n) \in U \,:\, x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n \text{ y } x^k \geq 0\right\} .$$

De un subconjunto $S \subset M$ se dice que *verifica localmente la condición de ser k-feta*, si para todo punto $p \in S$ existe una carta (U, φ) para M tal que $p \in U$ y que $S \cap U$ sea, o bien una k-feta de U, o bien una media k-feta de U. Dependiendo del caso, decimos que (U, φ) es una *carta preferencial* para S en M, o que es una *carta preferencial de borde* para S en M.

Toda subvariedad regular con borde (de una variedad diferencial sin borde) verifica localmente la condición de ser k-feta. Recíprocamente, si un subconjunto $S \subset M$ verifica la condición, entonces, con la topología de subespacio es una variedad topológica con borde de dimensión k y admite una estructura diferencial de manera que sea subvariedad regular de M.

Capítulo 6

Campos y 1-formas

6.1 Campos vectoriales

Empecemos con algunas definiciones generales y poco claras. Dada una variedad M, un *campo en* M es una función $X : M \to \mathrm{T}M$ tal que $\pi \circ X = \mathsf{id}_M$, donde $\pi : \mathrm{T}M \to M$ es la proyección canónica. Un poco más en general, si $U \subset M$ es un abierto, un campo en U es una función $X : U \to \mathrm{T}M$ tal que $\pi \circ X = \mathsf{id}_U$. Será útil poder extender esta noción a otros subconjuntos de M. Dada una variedad N y una aplicación $\psi : Q \to N$, un *campo sobre/en/a lo largo de* ψ es una función $X : Q \to \mathrm{T}N$ tal que $\pi \circ X = \psi$. De particular importancia serán los campos a lo largo de curvas $\sigma : [a, b] \to N$. Si X es, además, una función continua, entonces se dirá que X es un *campo continuo*.

Los campos en una variedad M son, en otras palabras, secciones del fibrado tangente a la variedad. Entre todas las posibles secciones del fibrado hay un *elemento distinguido*: como puntualmente, arriba de cada punto se levanta un espacio vectorial, el espacio tangente a la variedad en el punto, y cada fibra tiene un elemento distinguido, el vector cero, al fibrado tangente le corresponde la sección nula como elemento distinguido, es decir, $0 : M \to \mathrm{T}M$ que a cada punto $p \in M$ le asigna el vector $0 \in \mathrm{T}_pM$. Nos interesarán particularmente las secciones con alguna propiedad extra, como continuidad o suavidad, pero una sección no tiene por qué tener ninguna de estas propiedades. Es de esperar que la sección cero sea suave.

Un campo $X : Q \to \mathrm{T}N$ se dice *suave*, si X es una transformación suave. Esta definición presupone que Q tiene estructura de variedad. El caso de mayor interés, por el momento será el de un campo en una variedad M o en un abierto $U \subset M$. En este caso, U tiene naturalmente estructura de variedad diferencial y un campo $X : U \to \mathrm{T}M$ es, por definición, suave, si es una sección local suave del fibrado $\pi : \mathrm{T}M \to M$, o, lo que es lo mismo, una sección suave de $\pi : \mathrm{T}U \to U$. El *soporte* de un campo $X : Q \to \mathrm{T}N$ se define como la clausura del subconjunto $\{q \in Q : X_q \neq 0\}$. La igualdad $X_q = 0$ se entiende en T_pN, donde $p \in N$ es tal que $p = \pi(X_q) = \psi(q)$.

6.1.1 El espacio $\mathfrak{X}(M)$ de campos suaves en una variedad

Sea M una variedad diferencial y sea $X : M \to \mathrm{T}M$ un campo no necesariamente continuo. Si (U, φ) es una carta compatible con la estructura de M, entonces, para cualquier punto $p \in U$, $X_p \in \mathrm{T}_pM$ y

$$X_p \;=\; X^i(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

para ciertos coeficientes $X^i(p) \in \mathbb{R}$. Esto determina funciones $X^i : U \to \mathbb{R}$ denominadas *las componentes de* X *en/con respecto a la carta* (U, φ). La aplicación X, originalmente definida en M, se restringe a un campo $X|_U : U \to \mathrm{T}M$ en U. Tanto U como $\mathrm{T}M$ tienen estructura de variedad diferencial.

Poposición 6.1.1. *Con las definiciones anteriores,* $X|_U : U \to \mathrm{T}M$ *es una transformación suave, si y sólo si las funciones* $X^i : U \to \mathbb{R}$ *lo son.*

Demostración. Si $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ denota la carta correspondiente a (U, φ) en $\mathrm{T}M$, entonces, en coordenadas,

$$\begin{aligned} \widehat{X}(x) \;&=\; \widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi(x) \;=\; \widetilde{\varphi}(\varphi^{-1}(x),\, X_{\varphi^{-1}(x)}) \\ &=\; (x^1, \ldots, x^n, X^1(\varphi^{-1}(x)), \ldots, X^n(\varphi^{-1}(x)))\;. \end{aligned}$$

La expresión en coordenadas $\widehat{X} : \varphi(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ es suave, si y sólo si $\widehat{X^i} = X^i \circ \varphi^{-1}$ son suaves, si y sólo si las funciones X^i son suaves. □

La demostración consiste, simplemente, en volver sobre la definición de lo que significa que una función entre variedades sea una transformación suave. Como ya se había mencionado, si $U \subset M$ es un subconjunto abierto de una variedad diferencial M, un campo X en U es una *campo suave*, si, en tanto función entre variedades, es una transformación suave. Un poco más en general, dado un subconjunto arbitrario $A \subset M$ de la variedad y un campo $X : A \to \mathrm{T}M$ sobre A, se dice que X es *suave*, si, para cada punto $p \in A$, existe un entorno $V \subset M$ de p y un campo suave $\tilde{X} : V \to \mathrm{T}M$ tal que $X = \tilde{X}$ en $V \cap A$.

Dada una variedad M denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ al espacio de campos suaves definidos en M. El conjunto de campos en M constituye un espacio vectorial. Más aun, $\mathfrak{X}(M)$ es un $C^\infty(M)$-módulo. Dados campos arbitrarios $X, Y : M \to \mathrm{T}M$ y funciones $f, g : M \to \mathbb{R}$, para cada punto $p \in M$,

$$\big(f \cdot X + g \cdot Y\big)\big|_p \;=\; f(p)X|_p + g(p)Y|_p\;,$$

que pertenece a la fibra T_pM de π. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$, entonces, en coordenadas,

$$\big(f \cdot X + g \cdot Y\big)\big|_p \;=\; \big(f(p)X^i(p) + g(p)Y^i(p)\big) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\;.$$

Pero las funciones $fX^i + gY^i$, en el abierto coordenado donde estén definidas, son suaves. Dado un campo arbitrario X, la escritura de X_p en la base canónica $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p \right\}_i$ se puede expresar como una igualdad en el espacio de todos los campos en M (o, mejor dicho, en el abierto coordenado):

$$X|_U \;=\; X^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \;.$$

En particular, si X es suave, la igualdad es en $\mathfrak{X}(U)$. Los *campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x^i} : U \to \mathrm{T}M$ son suaves, pues sus componentes con respecto a la carta (U, φ) son constantes y, en particular, suaves. La imagen de estos campos está contenida en $\mathrm{T}U$. La expersión en coordenadas del campo $\frac{\partial}{\partial x^i}$ con respecto a otra carta compatible $(V, \tilde{\varphi})$ está dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \;=\; \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \;. \tag{6.1}$$

6.1.2 Extensión de campos vectoriales

Sea M una variedad diferencial y sea $A \subset M$ un subconjunto arbitrario. Por definición, un campo (suave) sobre A es una sección $X : A \to \mathrm{T}M$ que admite, en un entorno de cada punto, una extensión suave. Si A es un subconjunto cerrado, es posible extender el campo a toda la variedad.

Proposición 6.1.2. *Sea M una variedad diferencial y sea $A \subset M$ un subconjunto cerrado. Si $U \subset M$ es abierto y $U \supset A$ y $X : A \to \mathrm{T}M$ es un campo suave sobre A, existe un campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\tilde{X}|_A = X$ y $\mathsf{sop}(\tilde{X}) \subset U$.*

Demostración. Dado $p \in A$, existe un abierto $U_p \subset M$ tal que $p \in U_p$ y un campo $X^p : U_p \to \mathrm{T}M$ tal que $X^p = X$ en $U_p \cap A$. Sea $\{\psi_p\}_{p\in A} \cup \{\psi_0\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_p\}_{p\in A} \cup \{U_0\}$, donde $U_0 = M \smallsetminus A$. En particular, vale que $\sum_{p\in A} \psi_p(p') = 1$ para todo $p' \in A$, pues $\psi_0 = 0$ allí. Sea $\psi_p X^p$ el campo dado por

$$\left(\psi_p X^p\right)\big|_q \;=\; \begin{cases} \psi_p(q) X^p|_q & \text{si } q \in U_p \\ 0 & \text{si } q \notin \mathsf{sop}(\psi_p) \end{cases} \;.$$

Este campo está bien definido, pues ambas definiciones coinciden en la intersección de los abiertos U_p y $M \smallsetminus \mathsf{sop}(\psi_p)$, y es suave, pues es suave restringida a U_p y restringida a $M \smallsetminus \mathsf{sop}(\psi_p)$. Finalmente, sea $\tilde{X}$ el campo

$$\tilde{X} \;=\; \sum_p \psi_p X^p \;.$$

Como cada uno de los sumandos es suave y los soportes forman una familia localmente finita, dado $p' \in M$, existe un abierto $V \subset M$ tal que $p' \in V$ en donde la suma $\sum_{p\in A} \psi_p X^p$ es efectivamente finita y, por lo tanto, $\tilde{X}$ es C^∞ en p'. Si $p' \in A$,

$$\tilde{X}|_{p'} \;=\; \sum_{p\in A} \psi_p(p') X^p|_{p'} \;=\; \sum_{p\in A} \psi_p(p') X|_{p'} \;=\; X|_{p'} \;,$$

ya que $\psi_p(p')$ es igual a cero, o bien $X^p|_{p'} = X|_{p'}$. □

Si $A = \{p\}$ consiste en un único punto, un campo X sobre A es exactamente un vector del tangente $v_p \in \mathrm{T}_pM$. Todo campo sobre $\{p\}$ es suave, es decir, se extiende a un campo en un entorno de p, al *campo constante*: si (U, φ) es una carta en p,

$$v_p = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Sea $X : U \to \mathrm{T}M$ el campo dado por

$$X = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

donde $v^i \in \mathbb{R}$ son *constantes* iguales a los coeficientes de v_p en la base canónica $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}_i$. Por la proposición 6.1.2, el vector tangente $v_p \in \mathrm{T}_pM$ se extiende a un campo C^∞ en M, de manera que $X_p = v_p$. Con un poco más de cuidado, se puede tomar X constante en todo un entorno de p, usando una función chichón en p.

Observación 6.1.1. De acuerdo con la expresión (6.1) para el cambio de base en términos de los ganchos un "campo constante" no es en verdad constante *en sí*, sino respecto de una carta en particular; al cambiar de carta, un campo vectorial con coeficientes constantes en una carta pasa (en general, a menos que sea un cambio "lineal", una homotecia) a verse como un campo con componentes variables.

6.1.3 Propiedades equivalentes a la suavidad de un campo

Dado un campo $X : M \to \mathrm{T}M$ y dada una función *suave* $f \in C^\infty(M)$, queda determinada una función $Xf : M \to \mathbb{R}$ por $(Xf)(p) = X_pf$. Llamaremos a esta operación *aplicar el campo X a la función f*. Esta nueva función está *localmente determinada*.

Lema 6.1.3. *Sea $X : M \to \mathrm{T}M$ un campo arbitrario, no necesariamente suave ni continuo. Sean $f, g \in C^\infty(M)$ dos funciones suaves. Si existe un abierto $V \subset M$ tal que $f|_V = g|_V$, entonces $(Xf)|_V = (Xg)|_V$.*

Demostración. Dado $p \in V$, $(Xf)(p) \equiv X_pf$ y $(Xg)(p) \equiv X_pg$. Pero $f|_V = g|_V$, es decir, f y g coicinden en un entorno de p. Como el vector tangente $X_p \in \mathrm{T}_pM$ está determinado localmente, $X_pf = X_pg$. Como p es un punto arbitrario de V, se concluye que $Xf = Xg$ en V. □

Proposición 6.1.4. *Sea M una variedad diferencial. Sea $X : M \to \mathrm{T}M$ un campo no necesariamente continuo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(ı) $X \in \mathfrak{X}(M)$;

(ıı) dada $f \in C^\infty(M)$, la función $Xf : p \mapsto X_pf$ es suave en M;

(ııı) dado un abierto arbitrario $U \subset M$ y una función suave $f \in C^\infty(U)$, la función $Xf \equiv X|_Uf$ es suave en U.

Demostración. Si X es un campo suave y $f \in C^\infty(M)$, entonces, tomando coordenadas,

$$\begin{aligned}
\widehat{Xf}(x) &= X^i(\varphi^{-1}(x))\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \\
&= \widehat{X^i}(x)\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x^i}(x) \ .
\end{aligned}$$

Como X es suave, las funciones X^i son suaves en M, es decir, las expresiones en coordenadas $\widehat{X^i}$ son suaves en sentido usual, en el codominio de la carta (cualquiera sea la carta, siempre que sea compatible). Pero también $\widehat{f}$ es suave en sentido usual, porque f suave en M. En particular, las derivadas $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x^i} : \widehat{U} \to \mathbb{R}$ son suaves. Entonces Xf es suave en M.

Asumiendo que $Xf \in C^\infty(M)$ para toda función suave $f \in C^\infty(M)$, dado $U \subset M$ abierto y $f \in C^\infty(U)$, se verá que $X|_U f$ es diferenciable. Sea $p \in U$ un punto arbitrario del abierto. Sea $V \subset U$ abierto tal que $p \in V$ y $\overline{V} \subset U$. Sea $\{\psi_0, \psi_1\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_0, U_1\}$ de M, donde $U_0 = U$ y $U_1 = M \setminus \overline{V}$. Sea $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\tilde{f} = \begin{cases} \psi_0 f & \text{en } U_0 \\ 0 & \text{en } U_1 \end{cases} .$$

Esta función pertenece a $C^\infty(M)$ y $f|_V = \tilde{f}|_V$. Entonces

$$\big(X|_U f\big)\big|_V = \big(X\tilde{f}\big)\Big|_V \ .$$

Pero $X\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ es suave. Entonces $X|_U f : U \to \mathbb{R}$ coincide con una función suave en un entorno de p. Como p era arbitrario, $X|_U f \in C^\infty(U)$.

Finalmente, si $Xf \in C^\infty(U)$ para toda función suave f definida en algún abierto $U \subset M$, entonces, dado $p \in M$ y una carta (U, φ) en p,

$$X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \ .$$

Las funciones coordenadas $x^i : U \to \mathbb{R}$ asociadas a la carta φ, son funciones suaves para cada $i \in [\![1, n]\!]$. Aplicando $X|_U$ a x^j, se deduce que $X^j = Xx^j \in C^\infty(U)$ y que $X \in \mathfrak{X}(M)$, por 6.1.1. $\square$

6.1.4 Campos como derivaciones

Un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ define una derivación en el álgebra de funciones $C^\infty(M)$: dadas $f, g \in C^\infty(M)$, dados $a, b \in \mathbb{R}$ y dado $p \in M$,

$$\begin{aligned}
\big(X(af+bg)\big)(p) &= X|_p(af+bg) \\
&\quad aX|_p f + bX|_p g = (aXf + bXg)(p) \quad \text{y} \\
\big(X(fg)\big)(p) &= X|_p(fg) \\
&= f(p)X|_p g + (X|_p f)g(p) = \big(fXg + (Xf)g\big)(p) \ .
\end{aligned}$$

Es decir, $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal y cumple con la regla de Leibniz: $X(fg) = fX(g)+X(f)g$. La linealidad y la regla de Leibniz vienen de que X_p es un vector tangente en p para cada punto p, no de que X es suave. En realidad, lo que no depende de que X sea un campo suave es que la regla de Leibniz y la linealidad valen puntualmente, bajando a cada punto. Al ser X un campo suave en M aplicar el campo a una función, a una combinación de funciones o a un producto de funciones suaves devuelve funciones suaves. Recíprocamente, toda derivación en $C^\infty(M)$ viene de un campo suave.

