Un pantallazo de formas modulares

Noviembre 2025

Las formas modulares elípticas son funciones definidas en el semiplano complejo superior que cumplen con cierta regla de transformación con respecto a la acción de cierto subgrupo discreto de $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$. Los espacios de formas modulares son de dimensión finita y esta propiedad los hace amenos a cálculos explícitos. Estas funciones aparecen naturalmente en conexión con problemas de áreas diversas, en particular, Teoría de números.

1 Definiciones

1.1 Un grupo

El grupo lineal (especial) de rango 2 jugará un rol fundamental en toda la discusión. El grupo con coeficientes reales está definido de la siguiente manera:

$$\mathsf{SL}(2,\mathbb{R}) \;=\; \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,:\, a,b,c,d \in \mathbb{R},\, ad-bc=1 \right\}.$$

Como transformaciones del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$, estas matrices preservan volumen y orientación, aunque no todas preservan las distancias entre puntos del plano. Dentro del plano, tenemos el retículo $\mathbb{Z}^2$ de puntos con coordenadas enteras. El *grupo modular* es el subgrupo del grupo lineal especial que preserva este retículo:

$$\Gamma \;=\; \mathsf{SL}(2,\mathbb{Z}) \;=\; \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,:\, a,b,c,d \in \mathbb{Z},\, ad-bc=1 \right\}.$$

Algunas matrices pertenecientes a $\mathsf{SL}(2,\mathbb{Z})$ son:

$$\begin{bmatrix} 1 & h \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \pm \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $\gamma \in \Gamma$, entonces ${}^t\gamma \in \Gamma$ también.

1.2 Funciones en el semiplano de Poincaré

El *semiplano complejo superior* está conformado por los números complejos con parte imaginaria definida positiva:

$$\mathfrak{H} \;=\; \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathsf{Im}(z) > 0 \right\} \,.$$

El grupo $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ actúa en $\mathfrak{H}$ por *transformaciones de Möbius*: si $z \in \mathfrak{H}$ y $\gamma \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$, definimos un nuevo punto de la siguiente manera:

$$\gamma\langle z\rangle \;=\; \frac{az+b}{cz+d} \,. \tag{1}$$

Dado que $\mathsf{Im}(z) > 0$ y $c, d \in \mathbb{R}$ no ambos nulos, se deduce que $cz + d \neq 0$. Además,

$$\mathsf{Im}(\gamma\langle z\rangle) \;=\; \frac{\mathsf{Im}(z)}{|cz+d|^2} \,, \tag{2}$$

de lo que se deduce que $\gamma\langle z\rangle \in \mathfrak{H}$. Que (1) defina una *acción* quiere decir que, si $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ y $z \in \mathfrak{H}$, entonces $(\gamma\gamma')\langle z\rangle = \gamma\langle\gamma'\langle z\rangle\rangle$. Las matrices escalares, $\pm \left[\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right]$, actúan trivialmente, es decir, no mueven ningún punto.

Definición 1.1. Una *forma modular* es una función $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ que

(M1) es holomrfa,

(M2) existe k tal que, para toda $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma$ y $z \in \mathfrak{H}$, cumple

$$f(\gamma\langle z\rangle) \;=\; (cz+d)^k\, f(z) \quad \text{y} \tag{3}$$

(M3) está acotada en regiones de la forma $\{y \geq \delta\}$, para todo $\delta > 0$.

El número k es el *peso* de la forma.

Observación 1.2. Si f es una forma modular, por (M2), la función es, en particular, periódica de período 1: $f(z+1) = f(z)$, si $z \in \mathfrak{H}$. Esto implica que existe una función g tal que

$$f(z) \;=\; g(e^{2\pi i z}) \,.$$

El dominio de definición de g es $D \smallsetminus \{0\}$, donde

$$D \;=\; \left\{ q \in \mathbb{C} \,:\, |q| < 1 \right\} \,.$$

Como, por (M1), f es holomorfa en $\mathfrak{H}$, la función g es holomorfa en el disco pinchado. La transformación $z \mapsto q = e^{2\pi i z}$ es holomorfa y la imagen de un subconjunto $\{y \geq \delta\}$, $\delta > 0$, es un disco (pinchado y con borde) de radio $e^{-2\pi\delta}$. Ahora, por (M3), $f(z)$ está acotada en $\{y \geq \delta\}$. En consecuencia, g está acotada en un entorno de $q = 0$. Pero esto quiere decir que g se extiende a una función holomorfa definida en todo el disco D. El desarrollo de Taylor de g en $q = 0$ da lugar a un desarrollo de f "en ∞":

$$f(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n\, e^{2\pi i n z}\;. \tag{4}$$

Se dice que la serie en (4) es el *desarrollo de Fourier de f en el infinito*. La serie comienza en $n = 0$, porque la función g es holomorfa. Por esta razón, se suele decir que f es "holomorfa en ∞".

