

# Formas cuadráticas y algunas formas automorfas

## Parte II: Formas paramodulares

### 1 Formas de Siegel

#### 1.1 Matrices simétricas

El grupo modular  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  es el grupo de automorfismos del retículo  $\mathbb{Z}^2$  equipado con la forma bilineal alternada:

$$\langle(u, v), (w, z)\rangle = uz - vw.$$

Un poco más en general, si  $g \geq 1$ , introducimos, fijada en el retículo  $\mathbb{Z}^{2g}$  una base  $e_1, \dots, e_g, f_1, \dots, f_g$ , la forma bilineal alternada:

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad \langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle e_i, f_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \quad (1)$$

El *grupo modular de Siegel* se define como el grupo de automorfismos de  $\mathbb{Z}^{2g}$  que preserva la forma (1). En la base elegida, la matriz de la forma bilineal está dada por

$$J = \begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g & \\ -I_g & \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde  $I_g$  denota la matriz identidad de tamaño  $g \times g$ .<sup>1</sup> Vía esta elección de base, este grupo se identifica con el subgrupo de matrices

$$\Gamma_g := \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}) = \{M \in \mathrm{Mat}(2g \times 2g, \mathbb{Z}) : MJ^t M = J\}.$$

---

<sup>1</sup> Espacios en blanco indican que la coordenada correspondiente es nula.

Es decir, si  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ,<sup>2</sup> entonces

$$MJ^tM = \begin{bmatrix} A^tB - B^tA & A^tD - B^tC \\ C^tB - D^tA & C^tD - D^tC \end{bmatrix}$$

y  $M \in \Gamma_g$ , si y sólo si

$$A^tB = B^tA, \quad C^tD = D^tC \quad \text{y} \quad A^tD - B^tC = D^tA - C^tB = I_g.$$

En particular, si  $M \in \Gamma_g$ , entonces

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g & \\ & I_g \end{bmatrix},$$

lo que muestra que  $M$  es inversible con inversa dada por  $M^{-1} = \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix}$  y, en consecuencia, que también se verifican las relaciones

$${}^tDA - {}^tBC = {}^tAD - {}^tCB = I_g, \quad {}^tDB = {}^tBD \quad \text{y} \quad {}^tAC = {}^tCA,$$

o sea  ${}^tMJM = J$ , también.

Un poco más en general, una matriz  $M \in \text{Mat}(2g \times 2g, \mathbb{C})$  es *simpléctica*, si verifica:

$$MJ^tM = \mu(M) J,$$

para cierto escalar inversible  $\mu(M)$ . Si  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  es simpléctica y

$$\text{adj}(M) = \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix}, \tag{3}$$

entonces  $M\text{adj}(M) = \text{adj}(M)M = \mu(M)I_{2g}$ . Las matrices simplécticas con coordenadas reales forman un grupo que denotamos  $\text{GSp}(g, \mathbb{R})$  y  $\mu : \text{GSp}(g, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$  es un morfismo de grupos. El grupo modular de Siegel está contenido en el subgrupo

$$\text{GSp}(g, \mathbb{R})^+ = \left\{ M \in \text{GSp}(g, \mathbb{R}) : \mu(M) > 0 \right\},$$

de aquellas matrices simplécticas reales cuyo factor  $\mu(M)$  es positivo. A modo de ejemplo, las matrices

$$\begin{bmatrix} U & \\ & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_g & S \\ & I_g \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad J = \begin{bmatrix} & I_g \\ -I_g & \end{bmatrix} \tag{4}$$

son simplécticas con factor  $\mu = 1$ , si  $U \in \text{GL}(g, \mathbb{Z})$  y  ${}^tS = S$ ; pertenecen a  $\Gamma_g$ .

---

<sup>2</sup>A, B, C y D, matrices cuadradas.

## 1.2 Funciones en el semiplano de Siegel

El *semiplano de Siegel (de género g)* es el conjunto conformado por las matrices simétricas, de tamaño  $g \times g$  y de coordenadas complejas, cuya parte imaginaria es definida positiva:

$$\mathfrak{H}_g = \left\{ \Omega = X + iY \in \text{Mat}(g \times g, \mathbb{C}) : \Omega = \Omega^*, Y > 0 \right\}.$$

Si  $g = 1$ ,  $\mathfrak{H}_1$  es el semiplano complejo. Si  $g = 2$ ,  $\Omega = [\begin{smallmatrix} \omega & z \\ z & \tau \end{smallmatrix}] \in \mathfrak{H}_2$ , si y sólo si

$$\text{Im}(\omega), \text{Im}(\tau) > 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}(z)^2 < \text{Im}(\omega) \text{Im}(\tau).$$

En general, el semiplano de Siegel es un abierto convexo dentro del espacio de matrices complejas simétricas; es una variedad compleja y su dimensión es  $g(g+1)/2$ .