Observación 6.1.2. Antes de pasar a demostrar esta afirmación, es importante notar que toda derivación *global*, es decir, toda derivación $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ determina, para cada punto $p \in M$, una *derivación en en p*. Si $X_p : f \mapsto (Df)(p)$, entonces $X_p \in \mathrm{T}_pM$, pues, recorriendo las igualdades anteriores en sentido contrario,

$$\begin{aligned} X_p(af+bg) &\equiv \big(D(af+bg)\big)(p) \\ &= (aDf+bDg)(p) \;=\; aX_pf+bX_pg \quad \text{y} \\ X_p(fg) &\equiv D(fg)(p) \\ &= \big(fDg+(Df)g\big)(p) \;=\; f(p)X_pg+(X_pf)g(p)\ . \end{aligned}$$

Teorema 6.1.5. *Sea $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ una derivación. Existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Df = Xf$ para toda $f \in C^\infty(M)$.*

Demostración. Si existiese un campo (no necesariamente continuo) $X : M \to \mathrm{T}M$ tal que $Df = Xf$, entonces

$$X_pf \;\equiv\; (Xf)(p) \;=\; (Df)(p)$$

para todo punto $p \in M$ y toda función diferenciable f. Sea $X : M \to \mathrm{T}M$ el campo $p \mapsto X_p$, donde $X_p \in \mathrm{T}_pM$ es la derivación *en p* dada por $X_pf = (Df)(p)$ (c. f. la observación 6.1.2). Para ver que $X \in \mathfrak{X}(M)$, tomamos $f \in C^\infty(M)$ y aplicamos X a f: puntualmente,

$$(Xf)(p) \;\equiv\; X_pf \;\equiv\; (Df)(p)\ .$$

Pero $Df \in C^\infty(M)$. Entonces $Xf \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

6.1.5 El *pushforward* de un campo

Sea $F : M \to N$ una transformación suave. Sabemos que F determina una transformación lineal $\mathrm{d}_pF : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{F(p)}N$ para cada punto $p \in M$ y que también determina una transformación suave $\mathrm{d}F$ entre los fibrados tangentes. Fijado un punto $p \in M$, el diferencial asocia a cada vector tangente $v_p \in \mathrm{T}_pM$ un vector en el espacio tangente $\mathrm{T}_{F(p)}N$ que, en términos de derivaciones, está determinado por

$$\mathrm{d}_pF(v_p)(g) \;=\; v_p(g \circ F)$$

para toda función suave $g \in C^\infty(N)$.

Dado un campo $X : M \to \mathrm{T}M$, para cada punto p de M, X_p es un vector tangente a M en p y $\mathrm{d}_pF(X_p)$ es un vector tangente a N en $F(p)$. Esto determina un campo a lo largo de F vía el diferencial global de F, pues $\mathrm{d}F \circ X : M \to \mathrm{T}N$ y $\pi(\mathrm{d}_pF(X_p)) = F(p)$. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\mathrm{d}F \circ X$ es un campo suave a lo largo de F, es decir, es una transformación suave.

Si $Y : N \to \mathrm{T}N$ es un campo en N, entonces también se obtiene un campo a lo largo de F, si se toma la composición $Y \circ F : p \mapsto Y_{F(p)} \in \mathrm{T}_{F(p)}N$. Este es suave, si $Y \in \mathfrak{X}(N)$ y si F es suave.

Pero, en general, F no determina un campo en N a partir de un campo en M: por ejemplo, si F no es suryectiva, no hay, en principio, una manera natural de asignarle un vector tangente a puntos $q \in N$ que no están en la imagen de F; si, por otra parte, F no es inyectiva, entonces dos puntos distintos $p, p' \in M$ pueden dar lugar a vectores tangentes distintos en $F(p) = F(p')$ y no habría manera natural de elegir uno en lugar del otro.

Hay, aun así, un caso en que sí tiene sentido hablar de un campo en N determinado por F y por un campo en M. Este es el caso en que $F : M \to N$ es un difeomorfismo (c. f. el teorema 6.1.7). Es de esperar que, si M y N son indistinguibles desde el punto de vista de su estructura diferencial, entonces los espacios de campos (suaves) sean, también, en algún sentido, indistinguibles, ya que esta noción fue definida, en última instancia, a partir de la noción de estructura diferencial de una variedad.

Sea entonces $F : M \to N$ una transformación suave entre variedades diferenciales con o sin borde y sean $X : M \to \mathrm{T}M$ e $Y : N \to \mathrm{T}N$ campos (no necesariamente continuos). Se dice que X e Y *están F-relacionados*, si, para cada punto $p \in M$, vale que

$$\mathrm{d}_pF\big(X_p\big) \;=\; Y_{F(p)} \;. \tag{6.2}$$

En otras palabras, dado un campo X, existe un campo en N que esté F-relacionado con X, si y sólo si existe un campo en N que da lugar al campo $p \mapsto \mathrm{d}_pFX_p$ a lo largo de F. Esta noción está definida para campos X e Y no necesariamente continuos. En particular, aunque X sea continuo, no es necesariamente cierto que Y, si existiese, sea continuo.

Proposición 6.1.6. *Sean M y N variedades diferenciales y sea $F : M \to N$ una transformación suave. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ campos suaves. Entonces X e Y están F-relacionados, si y sólo si, para todo abierto $V \subset N$ y toda función suave $g \in C^\infty(V)$, vale que*

$$X|_{F^{-1}(V)}(g \circ F) \;=\; (Y|_V g) \circ F \;. \tag{6.3}$$

Demostración. Sea $p \in M$ y sea g una función suave definida en un entorno de $F(p)$. Por un lado,

$$X(g \circ F)(p) \;\equiv\; X_p(g \circ F) \;\equiv\; \mathrm{d}_pF\big(X_p\big)(g)$$

y, por otro,

$$(Yg) \circ F(p) \;\equiv\; Y_{F(p)}g \;.$$

Rigurosamente, X e Y están siendo restringidos a los abiertos en donde $g \circ F$ y g esté definidas, respectivamente. Ahora bien $X(g \circ F)(p) = (Yg) \circ F(p)$ para toda g (y todo punto p), si y sólo si $\mathrm{d}_p F(X_p) = Y_{F(p)}$ para todo $p \in M$. □

Observación 6.1.3. Este resultado y 6.1.5 nos permiten deducir propiedades de regularidad de campos, a partir de propiedades algebraicas de los mismos: por un lado, podemos deducir que un campo X en una variedad M es un campo suave, verificando que es derivación en $C^\infty(M)$; por otro lado, dados campos X en M e Y en N y una transformación suave $F : M \to N$, sabiendo que son campos suaves, podemos concluir que están F-relacionados verificando que se cumple la igualdad (6.3) para toda función suave g definida en un abierto de N (usando particiones de la unidad, se deduce que es suficiente verificar la igualdad para funciones $g \in C^\infty(N)$ (?)). Denotaremos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están F-relacionados por $X \sim_F Y$.

Teorema 6.1.7. *Sean M y N variedades diferenciales y sea $F : M \to N$ un difeomorfismo. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, existe un único campo Y en N que está F-relacionado con X. Además, $Y \in \mathfrak{X}(N)$.*

Demostración. Como F es una biyección, $Y : N \to \mathrm{T}N$ dado por $q \mapsto \mathrm{d}_{F^{-1}(q)}F(X_{F^{-1}(q)})$ es un campo en N (no necesariamente continuo) y está F-relacionado con X. Por otra parte, todo campo Y que esté F-relacionado con X debe verificar que $\mathrm{d}_pF(X_p) = Y_{F(p)}$. Con lo cual Y definido de esta manera es el único campo posible. Dado que, en tanto transformación, $Y = \mathrm{d}F \circ X \circ F^{-1}$, se deduce que Y es suave, por ser composición de transformaciones suaves. □

El campo $Y \in \mathfrak{X}(X)$ determinado por el difeomorfismo F y el campo suave $X \in \mathfrak{X}(M)$, se denomina *pushorward de X por F*. Denotamos a este campo por F_*X. Explícitamente, dado $q \in N$,

$$(F_*X)_q = \mathrm{d}_{F^{-1}(q)}F\big(X_{F^{-1}(q)}\big) \ . \tag{6.4}$$

Para que esta expresión tenga sentido, es suficiente que F sea diferenciable e invertible, pero para que defina un campo suave, se requiere (en general) que F^{-1} también sea diferenciable. Aunque parezca una construcción trivial, el pushforward F_* será de utilidad en el contexto de grupos de Lie.

6.1.6 Campos tangentes a una subvariedad

De la misma manera en que es posible identificar el espacio tangente a una subvariedad en un punto con un subespacio del espacio tangente a toda la variedad, nos podemos preguntar si es posible identificar los campos en una subvariedad con campos en la variedad ambiente. En general, como se mencionó más arriba, esto no es posible, pero se pueden dar algunos criterios para determinar cuándo es posible o, mejor dicho, dar una interpretación de lo que significa que esto sea posible.

Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad. Dado un campo vectorial $X : M \to \mathrm{T}M$, se puede obtener un campo a lo largo de la inclusión $\iota_S : S \to M$

simplemente restringiendo el campo a S, es decir, $Y|_S = Y \circ \iota_S : S \to \mathrm{T}M$. Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $Y|_S$ es suave, pero no es necesariamente cierto que sea un campo en S. Si, por otro lado, $X : S \to \mathrm{T}S$ es un campo en S, entonces $\mathrm{d}\iota_S \circ X : S \to \mathrm{T}M$ define un campo a lo largo de ι_S. Como antes, si $X \in \mathfrak{X}(S)$ es suave, entonces $Y = \mathrm{d}\iota_S \circ X$ también lo es, pero, en general, no define un campo en M.

Sean S y M como antes y sea $p \in S$ un punto arbitrario. Dado un campo $Y : M \to \mathrm{T}M$, se dice que Y es *tangente a S en p*, si $Y_p \in \mathrm{T}_pS \equiv \mathrm{d}_p\iota_S(\mathrm{T}_pS)$. Se dice que Y es *tangente a S*, si es tangente a S en todo punto de la subvariedad. Como ι_S es una inmersión, el diferencial $\mathrm{d}_p\iota_S : \mathrm{T}_pS \to \mathrm{T}_pM$ es inyectivo. Si $Y : M \to \mathrm{T}M$ es un campo tangente a S, entonces, para cada $p \in S$, existe un único vector tangente $X_p \in \mathrm{T}_pS$ tal que $Y_p = \mathrm{d}_p\iota_S\big(X_p\big)$. Esto determina un campo $X : S \to \mathrm{T}S$ que, por su definición, está ι_S-relacionado con Y. Recíprocamente, si X es un campo en S, Y es un campo en M y X está ι_S-relacionado con Y, entonces, para cada $p \in S$, $Y_p = \mathrm{d}_p\iota_S\big(X_p\big)$, de lo que se deduce que Y es tangente a S.

Proposición 6.1.8. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad. Sea $Y : M \to \mathrm{T}M$ un campo (no necesariamente continuo). Entonces Y es tangente a S, si y sólo si existe un campo $X : S \to \mathrm{T}S$ que esté ι_S-relacionado con Y. En tal caso, $X = Y|_S$, la restricción de Y a S.*

Este resultado dice que hay una correspondencia entre campos tangentes y campos ι_S-relacionados. La pregunta es cuándo estos campos son suaves: si $Y|_S$ cuando Y es suave, o si Y es suave cuando $Y|_S$ es suave. Antes de pasar a responder estas preguntas hacemos un breve comentario con respecto al fibrado tangente de una subvariedad.

La identificación $X = Y|_S$ viene de identificar T_pS con un subespacio de T_pM para cada punto $p \in S$ vía $\mathrm{d}_p\iota_S$. Más aun, como ι_S es inyectiva e inmersión, el diferencial $\mathrm{d}_p\iota_S$ es inyectivo y el diferencial *global* $\mathrm{d}\iota_S : \mathrm{T}S \to \mathrm{T}M$ es inyectivo, también. Entonces $\mathrm{T}S$ se puede identificar, al menos, con un subconjunto de $\mathrm{T}M$.

Proposición 6.1.9. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad. Sea $\iota_S : S \to M$ la inclusión y sea $\mathrm{d}\iota_S : \mathrm{T}S \to \mathrm{T}M$ su diferencial. Entonces $\mathrm{T}S$ es una subvariedad del fibrado $\mathrm{T}M$ y $\mathrm{d}\iota_S$ es una inmersión.*

Demostración. En un par $(p, v_p) \in \{p\} \times \mathrm{T}_pS \subset \mathrm{T}S$, el diferencial $\mathrm{d}\iota_S$ está dado por

$$\mathrm{d}\iota_S(p, v_p) \;=\; (\iota_S(p), \mathrm{d}_p\iota_S(v_p)) \;=\; (p, v_p) \;\in\; \{p\} \times \mathrm{T}_pM \;\subset\; \mathrm{T}M \;,$$

haciendo las identificaciones usuales. Para ver que es una inmersión usamos su expresión en coordenadas. Sea $q \in S$ y sea $V \subset S$ un abierto que es subvariedad regular de M y tal que $q \in V$. Sea (U, φ) una carta preferencial para V en M centrada en q, de manera que, $V \cap U = \{x^{k+1} = 0, \ldots, x^n = 0\}$, donde $n = \dim M$ y $k = \dim S$ (si q es un punto del borde de S, se puede elegir una carta preferencial de borde de manera que también se cumpla $x^k \geq 0$ en la intersección). Sea $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ la carta correspondiente en $\mathrm{T}M$. Por definición, esto significa que

$$\begin{aligned}
\widetilde{U} \;&=\; \mathrm{T}U \\
&=\; \{(p, v_p) \in \mathrm{T}M \;:\; p \in U,\, v_p \in \mathrm{T}_pU = \mathrm{T}_pM\} \quad \text{y} \\
\widetilde{\varphi}\Big(p, v^i \,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) \;&=\; (\varphi^1(p), \ldots, \varphi^n(p), v^1, \ldots, v^n) \;.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $p \in V \cap U$,

$$\mathrm{T}_pS \;=\; \Big\{v^{k+1} = 0, \ldots, v^n = 0\Big\} \;=\; \Big\langle \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p \Big\rangle \;.$$

Ahora bien, dado que $V \subset S$ es abierto, $\mathrm{T}V$ es abierto en el fibrado $\mathrm{T}S$. Además,

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}V \cap \mathrm{T}U \;&=\; \{(p, v_p) \in \mathrm{T}M \;:\; p \in V \cap U,\, v_p \in \mathrm{T}_pV = \mathrm{T}_pS\} \\
&=\; \Big\{x^{k+1} = 0, \ldots, x^n = 0,\, v^{k+1} = 0, \ldots, v^n = 0\Big\} \;.
\end{aligned}$$

Pero entonces $\mathrm{T}V$ es un abierto de $\mathrm{T}S$ que es, además, una subvariedad regular de $\mathrm{T}M$, pues, para punto (q, v_q) existe una carta preferencial $\mathrm{T}U$ para $\mathrm{T}V$ en $\mathrm{T}M$. En definitiva $\mathrm{T}S$ es una subvariedad inmersa de $\mathrm{T}M$. □

En particular, se deduce que el rango de $\mathrm{d}\iota_S : \mathrm{T}S \to \mathrm{T}M$ es constante e igual a k^2, donde $k = \dim S$.