A veces se escribe q, en lugar de $e^{2\pi i z}$. Es la existencia de estos desarrollos lo que hace relevantes a las formas modulares en el contexto de Teoría de números.

1.3 El dominio fundamental

Si una función f satisface (M2) con $k = 0$, entonces f define una función en las órbitas $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$. Si $k \neq 0$, esto no es cierto (salvo talvez en el caso de la función constante 0). Sin embargo, entender el comportamiento de f en un conjunto de representantes adecuado es esencialmente todo lo que se necesita para algunas aplicaciones.

Ahora bien, el grupo modular Γ contiene las matrices $\pm I$, que son los únicos elementos de $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ que actúan trivialmente en $\mathfrak{H}$. En particular, toda forma modular de peso entero impar debe ser idénticamente cero. Si $\gamma \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$, será conveniente pensar en las matrices $\pm\gamma$ como la misma.

Observación 1.3. Módulo $\pm I$, el subgrupo $\Gamma \leq \mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ está generado por las matrices

$$T \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S \;=\; \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}\;.$$

Estas matrices actúan de la siguiente manera:

$$z \;\mapsto\; z+1 \quad \text{y} \quad z \;\mapsto\; -1/z\;.$$

En particular, para verificar si una función f cumple con la propipedad (M2), alcanza con verificar que se cumplan las siguientes igualdades:

$$f(z+1) \;=\; f(z) \quad \text{y} \quad f(-1/z) \;=\; z^k\, f(z)\;,$$

donde k sería el peso de f.

Definición 1.4. Un *dominio fundamental* es un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{H}$ que

(F1) es abierto,

(F2) no contiene dos puntos de la misma órbita y toda órbita interseca su clausura y

(F3) es conexo.

Teorema 1.5. *El conjunto*

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathfrak{H} \,:\, |z| > 1,\ |\mathsf{Re}(z)| < 1/2 \right\}$$

es un dominio fundamental para Γ.

Demostración. Si $z \in \mathfrak{H}$, el subconjunto $L = \{mz + n \,:\, m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ es un retículo y posee un punto de módulo mínimo $cz + d$ (minimiza $|mz + n|$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos). Deber ser $(c, d) = 1$, por minimalidad. Entonces, existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que $\gamma_1 = \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Por la fórmula (2), el valor $\mathsf{Im}(\gamma_1\langle z\rangle)$ es máximo entre $\mathsf{Im}(\gamma\langle z\rangle)$, $\gamma \in \Gamma$. Sea $h \in \mathbb{Z}$ tal que $|\mathsf{Re}(\gamma_1\langle z\rangle + h)| \le 1/2$ y sea $z^* = T^h\gamma_1\langle z\rangle = \gamma_1\langle z\rangle + h$. El punto $z^* \in \overline{\mathcal{F}}$: si fuese $|z^*| < 1$, entonces $\mathsf{Im}(S\langle z^*\rangle) = \mathsf{Im}(z^*)/|z^*|^2 > \mathsf{Im}(z^*)$ contradiría la maximalidad de $\mathsf{Im}(z^*)$.

Supongamos, ahora, que $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$ y que $\gamma \in \Gamma$ satisfacen $\gamma\langle z_1\rangle = z_2$. Como $|\mathsf{Re}(z_1)| < 1/2$ y también $|\mathsf{Re}(z_2)| < 1/2$, debe ser $c \ne 0$, o bien $c = b = 0$ (o sea $\gamma = \pm I$; hay una fórmula para la parte real, también, pero oscurecería; talvez en otros contextos tal fórmula se vuelve imprescindible, por falta de intuición o visión/visibilidad). Si fuese $c \ne 0$, notando que $\mathsf{Im}(z) > \sqrt{3}/2$ para $z \in \mathcal{F}$, se ve que