El grupo  $\text{GSp}(g, \mathbb{R})^+$  actúa en  $\mathfrak{H}_g$  vía:

$$M\langle \Omega \rangle = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}, \quad (5)$$

para cada  $M = [\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}] \in \text{GSp}_{2g}(\mathbb{R})^+$  y  $\Omega \in \mathfrak{H}_g$ ; la acción es transitiva y cada  $M$  induce una transformación biholomorfa cuya inversa está dada por (3). Las matrices (4) actúan por:

$$\Omega \mapsto U\Omega^t U, \quad \Omega \mapsto \Omega + S \quad \text{y} \quad \Omega \mapsto -\Omega^{-1}. \quad (6)$$

Una *forma modular (de Siegel) de género g y peso k con respecto al grupo  $\Gamma_g$*  es una función  $F : \mathfrak{H}_g \rightarrow \mathbb{C}$

(M1) holomorfa en  $\mathfrak{H}_g$ ,<sup>3</sup>

(M2) que, si  $M = [\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}] \in \Gamma_g$  y  $\Omega \in \mathfrak{H}_g$ , cumple

$$F(M\langle \Omega \rangle) = \det(C\Omega + D)^k F(\Omega) \quad \text{y} \quad (7)$$

(M3) acotada en regiones de la forma  $\{Y \geq cI_g\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ .

Las formas modulares de Siegel de peso  $k$  constituyen un espacio vectorial de dimensión finita [**Klingen**], que denotamos  $\mathcal{M}_k(\Gamma_g)$ . De (7), se deducen las siguientes reglas de transformación para una forma modular  $F$ :

- (i)  $F(U\Omega^t U) = \det(U)^k F(\Omega)$ , si  $U \in \text{GL}(g, \mathbb{Z})$ ;
- (ii)  $F(\Omega + S) = F(\Omega)$ , si  $S = S^t \in \text{Mat}(g \times g, \mathbb{Z})$ ;
- (iii)  $F(-\Omega^{-1}) = \det(\Omega)^k F(\Omega)$ .

---

<sup>3</sup> Una función en varias variables complejas es holomorfa, si localmente admite un desarrollo en serie de potencias; equivalentemente, dicha función es holomorfa en su dominio de definición, si es holomorfa en cada variable por separado [**Gunning**].

De (ii) y de (M3), se deduce que toda forma modular admite un desarrollo en serie de Fourier del tipo:

$$F(\Omega) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)}, \quad (8)$$

La sumatoria se realiza sobre las matrices simétricas  ${}^t T = T$  tales que:  $2T$  tiene coordenadas enteras y pares en la diagonal y  $T$  es semidefinida positiva. Si  $g = 1$ , (8) es el desarrollo de Fourier usual, donde  $T \in \mathbb{Z}$ . Si  $g = 2$ , entonces  $T = \begin{bmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{bmatrix}$ ,  $n, r, m \in \mathbb{Z}$ , representa formas cuadráticas binarias con coeficientes enteros.

La serie (8) converge absoluta y uniformemente sobre compactos de  $\mathfrak{H}_g$  y podemos recuperar los coeficientes:

$$a(T) = \int_{X \pmod{1}} F(\Omega) e^{-2\pi i \text{tr}(T\Omega)} dX. \quad (9)$$

De (i) y de (9), se deduce que

$$a(UT {}^t U) = (\det U)^k a(T).$$

En particular,  $kg \not\equiv 0 \pmod{2}$  implica  $\mathcal{M}_k(\Gamma_g) = 0$ .

**Teorema 1.2.1.** *Supongamos que  $g > 1$ . Si  $F$  satisface (M1) y (M2), entonces  $F$  satisface (M3).*

*Demostración.* Como (8) converge en  $\Omega = iI_g$ , existe  $\alpha > 0$  tal que

$$|a(T)| \leq \alpha e^{2\pi i \text{tr}(T)}.$$

Afirmamos que  $a(T) \neq 0$  implica  $T \geq 0$ . Asumiendo esto,

$$F(\Omega) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)} \ll \sum_{T \geq 0} |a(T)| e^{-2\pi c \text{tr}(T)},$$

uniformemente en  $\{Y \geq cI_g\}$ . Pero el lado derecho converge, pues es la serie de Fourier (que converge a.u./c. de  $\mathfrak{H}_g$ ) evaluada en el punto  $icI_g$ .