En realidad, el fibrado tangente a una subvariedad es más que una subvariedad inmersa del fibrado tangente de M. Esto tiene que ver con campos tangentes. Sea S una subvariedad de M y sea $Y : M \to \mathrm{T}M$ un campo (no necesariamente continuo). Si $q \in S$ y $V \subset S$ es un entorno de q en S que es subvariedad regular de M, entonces existe una carta preferencial (U, φ) para V en M tal que $V \cap U$ coincide con la feta k-dimensional $\{x^{k+1} = 0, \ldots, x^n = 0\}$ (agregando la condición $x^k \geq 0$ si q es un punto del borde de S). Con respecto a las coordenadas asociadas a esta carta,

$$Y \;=\; Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \,+\, \cdots \,+\, Y^n \frac{\partial}{\partial x^n} \;.$$

En particular, Y es un campo tangente a V, si y sólo si $Y^{k+1} = 0, \ldots, Y^n = 0$ en $V \cap U$. De esto se deduce que, si Y es suave en U, entonces las funciones $Y^1, \ldots, Y^n$ son suaves en U y, en particular, como $\iota : V \cap U \to U$ es suave, que $Y^1|_{V\cap U}, \ldots, Y^k|_{V\cap U}$ son suaves en $V \cap U$. Es decir, si Y es tangente a V y es suave en U, el campo ι_V-relacionado $Y|_{V\cap U} : V \cap U \to \mathrm{T}V$ se expresa en coordenadas como

$$Y|_{V\cap U} \;=\; Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \,+\, \cdots \,+\, Y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \;,$$

donde $Y^1, \ldots, Y^k : V \cap U \to \mathbb{R}$ son funciones suaves. En definitiva, si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es tangente a V, entonces $Y|_V \in \mathfrak{X}(V)$. Esto implica que si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es tangente a S, entonces se restringe a un campo suave $Y|_V : V \to \mathrm{T}V$ y, en particular, el campo ι_S-relacionado $Y|_S$ en S es suave como campo en S. Esto demuestra el siguiente resultado.

Proposición 6.1.10. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad. Sea $Y \in \mathfrak{X}(M)$ (un campo* suave*). Entonces Y es tangente a S, si y sólo si existe un campo suave $X \in \mathfrak{X}(S)$ que esté ι_S-relacionado con Y.*

Esto no quiere decir que, si $Y : M \to \mathrm{T}M$ es un campo que está ι_S-relacionado con un campo suave $X = Y|_S \in \mathfrak{X}(S)$. entonces Y sea suave: un campo $X \in \mathfrak{X}(S)$ define un campo en la imagen de S en M vía la inclusión como cualquier otra transformación inyectiva y diferenciable, pero el hecho de que sea subvariedad no es lo suficientemente fuerte como para determinar que cualquier extensión a M sea suave. Lo que dicen los resultados 6.1.8 y 6.1.10 es que un campo Y en una variedad M es tangente a una subvariedad S, si y sólo si su restricción $Y|_S$ tiene imagen en el fibrado $\mathrm{T}S$ (como Y es una sección de $\pi : \mathrm{T}M \to M$, $Y|_S$ es automáticamente una sección de $\pi|_{\mathrm{T}S}$); la restricción de Y a S es simplemente el campo X en S que a cada punto $q \in S$ le asigna el único elemento de T_pS cuya imagen vía $\mathrm{d}_p\iota_S$ es $Y_{\iota_S(p)}$. Por otro lado, si se empieza con un campo suave $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces el único campo ι_S-relacionado $X : S \to \mathrm{T}S$ debe ser suave, también.

Observación 6.1.4. En el caso de una subvariedad regular es posible dar otra descripción de los campos tangentes. Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad regular. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Puntualmente, para cada $p \in S$, por **??**

$$\mathrm{T}_pS \;=\; \{v_p \in \mathrm{T}_pM \,:\, v_pf = 0\, \forall f \in C^\infty(M),\, f|_S = 0\} \;.$$

En particular, se deduce de esto que X es tangente a S, si y sólo si $(Xf)|_S$ es la función cero, para toda función suave $f \in C^\infty(M)$ tal que $f|_S = 0$.

6.1.7 El corchete de Lie

Sea M una variedad diferencial y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo suave. Para cada función $f \in C^\infty(M)$, aplicar X a f define una nueva función Xf y la misma pertenece al espacio $C^\infty(M)$ de funciones suaves, también. Dado otro campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos aplicar Y a Xf y obtener, así, una tercera función $YXf \equiv Y(Xf) =\in C^\infty$. En general, esto no define un campo, con lo que no tiene sentido hablar de la composición YX en términos de campos, aunque, en términos de derivaciones sí tenga sentido la composición. La composición $Y \circ X : f \mapsto Y(Xf)$ de derivaciones de $C^\infty(M)$ no define, en general, una nueva derivación. Lo que sí define una nueva derivación es el *corchete* de dos derivaciones. Dadas dos derivaciones $D_1, D_2 : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, definimos el corchete de D_1 contra D_2 como la aplicación dada en una función suave $f \in C^\infty(M)$ por

$$[D_1, D_2]f \;=\; \big(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1\big)f \;.$$

En términos de campos, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el corchete está dado puntualmenten por

$$[X, Y]_pf \;=\; X_p(Yf) - Y_p(Xf) \;.$$

Hay que verificar que esto define un campo y que, este campo es suave.

Lema 6.1.11. *Sean* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *campos suaves en una variedad diferencial* M*. Entonces el corchete de Lie de* X *contra* Y *es un campo suave en* M*.*

Demostración. Por 6.1.5, alcanzará con verificar que

$$[X,Y]f \;=\; X(Yf) - Y(Xf)$$

define una derivación en $C^\infty(M)$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y dadas $f, g \in C^\infty(M)$, como X e Y son derivaciones, en particular son transformaciones lineales y

$$\begin{aligned} X(Y(af+bg)) - Y(X(af+bg)) \;&=\; aX(Yf) + bX(Yg) - aY(Xf) - bY(Xg) \\ &=\; a[X,Y]f + b[X,Y]g \;. \end{aligned}$$

Usando que aplicar X y aplicar Y son operaciones que cumplen la regla de Leibniz y que $C^\infty(M)$ es conmutativa,

$$\begin{aligned} X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \;&=\; X(fYg + (Yf)g) - Y(fXg + (Xf)g) \\ &=\; fX(Yg) + X(Yf)g - fY(Xg) - Y(Xf)g \\ &=\; f[X,Y]g + g[X,Y]f \;. \end{aligned}$$

□

Proposición 6.1.12. *Sea* $F : M \to N$ *una transformación suave. Sean* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *y* $U, V \in \mathfrak{X}(N)$ *campos suaves tales que* $X \sim_F U$ *e* $Y \sim_F V$*. Entonces la composición* XY *está* F*-relacionada con* UV*. En particular,* $[X,Y] \sim_F [U,V]$*.*

Demostración. Sea $g \in C^\infty(N)$ –una función suave definida en algún abierto de N. Entonces, por hipótesis y por 6.1.6,

$$X(Y(g \circ F)) \;=\; X((Vg) \circ F) \;=\; U(Vg) \circ F \;.$$

Esto muestra que XY está F-relacionada con UV, en tanto transformaciones de $C^\infty(M)$ y de $C^\infty(N)$, respectivamente, aunque no sean necesariamente derivaciones. Por otro lado, como, por el mismo argumento, también es cierto que $Y(X(g \circ F)) = V(Ug) \circ F$, se deduce que

$$[X,Y](g \circ F) \;=\; U(Vg) \circ F - V(Ug) \circ F \;=\; ([U,V]g) \circ F$$

y, por lo tanto, $[X,Y] \sim_F [U,V]$. □

Observación 6.1.5. Sabiendo que todo par de campos suaves X e Y determina un nuevo campo $[X,Y]$ y que el mismo es suave, es importante contar con una manera de calcular el corchete $[X,Y]$ sabiendo cómo calcular los campos originales X e Y. Como X e Y

son suaves, podemos recurrir a sus expresiones en coordenadas. Sea (U,φ) una carta compatible con la estructura de M y sea $f \in C^\infty(U)$ una función suave. Entonces

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &\equiv X(Yf) - Y(Xf) \\
&= X\Big(Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} f\Big) - Y\Big(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} f\Big) = X\Big(Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big) - Y\Big(X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big) \\
&= \Big(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + X^j Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\Big) - \Big(Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + Y^i X^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\Big) .
\end{aligned}$$

En el caso particular en que $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x^l}$, como las componentes de X y de Y son constantes y, más aun, son o iguales a 0 o iguales a 1, se obtiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right] f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k} = 0 .$$

En general, entonces,

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= \Big(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big) + X^j Y^i \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] \\
&= \Big(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) f .
\end{aligned}$$

Como esto es cierto para toda f suave en el entorno coordenado U,

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \Big(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \Big(XY^i \frac{\partial}{\partial x^i} - YX^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \\
&= \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial}{\partial x^j} = \big(XY^j - YX^j\big)\frac{\partial}{\partial x^j} .
\end{aligned}$$

Esta es la expresión del corchete en coordenadas.

6.1.8 El corchete como derivación

El espacio $\mathfrak{X}(M)$ de campos vectoriales suaves en una variedad M se transforma en un álgebra de Lie con el corchete de Lie de campos. Todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se puede ver como una derivación $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. En particular, todo campo suave X en M da lugar a un operador lineal $X \in \operatorname{End}(C^\infty(M))$. Como fue mencionado, la composición de dos campos, si bien no es necesariamente un campo, una derivación, sigue siendo un operador lineal en el álgebra $C^\infty(M)$ (o anillo de funciones en M).

El espacio $\operatorname{End}(C^\infty(M))$ es un álgebra asociativa junto con la composición usual de operadores. Con lo cual existe una manera canónica de transformarla en un álgebra de Lie vía el "conmutador" de dos operadores: $(S,T) \mapsto S \circ T - T \circ S$. El hecho de que el corchete de dos campos siga siendo un campo se puede expresar diciendo que $\mathfrak{X}(M) \subset \operatorname{End}(C^\infty(M))$, el conjunto de derivaciones de $C^\infty(M)$, es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie de endomorfismos del anillo de funciones suaves de la variedad M.

Sean X, Y y Z tres campos suaves en M. Tomar el corchete contra el campo Z define un operador en $\mathfrak{X}(M)$ que es lineal, por la bilinealidad del corchete. Por otro lado, por la *identidad de Jacobi*,

$$[Z, [X, Y]] = [X, [Z, Y]] + [[Z, X], Y] ,$$

es decir, $[Z, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ se comporta como una derivación en $\mathfrak{X}(M)$, donde el producto de dos elementos se define como el corchete de Lie de los campos correspondientes. Esta es una propiedad general de álgebras de Lie. Esto no quiere decir que toda derivación de $\mathfrak{X}(M)$ se tomar el corchete contra algún campo.

6.1.9 Más sobre campos tangentes

Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad. Sean $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ campos suaves en M tangentes a la subvariedad S. Por la proposición 6.1.10 existen campos $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(S)$ tales que $Y_1|_S = X_1$ e $Y_2|_S = X_2$, es decir, tales que X_i esté ι_S-relacionado con Y_i para cada $i \in \{1, 2\}$. Por la proposición 6.1.12,

$$[X_1, X_2] \sim_{\iota_S} [Y_1, Y_2] .$$

En consecuencia, el campo $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(M)$ resulta ser, también, un campo tangente a S.

Proposición 6.1.13. *Sea M una variedad diferencial y sea S una subvariedad. Sean Y_1 e Y_2 campos suaves en M tangentes a la subvariedad S. Entonces el corchete $[Y_1, Y_2]$ es tangente a S, también.*

Finalmente, enunciamos un resultado análogo a 5.4.6 para campos vectoriales suaves.

Lema 6.1.14. *Sea M una variedad diferencial y sea $S \subset M$ una subvariedad. Si S es subvariedad regular, entonces, dado $X \in \mathfrak{X}(S)$, existe un campo $Y \in \mathfrak{X}(U)$, donde $U \subset M$ es un subconjunto abierto que contiene a S, tal que Y es tangente a S e $Y|_S = X$. Más aun, si S es subvariedad propia, entonces se puede tomar $U = M$.*

6.2 El fibrado cotangente

6.2.1 El espacio cotangente

Sea M una variedad diferencial. Dado $p \in M$, el *espacio cotangente a M en p* se define como el espacio vectorial dual del espacio tangente a M en p. Denotamos este espacio por $\mathrm{T}_p^* M$. Es decir, el espacio cotangente a M en p está dado por

$$\mathrm{T}_p^* M = \left(\mathrm{T}_p M\right)^* .$$

Los elementos del espacio cotangente a una variedad en un punto p se denominarán *covectores tangentes (o vectores cotangentes) en p* Sea (U, φ) una carta en p compatible con la estructura de M. La base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}_i$ del espacio tangente en p determina una base $\{\lambda^i|_p\}_i$ del espacio cotangente, la base dual. Dado un vector cotangente $\omega \in \mathrm{T}_p^* M$, este vector se puede escribir de manera única como combinación lineal de los elementos de la base $\lambda^i|_p$,

$$\omega \;=\; \omega_i \lambda^i|_p \ ,$$

donde

$$\omega_i \;=\; \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \Big) \ .$$

Dada otra carta $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ en p, vale que $\omega = \tilde{\omega}_i \tilde{\lambda}^i|_p$, de manera análoga, respecto de la base dual asociada a la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p \right\}_i$ del tangente, correspondiente a la nueva carta. Para hacer explícita la relación entre las dos escrituras, es suficiente escribir los vectores $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ en términos de los vectores $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p$. Se sabe que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \;=\; \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p \ .$$

Entonces se deduce que

$$\omega_i \;=\; \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \Big) \;=\; \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\, \omega\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p \Big) \;=\; \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\, \tilde{\omega}_j \ .$$

6.2.2 La transpuesta del diferencial

Sean M y N variedades diferenciales y sea $F : M \to N$ una transformación suave. Dado $p \in M$, el diferencial de la transformación F, la transformación lineal $\mathrm{d}_p F : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{F(p)} N$, está definida en derivaciones por

$$\mathrm{d}_p F(v) g \;=\; v(g \circ F)$$

para toda función suave g definida en un entorno de $F(p)$ y todo vector tangente $v \in \mathrm{T}_p M$. La transpuesta de esta transformación lineal es la transformación lineal $\mathrm{d}_p^* F : \mathrm{T}_{F(p)}^* N \to \mathrm{T}_p^* M$ dada por

$$\mathrm{d}_p^* F(\omega)(v) \;=\; \omega\big(\mathrm{d}_p F(v)\big) \ .$$

Usando la notación de los corchetes esta igualdad se expresa como

$$\langle v | \mathrm{d}_p^* F(\omega) \rangle \;=\; \langle \mathrm{d}_p F(v) | \omega \rangle \ .$$

Esta transformación transformación lineal asociada al diferencial de una transformación suave F por transposición se denomina *pullback de F en p*.

6.2.3 El diferencial de una función suave

Sea M una variedad, sea $p \in M$ un punto arbitrario y sea $v \in \mathrm{T}_pM$ un vector tangente a M en p. En tanto derivación, dada una función suave $f : M \to \mathbb{R}$ definida cerca de p, el vector tangente v actúa en f, tomando un determinado valor $vf \in \mathbb{R}$. Si, en cambio, se fija una función suave f definida en p y se deja variar v entre los vectores tangentes en p, se obtiene una aplicación $d_pf : \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_pf(v) \,=\, v(f) \;.$$

De la definición del espacio de derivaciones, se deduce que d_pf es una funcional lineal en T_pM. Esta funcional se denomina *diferencial de f en p*. En tanto transformación suave, de la variedad M en la variedad $\mathbb{R}$, el diferencial de f en p había sido definido como la transformación lineal $\mathrm{d}_pf : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}$ que, a un vector tangente $v \in \mathrm{T}_pM$ le asocia la derivación que, en una función suave g definida en $\mathbb{R}$, toma el valor

$$\mathrm{d}_pf(v)g \,=\, v(g \circ f) \;.$$

Por el momento, para distinguir estas dos nociones, denominaremos *derivada de f en p* al diferencial d_pf de f en p.