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \mathsf{Im}(z_2) = \frac{\mathsf{Im}(z_1)}{|cz_1 + d|^2} \le \frac{\mathsf{Im}(z_1)}{c^2\mathsf{Im}(z_1)^2} < \frac{2}{c^2\sqrt{3}} .$$

Pero, entonces, debería ser $c = \pm 1$. Esto es absurdo, pues $|\pm z_1 + d| \ge |z_1| > 1$ y, por lo tanto, suponiendo sin pérdida de generalidad que era $\mathsf{Im}(z_1) \le \mathsf{Im}(z_2)$,

$$\mathsf{Im}(z_1) \le \mathsf{Im}(z_2) = \frac{\mathsf{Im}(z_1)}{|\pm z_1 + d|^2} < \mathsf{Im}(z_1) .$$

$\square$

1.4 La dimensión de los espacios de formas

Si bien una forma modular no define una función en el espacio de órbitas $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$, sí tiene sentido hablar de los ceros de una forma modular en este cociente: el factor de automorfía $cz + d$ no tiene ni ceros ni polos en $\mathfrak{H}$, si $\left[\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma$. Más precisamente, si $z \in \mathfrak{H}$, $\gamma \in \Gamma$ y f es una forma modular, entonces

$$\mathsf{ord}_{\gamma\langle z\rangle}(f) = \mathsf{ord}_z(f) .$$

El hecho de que los espacios de formas modulares $\mathcal{M}_k$ son de dimensión finita, es consecuencia de que la cantidad de ceros (con multiplicidad) de $f \in \mathcal{M}_k$ que pertenecen a distintas órbitas (es decir, los ceros en $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$) depende sólo de k (y de Γ). Técnicamente, también es necesario tener en cuenta la contribución del orden de anulación de f en ∞ y contar adecuadamente la contribución de ciertos puntos especiales, los puntos elípticos.

Definición 1.6. Un *punto elíptico* en $\mathfrak{H}$ es un punto que queda fijo por alguna matriz $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \ne \pm I$.

Observación 1.7. Los únicos puntos elípticos en $\overline{\mathcal{F}}$ son i, ω y $\omega+1$. Con respecto a estos puntos, los estabilizadores (en Γ) tienen órdenes 4 y 6, respectivamente (ω y $\omega+1$ pertenecen a la misma órbita, con lo que sus estabilizadores son conjugados). El resto de los puntos tiene estabilizador $\pm I$. Para cada punto $z \in \mathfrak{H}$, definimos un entero n_z de la siguiente manera:

$$n_z = \begin{cases} 2\,, & \text{si} \quad z \in \Gamma\langle i\rangle\,, \\ 3\,, & \text{si} \quad z \in \Gamma\langle \omega\rangle \quad \text{y} \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 1.8. El *orden de anulación en* ∞ de una forma modular es el menor $n \geq 0$ tal que el coeficiente a_n en su desarrollo de Fourier es distinto de cero.

Teorema 1.9. *Sea $f \in \mathcal{M}_k$, $f \neq 0$. Entonces,*

$$\sum_{z \in \Gamma\backslash\mathfrak{H}} \frac{1}{n_z}\,\mathsf{ord}_z(f) \;+\; \mathsf{ord}_\infty(f) \;=\; \frac{k}{12}\;.$$

La sumatoria en el Teorema 1.9 se realiza sobre cualquier sistema de representantes de la órbitas de Γ en $\mathfrak{H}$.

Demostración. Sea $D = D(\epsilon)$ el cerrado que queda después de eliminar de $\overline{\mathcal{F}}$ discos (abiertos) de radio $\epsilon > 0$ (suficientemente chico) centrados en cada cero de f, en cada punto elíptico, así como el abierto $\{y > \epsilon^{-1}\}$. Integrando a lo largo del borde de este cerrado $f'(z)/f(z)$, el resultado es 0. Ahora calculamos la integral en distintos segmentos, sumamos y comparamos con el resultado anterior.

El contorno de los entornos removidos de los ceros y de los puntos elípticos son:

- un círculo entero, si es alrededor de un punto no elíptico,
- medio círculo, si es alrededor de i y
- un tercio de círculo, si es alrededor de ω.