Con respecto a la afirmación, si  $T$  no es semidefinida positiva, existe  $V_1$  de coordenadas enteras y contenido 1 tal que  $T[V_1] < 0$ . Completando  $V_1$  a una  $V \in \text{GL}(g, \mathbb{Z})$ , cambiando  $T$  por  $T[V]$  y usando  $a(T[V]) = (\det V)^k a(T)$ , podemos suponer que  $T_{11} < 0$ . Ahora, sea  $U = \begin{bmatrix} U^* & \\ & I_{g-2} \end{bmatrix}$ , con  $U^* = \begin{bmatrix} 1 & m \\ & 1 \end{bmatrix}$  y  $m \in \mathbb{Z}$ . El coeficiente

$$|a(T)| = |a(T[U])| \leq \alpha e^{2\pi \text{tr}(T[U])},$$

pero  $\text{tr}(T[U]) = \text{tr}(T) + 2T_{12}m + T_{11}m^2$  tiende a  $-\infty$  ( $m \rightarrow \infty$ ), pues  $T_{11} < 0$ .  $\square$

Si  $F$  es una forma modular, entonces su expansión de Fourier es del tipo

$$F(\Omega) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)},$$

donde, ahora sabemos,  $a(T) \neq 0$ , sólo si  $T \geq 0$ , es decir,  $T$  representa una forma cuadrática semidefinida positiva, con coeficientes enteros. En particular, si  $g = 2$ , podemos reescribir la expansión de Fourier de una forma de Siegel de género 2 de la siguiente manera:

$$F(\tau, z, \omega) = \sum_{\{n, r, m\} \geq 0} a(n, r, m) e^{2\pi i (n\tau + rz + m\omega)}, \quad (10)$$

donde la condición  $\{n, r, m\} \geq 0$  quiere decir que la forma es semidefinida positiva:  $n, m, 4mn - r^2 \geq 0$ . Si agrupamos los términos en función de  $m \geq 0$ ,

$$F(\tau, z, \omega) = \sum_{m \geq 0} f_m(\tau, z) e^{2\pi i \omega m}. \quad (11)$$

Las funciones  $f_m$  son *formas de Jacobi de índice m* y la expansión (11) se conoce como la *expansión de Fourier-Jacobi de F* [EichlerZagier].

### 1.3 Las series de Eisenstein y el operador de Siegel

Dada  $F \in \mathcal{M}_k(\Gamma_g)$  definimos una forma de género menor mediante el operador de Siegel. El espacio  $\mathfrak{H}_g$  tiene un borde. Vemos cómo restringir una forma a ese “borde”. Esto nos permitirá definir la noción de forma cuspidal como el núcleo del operador de Siegel: aquellas formas que son cero en el borde. Recíprocamente, dada una forma cuspidal de género  $r \leq g$ , definida en una componente de este borde, si el peso es suficientemente grande (con respecto al género), es posible extenderla a  $\mathfrak{H}_g$  mediante series de Eisenstein-Klingen. Para simplificar la exposición y no sobrecargar la notación, supondremos  $g = 2$ . En este caso,

$$\mathfrak{H}_2 = \left\{ \Omega = \begin{bmatrix} \omega & z \\ z & \tau \end{bmatrix} : \omega, \tau \in \mathfrak{H}_1, z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(\omega) \operatorname{Im}(\tau) > \operatorname{Im}(z)^2 \right\}.$$

Escribimos  $\Omega = (\tau, z, \omega) \in \mathfrak{H}_2$ .

**Teorema 1.3.1.** *Sean  $\tau \in \mathfrak{H}_1$  y  $F \in \mathcal{M}_k(\Gamma_2)$ . Si  $\Omega_\nu = (\tau_\nu, z_\nu, \omega_\nu) \in \mathfrak{H}_2$  es una sucesión que cumple:  $\omega_\nu = \omega$  está fijo,  $z_\nu$  está acotada e  $\operatorname{Im}(\tau_\nu) \rightarrow \infty$ , entonces el límite*

$$\lim_\nu F(\Omega_\nu)$$

*existe y su valor depende de  $\omega$ , pero no de la sucesión. La función resultante,  $\Phi F(\omega)$  define una forma de Siegel de género 1 y peso k (una forma modular elíptica).*

*Demostración.* La sucesión  $\Omega_\nu$  estará contenida en alguna región de la forma  $\{Y \geq cI_2\}$ , eventualmente. Allí, la serie de Fourier de  $F$  converge a.u./c. Si  $T = \{n, r, m\}$  y  $\Omega = (\tau, z, \omega)$ , entonces  $\operatorname{tr}(T\Omega) = n\tau + rz + \omega m$ . Si  $n > 0$ ,

$$\left| e^{2\pi i \operatorname{tr}(T\Omega_\nu)} \right| \leq e^{-2\pi \{n\tau_\nu + rz_\nu + \omega m\}}$$

tiende a 0. Tomando límite término a término en (10), se deduce que,  $a(n, r, m) = 0$  cuando  $n \neq 0$ . En particular, en el límite, sólo sobreviven los términos con  $n = r = 0$ : el límite  $\nu \rightarrow \infty$  existe y es igual a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} F(\tau_\nu, z_\nu, \omega) = \sum_{m \geq 0} a(0, 0, m) e^{2\pi i \omega m}.$$