El diferencial d_pf de una función suave f vista como transformación suave en M se puede interpretar como una funcional. En primer lugar, dado un punto $x \in \mathbb{R}$, en tanto variedad diferencial, se puede identificar canónicamente el espacio tangente $\mathrm{T}_x\mathbb{R}$ con el espacio vectorial $\mathbb{R}$, asociando a un elemento $y \in \mathbb{R}$ la derivación en x dada por

$$y\,f \,=\, \lim_{t\to 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} \;,$$

es decir, tomar derivada direccional en la dirección de y. En coordenadas, tomando la carta global $(\mathbb{R}, \mathsf{id}_{\mathbb{R}})$, esta identificación está dada por $v \,=\, y\,\frac{\partial}{\partial t}\big|_x \leftrightarrow y$. Es decir, el elemento del espacio vectorial $\mathbb{R}$ determinado por la derivación $v \in \mathrm{T}_x\mathbb{R}$ está dado por evaluar la derivación en la función $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$:

$$v\,\mathsf{id}_{\mathbb{R}} \,=\, y \;.$$

Si ahora $v \in \mathrm{T}_pM$ es un vector tangente a la variedad M en el punto p, entonces la derivación $\mathrm{d}_pf(v) \in \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}$ se corresponde con el elemento

$$\mathrm{d}_pf(v)(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}) \,=\, v(\mathsf{id}_{\mathbb{R}} \circ f) \,=\, v(f) \;.$$

Es decir, identificando el espacio tangente $\mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}$ con el mismo espacio $\mathbb{R}$, la derivación $\mathrm{d}_pf(v)$ se corresponde con

$$\mathrm{d}_pf(v)(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}) \,=\, d_pf(v) \;.$$

De esta manera, se puede interpretar que el diferencial d_pf en tanto transformación suave de f en p se corresponde con la funcional lineal dada por la derivada de f en

p, el diferencial en tanto función $d_p f$. Haciendo esta identificación, nos referiremos indistintamente usando el nombre "diferencial de f en p" a cualquiera de estos dos objetos.

Por otro lado, el diferencial de f como función (la derivada de f) se puede relacionar con la adjunta del diferencial de f en tanto transformación: si $\frac{\partial}{\partial t}\big|_x$ es el único elemento de la base de $\mathrm{T}_x\mathbb{R}$ dado por la carta global usual, entonces, tomando la base dual, se obtiene un covector $\omega|_x \in \mathrm{T}^*_x\mathbb{R}$. Si $x = f(p)$, tomando el pullback de ω por f en p, se obtiene un vector cotangente $\mathrm{d}^*_p f(\omega|_{f(p)}) \in \mathrm{T}^*_p M$. Este covector está determinado por su valor en los vectores del espacio tangente a M en p. Si $v \in \mathrm{T}_p M$, entonces

$$\mathrm{d}^*_p f(\omega|_{f(p)})(v) \;=\; \omega|_{f(p)}\big(\mathrm{d}_p f(v)\big) \;.$$

Dado que

$$\mathrm{d}_p f(v) \;=\; y \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{f(p)} \;,$$

donde

$$y \;=\; \mathrm{d}_p f(v)\,(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}) \;=\; v(\mathsf{id}_{\mathbb{R}} \circ f) \;=\; v(f) \;,$$

se deduce que

$$\omega|_{f(p)}\big(\mathrm{d}_p f(v)\big) \;=\; v(f) \;=\; d_p f(v)$$

y, por lo tanto, que

$$\mathrm{d}^*_p f(\omega|_{f(p)})(v) \;=\; d_p f(v)$$

para toda derivación $v \in \mathrm{T}_p M$. Es decir, en definitiva, el pullback por f del covector de la base $\omega|_{f(p)}$ es igual a

$$\mathrm{d}^*_p f(\omega|_{f(p)}) \;=\; d_p f \;.$$

6.2.4 Bases coordenadas del espacio cotangente

Sea M una variedad diferencial, sea (U, φ) una carta compatible con la estructura de M y sea $p \in U$. Sea $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p \right\}_i$ la base del espacio tangente $\mathrm{T}_p M$ asociada a las funciones coordenadas $\varphi = (x^i)$ y sea $\{\lambda^i|_p\}_i$ la base dual en el espacio cotangente $\mathrm{T}^*_p M$. Hemos visto que es posible asociarle a toda función suave f en la variedad M definida cerca de p una funcional $d_p f : \mathrm{T}_p M \to \mathbb{R}$, un elemento del espacio cotangente a M en p, vía

$$d_p f(v) \;=\; v(f)$$

para todo vector tangente $v \in \mathrm{T}_p M$. Con respecto a la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p \right\}_i$ del espacio tangente en p,

$$d_p f(v) \;=\; v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f \;=\; v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \;,$$

con lo cual, en la base $\{\lambda^i|_p\}_i$ del espacio cotangente en p,

$$d_pf \;=\; \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p \;.$$

Vale la pena mencionar que en función del punto p las componentes de d_pf en esta base, es decir, sus derivadas respecto de las derivaciones $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, son funciones suaves.

En el caso particular en que $f = x^i$ es igual a alguna de las funciones coordenadas asociadas a la carta (U, φ), dado que $x^i : U \to \mathbb{R}$ es una función suave para cada índice i, es posible determinar el diferencial d_px^i en p. Esta funcional está dada, en coordenadas, por

$$d_px^i \;=\; \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p)\,\lambda^j|_p \;=\; \lambda^i|_p \;.$$

Es decir, los diferenciales $\{d_px^1, \ldots, d_px^n\}$ de las funciones coordenadas en p son precisamente los elementos de la base dual asociada a la base del espacio tangente en p formada por las derivaciones $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$. Podemos reescribir, entonces, dada una función suave f definida cerca de p, la expresión de su diferencial en coordenadas:

$$d_pf \;=\; \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\; d_px^i \;.$$

En ocasiones, escribiremos $dx^i\big|_p$ en lugar de d_px^i, para distinguirlos en tanto elementos de la base asociada a una carta coordenada, pero ambas expresiones harán referencia al mismo objeto.

Para terminar esta sección, introducimos un objeto análogo al fibrado tangente de una variedad, pero que reúne coherentemente los espacios cotangentes. Sea M una variedad diferencial y sea

$$\mathrm{T}^*M \;=\; \bigsqcup_{p\in M} \mathrm{T}^*_pM$$

la unión disjunta de los espacios cotangentes a M en cada punto p. Sea $\pi : \mathrm{T}^*M \to M$ la proyección canónica $\pi(p,\omega) = p$. Para dar una estructura de variedad diferencial a esta unión, partimos, como en el caso del fibrado tangente, de una carta compatible (U, φ) en M. Sean

$$\begin{aligned} \widetilde{U} \;&=\; \big\{(p, \omega_p) \in \mathrm{T}^*M \,:\, p \in U,\, \omega_p \in \mathrm{T}^*_pM\big\} \quad \text{y} \\ \widetilde{\varphi}\big(p, \omega_i\; dx^i\big|_p\big) \;&=\; \big(x^1(p), \ldots, x^n(p), \omega_1, \ldots, \omega_n\big) \;, \end{aligned}$$

siempre que $p \in U$. Si (V, ψ) y $\psi = (y^i)$ es otra carta compatible que se solapa con (U, φ), entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}^{-1}(y^1, \ldots, y^n, \omega_1, \ldots, \omega_n) \;&=\; \widetilde{\varphi}\big(\psi^{-1}(y), \omega_i\; dy^i\big|_{\psi^{-1}(y)}\big) \\ &=\; \Big(x^1(y), \ldots, x^n(y), \frac{\partial y^j}{\partial x^1}(y)\,\omega_j, \ldots, \frac{\partial y^j}{\partial x^n}(y)\,\omega_j\Big) \;. \end{aligned}$$

Dado que las cartas (U, φ) y (V, ψ) son suavemente compatibles, la composición

$$\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}^{-1} \,:\, \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^{2n} \;\to\; \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^{2n}$$

es suave en el sentido usual. Los pares $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ definidos a partir de cartas compatibles (U, φ) para M dan lugar a un atlas suavemente compatible en T^*M y determinan una estructura diferencial en la unión disjunta de los espacios cotangentes. La variedad diferencial determinada a partir de T^*M de esta manera se denomina *fibrado cotangente en/a/de* M.

6.3 1-formas

Un campo vectorial se define como una sección local del fibrado tangente. Las secciones locales del fibrado cotangente reciben el nombre de 1-*formas*.

Sea (U, φ) una carta en M. Sean $\varphi = (x^i)$ las funciones coordenadas, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p \right\}_i$ la base del espacio tangente a M en un punto $p \in U$ y sea $\left\{ dx^i\big|_p \right\}_i$ la base dual en el espacio cotangente, la cual está compuesta por los diferenciales de las funciones coordenadas x^i en p. Sea $\omega : U \to \mathrm{T}^*M$ una sección de la proyección canónica $\pi : \mathrm{T}^*M \to M$ definida, localmente, en el abierto U. En particular, $\pi \circ \omega = \mathsf{id}_U$. Si $p \in U$, denotamos al elemento en el espacio T_p^*M dado por la sección ω en p por ω_p, o bien $\omega|_p$. Es decir, $\omega : p \in U \mapsto \omega_p \in \mathrm{T}^*M$ es una apliación que a cada elemento p en el abierto coordenado U le asigna una funcional en el espacio cotangente T_p^*M. En coordenadas, esta aplicación está dada de la siguiente manera: cada covector $\omega_p \in \mathrm{T}_p^*M$ se escribe de manera única como combinación lineal de los elementos de la base $\left\{ dx^i\big|_p \right\}_i$ dada por los diferenciales de las funciones coordenadas, es decir, existen números reales $\omega_i(p) \in \mathbb{R}$ únicos tales que

$$\omega_p \;=\; \omega_i(p)\;\, dx^i\big|_p \;. \tag{6.5}$$

Cada uno de los coeficientes $\omega_i(p)$ en la escritura anterior se denomina *componente de* ω *en* p y su valor está dado, recurriendo a las funciones coordenadas, por

$$\omega_i(p) \;=\; \omega_p\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \Big) \;.$$

Esto determina unívocamente funciones $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ tales que vale (6.5) para todo punto $p \in U$. Estas funciones se denominan *componentes de* ω con respecto a las coordenadas $\varphi = (x^i)$ en el abierto coordenado U.

6.3.1 1-formas suaves

Recordando que todo abierto $U \subset M$ tiene estructura de variedad diferencial en tanto subespacio abierto de la variedad M y que a T^*M también se le dio una estructura de variedad diferencial, diremos que una 1-forma $\omega : U \to \mathrm{T}^*M$ definida en un abierto U de M es *suave*, si es suave en tanto transformación entre las variedades U y T^*M. La siguiente proposición da una forma alternativa de caracterizar la suavidad de una 1-forma.

Proposición 6.3.1. *Sea M una variedad diferencial y sea $\omega : M \to \mathrm{T}^*M$ una 1-forma. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(ı) ω es suave;

(ıı) si (U, φ) es una carta compatible con la estructura de M, entonces las componentes de ω con respecto a φ son funciones suaves en U;

(ııı) todo punto $p \in M$ está contenido en el dominio de alguna carta compatible (U, φ) tal que las componentes de ω en U son funciones suaves.

Dada una carta (U, φ), los diferenciales $dx^i\big|_p$ dan lugar a 1-formas definidas en el abierto U. Dado que los covectores $dx^i\big|_p$ constituyen una base de los espacios cotangentes en cada punto p de U, toda 1-forma definida en (algún lugar de) U se puede escribir como combinación lineal de las 1-formas $dx^i : p \mapsto dx^i\big|_p$ por ciertas funciones definidas en U a valores reales. Es decir, la igualdad (**??**) válida para todo $p \in U$ se puede escribir como una igualdad entre 1-formas: si $\omega : U \to \mathrm{T}^*M$ es una 1-forma, entonces existen funciones $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ únicas tales que

$$\omega = \omega_i dx^i .$$

En particular, si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función suave, su *diferencial (derivada)* es la 1-forma dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i .$$

Sea ω una 1-forma y sea X un campo tangente, es decir, secciones localmente definidas de los fibrados cotantegente y tangente, respectivamente. Sean o no suaves o continuas, estas aplicaciones determinan, allí donde ambas están definidas, una función a valores reales:

$$\big(\omega X\big)(p) = \omega_p\big(X_p\big)$$

dada por evaluar el covector $\omega_p \in \mathrm{T}^*_pM$ en el vector tangente $X_p \in \mathrm{T}_pM$. En coordenadas, si (U, φ) es una carta compatible tal que ambos ω y X están definidos en U, entonces existen funciones (no necesariamente continuas) X^i y ω_i definidas en el abierto U tales que

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \omega = \omega_i dx^i \quad \text{y}$$
$$\omega X = \omega_i X^i .$$

Proposición 6.3.2. *Sea M una variedad diferencial y sea ω una 1-forma definida en M. Entonces que ω sea suave equivale a que se cumpla cualquiera de las siguientes afirmaciones.*

(ȷ) Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo (global) suave, entonces la función $\omega X : M \to \mathbb{R}$ es suave;

(ȷȷ) si $U \subset M$ es abierto y $X \in \mathfrak{X}(U)$ es un campo suave definido en U, entonces la función $\omega X : U \to \mathbb{R}$ es suave.

Demostración. Si $p \in M$ es un punto arbitrario de la variedad, entonces, tomando coordenadas (U, φ) en p, vale que la función ωX es igual a $\omega_i X^i$ en U. Si X y ω son suaves, entonces, por el ítem *(ıı)* de la proposición 6.3.1, las funciones componentes ω_i son suaves y, como las componentes X^i también son suaves, $\omega_i X^i$ es suave en U y, por lo tanto, ωX es suave en U. Como p es arbitrario, se deduce que $\omega X \in C^\infty(M)$.

Supongamos que vale *(ȷ)* y que $X : U \to \mathrm{T}M$ es un campo suave definido en un abierto $U \subset M$. Sea $p \in U$ un punto arbitrario del abierto. Es necesario definir un campo global suave que coincida con X cerca de p. Sea $\psi : M \to \mathbb{R}$ una función chichón en p y sea $V \subset U$ un entorno de p contenido en U tal que $\overline{V} \subset U$ y $\psi = 1$ en V y $\mathsf{sop}(\psi) \subset U$. Sea $\tilde{X} : M \to \mathrm{T}M$ el campo global dado por ψX en U y por 0 en $M \smallsetminus \mathsf{sop}(\psi)$. Como ψ es una función chichón suave, $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\tilde{X}|_V = X|_V$. Entonces, por *(ȷ)*, la función $\omega\tilde{X} : M \to \mathbb{R}$ es suave y, además, por construcción,

$$\omega\tilde{X}|_V \;=\; \omega X|_V \;.$$

Pero, entonces, ωX coincide en el abierto V con una función suave. Como $p \in U$ es arbitrario, se deduce que $\omega X : U \to \mathbb{R}$ es suave en U.