La integral a lo largo de un borde vertical se compensa con la integral a lo largo del borde opuesto ($f(z+1) = f(z)$ y la orientación se invierte). La integral a lo largo del borde $\{y = \epsilon^{-1}\}$ aporta $2\pi i\mathsf{ord}_\infty(f)$, pues, vía el cambio de variables $z \mapsto q$, integramos alrededor de un círculo pequeño centrado en $q = 0$ (recorrido una vez, en sentido antihorario). La contribución de la integral a lo largo de un círculo centrado en un punto z es $2\pi i\mathsf{ord}_z(f)/n_z$. Por último, la integral a lo largo del arco inferior de $\overline{\mathcal{F}}$ da como resultado $\pi i k/6$, pues las dos mitades del arco se identifican vía S y

$$\big(\log f(S\langle z\rangle)\big)' \;=\; \big(\log f(z)\big) \;+\; \frac{k}{z}\;.$$

$\square$

Corolario 1.10. *La dimensión de* $\mathcal{M}_k$ *es* 0 *si* $k < 0$ *o impar. Si* $k \geq 0$ *es par, entonces*

$$\dim \mathcal{M}_k \leq \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor + 1 \ , & si \quad k \not\equiv 2 \, (\mathrm{mod}\, 12) \quad y \\ \lfloor k/12 \rfloor \ , & si \quad k \equiv 2 \, (\mathrm{mod}\, 12) \ . \end{cases}$$

Demostración. Tomar $m = \lfloor k/12 \rfloor + 1$ puntos no elípticos y $m+1$ formas $f_1, \ldots, f_{m+1} \in \mathcal{M}_k$. Alguna combinación lineal de ellas, f, se anula en los m puntos. Pero como $m > k/12$, por el Teorema 1.9, $f = 0$. Si $k \equiv 2 \, (\mathrm{mod}\, 12)$, se puede mejorar la cota teniendo en cuenta la fórmula del Teorema 1.9. □

Corolario 1.11. *El espacio* $\mathcal{M}_{12}$ *tiene dimensión* ≤ 2 *y, si* $f, g \in \mathcal{M}_{12}$ *son linealmente independientes, entonces* $z \mapsto f(z)/g(z)$ *es un isomorfismo entre* $\Gamma \backslash \mathfrak{H} \cup \{\infty\}$ *y* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Demostración. La cota se deduce del Corolario 1.10. Sean $f, g \in \mathcal{M}_{12}$ dos formas linealmente independientes. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, no ambos nulos, entonces la cantidad de ceros en $\Gamma \backslash \mathfrak{H} \cup \{\infty\}$ de la diferencia $\lambda f - \mu g$ es exactamente 1 (tiene peso 12). En particular, el cociente $\psi(z) = f(z)/g(z)$ toma cada valor de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ exactamente una vez. □

Observación 1.12. Toda terna de formas modulares es algebraicamente dependiente: si f, g y h fuesen formas modulares algebraicamente independientes, entonces, para k suficientemente grande, la dimensión de $\mathcal{M}_k$ sería, al menos, la cantidad de monomios en las variables f, g y h de peso total k, que es cuadrática en k.

Una consecuencia importante es que, para comparar dos formas modulares de igual peso (y grupo), basta con comparar una cantidad finita de coeficientes.

2 Ejemplos

2.1 Series de Eisenstein

Las series de Eisenstein son ejemplos clásicos de formas modulares. Una manera de definirlas es mediante una especie de promedio de la acción de Γ sobre una función particular que, en principio, podría no ser modular. El resultado cumplirá con la condición (M2), al menos formalmente. El problema es verificar que la definición es buena.

Dadas una función $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$, $g \in \mathsf{SL}(2, \mathbb{R})$, $z \in \mathfrak{H}$ y k, definimos una nueva función de la siguiente manera:

$$\big(f \,|_k\, g\big)(z) \;=\; (cz + d)^{-k} \, f(g\langle z \rangle) \ , \tag{5}$$

si $g = \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. De esta manera, podemos ver que la condición (M2) es equivalente a $f \,|_k\, \gamma = f$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Si $f = 1$ es la función constante con valor 1 y $g = \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, entonces

$$1 \,|_k\, g \;=\; \frac{1}{(cz + d)^k} \ .$$

En particular, si k es par, $1 \mid_k \gamma = 1$ para toda γ en el subgrupo

$$\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & h \\ & 1 \end{bmatrix} : h \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Este subgrupo se puede entender como el estabilizador del punto en el infinito. Más aun, si $\gamma \in \Gamma_\infty$, entonces $1 \mid_k (\gamma g) = 1 \mid_k g$. Es decir, $1 \mid_k g$ sólo depende de la coclase $\Gamma_\infty g \subseteq \mathsf{SL}(2, \mathbb{R})$.