La nueva serie converge a.u./c. de  $\mathfrak{H}_1$ . La función resultante,  $\Phi F(\omega)$  es holomorfa en  $\mathfrak{H}_1$  y acotada en regiones de la forma  $\{\omega \geq ic\}$ . Veamos que es de peso  $k$  invariante para  $\Gamma_1 = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Dado  $\omega \in \mathfrak{H}_1$ , elegimos la sucesión  $(i\nu, 0, \omega)$ . Dada  $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ , la matriz

$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} a & b & \\ & 1 & \\ c & d & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

pertenece a  $\Gamma_2$ . Actuando en un término de la sucesión por este elemento,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}\langle(i\nu, 0, \omega)\rangle &= \left( \begin{bmatrix} a & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega & i\nu \\ & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & \\ & 1 \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} c & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega & i\nu \\ & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= (i\nu, 0, \frac{a\omega+b}{c\omega+d}). \end{aligned}$$

Tomando límite  $\nu \rightarrow \infty$  en la igualdad

$$F(\tilde{\gamma}\langle(i\nu, 0, \omega)\rangle) = \det \left( \begin{bmatrix} c & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega & i\nu \\ & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \right)^k F(i\nu, 0, \omega) = (c\omega + d)^k F(i\nu, 0, \omega),$$

se concluye que

$$\Phi F(\gamma\omega) = j(\gamma, \omega)^k \Phi F(\omega),$$

es decir,  $\Phi F$  es de peso  $k$  invariante para  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ .  $\square$

**Definición 1.3.2.** Una forma de Siegel  $F$  es *cuspidal*, si  $\Phi F = 0$ .

**Observación 1.3.3.** Dado que toda  $T = \{n, r, m\}$  singular es equivalente a  $\{0, 0, *\}$  y que, en tal caso,  $a(n, r, m) = a(0, 0, *)$ , deducimos que  $\Phi F = 0$ , si y sólo si  $a(n, r, m) = 0$  implica  $\{n, r, m\} > 0$ .

Sea  $\Delta^+ \leq \Gamma_2$  el subgrupo de matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} U & S^t U^{-1} \\ & t_U^{-1} \end{bmatrix}, \quad U \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad {}^t S = S.$$

Sea  $\Gamma_\infty \leq \Gamma_2$  el subgrupo de matrices de la forma

$$M = \begin{bmatrix} a & b & * \\ * & * & * & * \\ c & d & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Si  $\Omega = (\tau, z, \omega) \in \mathfrak{H}_2$ , sea  $\Omega^* = \omega$ .

**Definición 1.3.4.** Sea  $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1)$ ,  $k > 0$  par ( $r = 1$ ), o bien una constante ( $r = 0$ ), y sea  $\Omega \in \mathfrak{H}_2$ . La serie de Eisenstein asociada a  $f$  en  $\Omega$  es

$$E_{2,r,k}(\Omega; f) = \sum_{M \in C_{2,r} \setminus \Gamma_2} \frac{f(M\langle \Omega \rangle^*)}{\det(C\Omega + D)^k},$$

donde  $C_{2,0} = \Delta^+$  y  $C_{2,1} = \Gamma_\infty$ .

**Teorema 1.3.5.** Sean  $r = 0, 1$ ,  $k > r + 3$  par. Si  $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1)$  ( $r = 1$ ), o constante ( $r = 0$ ), la serie de Eisenstein  $E_{g,r,k}(\Omega; f)$  converge absoluta y uniformemente en bandas verticales.<sup>4</sup> Además,

$$\Phi^{2-r} E_{2,r,k}(-; f) = f.$$

El espacio  $\mathcal{M}_k(\Gamma_2)$  está generado por las series de Eisenstein  $E_{2,r,k}(-; f)$  ( $r = 0, 1$ ) y por las formas cuspidales  $\mathcal{S}_k(\Gamma_2)$ .