Supongamos ahora que la afirmación *(ȷȷ)* es cierta para ω. Sea $p \in M$ y sea (U, φ) una carta compatible en p. Los campos locales $\frac{\partial}{\partial x^i} : U \to \mathrm{T}M$ son suaves (son constantes). Por hipótesis, evaluar ω en cada uno de estos campos define una función suave $\omega\frac{\partial}{\partial x^i}$ en U. Pero

$$\omega\frac{\partial}{\partial x^i} \;=\; \omega_i \;,$$

donde ω_i es la componente correspondiente a dx^i. En definitiva, todo punto de la variedad admite una carta en donde la forma ω tiene componentes suaves. Con lo cual, por *(ııı)*, se concluye que ω es una 1-forma suave en M. □

Usaremos la notación $\Omega^1(M)$ para denotar el conjunto de 1-formas suaves en una variedad diferencial M. Definiendo la suma y el producto por escalares puntualmente:

$$(a\omega + b\eta)|_p \;=\; a\omega_p + b\eta_p \;,$$

se le da una estructura de espacio vectorial real al conjunto de 1-formas. Más aun, al igual que con los campos vectoriales, dada una función f y una 1-forma ω (no necesariamente continuas), el *producto* de f por ω,

$$\big(f\omega\big)|_p \;=\; f(p)\omega_p \;,$$

define una nueva 1-forma en donde ambas aplicaciones estén definidas. En particular, si $f \in C^\infty(M)$ y $\omega \in \Omega^1(M)$, se deduce que $f\omega \in \Omega^1(M)$, también. Es decir, el espacio vectorial $\Omega^1(M)$ tiene estructura de $C^\infty(M)$-módulo.

Observación 6.3.1. Dada una variedad M y funciones suaves f, g, la aplicación $f \mapsto df \in \Omega^1(M)$ dada por tomar diferencial es lineal:

$$d(af + bg) \;=\; a df + b dg$$

y se comporta, también, como una derivación:

$$d(fg) \;=\; f dg + g df \;.$$

Observación 6.3.2. Sea M una variedad diferencial y sea $\omega : M \to \mathrm{T}^*M$ una 1-forma. Como se mencionó anteriormente, dado un campo tangente $X : M \to \mathrm{T}M$, se obtiene una función $\omega X : M \to \mathbb{R}$ dada por $p \mapsto \omega_p X_p$. Además, si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^1(M)$ son suaves, entonces $\omega X \in C^\infty(M)$. Por otro lado, $C^\infty(M)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra y $\mathfrak{X}(M)$ y $\Omega^1(M)$ son $C^\infty(M)$-módulos. Cada 1-forma suave ω define una aplicación

$$\omega \,:\, \mathfrak{X}(M) \;\to\; C^\infty(M) \;.$$

Si $f \in C^\infty(M)$ es una función suave,

$$\omega\big(fX\big) \,:\, p \;\mapsto\; \omega_p\big(f(p)X_p\big) \;=\; f(p)\omega_p X_p \;.$$

En definitiva, $\omega\big(fX\big) = f\omega X$, es decir, ω respeta la estrctura de $C^\infty(M)$-módulos.

Recíprocamente, si $T : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ es morfismo de $C^\infty(M)$-módulos, entonces se puede definir una 1-forma que da lugar a morfismo T. En primer lugar, la aplicación $p \mapsto (TX)(p)$, es decir, la función suave $TX : M \to \mathbb{R}$ depende de X únicamente en su valor en cada punto. Dicho de otra manera, entodo punto $p \in M$, el valor $TX(p)$ depende únicamente del vector tangente X_p y no del campo X. Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es otro campo tal que $Y_p = X_p$ entonces $TY(p) = TX(p)$. Para demostrar esta afirmación es suficiente demostrarlo que, si $X_p = 0$, entonces $TX(p) = 0$, pues $TX - TY = T(X - Y)$ para todo par de campos suaves X e Y, dado que T es, en particular, $\mathbb{R}$-lineal. En segundo lugar, una 1-forma es, puntualmente, un covector y un covector en un punto p es una funcional lineal en el espacio tangente a M en p. Así, dado que TX depende *puntualmente* de X, es posible definir una 1-forma por $\omega_p v = TX(p)$, donde X es cualquier extensión suave a M del vector tangente $v \in \mathrm{T}_pM$.

En cuanto a la primera afirmación, sea $p \in M$ un punto de la variedad y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo suave tal que X_p es el vector cero. Si, en coordenadas, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, cerca de p, en p vale que $X_p = 0$ y que, por independencia, $X^i(p) = 0$. Sea U el entorno coordenado de p en donde las funciones X^i y los campos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ están definidos. Sea $\psi : M \to \mathbb{R}$ una función chichón en p con soporte contenido en U. Para demostrar que $TX(p) = 0$, será necesario poder realizar una cálculo puntual en p. Para ello se extenderán los campos coordenados y las funciones componentes de X. Para cada índice i, sea $\tilde{X}^i$ la función que toma el valor $\psi \cdot X^i$ en U y el valor 0 fuera del soporte de ψ. Sean, también Y_i los campos dados por $\psi \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$ en U y por 0 fuera del soporte de ψ. Entonces, en toda M,

$$X \;=\; \tilde{X}^i Y_i + (1 - (\psi)^2)X \;.$$

Aplicando T,

$$TX = \tilde{X}^i TY_i + (1 - (\psi)^2) TX \ .$$

En el punto p, la función ψ vale $\psi(p) = 1$, por lo que

$$TX(p) = \tilde{X}^i(p) TY_i(p) + (1 - \psi(p)^2) TX(p) = X^i(p) TY_i(p) \ .$$

Entonces, asumiendo que $X_p = 0$, las funciones componentes X^i toman el valor 0 en p y $TX(p) = 0$.

Definir una 1-forma a partir del morfismo T, implica dar, para cada $p \in M$, una funcional $\omega_p \in \mathrm{T}_p^*M$. Sea $p \in M$ y sea $v_p \in \mathrm{T}_pM$ un vector tangente en p. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo suave tal que $X_p = v_p$. Un campo con esta propiedad se puede definir usando una función chichón en p. Sea $\omega_p(v_p) = TX(p)$. El valor de ω_p en el vector v_p está bien definido pues el valor de la función TX en p no depende del campo X particular elegido como extensión de v_p. Además, $\omega_p : \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$ es lineal, ya que, si $v_p, v'_p \in \mathrm{T}_pM$ y $a \in \mathbb{R}$, y si $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$ son campos suaves tales que $X_p = v_p$ y $X'_p = v'_p$, entonces $X + aX' \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo suave tal que $(X + aX')|_p = v_p + av'_p$. En particular, vale que

$$\omega_p(v_p + av'_p) = T(X + aX')(p) = TX(p) + aTX'(p) = \omega_p(v_p) + a\omega_p(v'_p) \ .$$

Así, se deduce que $\omega : M \to \mathrm{T}^*M$ es una 1-forma. Por otro lado, dado un campo suave $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\omega X(p) = \omega_p X_p = TX(p) \ .$$

Esta igualdad muestra dos cosas: en primer lugar, muestra que $\omega X = TX$ para todo campo suave X y, en segundo lugar, que $\omega X = TX \in C^\infty(M)$ para todo campo suave $X \in \mathfrak{X}(M)$. Por la proposición 6.3.2, la forma ω es suave.

De la misma manera que el teorema 6.1.5 dice que los campos suaves en una variedad M se corresponden con las derivaciones de $C^\infty(M)$, la observación anterior muestra que las 1-formas suaves se pueden caracterizar de manera similar.

Teorema 6.3.3. *Sea M una variedad diferencial. Toda 1-forma suave $\omega \in \Omega^1(M)$ define un morfismo de $C^\infty(M)$-módulos*

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

por $\omega : X \mapsto (\omega X : p \mapsto \omega_p X_p)$. Recíprocamente, todo morfismo $T : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ de $C^\infty(M)$-módulos determina una única 1-forma suave $\omega \in \Omega^1(M)$ tal que

$$\omega X = TX$$

para todo campo suave $X \in \mathfrak{X}(M)$.

6.3.2 El *pullback* de una 1-forma

Sean M y N variedades diferenciales y sea $F : M \to N$ una transformación suave. Sea $\omega : N \to \mathrm{T}^*N$ una 1-forma (no necesariamente continua) en N. Puntualmente, dado $p \in M$, se definía el pullback de $\omega_{F(p)}$ por F en p como el covector en T^*_pM dado por

$$\mathrm{d}^*_pF(\omega_{F(p)})(v_p) \;=\; \omega_{F(p)}(\mathrm{d}_pF(v_p)) \;.$$

Esta construcción da lugar a una 1-forma $F^*\omega$ definida en M (si ω está definida en un abierto $V \subset N$, entonces $F^*\omega$ queda definida en el abierto $F^{-1}(V) \subset M$): dado un punto $p \in M$, $(F^*\omega)|_p \in \mathrm{T}^*_pM$ es el covector dado por

$$(F^*\omega)|_p(v_p) \;=\; \omega_{F(p)}(\mathrm{d}_pF(v_p)) \;=\; \;,$$

es decir,

$$(F^*\omega)|_p \;=\; \mathrm{d}^*_pF(\omega_{F(p)}) \;.$$

En el caso de un campo, no es posible definir el *pushforward* del mismo, salvo casos muy particulares. En cuanto a 1-formas, no hay inconveniente en definir el *pullback* de una 1-forma por una transformación suave. En definitiva, dada una transformación suave $F : M \to N$, queda definida una transformación F^* que toma una 1-forma en N y devuelve una 1-forma en M (en el sentido opuesto). Esta aplicación es una transformación lineal ya que, bajando a un punto $p \in M$, se ve que

$$(F^*(a\omega + b\eta))|_p \;=\; \mathrm{d}^*_pF((a\omega + b\eta)|_{F(p)}) \;=\; a\mathrm{d}^*_pF(\omega_{F(p)}) + b\mathrm{d}^*_pF(\eta_{F(p)}) \;=\; a(F^*\omega)|_p + b(F^*\eta)|_p \;.$$

En definitiva,

$$F^*(a\omega + b\eta) = aF^*\omega + bF^*\eta$$

para todo par de 1-formas ω y η y números reales a y b.

Lema 6.3.4. *Sea $F : M \to N$ una transformación suave. Sea $u : N \to \mathbb{R}$ una función y sea $\omega : N \to \mathrm{T}^*N$ una 1-forma en N. Entonces*

$$F^*(u\omega) \;=\; (u \circ F)\, F^*\omega \;.$$

Si $u \in C^\infty(N)$, entonces

$$F^*du \;=\; d(u \circ F) \;.$$

Demostración. En las hipótesis del enunciado del lema, puntualmente,

$$\big(F^*(u\omega)\big)|_p \;=\; u(F(p))\mathrm{d}^*_pF(\omega_{F(p)}) \;=\; \big((u \circ F)\, F^*\omega\big)|_p \;.$$

Asumiendo que u es suave, su diferencial está bien definido y, dado $v \in \mathrm{T}_pM$, vale que

$$\begin{aligned}(F^*du)|_p \;&=\; d_{F(p)}u\big(\mathrm{d}_pF(v)\big) \;=\; \mathrm{d}_pF(v)u \\ &=\; v(u \circ F) \;=\; d_p(u \circ F)(v) \;.\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 6.3.5. *Sea $F : M \to N$ una transformación suave y sea $\omega : N \to \mathrm{T}^*N$ una 1-forma. Entonces, si ω es continua, $F^*\omega$ es una 1-forma continua en M. Si ω es suave, entonces $F^*\omega$ es una 1-forma suave en M.*

Demostración. Sea $p \in M$ un punto arbitrario de la variedad. Sea (V, ψ) una carta en $F(p)$ compatible con la estructura de N y sea $U = F^{-1}(V)$. Por continuidad de F, la preimagen U es abierta en M y contiene al punto p. En coordenadas, y usando el lema 6.3.4, se deduce que

$$F^*\omega \;=\; F^*\big(\omega_j dy^j\big) \;=\; (\omega_j \circ F)\, d(y^j \circ F)\ .$$

Ahora bien, ω es continua, si y sólo si las componentes ω_i son continuas. Por otro lado, las funciones $y^j \circ F : U \to \mathbb{R}$ son suaves, por que la carta (V, ψ) es compatible y F es suave. Esto implica que las 1-formas $d(y^j \circ F)$ (definidas en U) son suaves. En coordenadas,

$$d(y^j \circ F) \;=\; \frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i} dx^i\ .$$

Pero las funciones $\frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i}$ no son otra cosa que las componentes de la matriz jacobiana de F con respecto a estas coordenadas (donde estén definidas) y, por lo tanto, son funciones suaves.

En definitiva, si ω es continua, las componentes ω_i son continuas y la 1-forma en M dada por $F^*\omega$ se expresa localmente como combinación de formas suaves por funciones continuas, con lo que resulta ser continua. Y si ω es suave, las componentes son suaves y el pullback resulta ser suave, también. □

Sabiendo que $F^*\omega$ es una 1-forma continua, si ω lo es y que es suave, si ω lo es, se deduce que el pullback de F es una transformación lineal $F^* : \Omega^1(N) \to \Omega^1(M)$. Además, por 6.3.4, respeta en cierto sentido las estructuras de módulos sobre $C^\infty(M)$ y sobre $C^\infty(N)$, asignando, a una función (suave, continua, nada) g definida en N, la función (suave, continua, nada, respectivamente) $f = g \circ F$ en M (el pullback de g por F).

6.3.3 Integrar sobre segmentos

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo real compacto (a y b finitos). Sea $\omega \in \Omega^1([a, b])$ una 1-forma suave. Definiremos lo que significa integrar la 1-forma ω en/sobre el intervalo $[a, b]$ –o, mejor dicho, mostraremos que la noción intuitiva tiene sentido.

Antes de pasar a integrar sobre el intervalo, aplicamos los resultados generales sobre 1-formas al caso particular de formas sobre esta variedad. El intervalo, como variedad con borde se puede cubrir usando dos cartas: $([a, b), r : x \mapsto x-a)$ y $((a, b], s : x \mapsto -(x-b))$. Estas dos cartas son compatibles. El cambio de coordenadas en (a, b) está, en uno de los dos sentidos, dado por

$$x \;\mapsto\; x + a \;\mapsto\; -(x + a - b) = (b - a) - x\ ,$$

es decir, por invertir el intervalo $(0, b-a)$. Sea $\omega \in \Omega^1([a,b])$. En cada una de estas cartas, ω se puede escribir como un múltiplo, por una función suave, de los diferenciales de las funciones coordenadas respectivas:

$$\begin{aligned} \omega(r+a) &= f(r)\, dr \quad , \text{si } a \leq r < b \quad \text{y} \\ \omega(b-s) &= g(s)\, ds \quad , \text{si } a < s \leq b \ . \end{aligned}$$

El cambio de coordenadas $s \circ r^{-1}(x) = F(x) = (b-a) - x$ es la representación de la función identidad en (a,b). El pullback de ω por la identidad expresa la relación entre las dos representaciones de ω. Por un lado,

$$\mathsf{id}_{(a,b)}{}^*(g\, ds) = g \circ \mathsf{id}_{(a,b)} \cdot \big(\mathsf{id}_{(a,b)}{}^* ds\big) \ .$$

Para expresar $\mathsf{id}_{(a,b)}{}^* ds$ con respecto a la 1-forma dr, recurrimos a la definición:

$$\begin{aligned} (\mathsf{id}^* ds)|_x \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_x &= d_{\mathsf{id}(x)} s \cdot \mathrm{d}_x \mathsf{id}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_x \Big) \\ &= d_{\mathsf{id}(x)} s \Big(v \cdot \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{\mathsf{id}(x)} \Big) = v \ , \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} v &= \mathrm{d}_x \mathsf{id}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_x \Big)(s) = \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_x (s \circ \mathsf{id}) = (s \circ \mathsf{id} \circ r^{-1})'(r(x)) \\ &= F'(r(x)) = -1 \ . \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\begin{aligned} f\, dr = \omega = g\, ds &= \mathsf{id}_{(a,b)}{}^*\big(g\, ds\big) \\ &= g \circ \mathsf{id}_{(a,b)} \cdot \big(\mathsf{id}_{(a,b)}{}^* ds\big) = -g\, dr \end{aligned}$$

de lo que se deduce que $f = -g$

Volviendo a la cuestión de la integral, sea $\omega = f\, dr$ la expresión de una 1-forma suave en el abierto coordenado $[a,b)$. El punto b en el borde del intervalo es un *conjunto de medida nula.* Si bien esta noción no fue definida, pero es una propiedad deseable. Entonces, para integrar ω en $[a,b]$, debería, intuitivamente, ser suficiente considerar ω restringida a $[a,b)$, en donde la forma se puede representar como una función por la forma canónica dr proveniente de la carta $([a,b), r)$. Se define *la integral de ω en el inervalo* $[a,b]$ como

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_0^{b-a} f \circ r^{-1}(x)\, dx \ .$$

La integral así definida viene con un *sentido de integración*, se integra sobre $[a,b]$ de a hacia b. Tal vez de manera un poco más precisa ésta es la integral sobre un *intervalo* *orientado.* La integral $\int_{[a,b]} \omega$ está dada por la integral de Riemann de la representación en coordenadas $f \circ r^{-1}$ de la función f que representa a la forma ω en términos de la forma dr. En particular, $f \circ r^{-1}$ está definida en el intervalo abierto cerrado $[0, b-a)$.