Definición 2.1. Dado $k \in \mathbb{Z}$, par, la *serie de Eisenstein de peso k* es la serie

$$E_k(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1 \mid_k \gamma .$$

Observación 2.2. La serie E_k coincide con[1]

$$E_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cz+d)^k} . \tag{6}$$

La serie (6) es absoluta y uniformemente convergente sobre compactos de $\mathfrak{H}$, si $k > 2$: fijado z, la cantidad de pares (c, d) que cumplen $N \leq |cz + d| < N + 1$ es del orden de N. En particular, si $k > 2$, entonces E_k es una forma modular de peso k.

Otra versión de la serie de Eisenstein –otra normalización– es la serie

$$G_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k} . \tag{7}$$

Esta serie es un múltiplo de E_k dada por (6):

$$G_k(z) = \zeta(k)\, E_k(z) ,$$

donde $\zeta(k) = \sum_{r \geq 1} r^{-k}$. Esta normalización surge naturalmente al considerar sumas sobre los puntos de retículos $L \subset \mathbb{C}$. Las series $G_k(z)$ corresponden a los retículos $L = \mathbb{Z}\, z + \mathbb{Z}\, 1$.

Una tercera normalización de las series de Eisenstein es la siguiente:

$$\mathbb{G}_k(z) = \frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k}\, G_k(z) . \tag{8}$$

La serie (8) tiene coeficientes racionales.

Teorema 2.3. *El anillo de formas modulares es un anillo de polinomios en E_4 y E_6.*

Corolario 2.4. *La desigualdad del Corolario 1.10 es una igualdad.*

[1] Todo par $(c, d) = 1$ es la fila inferior de alguna $\gamma \in \Gamma$. Además, dos matrices γ y γ' cumplen $\gamma' \gamma^{-1} \in \Gamma_\infty$, si y sólo si $\mathsf{det}\, \gamma = \mathsf{det}\, \gamma'$ y sus filas inferiores son iguales.

Demostración. El argumento es el siguiente:

1. las formas modulares E_4 y E_6 son algebraicamente independientes,
2. el subespacio generado por E_4 y por E_6 en peso k tiene dimensión igual a la cota del Corolario 1.10,
3. la dimensión de $\mathcal{M}_k$ es, al menos, la dimensión del subespacio de 2.
4. de la coincidencia de la cota superior con la cota inferior para la dimensión de $\mathcal{M}_k$, se deduce el Corolario,
5. de 4. y de 1., se deduce el Teorema.

Veamos cómo se deduce cada parte.

1. Las series $E_4(z)^3$ y $E_6(z)^2$ son ambas de peso 12, pero no son proporcionales (no son l.i.). En caso de que lo fueran, existiría $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tal que $E_6(z)^2 = \lambda E_4(z)^3$. La función $f(z) = E_6(z)/E_4(z)$ es meromorfa en $\mathfrak{H}$ y en ∞. Además, cumple (M2) con $k = 2$. Pero la existencia de λ implicaría que $f(z)^2 = \lambda E_4(z)$ (y también que $f(z)^3 = \lambda^{-1} E_6(z)$). En particular, f sería una forma modular no nula de peso 2. Esto contradice la cota $\mathsf{dim}\, \mathcal{M}_2 \leq 0$. De esta independencia lineal, se deduce la independencia algebraica por un argumento general.

Si f y g son formas modulares de igual peso que no son proporcionales, entonces son algebraicamente independientes. Si $P(X, Y)$ es un polinomio con coeficientes complejos tal que $P(f, g)$ es la función nula, entonces para cada componente homogénea P_d de P, la función $P_d(f, g)$ debe ser la función nula. Deshomogeizando, $P_d(f, g)/g^d = p(f/g)$, para cierto polinomio p en una única variable. Pero p tiene, a lo sumo, finitas raíces, o bien es el polinomio nulo. Como el cociente $f(z)/g(z)$ toma infinitos valores... p debe ser el polinomio nulo. En particular, P_d es nulo, por lo tanto, P es nulo y, en consecuencia, f y g deben ser algebraicamente independientes.