#### 1.4 Un ejemplo

Dados  $\Omega \in \mathfrak{H}_2$ ,  $\epsilon = [a | b] \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z})$ ,

$$\vartheta(\Omega; \epsilon) := \sum_g e^{\pi i \{\Omega[g+a/2] + {}^t b g\}} \quad (g = [*], * \in \mathbb{Z})$$

define una función holomorfa. Estas funciones verifican

- (i)  $\vartheta(\Omega; a + 2g, b) = (-1)^{{}^t b g} \vartheta(\Omega; a, b)$
- (ii)  $\vartheta(\Omega; a, b + 2g) = \vartheta(\Omega; a, b)$ .

En particular, podemos restringirnos a los casos en que  $\epsilon$  ( $a$  y  $b$ ) tiene coordenadas 0 y 1. Hay diecisésis posibles  $\vartheta$ . Además, cambiando  $g$  por  $-g - a$  en la definición de  $\vartheta$ ,

- (iii)  $\vartheta(\Omega; a, b) = (-1)^{{}^t a b} \vartheta(\Omega; a, b)$ .

En particular, si  ${}^t a b \not\equiv 0 \pmod{2}$ , la función  $\vartheta(\Omega; a, b) = 0$  en  $\mathfrak{H}_2$ . Como

$${}^t \epsilon \epsilon = \begin{bmatrix} {}^t a a & {}^t a b \\ {}^t b a & {}^t b b \end{bmatrix},$$

la condición equivale a que  ${}^t \epsilon \epsilon$  sea par. Diez matrices  $\epsilon$  son pares y permiten definir la siguiente función:

$$\Theta(\Omega) := \prod_{{}^t \epsilon \epsilon \text{ par}} \vartheta(\Omega; \epsilon). \tag{12}$$

La función (12) es holomorfa y verifica

$$\Theta(M\langle \Omega \rangle) = v(M) j(M, \Omega)^5 \Theta(\Omega),$$

---

<sup>4</sup> Regiones de la forma  $\{\text{tr}(X) \leq c^{-1}, Y \geq cI_2\}$ .

donde  $v : \Gamma_2 \rightarrow \{\pm 1\}$  es cierto morfismo de grupos. Esta función no es idénticamente nula, se anula en

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} : \omega, \tau \in \mathfrak{H}_1 \right\},$$

no posee otros ceros módulo  $\Gamma_2$  y cada cero es de orden 1:  $\Theta(\Omega)/z$  es holomorfa y no se anula en cierto dominio fundamental para  $\Gamma_2$ .

**Teorema 1.4.1.** *Las funciones  $\chi_{10}(\Omega) := \Theta(\Omega)^2$  y*

$$\chi_{35}(\Omega) := \Theta(\Omega) \sum_{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \text{ impar}} \pm (\vartheta(\Omega; \epsilon_1) \vartheta(\Omega; \epsilon_2) \vartheta(\Omega; \epsilon_3))^{20}$$

*son formas cuspidales  $\neq 0$ , de pesos 10 y 35, respectivamente. El anillo de formas de Siegel de género 2 es un álgebra finitamente generada y, si  $E_k := E_{2,0,k}$ ,*

$$\mathcal{M}(\Gamma_2) \simeq \mathbb{C}[E_4, E_6, E_{12}, \chi_{10}, \chi_{35}] / \langle \chi_{35}^2 - R \rangle ,$$

*donde  $R$  es una expresión polinomial en las formas de peso par.*

## 1.5 Operadores de Hecke

Empezamos definiendo el anillo de Hecke en abstracto y enunciando algunas de sus propiedades. Usaremos la siguiente notación:  $G = \mathsf{GSp}(g, \mathbb{Q})$ ,  $G^+ = G \cap \{\mu > 0\}$ , y  $\Gamma = \mathsf{Sp}(g, \mathbb{Z})$ .

Sea  $\mathcal{L}$  el espacio vectorial (módulo libre) cuyos elementos son las sumas formales de coclases a derecha

$$\sum_{\Gamma M \subseteq G^+} c_{\Gamma M} \Gamma M , \quad (13)$$

con  $c_{\Gamma M} = 0$  para toda coclase salvo una cantidad finita. El subgrupo  $\Gamma$  actúa en  $\mathcal{L}$ :  $(\Gamma M) \cdot \gamma = \Gamma M \gamma$ . En el subespacio (submódulo)  $\mathcal{L}^\Gamma$ , podemos definir una operación:

$$\left( \sum_i c_i \Gamma M_i \right) \left( \sum_j c'_j \Gamma M'_j \right) = \sum_{i,j} c_i c'_j \Gamma M_i M'_j . \quad (14)$$

Esta nueva expresión no depende de los representantes  $M_i \in \Gamma M_i$ , ni  $M'_j \in \Gamma M'_j$  y pertenece a  $\mathcal{L}^\Gamma$ . Por otro lado, cada doble coclase  $\Gamma M \Gamma$ ,  $M \in G^+$  se descompone como unión finita (disjunta) de coclases a derecha:  $\Gamma M \Gamma = \bigsqcup_i \Gamma M_i$  y determina, por lo tanto, un elemento de  $\mathcal{L}$ . Denotamos por  $\mathcal{H}(G^+, \Gamma)$  el espacio vectorial (módulo libre) con base las dobles coclases  $\Gamma M \Gamma$ ,  $M \in G^+$ . La aplicación

$$\Gamma M \Gamma = \bigsqcup_i \Gamma M_i \mapsto \sum_i \Gamma M_i$$

determina un isomorfismo  $\mathcal{H}(G^+, \Gamma) \simeq \mathcal{L}^\Gamma$ .