Una *reparametrización de* $[a,b]$ es un difeomorfismo $\varphi : [c,d] \to [a,b]$. Usando la fórmula del pullback,

$$\varphi^*\omega \;=\; \varphi^*\big(f\, dr\big) \;=\; (f \circ \varphi) \cdot \varphi^* dr \;.$$

Si $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ (es decir, φ es creciente, es una *reparametrización*) y en $[c,d)$ la coordenada está dada por $s : [c,d) \to [0, d-c)$ con $s(x) = x - c$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi \circ s^{-1})^* dr \;&=\; (r \circ \varphi \circ s^{-1})' \cdot dx \;=\; (\varphi(x+c) - a)'(x)\, dx \\ &=\; \varphi'(x+c)\, dx \;=\; \varphi' \circ s^{-1}\, dx \;.\end{aligned}$$

Expresado de manera más concisa,

$$\begin{aligned}\varphi^* dr \;&=\; \varphi'\, ds \quad \text{y} \\ \varphi^*\omega \;&=\; \varphi^*\big(f\, dr\big) \;=\; (f \circ \varphi) \cdot \varphi'\, ds \;.\end{aligned}$$

En particular, en $[c,d)$, la integral del pullback es igual a

$$\int_{[c,d]} \varphi^*\omega \;=\; \int_{[c,d]} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'\, ds \;=\; \int_0^{d-c} (f \circ \varphi \circ s^{-1})(x)\, (\varphi' \circ s^{-1})(x)\, dx \;.$$

Dado que $\frac{\varphi' \circ s^{-1}}{|\varphi' \circ s^{-1}|} = +1$ en $[c,d]$, se deduce que

$$\int_{[c,d]} \varphi^*\omega \;=\; \int_0^{b-a} (f \circ r^{-1})(y)\, dy \;=\; \int_{[a,b]} \omega \;.$$

Si, en cambio, $\varphi(c) = b$ y $\varphi(d) = a$ (φ es decreciente), entonces

$$\begin{aligned}\int_{[c,d]} \varphi^*\omega \;&=\; \int_0^{d-c} (f \circ \varphi \circ s^{-1})(x)\, (\varphi' \circ s^{-1})(x)\, dx \\ &=\; -\int_0^{b-a} (f \circ r^{-1})(y)\, dy \;=\; -\int_{[a,b]} \omega \;,\end{aligned}$$

pues $\frac{\varphi' \circ s^{-1}}{|\varphi' \circ s^{-1}|} = -1$ en $[c,d]$, en ese caso.

Todo esto es para dar sentido a una identificación entre 1-formas diferenciables en un intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y funciones de manera de que se pueda hablar de la integral de una forma en términos de la noción conocida de integral de una función. Tal vez haya una manera más obvia de hacer esta identificación o alguna manera natural.

Una vez definida la noción de integral sobre un intervalo, integrar en variedades es algo más o menos directo.

Observación 6.3.3. En una variedad conexa, todo par de puntos se puede conectar por una curva C^1 (suave) a trozos.

Sea M una varieda diferencial y sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva suave (C^1), es decir, una transformación suave entre variedades, o bien una función que se extiende a un entorno del intervalo en $\mathbb{R}$ de manera que se obtenga una transformación suave. Dada $\omega \in \Omega^1(M)$, la *integral de* ω *sobre* γ se define como

$$\int_\gamma \omega \equiv \int_{[a,b]} \gamma^* \omega \ .$$

Si γ es suave a trozos, de manera que γ sea suave en ciertos subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$, entonces se define

$$\int_\gamma \omega \equiv \sum_i \int_{[a_i,a_{i+1}]} {\gamma_i}^* \omega \ ,$$

donde $\gamma_i = \gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$.

Observación 6.3.4. Dada $\gamma : [a,b] \to M$ suave a trozos, la integral sobre γ define una función lineal

$$\int_\gamma : \Omega^1(M) \to \mathbb{R}$$

e $\int_\gamma = 0$, si γ es un camino constante.

Observación 6.3.5. La relación con reparametrizaciones se mantiene en este contexto, también: si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ es una reparametrización de γ, entonces

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = + \int_\gamma \omega \quad \text{o} \quad - \int_\gamma \omega \ ,$$

de acuerdo a si $\tilde{\gamma}$ es una *reparametrización positiva*, es decir, si φ es creciente, o si, respectivamente, $\tilde{\gamma}$ es una *reparametrización negativa*, es decir, φ es decreciente.

Observación 6.3.6. Extendiendo por linealidad, la aplicación $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$ dada en curvas suaves a trozos, fijada la forma $\omega \in \Omega^1(M)$, determina una funcional lineal

$$\omega : \mathrm{C}_1(M) \to \mathbb{R}$$

en el espacio de 1-*cadenas suaves*. Más allá de esta extensión formal, integrar una forma respeta subdivisiones del intervalo: si $\gamma : [a,b] \to M$ y $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ y $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$, entonces

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \ .$$

Proposición 6.3.6. *Si* $F : M \to N$ *es suave y* $\eta \in \Omega^1(N)$*, dada* $\gamma : [a,b] \to M$*,*

$$\int_\gamma F^* \eta = \int_{F \circ \gamma} \eta \ .$$

Demostración.

$$\int_\gamma F^*\eta \;=\; \int_{[a,b]} \gamma^*(F^*\eta) \;=\; \int_{[a,b]} (F\circ\gamma)^*\eta \;=\; \int_{F\circ\gamma} \eta \;.$$

□

Proposición 6.3.7. *Si $\gamma:\,[a,b]\to M$ es una curva suave a trozos y $\omega\in\Omega^1(M)$,*

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\big(\dot\gamma(t)\big)\,dt$$

Demostración. Por definición,

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_{[a,b]} \gamma^* \;=\; \int_0^{b-a} f\circ r^{-1}(x)\,dx \;,$$

donde $r:\,[a,b)\to\mathbb{R}$ es la función coordenada $y\mapsto y-a$ y la integral es la integral de Riemann. Componiendo con la traslación, $x\mapsto x+a$, se obtiene la igualdad

$$\int_0^{b-a} f\circ r^{-1}(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(t)\,dt \;.$$

Esto corresponde a tomar la "carta de borde" $\mathsf{id}:\,[a,b)\to[a,b)$, en lugar de $r:\,[a,b)\to[0,b-a)$ que, si bien es lo correcto por definición, no es muy intuitivo.

Ahora bien, como no hay, propiamente, una carta global en $[a,b]$ –aunque γ se podría extender a un intervalo abierto, de forma que sí la haya– no es posible argumentar de la siguiente manera:

$$(\gamma^*\omega)_t\,\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_t \;=\; \omega_{\gamma(t)}\Big(\mathrm{d}_t\gamma\,\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_t\Big) \;=\; \omega_{\gamma(t)}\dot\gamma(t)\;.$$

De todas maneras, tomando coordenadas en M,

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega \;&=\; (\omega_j\circ\gamma)\cdot d\gamma^j \;=\; \omega_j\circ\gamma\cdot(\gamma^j)'\,dt\\ &=\; \omega_{\gamma(t)}\,\dot\gamma(t)\,dt\;.\end{aligned}$$

Por otro lado, porque $[a,b]$ es compacto, se puede subdividir el intervalo de manera que cada subintervalo de la división esté contenido en la preimagen del dominio de una carta. Aplicando el argumento anterior a cada subintervalo y usando la propiedad de que ω respeta subdivisiones,

$$\int_\gamma \omega \;=\; \sum_i \int_{\gamma_i}\omega \;=\; \sum_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} \omega_{\gamma_i(t)}\,\dot\gamma_i(t)\,dt\;.$$

Si γ es suave a trozos, se aplica el argumento en cada subintervalo en donde γ es suave y se suma como antes. □

Observación 6.3.7. Si ω es el diferencial de una función suave, $\omega = df$, entonces

$$\begin{aligned}\int_\gamma df &= \int_{[a,b]} \gamma^*(df) = \int_a^b \dot\gamma(t)\, f\, dt \\ &= \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\, dt = \sum_i f(\gamma(a_{i+1})) - f(\gamma(a_i)) \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\ .\end{aligned}$$

Observación 6.3.8. Si M es una variedad conexa y $f \in C^\infty(M)$, entonces $df = 0$ implica que f es constante.

Una 1-forma $\omega \in \Omega^1(M)$ se dice *exacta*, si existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega = df$. Si $f, g \in C^\infty(M)$ son funciones tales que $df = dg$, entonces $d(f-g) = 0$, por linealidad, y $f - g$ es constante en cada componente conexa de la variedad.

Observación 6.3.9. Dada una función suave $f \in C^\infty(M)$, la integral $\int_\gamma df$ es cero para toda curva suave a trozos γ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Tales curvas se denominan *cerradas*.

Una 1-forma se dice *conservativa*, si $\int_\gamma \omega = 0$ para todo camino suave a trozos cerrado γ. Un camino cerrado suave a trozos, no necesariamente es un "loop suave" (una transformación suave $\mathrm{S}^[1] \to M$).

Observación 6.3.10. Una 1-forma $\omega \in \Omega^1(M)$ es conservativa, si y sólo si $\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega$ para todo par de curvas suaves a trozos tales que empiecen en el mismo punto y terminen en el mismo punto en M.

Teorema 6.3.8. *Sea M una variedad diferencial. Sea $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma suave. Entonces ω es conservativa, si y sólo si es exacta.*

Capítulo 7

Ejemplos

Capítulo 8

Notas sueltas

8.1 Existencia de marcos continuos sobre curvas diferenciables

8.2 Planos como puntos

8.3 Suavidad de funciones, campos y formas

Lema 8.3.1. *Sea M una variedad diferencial y sea $p \in M$. Sean $v \in \mathrm{T}_p M$, $U \subset M$ un entorno de p y $f, g \in C^\infty(U)$. Si $f|_V = g|_V$ para cierto abierto tal que $V \subset U$ y $p \in V$, entonces $v\, f = v\, g$.*

Demostración. Sea $h = f - g$ y sea $\psi : M \to \mathbb{R}$ una función suave, $\psi \geq 0$, tal que existe una bola abierta B que verifica $p \in B \subset \mathsf{sop}(\psi) \subset V$ y $\psi|_B = 1$. En particular, $\psi(p) = 1$. Entonces $\psi\, h = 0$ en M y

$$0 \;=\; v(\psi\, h) \;=\; (v\, \psi)\, h(p) \;+\; \psi(p)\, (v\, h) \;=\; v\, h\ ,$$

pues $v(\psi\, h) = v(0) = 0$ y $\psi(p) = 1$ (no estamos usando que ψ es constante en un entorno de p). Así,

$$\psi\, h \;=\; \begin{cases} 0 & \text{en } U \setminus \mathsf{sop}(\psi) \\ 0 & \text{en } V \end{cases} \quad .$$

$\square$

Proposición 8.3.2. *Sea $X : M \to \mathrm{T}M$ una sección del fibrado tangente. Entonces X es suave (como sección), si y sólo si, para todo punto $p \in M$, existe una carta (U, ψ), compatible con la estructura de M, tal que $p \in U$ y con respecto a la cual las funciones $X^i : U \to \mathbb{R}$ determinadas por*

$$X|_U \;=\; X^i\, \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{8.1}$$

son suaves.

Demostración. En primer lugar, $X^i = X(x^i)$, evaluar el campo X en la función coordenada x^i. Que X sea suave quiere decir que, para toda carta compatible (U, φ), la expresión en coordenadas $\widehat{X} = \tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ –donde $\tilde{\varphi} : \tilde{U} = \pi^{-1}(U) \to \tilde{\varphi}(\tilde{U}) = U \times \mathbb{R}^n$ es la carta correspondiente $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ en $\mathrm{T}M$– es suave, en sentido usual. Pero $\widehat{X}$ está dada por

$$
\begin{aligned}
\widehat{X}(x) &= \widehat{X}(x^1, \ldots, x^n) \\
&= \big(X^1(\varphi^{-1}(x)), \ldots, X^n(\varphi^{-1}(x)), x^1(\varphi^{-1}(x)), \ldots, x^n(\varphi^{-1}(x))\big) \\
&= \big(\widehat{X}^1(x), \ldots, \widehat{X}^n(x), x^1, \ldots, x^n\big)\ .
\end{aligned}
$$

Esta expresión es válida para toda carta (U, φ) y todo campo $X : M \to \mathrm{T}M$, independientemente de su suavidad. En particular, X es suave (continua) en U, si y sólo si las funciones $\widehat{X}^i = X^i \circ \varphi^{-1}$ los son en $\varphi(U)$. Como $\varphi : U \to \varphi(U)$ es difeomorfismo, esto equivale a que las funciones $X^i : U \to \mathbb{R}$ sean suaves. □

Proposición 8.3.3. *Sea $X : M \to \mathrm{T}M$ una sección. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es suave;*
2. *$Xf \in C^\infty(M)$ para toda $f \in C^\infty(M)$;*
3. *$X|_U f \in C^\infty(U)$ para toda $f \in C^\infty(U)$.*

Antes de demostrar esto, vale la pena recordar que una función en M es suave en un punto respecto de una carta compatible, si y sólo si es suave, en el mismo punto, respecto de cualquier otra carta compatible.

Demostración. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, dados $p \in M$ y una carta (U, φ) en p, en un entorno del punto (en U),

$$
X\,f \;=\; X^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i}\ ,
$$

que es suave. Explícitamente, en coordenadas, si $x \in \varphi(U)$,

$$
\big(X\,f\big)(\varphi^{-1}(x)) \;=\; X^i \circ \varphi^{-1}(x)\,\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \;=\; \widehat{X}^i(x)\,\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x^i}(x)\ ,
$$

donde $\widehat{X}^i$ y $\widehat{f}$ son las representaciones en coordenadas de las funciones componentes X^i y f, definidas en U (en el caso de X^i) y en M. Entonces $X\,f$ es suave en un entorno de p. Como el punto fue elegido de forma arbitraria, $X\,f \in C^\infty(M)$.

Si vale 2, y $f \in C^\infty(U)$ para cierto abierto $U \subset M$, dado $p \in U$, existe una función $\psi : M \to \mathbb{R}$ suave tal que $\psi \geq 0$ y un abierto V tal que $p \in V$, $\overline{V} \subset U$, $\psi|_V = 1$ y $\mathsf{sop}(\psi) \subset U$. Sea $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ la función

$$
\tilde{f} \;:=\; \begin{cases} f\cdot\psi & \text{en } U \\ 0 & \text{en } M \smallsetminus \mathsf{sop}(\psi) \end{cases}\ .
$$

Como el soporte de la función ψ está contenido en U, esta función está bien definida y es suave. Además,

$$(\tilde{f}|_U)|_V \;=\; \tilde{f}|_V \;=\; f|_V \ ,$$

con lo cual, para $q \in V$,

$$\big(X|_U f\big)(q) \;=\; \big(X|_U \tilde{f}|_U\big)(g) \;=\; \big(X\,\tilde{f}\big)(q)\ .$$

Pero, por hipótesis, $X\,\tilde{f}$ es suave en M, con lo que $X|_U f$ es suave en V. Como $p \in U$ fue elegido de manera arbitraria, $X|_U f$ es suave en todo el abierto U.