2. La función $E_4(z)^x E_6(z)^y$ es una forma modular de peso $4x+6y$ (si x e y son enteros no negativos). El subespacio generado por E_4 y por E_6 en peso k es el generado por el subconjunto

$$\mathcal{S}_k = \left\{ E_4(z)^x E_6(z)^y \,:\, 4x + 6y = k \right\} . \tag{9}$$

Ahora, si $k \in \mathbb{Z}$, la ecuación $4x + 6y = k$ tiene solución $x, y \in \mathbb{Z}$, si y sólo si $2 \mid k$ y, en tal caso, las soluciones están dadas por los pares

$$\big(-k/2 + 3t, k/2 - 2t \big) ,$$

con $t \in \mathbb{Z}$. La condición $x, y \geq 0$ equivale a $k/6 \leq t \leq k/4$. Si escribimos $k = 12l + r$ ($r \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$), entonces la cantida de enteros t en el rango es igual a $l + 1$, si $r \neq 2$, y es igual a l, si $r = 2$.

3. $\mathcal{M}_k$ contiene un subespacio de la dimensión especificada.

4. Las cotas coinciden y, por lo tanto, vale la igualdad.

5. Toda forma pertenece a algún espacio $\mathcal{M}_k$ y, por lo tanto, es combinación lineal de los monomios $E_4^x E_6^y$, $4x+6y = k$. O sea, E_4 y E_6 generan el anillo $\mathcal{M}$. La independencia algebraica de estos generadores implica que $\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}[X, Y]$. □

2.2 El desarrollo de las series de Eisenstein

Teorema 2.5. *La serie de Eisenstein $\mathbb{G}_k(z)$, $k > 2$, par, admite el siguiente desarrollo:*

$$\mathbb{G}_k(z) \;=\; -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n\geq 1} \sigma_{k-1}(n)\, q^n \tag{10}$$

Los números de Bernoulli B_k están dados por la siguiente fórmula

$$\left(e^X - 1\right) \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} X^k \;=\; X \;. \tag{11}$$

Recursivamente, se pueden calcular los valores de B_k.

Demostración. El Teorema 2.5 es consecuencia de la siguiente identidad:[2]

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+n} \;=\; \frac{\pi}{\tan \pi z} \;. \tag{12}$$

La función $\pi/\tan \pi z$, que tiene período 1, admite el siguiente desarrollo:[3]

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} \;=\; -2\pi i \left(\frac{1}{2} + \sum_{r\geq 1} q^r\right) \;.$$

Derivar $k-1$ veces dentro de la sumatoria (esto es correcto para $k \geq 2$ y $z \in \mathfrak{H}$) y dividir por $(-1)^{k-1}\,(k-1)!$ para deducir la fórmula de Lipschitz:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} \;=\; \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r\geq 1} r^{k-1}\, q^r \;.$$

Separar la sumatoria $G_k(z)$ $(k > 2)$ en $m = 0$ y $m \neq 0$ y usar que $\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \frac{B_k}{2k}$. □

Observación 2.6. Para $k \in \{4, 6, 8\}$, los desarrollos de Fourier de las series $E_k(z)$ comienzan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E_4(z) \;&=\; 1 \,+\, 240\,q \,+\, 2160\,q^2 \,+\, \dots \;, \\ E_6(z) \;&=\; 1 \,-\, 504\,q \,-\, 16632\,q^2 \,-\, \dots \quad \text{y} \\ E_8(z) \;&=\; 1 \,+\, 480\,q \,+\, 61920\,q^2 \,+\, \dots \;. \end{aligned}$$

Si notamos que $\mathsf{dim}\,\mathcal{M}_k = 1$, si $k \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$, podemos deducir algunas identidades entre las series de Eisenstein, así como identidades que involucran sumas de potencias de divisores:

$$\begin{aligned} E_4(z)^2 \;&=\; E_8(z) \;, E_4(z)E_6(z) \;=\; E_{10}(z) \quad \text{y} \\ E_6(z)E_8(z) \;&=\; E_4(z)E_{10}(z) \;=\; E_{14}(z) \;. \end{aligned}$$

Análogamente, como $\mathsf{dim}\,\mathcal{M}_{12} = 2$, debe existir una relación lineal entre $E_4(z)E_8(z)$, $E_6(z)^2$ y $E_{12}(z)$:

$$441\, E_4(z)E_8(z) \,+\, 250\, E_6(z)^2 \;=\; 691\, E_{12}(z) \;.$$

[2] La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ se interpreta como $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N}$ (o de $-M$ a N, con M y N tendiendo a ∞ de manera que $|M - N|$ esté acotado).