**Definición 1.5.1.** El *álgebra de Hecke del par  $(G^+, \Gamma)$*  es el álgebra cuyo espacio subyacente es  $\mathcal{H}(G^+, \Gamma)$  con producto dado por traslación de estructura de  $\mathcal{L}^\Gamma$ .

Para simplificar la notación, suponemos  $g = 2$ .

**Lema 1.5.2** (Divisores simétricos). *Sea  $\Sigma^+ = G^+ \cap \text{Mat}(2g \times 2g, \mathbb{Z})$ . Si  $M \in \Sigma^+$ , entonces  $\Gamma_2 M \Gamma_2$  posee un único representante de la forma*

$$\text{sd}(M) = \langle a_1, a_2, d_1, d_2 \rangle ,$$

donde  $a_i, d_i \in \mathbb{Z}$ ,  $a_1 | a_2 | d_2 | d_1$  y  $a_1 d_1 = a_2 d_2 = \mu(M) \in \mathbb{Z} > 0$ .

**Teorema 1.5.3.** *El álgebra  $\mathcal{H}(G^+, \Gamma_2)$  es conmutativa.*

*Demostración.* La aplicación  $M \mapsto \text{adj}(M) = \mu(M) M^{-1}$  es una antiinvolución en  $G^+$  que también preserva  $\Gamma_2$ . Además, se verifica  $\Gamma_2 \text{adj}(M) \Gamma_2 = \Gamma_2 M \Gamma_2$  (si  $M$  es diagonal,  $\text{adj}(M) = J M J^{-1}$ , pero  $J \in \Gamma_2$ ). En particular, dicha antiinvolución es trivial en  $\mathcal{H}(G^+, \Gamma_2)$ .  $\square$

Utilizaremos la siguiente notación para referirnos a ciertas (uniones de) dobles coclas o, equivalentemente, elementos del álgebra de Hecke:  $T(M) = \Gamma_2 M \Gamma_2$ ,

$$T(a_1, a_2, d_1, d_2) = T(\text{diag}a_1, a_2, d_1, d_2) ,$$

y  $\langle d \rangle = T(dI_{2g})$ .

Los elementos  $T(M)$  poseen la siguiente propiedad: si  $(d_1/a_1, d'_1/a'_1) = 1$ , entonces

$$T(a_1, a_2, d_1, d_2) T(a'_1, a'_2, d'_1, d'_2) = T(a_1 a'_1, a_2 a'_2, d_1 d'_1, d_2 d'_2) .$$

En particular,

$$\langle d \rangle T(a_1, a_2, d_1, d_2) = T(da_1, da_2, dd_1, dd_2) .$$

Además, si  $m \geq 1$  y

$$T(m) = \mathcal{O}_g(m) = \{M \in \Sigma^+ : \mu(M) = m\} ,$$

entonces se cumple

$$\begin{aligned} T(m) &= \sum \left\{ T(a_1, a_2, d_1, d_2) : a_1 d_1 = a_2 d_2 = m, a_1 | a_2 | d_2 | d_1 \right\} \\ &= \sum \left\{ \Gamma_2 M : \Gamma_2 M \subseteq \Sigma^+, \mu(M) = m \right\} . \end{aligned}$$

Si  $(m, m') = 1$ , entonces  $T(m)T(m') = T(mm')$ .

Análogamente, podemos definir versiones “locales” de estos anillos. Usamos la siguiente notación: dado un primo  $p$ ,  $G_p = \text{GSp}(g, \mathbb{Z}[1/p])$ ,  $G_p^+ = G_p \cap G^+$  y  $\Sigma_p^+ = \Sigma^+ \cap G_p^+$ .