Finalmente, si se cumple 3 y (U, φ) es una carta compatible, las componentes de X en la carta están dadas por

$$X|_U \;=\; X^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\ ,$$

donde $X^i = X|_U(x^i)$. Por hipótesis, cada una de estas funciones es suave en U y, por la Proposición 8.3.2, $X \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

Proposición 8.3.4. *Sea $\omega : M \to \mathrm{T}^*M$ una sección del fibrado cotangente. Entonces ω es suave, si y sólo si, para todo $p \in M$, existe una carta (U, φ) compatible, cuyo dominio contiene a p y tal que la representación en coordenadas*

$$\omega|_U \;=\; \omega_i\,\lambda^i \tag{8.2}$$

sea suave, es decir, de forma que las funciones $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ sean suaves, donde $\big\{\lambda^i|_p\big\}_i$ es la base dual de $\big\{\,\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\,\big\}_i$ en T^*_pM para $p \in U$.

Demostración. Sea $\pi : \mathrm{T}^*M \to M$ la proyección canónica del fibrado. Sea (U, φ) una carta compatible con la estructura de M y sean $\tilde{U} = \pi^{-1}(U) \subset \mathrm{T}^*M$ y $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to U \times \mathbb{R}^n$ las coordenadas correspondientes. La representación en coordenadas de la forma ω es la función $\widehat{\omega} = \tilde{\varphi} \circ \omega \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\widehat{\omega}(x) \;=\; \big(\widehat{\omega}_1(x),\,\ldots,\,\widehat{\omega}_n(x),\,x^1,\,\ldots,\,x^n\big)\ ,$$

donde $\widehat{\omega}_i = \omega_i \circ \varphi^{-1}$ y cada función $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ está determinada por la representación (8.2), es decir, $\omega_i = \omega|_U\big(\frac{\partial}{\partial x^i}\big)$. Así, $\omega : M \to \mathrm{T}^*M$ es, por definición, suave (continua) en U, si y sólo si las funciones $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ lo son. $\square$

Observación 8.3.5. Sea (U, φ) una carta, sea $\big\{\,\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\big\}$ la base dada por los campos coordenados en T_pM y sea $\big\{\lambda^i|_p\big\}_i$ la base dual. Sean $\{x^i\}_i$ las funciones coordenadas en U y sean $\big\{dx^i\big\}_i$ las 1-formas $(dx^i)\,X = X(x^i)$. Entonces, si $p \in U$ y $v \in \mathrm{T}_pM$,

$$dx^i\big|_p(v) \;=\; v(x^i)\ .$$

Pero $v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, donde $v^i = v(x^i)$. Como $\left\{\lambda^i|_p\right\}_i$ es la base dual a la base canónica,

$$\lambda^i|_p \, v \;=\; v^i \ ,$$

es decir, para cada índice i,

$$\lambda^i|_p \;=\; \left. dx^i\right|_p \ . \tag{8.3}$$

Proposición 8.3.6. *Sea $\omega : M \to \mathrm{T}^*M$ una sección. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *ω es suave;*
2. *$\omega\, X \in C^\infty(M)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$;*
3. *$\omega|_U X \in C^\infty(U)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$.*

Demostración. Asumiendo que $\omega : M \to \mathrm{T}^*M$ es suave y que $X \in \mathfrak{X}(M)$, para verificar la suavidad de $\omega\, X : p \mapsto \omega_p\, X_p$, verificamos que sea suave en coordenadas: sea (U, φ) una carta compatible. La expresión de la función en coordenadas está determinada por

$$\omega\, X \;=\; \omega|_U\Big(X^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) \;=\; X^i\Big(\omega|_U\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) \;=\; X^i\,\omega_i \ . \tag{8.4}$$

Por un lado, como X es suave en M, las funciones X^i son suaves en U. Por otro, como $\omega \in \Omega^1(M)$, vale que $\omega_i \in C^\infty(U)$. En definitiva, la función determinada por evaluar $\omega\, X$ es suave en U. Como la carta era arbitraria, la función es suave en M.

Asumiendo 2, sea $U \subset M$ un abierto y sea $X \in \mathfrak{X}(U)$. Sea $p \in U$ y sea $\psi : M \to \mathbb{R}$ una función suave tal que $\psi \geq 0$, $\psi|_V = 1$ en cierto abierto $V \subset U$, $p \in V$, $\overline{V} \subset U$ y $\mathsf{sop}(\psi) \subset U$. Sea $\tilde{X} : M \to \mathrm{T}M$ el *campo* dado por

$$\tilde{X} \;:=\; \begin{cases} \psi \cdot X & \text{en } U \\ 0 & \text{en } M \smallsetminus \mathsf{sop}(\psi) \end{cases} \ .$$

Como el soporte de la función chichón ψ está contenido en U, $\tilde{X}$ está bien definido y es suave en M. Pero, además, $\tilde{X}|_V = X|_V$. Por un lado, $\omega\, \tilde{X} \in C^\infty(M)$, por hipótesis. Por otro lado, si $q \in V$,

$$\big(\omega\, \tilde{X}\big)(q) \;=\; \omega_q\, \tilde{X}|_q \;=\; \omega_q\, X_q \;=\; \big(\omega|_U X\big)(q) \ .$$

Entonces $\omega|_U X$ es suave en V. Como $p \in U$ fue elegido de manera arbitraria, $\omega|_U X \in C^\infty(U)$.

Finalmente, asumiendo que vale 3 y que (U, φ) es una carta compatible, por hipótesis, las componentes $\omega_i = \omega|_U \frac{\partial}{\partial x^i}$ de ω en U son suave. Así, por la Proposición 8.3.4, se ve que ω es suave como sección, ya que la carta (U, φ) había sido elegida de manera arbitraria. $\square$

8.4 Particiones de la unidad

Lema 8.4.1. *Toda variedad topológica admite una base de bolas coordenadas precompactas.*

Demostración. Si $M = U$ es el dominio de una única carta, $\varphi : U \to \widehat{U}$ es un homeomorfismo con algún abierto de $\mathbb{R}^n$. Dado un abierto arbitrario W, diremos que una bola $B = \mathrm{B}_r(x) \subset W$ es una *bola premium* (o *especial*, *seleccionada*, *de calidad*, etc.) *en/para el abierto* W, si existe $r' > r$ tal que $\overline{\mathrm{B}_r(x)} \subset \mathrm{B}_{r'}(x) \subset W$. Consideramos el conjunto

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \left\{ \mathrm{B}_r(x) \text{ premium en } \widehat{U} \,:\, x \text{ tiene coordenadas racionales y } r > 0 \text{ es racional} \right\} .$$

Entonces $\widetilde{\mathcal{B}}$ tiene cardinal a lo sumo numerable y constituye una base para la topología de $\widehat{U}$. Como $\varphi : U \to \widehat{U}$ es un homeomorfismo, el conjunto $\mathcal{B} := \{B = \varphi^{-1}(\tilde{B}) \,:\, \tilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}\}$ es una base para la topología de U y es numerable. Por definición $\mathcal{B}$ está compuesto por bolas coordenadas precompactas.

En general, una variedad topológica arbitraria, M, se puede cubrir por una familia numerable de abiertos coordenados: $M = \bigcup_{n\geq 1} U_n$. Si $\mathcal{B} := \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{B}_n$, donde $\mathcal{B}_n$ es una base numerable de bolas precompactas para U_n, entonces $\mathcal{B}$ es numerable y constituye una base para la topología de M. Lo único que falta demostrar es que las bolas $B \in \mathcal{B}$ son precompactas *en* M.

Sea $B \in \mathcal{B}_n$ un elemento de la base. Por definición, $\overline{B}^{U_n}$ –la clausura *en* U_n de la bola– es compacta. Pero $\overline{B}^M$ es cerrada en M y contiene a B, de lo que se deduce que $\overline{B}^M \cap U_n$ es cerrado en U_n y contiene a B. Así,

$$\overline{B}^M \supset \overline{B}^M \cap U_n \supset \overline{B}^{U_n} .$$

Por otro lado, como $\overline{B}^{U_n}$ es compacta y "subespacio de subespacio es subespacio", $\overline{B}^{U_n}$ es compacta como subespacio de M. Como M es T_2, este conjunto es cerrado en M. Pero también contiene a B. En consecuencia, $\overline{B}^M \subset \overline{B}^{U_n}$. En definitiva, ambas clausuras coinciden, de lo que se deduce que B es precompacta. □

Observación 8.4.2. La afirmación del Lema 8.4.1 sigue siendo válida si se reemplaza "bolas coordenadas precompactas" por "bolas coordenadas regulares". Una bola coordenada regular es un abierto $B \subset M$ con las siguientes características: existe una carta (B', φ) y $r' > r > 0$ tales que $\overline{B} \subset B'$ y

$$\varphi(B) = \mathrm{B}_r(x) \quad , \quad \varphi(\overline{B}) = \overline{\mathrm{B}_r(x)} \quad \text{y} \quad \varphi(B') = \mathrm{B}_{r'}(x)$$

(notemos que no hemos introducido la noción de estructura suave). La única parte del argumento que se debe modificar es el párrafo final; el resto es válido luego de hacer el reemplazo textual. Supongamos que $B \in \mathcal{B}_n$ y que $\varphi_n : U_n \to \widehat{U}_n$ es el homeo de la carta compatible correspondiente. Por definición, $\varphi_n(B) = \mathrm{B}_r(x)$ para cierto $r > 0$ racional y $x \in \widehat{U}_n$ con coordenadas racionales y existe $r' > r$ tal que

$$\overline{\mathrm{B}_r(x)} \subset \mathrm{B}_{r'}(x) \subset \widehat{U}_n .$$

Si definimos $B' = \varphi_n^{-1}(\mathrm{B}_{r'}(x))$, entonces, *en* U_n,

$$\overline{B}^{U_n} \;=\; \varphi_n^{-1}\big(\overline{\mathrm{B}_r(x)}\big) \;\subset\; \varphi_n^{-1}\big(\mathrm{B}_{r'}(x)\big) \;=\; B' \;.$$

Pero $\overline{B}^M = \overline{B}^{U_n}$, porque B es precompacta en U_n (regular implica precompacta), según el Lema 8.4.1. Esto quiere decir que la expresión anterior es válida tomando clausura en M, en lugar de clausura en U_n:

$$\overline{B}^M \;=\; \overline{B}^{U_n} \;\subset\; B' \;.$$

Si asumimos que M es una variedad diferencial, podemos preguntarnos si la estructura adicional nos permite concluir algo más fuerte, o si, dicho de otra manera, este resultado tiene una versión "compatible" con la estructura diferencial.

Lema 8.4.3 (Porisma)**.** *Toda variedad diferencial admite una base de bolas coordenadas (suaves) regulares.*

Demostración. Reemplazar "homeo" por "difeo" en la demostración anterior. □

Lema 8.4.4. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto localmente finito de subconjuntos de M (un espacio topológico). Entonces*

1. $\widetilde{\mathcal{X}} := \{\overline{X} \,:\, X \in \mathcal{X}\}$ *es localmente finito;*
2. $\overline{\bigcup \mathcal{X}} = \bigcup \widetilde{\mathcal{X}}$.

Demostración. Sea $x \in M$. Sea $U \subset M$ un abierto al cual x pertenece. Si $U \cap \overline{X} \neq \varnothing$ e y es un elemento de este conjunto, entonces U es un entorno de y y, por lo tanto, $U \cap X \neq \varnothing$. En definitiva, para todo abierto $V \subset M$,

$$V \cap \overline{X} \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad V \cap X \neq \varnothing \;.$$

Así $\mathcal{X}$ es localmente finito, si y sólo si $\widetilde{\mathcal{X}}$ lo es. Esto demuestra **??**. En cuanto a 2, el conjunto $\overline{\bigcup \mathcal{X}}$ es cerrado y contiene a todo elemento de $\mathcal{X}$. Es decir,

$$\overline{X} \subset \overline{\bigcup \mathcal{X}} \;,$$

si $X \in \mathcal{X}$, lo que implica $\bigcup \widetilde{\mathcal{X}} \subset \overline{\bigcup \mathcal{X}}$. Por otro lado, si $x \in \overline{\bigcup \mathcal{X}}$, existe un entorno $U_0 \subset M$ de x, tal que $U_0 \cap X = \varnothing$ para casi todo $X \in \mathcal{X}$ (todos salvo finitos). Si definimos

$$\mathcal{A}_{x,0} \;:=\; \Big\{X \in \mathcal{X} \,:\, U_0 \cap X \neq \varnothing\Big\} \;,$$

entonces $\mathcal{A}_{x,0}$ es finito. Pero también sabemos que debe existir $y \in U_0 \cap \big(\bigcup \mathcal{X}\big)$, pues U_0 es entorno de x. Entonces $y \in U_0$ e $y \in X$ para algún $X \in \mathcal{X}$. Este conjunto X verifica $U_0 \cap X \neq \varnothing$ y $X \in \mathcal{A}_{x,0}$. Llamemos $A = \bigcup \mathcal{A}_{x,0}$ (la unión de los elementos de esta familia (finita) de conjuntos $X \in \mathcal{X}$). Entonces $y \in U_0 \cap A$. Eso se puede expresar de la siguiente manera:

$$U_0 \cap \left(\bigcup \S\right) = U_0 \cap A \ .$$

Si $V \subset M$ es una abierto tal que $x \in V$, $V \cap U_0$ es abierto, está contenido en U_0 y contiene a x. Nuevamente, podemos afirmar que existe $y \in (V \cap U_0) \cap \left(\bigcup \mathcal{X}\right)$. Así,

$$\begin{aligned} (V \cap U_0) \cap \left(\bigcup \mathcal{X}\right) \neq \varnothing & \quad \text{implica} \\ (V \cap U_0) \cap A \neq \varnothing & \quad \text{implica} \\ V \cap A \neq \varnothing \ . & \end{aligned}$$

Si $x \in \overline{\bigcup \mathcal{X}}$, por ser $A = \bigcup \mathcal{A}_{x,0}$ una unión finita,

$$x \in \overline{\bigcup \mathcal{A}_{x,0}} = \bigcup \left\{\overline{X} : X \in \mathcal{A}_{x,0}\right\} \subset \bigcup \widetilde{\mathcal{X}} \ .$$

□

Teorema 8.4.5. *Sea M una variedad topológica y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de M por abiertos. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topolgía de M. Existe un refinamiento numerable y localmente finito de $\mathcal{U}$ compuesto por elementos de $\mathcal{B}$.*

Proposición 8.4.6. *Dada una variedad topológica M, existe una familia numerable de compactos $\{K_n\}_{n\geq 1}$ tal que*

$$\operatorname{int}(K_n) \neq \varnothing \quad , \quad K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}) \quad y \quad M = \bigcup_{n\geq 1} K_n \ .$$

Demostración. La variedad M se puede cubrir por bolas precompactas. Como M es N_2, existe un subcubrimiento numerable. Ordenando este subcubrimiento y tomando la clausura de las bolas, se obtiene la familia de compactos: por ejemplo, $K_1 = \overline{B_1}$ se cubre por B_1 y el resto de las bolas, tomando un subcubrimiento finito, debe haber al menos una B_2 para cubrir K_1; numeramos $[_1, \ldots, [_2]Bn$ y definimos K_2 como la unión de $\overline{B_i}$, $i \leq n\ldots$ □

Demostración de 8.4.5. Sea $\{K_j\}_{j\geq 1}$ una familia numerable de compactos como en el enunciado de la Proposición 8.4.6. Sean

$$\begin{aligned} F_j &:= K_{j+1} \setminus \operatorname{int}(K_j) \quad \text{y} \\ W_j &:= \operatorname{int}(K_{j+2}) \setminus K_{j-1} \ . \end{aligned}$$

Si $j = 1$, $K_0 := \varnothing$. Cada F_j es cerrado y está contenido en el compacto K_{j+1} y es, por lo tanto, compacto. Para cada $x \in F_j$, existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$; elegimos, también, $B_x^j \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_x^j \subset U_x \cap W_j \ .$$

Como F_j es compacto y $\left\{B_x^j\ :\ x \in F_j\right\}$ es un cubrimiento por abiertos, podemos extraer un subcubrimiento finito: existen $x_1, \ldots, x_{n_j} \in F_j$ tales que

$$F_j \subset B_{x_1}^j \cup \cdots \cup B_{x_{n_j}}^j\ .$$

Definimos $\mathcal{V} := \left\{B_{x_i}^j\ :\ j \geq 1, n_j \geq i \geq 1\right\}$. Entonces $\mathcal{V}$ es numerable y la inclusión $B_{x_i}^j \subset U_{x_i}$ implica que es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Este refinamiento está conformado por elementos de la base $\mathcal{B}$, con lo que lo único que resta demostrar es que $\mathcal{V}$ es localmente finito.