[3] Escribir la definición de tangente, de seno y coseno...

2.3 La serie de Eisenstein de peso 2

La serie dada por (10) converge también para $k = 2$ y define una función holomorfa en $\mathfrak{H}$.

Definición 2.7. La *serie de Eisenstein de peso* 2 es la serie

$$\mathbb{G}_2(z) \;=\; -\frac{1}{24} + \sum_{n\geq 1} \sigma_1(n)\, q^n \ ,$$

o bien cualquiera de las renormalizaciones $G_2(z) = -4\pi^2 \mathbb{G}_2(z)$ o $E_2(z) = \frac{6}{\pi}^2\, G_2(z)$.

Sin embargo, la serie de Eisenstein de peso 2 no es una forma modular (como ya sabemos por la cota del Corolario 1.10).

Teorema 2.8. *Si* $z \in \mathfrak{H}$ *y* $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma$, *entonces*

$$\big(G_2 \mid_2 \gamma\big)(z) \;=\; G_2(z) \;-\; \frac{2\pi i c}{cz + d} \ .$$

2.4 La función discriminante

Definición 2.9. La *función discriminante* es la función $\Delta : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Delta(z) \;=\; e^{2\pi i z} \prod_{n\geq 1} \big(1 - e^{2\pi i n z}\big)^{24} \ . \tag{13}$$

Teorema 2.10. *El producto* (13) *converge y define una función holomorfa en* $\mathfrak{H}$. *Más aun,* $\Delta(z)$ *es una forma modular de peso* 12 *y* $a_0(\Delta) = 0$.

Demostración. Tomando el logaritmo $\log \Delta(z)$ y derivando, deducimos

$$\frac{1}{2\pi i}\big(\log \Delta(z)\big)' \;=\; 1 - 24 \sum_{n\geq 1} \frac{n\, q^n}{1 - q^n} \;=\; 1 - 24 \sum_{m\geq 1} \sigma_1(m)\, q^m \;=\; E_2(z) \ .$$

Si $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma$ y $z \in \mathfrak{H}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\log\left\{\frac{\Delta(\gamma\langle z\rangle)}{(cz+d)^{12}\,\Delta(z)}\right\}\right)' \;=\; \frac{1}{(cz+d)^2}\, E_2(\gamma\langle z\rangle) \;-\; \frac{12}{2\pi i}\,\frac{c}{cz+d} \;-\; E_2(z) \ ,$$

que es $= 0$, por el Teorema 2.8. En particular, para cada $\gamma \in \Gamma$, existe una constante $C(\gamma) \neq 0$ tal que $\big(\Delta \mid_{12} \gamma\big)(z) = C(\gamma)\,\Delta(z)$, si $z \in \mathfrak{H}$. La función $C : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ es morfismo de grupos y verifica $C(T) = C(S) = 1$,[4] con lo que $C(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$. □

Observación 2.11. Dado que $\dim \mathcal{M}_{12} = 2$, debe existir una relación lineal entre $E_4(z)^3$, $E_6(z)^2$ y $\Delta(z)$. Mirando los coeficientes de Fourier,

$$1728\,\Delta(z) \;=\; E_4(z)^3 - E_6(z)^2 \ .$$

[4] En el caso de T, se deduce de que $e^{2\pi i z}$ es periódica. En el caso de S, se deduce de reemplazar $z = i$ en la identidad $\Delta(-1/z) = C(S)\, z^{12}\, \Delta(z)$ y notar que $\Delta(i) \neq 0$.

Referencias

[Apo90] T. M. Apostol. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory.* 2nd ed. Vol. 41. Grad. Texts Math. New York etc.: Springer-Verlag, 1990.

[Ser78] J.-P. Serre. *A Course in Arithmetic. Translation of "Cours d'arithmetique". 2nd corr. print.* Vol. 7. Grad. Texts Math. Springer, Cham, 1978.

[Zag08] D. Zagier. "Elliptic Modular Forms and Their Applications". In: *The 1-2-3 of Modular Forms. Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway, June 2004*. Berlin: Springer, 2008, pp. 1–103.