**Lema 1.5.4.** *El álgebra  $\mathcal{H}(G^+, \Gamma_2)$  está generada por todas las subálgebras  $\mathcal{H}(G_p^+, \Gamma_2)$ .*

*Demostración.* Hay una noción de divisor simétrico en  $p$ ,  $\text{sd}_p$  y se verifica

$$\text{sd}(M) = \prod_p \text{sd}_p(M) .$$

Entonces,  $T(M) = T(\text{sd}(M)) = \prod_p T(\text{sd}_p(M))$ .  $\square$

**Lema 1.5.5.** Con  $m = p, p^2$ , se verifica

$$T(p) = T(1, 1, p, p) \quad y \quad T(p^2) = T_0(p^2) + T_1(p^2) + T_2(p^2),$$

donde

$$\begin{aligned} T_0(p^2) &= T(1, 1, p^2, p^2), \\ T_1(p^2) &= T(1, p, p^2, p) \quad y \\ T_2(p^2) &= T(p, p, p, p) = \langle p \rangle. \end{aligned}$$

**Teorema 1.5.6.** Los elementos  $T(p)$ ,  $T_0(p^2)$ ,  $T_1(p^2)$  y  $T_2(p^2)$  generan  $\mathcal{H}(\Sigma_p^+, \Gamma_2)$ .

El Teorema 1.5.6 implica que existen ciertas relaciones entre los operadores  $T(p^k)$ ,  $k \geq 0$ . Estas relaciones se pueden encapsular en una serie de potencias.

**Teorema 1.5.7.** Si  $g = 2$ , entonces, en  $\mathcal{H}(\Sigma_p^+, \Gamma_2)[[X]]$ ,

$$\sum_{k \geq 0} T(p^k) X^k = (1 - p^2 \langle p \rangle X^2) (1 - Q_1(p) X + Q_2(p) X^2 - Q_3(p) X^3 + Q_4(p) X^4)^{-1},$$

donde

$$\begin{aligned} Q_1(p) &= T(p), \\ Q_2(p) &= pT_1(p^2) + p(p^2 + 1) \langle p \rangle = T(p)^2 - T(p^2) - p^2 \langle p \rangle, \\ Q_3(p) &= p^3 \langle p \rangle T(p) \quad y \\ Q_4(p) &= p^6 \langle p \rangle^2. \end{aligned}$$

## 2 Formas paramodulares

### 2.1 Subgrupos de congruencia

Dado un número natural  $N \geq 1$ , el *subgrupo principal de congruencia de nivel N* es el siguiente subgrupo del grupo modular:

$$\Gamma(N) = \left\{ M \in \Gamma_g : M \equiv I_g \pmod{N} \right\}.$$

Este subgrupo es el núcleo del morfismo  $\Gamma_g \rightarrow \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  dado por reducir las coordenadas módulo  $N$ ; es un subgrupo normal de índice finito. Un *subgrupo de congruencia* es un subgrupo  $K \leq \mathrm{GSp}(g, \mathbb{R})^+$  que cumple con:

- ser *commensurable con*  $\Gamma_g$ , es decir,  $K \cap \Gamma_g$  tiene índice finito en  $\Gamma_g$  y en  $K$ , y
- contener un subgrupo principal de congruencia.

Por ejemplo, si  $g = 2$ , los subgrupos

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_2 : C \equiv 0 \pmod{N} \right\} = \Gamma_2 \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$\Gamma^{\text{para}}(N) := \text{Sp}(2, \mathbb{Q}) \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \frac{1}{N}\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$$

son subgrupos de congruencia. El grupo  $\Gamma_0(N)$  se conoce como *grupo de congruencia de Siegel de nivel N*; el grupo  $\Gamma^{\text{para}}(N)$  es el *grupo paramodular de nivel N*. Los subgrupos

$$Q(N) := \Gamma_2 \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \Gamma_2 \cap \Gamma^{\text{para}}(N) \quad \text{y}$$

$$B(N) := \Gamma_2 \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \Gamma_0(N) \cap Q(N),$$

el *subgrupo de congruencia de Klingen* y el *subgrupo de congruencia de Borel*, respectivamente, también son subgrupos de congruencia. Todos estos grupos contienen al subgrupo principal de nivel  $N$ .

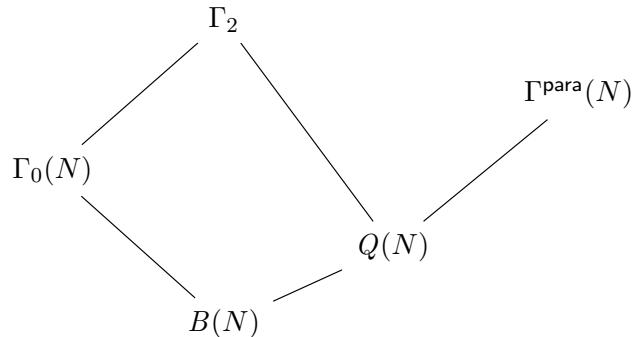


Figure 1: Diagrama de las relaciones de inclusión entre los subgrupos de congruencia.