Para demostrar esto, observamos que

$$|j - j'| \geq 3 \quad \Rightarrow \quad W_j \cap W_{j'} = \varnothing\ .$$

Como $B_{x_i}^j \subset W_j$, una intersección de la forma $B_{x_k}^j \cap B_{x_l}^{j'}$ es vacía salvo, posiblemente, para finitos valores de l y j'. En definitiva, si $x \in M$, basta tomar un elemento del mismo cubrimiento $\mathcal{V}$ que lo contenga, para verificar que $\mathcal{V}$ es localmente finito; cualquier elemento de $\mathcal{V}$ que contega a x es un abierto que demuestra la finitud local del cubrimiento en el punto. $\square$

Lema 8.4.7. *La función*

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

es suave.

Lema 8.4.8. *Si $r_1 < r_2$ son números reales, la función*

$$h(t) := \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$

verifica: ser suave, $h = 1$ en $t \leq r_1$ y $h = 0$ en $r_2 \leq t$. Además, $0 < h(t) < 1$, si $r_1 < t < r_2$.

Lema 8.4.9. *Si $0 < r_1 < r_2$, la función*

$$H(x) := h(|x|)$$

verifica: ser suave, $H = 1$ en $\overline{\mathrm{B}_{r_1}(0)}$ y $H = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{B}_{r_2}(0)$. Además, $0 < H(x) < 1$ en $\mathrm{B}_{r_2}(0) \setminus \overline{\mathrm{B}_{r_1}(0)}$.

Teorema 8.4.10 (Existencia de particiones suaves de la unidad)**.** *Sea M una variedad (diferencial). Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento de M por abiertos. Existe una partición de la unidad para M, subordinada a $\mathcal{U}$ y compuesta por funciones suaves.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}_\alpha$ bases numerables conformadas por bolas regulares para cada uno de los abiertos U_α y sea $\mathcal{B} = \bigcup_\alpha \mathcal{B}_\alpha$. Por el Teorema del refinamiento (Teorema 8.4.5), existe un refinamiento de $\mathcal{U}$, localmente finito, numerable y compuesto por elementos de la base $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{V} = \{B_i\}_{i\geq 1}$ dicho refinamiento.

Para cada i, B_i es una bola coordenada regular, por lo tanto, existen $B_i' \supset \overline{B_i}$ bolas coordenadas y cartas $\varphi_i : B_i' \to \mathrm{B}_{r_i'}(0)$ tales que $\varphi_i(B_i) = \mathrm{B}_{r_i}(0)$ para cierto $r_i < r_i'$ y $\varphi_i(\overline{B_i}) = \overline{\mathrm{B}_{r_i}(0)}$. Dentro de la bola $\mathrm{B}_{r_i'}(0)$, podemos definir una función suave H_i tal que $H_i = 1$ en $\overline{\mathrm{B}_{s_i}(0)}$, $H = 0$ en el complemento de $\mathrm{B}_{t_i}(0)$ y tome un valor intermedio en el anillo $\mathrm{B}_{t_i}(0) \smallsetminus \overline{\mathrm{B}_{s_i}(0)}$ (eligiendo $0 < s_i < t_i \leq r_i < r_i'$). Luego definimos $f_i : M \to \mathbb{R}$ por

$$f_i := \begin{cases} H_i \circ \varphi_i & \text{en } B_i' \\ 0 & \text{en } M \smallsetminus \overline{B_i} \end{cases} .$$

Entonces f_i está bien definida y es suave. Además, $\mathsf{sop}(f_i) \subset \overline{B_i}$ (son iguales, si $t_i = r_i$). Por otro lado, como $\{B_i\}_i$ es localmente finita, la familia de clausuras $\{\overline{B_i}\}_i$ también lo es y, en particular, $\{\mathsf{sop}(f_i)\}_i$ es localmente finita. En consecuencia, la expresión $f = \sum_i f_i$ está bien definida y es suave. Esta función verifica $f > 0$: en general, $f_i \geq 0$ en su dominio de definición, todo punto x pertenece a algún abierto B_i y, si $t_i = r_i$, $f_i > 0$ en dicho abierto.

Finalmente, definimos $g_i = f_i/f$. Estas funciones son suaves y suman 1 en M. Además, $\mathsf{sop}(g_i) = \mathsf{sop}(f_i) = \overline{B_i}$ es compacto. Para obtener una partición subordinada a $\mathcal{U}$, usamos el Axioma de elección… Cada conjunto B_i está incluido en algún abierto U_α. Denotamos por $\alpha = a(i)$ alguno de estos índices y definimos

$$\psi_\alpha := \sum_{i\,:\,a(i)=\alpha} g_i \ .$$

Algunas de estas sumatorias podrían ser vacías. La finitud local de los soportes de las g_i garantizan que estas nuevas funciones estén bien definidas y sean suaves. Las funciones ψ_α también cumplen que $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ y $\sum_\alpha \psi_\alpha = \sum_i g_i = 1$ en M. Por último, como las g_i son no negativas y estrictamente positivas en el correspondiente abierto B_i,

$$\begin{aligned} \mathsf{sop}(\psi_\alpha) \ &= \ \overline{\bigcup \{B_i \ : \ a(i) = \alpha\}} \ = \ \bigcup \{\overline{B_i} \ : \ a(i) = \alpha\} \\ &\subset \ \bigcup \{B_i' \ : \ a(i) = \alpha\} \ \subset \ U_\alpha \ . \end{aligned}$$

□

8.5 Inmersiones y embeddings

Proposición 8.5.1. *Toda inmersión es localmente embedding.*

Demostración. Si $f : N \to M$ es una inmersión y $p \in N$, existen cartas en p y en $q = f(p)$ tales que $\widehat{f} = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$, donde $n = \dim N$. En particular, f es inyectiva en un entorno U_1 de p en N. Sea $U \subset U_1$ otro entorno del punto tal que $\overline{U} \subset U_1$ y $\overline{U}$ sea compacta. Entonces $f|_{\overline{U}} : \overline{U} \to f(\overline{U})$ es biyectiva (y continua) entre compactos (Hausdorff) y, por lo tanto, subespacio. Restringiendo f al entorno U, $f|_U : U \to M$ es embedding. □

Otra demostración. Como f tiene rango constante, si $p \in N$, existen cartas (U, φ) y (V, ψ) para N en p y para M en $f(p)$, respectivamente, tales que $f(U) \subset V$ y

$$\widehat{f}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0) .$$

Sea $\epsilon' > 0$ tal que $\mathrm{C}^m_{\epsilon'}(0) \subset \psi(V)$ $(\psi(f(p)) = 0)$ y sea $V_0 = \psi^{-1}(\mathrm{C}^m_{\epsilon'}(0)) \subset V$. Como V_0 es abierto, $f|_U^{-1}(V_0) \subset U$ es abierto, por continuidad. Sea $W = U \cap f^{-1}(V_0) = f|_U^{-1}(V_0)$. Notamos que $p \in W$, por definición. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{C}^n_{\epsilon}(0) \subset \varphi(W)$ $(\varphi(p) = 0)$ y sea $U_0 = \varphi^{-1}(\mathrm{C}^n_{\epsilon}(0)) \subset W$. Entonces

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\mathrm{C}^n_{\epsilon}(0)) = \psi \circ f(U_0) \subset \psi \circ f(W) \subset \psi(V_0) = \mathrm{C}^m_{\epsilon'}(0) .$$

Con respecto a la expresión en coordenadas $\widehat{f}$, se deduce que $\epsilon \leq \epsilon'$ y que

$$\widehat{f}(\mathrm{C}^n_{\epsilon}(0)) = \left\{(x^1, \ldots, x^m) : |x^1|, \ldots, |x^k| < \epsilon,\, x^{k+1} = \cdots = x^m = 0\right\} .$$

Expresado de otra manera,

$$f(U_0) = V_1 \cap \left\{x^{k+1} = \cdots = x^m = 0\right\} ,$$

donde $V_1 = \psi^{-1}(\mathrm{C}^m_{\epsilon}(0))$. Vale observar que no es necesariamente cierto que U_0 sea exactamente igual a la preimagen de esta intersección por la transformación f.

En definitiva, si f tiene rango constante k (cerca de p), existen cartas (U_0, φ_0) y (V_0, ψ_0) centradas en p y en $f(p)$, respectivamente, tales que

$$\begin{aligned} \varphi_0(U_0) &= \mathrm{C}^n_{\epsilon}(0) , \\ \psi_0(V_0) &= \mathrm{C}^m_{\epsilon}(0) \quad \text{(mismo radio)}, \\ f(U_0) &= V_0 \cap \left\{\psi^{k+1} = \cdots = \psi^m = 0\right\} . \end{aligned}$$

□

Proposición 8.5.2. *Dado un embedding $f : N \to M$ y un punto $p \in N$, existe un entorno $V_1 \subset M$ de $q = f(p)$ tal que $f(N) \cap V_1$ sea una n-tajada de V_1.*

Demostración. Sean (U_0, φ_0) y (V_0, ψ_0) como en la demostración anterior. Dado que f es subespacio, existe un abierto $W \subset M$ tal que $f(U_0) = f(N) \cap W$. Tomamos $V_1 := V_0 \cap W$ y $\psi_1 = \psi_0|_{V_1}$. Entonces (V_1, ψ_1) es una carta para M centrada en q y vale que $f(U_0) \subset V_1$. Además,

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_0^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$$

$(k = n)$. Pero, entonces,

$$V_1 \cap \big\{\psi^{n+1} = \cdots = \psi^m = 0\big\} \;=\; f(U_0) \;=\; f(N) \cap V_1 \;,$$

lo que quiere decir que $f(N) \cap V_1$ es una n-tajada de V_1. $\square$

Proposición 8.5.3. *Si $f : N \to M$ verifica que, para todo punto $p \in N$, existe una carta (V, ψ) para M en $f(p)$ tal que $f(N) \cap V$ sea una n-tajada de V, entonces $f(N)$ tiene estructura de subvariedad regular.*

Demostración. A $S = f(N) \subset M$ le damos la topología subespacio. Con respecto a esta topología, S es T_2 y N_2. Sea

$$\mathcal{A} \;:=\; \big\{(V, \psi) \text{ carta para } M \;:\; U \cap S \text{ es } n\text{-tajada}\;\big\} \;.$$

Es decir, si $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, entonces

$$\psi(V) \;=\; \mathrm{C}^m_\epsilon\,(0) \quad \text{y} \quad \psi(V \cap S) \;=\; \mathrm{C}^m_\epsilon\,(0) \,\cap\, \big\{x^{n+1} = \cdots = x^m\big\} \;.$$

Sea $\pi : \psi(V) \to \mathbb{R}^n$ la proyección en las primeras n coordenadas y sea $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la inserción en las primeras n coordenadas. En términos de esta notación, observamos que $V \cap S$ es abierto en S, la restricción

$$\pi_V|_{\psi(V\cap S)} \;:\; \psi(V \cap S) \;\to\; \mathrm{C}^n_\epsilon\,(0)$$

es un homeo con inversa la restricción correstricción $j| : \mathrm{C}^n_\epsilon\,(0) \to \psi(V \cap S)$ y el par $(V \cap S, \pi_V \circ \psi)$ es una carta para S.

Ahora bien, como todo punto $p \in S$ pertenece al dominio de alguno de las cartas en $\mathcal{A}$, la familia

$$\mathcal{A}_S \;:=\; \big\{(V \cap S, \pi_V \circ \psi) \;:\; (V, \psi) \in \mathcal{A}\big\}$$

es un atlas para S. En definitiva, S es localmente euclidea de dimensión n y, por lo tanto, una variedad topológica.

Para darle estructura diferencial, corroboramos que el atlas $\mathcal{A}_S$ sea un atlas suavemente compatible. Sean (V, ψ) y (V', ψ') cartas en $\mathcal{A}$. El cambio de coordenadas

$$(\pi_V \circ \psi) \circ (\pi_{V'} \circ \psi')^{-1} \;:\; \pi_{V'} \circ \psi'\big((V \cap S) \cap (V' \cap S)\big) \;\to\; \pi_V \circ \psi\big((V \cap S) \cap (V' \cap S)\big)$$

está dado por

$$\begin{aligned}(\pi_V \circ \psi) \circ (\pi_{V'} \circ \psi')^{-1}(x^1, \ldots, x^n) \;&=\; \pi_V \circ \psi\big({\psi'}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)\big) \\ &=\; \pi_V(y^1, \ldots, y^m) \;=\; (y^1, \ldots, y^n) \;.\end{aligned}$$

Como ${\psi'}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$ está en S, debe ser $y^{n+1} (= \psi^{n+1}) = \cdots = y^m = 0$. De todos modos, como la composición $\psi \circ {\psi'}^{-1}$ es suave y π_V y j también lo son, las cartas son compatibles. En definitiva, la variedad S admite una estructura de variedad diferencial de dimensión n, sobre la topología de subespacio de M.

La inclusión $\iota_S : S \hookrightarrow M$ es un embedding: en coordenadas,

$$\psi \circ \iota_S \circ (\pi_V \circ \psi)^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0) \ .$$

En particular, ι_S es suave y tiene rango constante $n = \dim S$.

Si consideramos ahora $f| : N \to S$, dado $p \in N$ existen cartas preferenciales (U, φ) para N en p y (V, ψ) para M en $q = f(p)$. Como $f(N) = S$ tiene la propiedad de n-subvariedad, vale que $f(N) \cap V = \mathrm{C}^m_\epsilon(0) \cap \{\psi^{n+1} = \cdots \psi^m = 0\}$, con lo cual, $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ y $(V \cap S, \pi_V \circ \psi) \in \mathcal{A}_S$. Con respecto a estas cartas,

$$\begin{aligned}(\pi_V \circ \psi) \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) &= \pi_V \circ \widehat{f}(x^1, \ldots, x^n) = \pi_V(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0) \\ &= (x^1, \ldots, x^n) \ .\end{aligned}$$

Es decir, la representación en coordenadas es $(\pi_V \circ \psi) \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathsf{id}_{\mathrm{C}^n_\epsilon(0)}$, suave y, más aun, un difeomorfismo. Como $f| : N \to S$ es biyectiva y difeomorfismo local, debe ser difeomorfismo. En particular, $f : N \to M$ tiene rango constante (el rango de ι_S) y es subespacio. $\square$

Bibliografía