Los subgrupos de congruencia admiten una noción de forma modular; la definición es análoga a la de formas de Siegel para el grupo  $\Gamma_g$ .

## 2.2 Funciones en el semiplano de Siegel

Dada  $M$ , operador de peso  $k$  en una función  $F$  definida en  $\mathfrak{H}_g$  asocia, a  $F$ , la función

$$F[M]_k(\Omega) = \frac{\mu(M)^{kg - \frac{g(g+1)}{2}}}{\det(C\Omega + D)^k} F(M\langle\Omega\rangle). \quad (15)$$

**Definición 2.2.1.** Si  $K$  es un subgrupo de congruencia, una *forma modular (de Siegel) de peso  $k$  y género  $g$  con respecto a  $K$*  es una función  $F : \mathfrak{H}_g \rightarrow \mathbb{C}$

(P1) holomorfa,

(P2) que verifica  $F[M]_k = F$ , para toda  $M \in K$ , y

(P3) tal que la función  $F[M]_k$  está acotada en regiones  $\{Y \geq cI_g\}$ , para toda  $M \in \Gamma_g$ .

La forma  $F$  es *cuspidal*, si además satisface

$$\Phi F[M]_k = 0, \quad (16)$$

para toda  $M \in \Gamma_g$ .

Toda forma modular  $F$  admite un desarrollo en serie de Fourier. Para describirlo, introducimos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} V_g(\mathbb{Q}) &= \left\{ S \in \text{Mat}(g \times g, \mathbb{Q}) : {}^t S = S \right\} \\ P_{g,\text{semi}}(\mathbb{Q}) &= \left\{ S \in V_g(\mathbb{Q}) : S \geq 0 \right\} \\ P_g(\mathbb{Q}) &= \left\{ S \in V_g(\mathbb{Q}) : S > 0 \right\} \\ \mathcal{X}_{g,\text{semi}} &= \left\{ T \in P_{g,\text{semi}}(\mathbb{Q}) : 2T \text{ es par} \right\} \\ \mathcal{X}_g &= \left\{ T \in P_g(\mathbb{Q}) : 2T \text{ es par} \right\} \\ n(S) &= \begin{bmatrix} I_g & S \\ & I_g \end{bmatrix} \quad (n : V_g(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Sp}(g, \mathbb{Q})) \\ u(U) &= \begin{bmatrix} U & \\ & t_U^{-1} \end{bmatrix} \quad (u : \text{GL}(g, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Sp}(g, \mathbb{Q})) \end{aligned}$$

Las matrices simétricas constituyen un espacio vectorial,  $V_g$ ; las matrices definidas positivas y semidefinidas positivas,  $P_g$  y  $P_{g,\text{semi}}$  son conos en  $V_g$ . Los subconjuntos  $\mathcal{X}_g$  y  $\mathcal{X}_{g,\text{semi}}$  están conformados por aquellas matrices que representan formas cuadráticas enteras, definidas positivas y semidefinidas positivas, respectivamente; son retículos en los respectivos conos. Las aplicaciones  $X \mapsto n(X)$  y  $U \mapsto u(U)$  son morfismos de grupos.

Con esta notación, podemos expresar el desarrollo en serie de una forma de Siegel para  $\Gamma_g$  de la siguiente manera:

$$F(\Omega) = \sum_{T \in \mathcal{X}_{g,\text{semi}}} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)};$$

si  $F$  es cuspidal, indexamos sobre  $\mathcal{X}_g$ . En general, si  $F \in \mathcal{M}_k(K)$ ,

$$F(\Omega) = \sum_{T \in R^\vee \cap P_{g,\text{semi}}} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)} , \quad (17)$$

donde  $R^\vee$  denota el retículo dual con respecto a la forma traza en  $V_g$  del retículo

$$R := R(K) = \{S \in V_g : n(S) \in K\} .$$

Por ejemplo, si  $g = 2$ , con respecto a los subgrupos de congruencia mencionados,

- $R(\Gamma_0(N)) = V_2(\mathbb{Q}) \cap \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z})$  y  $R^\vee \cap P_{2,\text{semi}} = \mathcal{X}_{2,\text{semi}}$ ;
- $R(Q(N)) = R(B(N)) = R(\Gamma_0(N))$ ;
- $R(\Gamma^{\text{para}}(N)) = \left\{ \begin{bmatrix} a/N & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$  y  $R^\vee = \left\{ \begin{bmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{bmatrix} : m, r, n \in \mathbb{Z}, N|m \right\}$ .

En este último caso, escribimos  $\mathcal{X}_{2,\text{semi}}^N := R^\vee \cap P_{2,\text{semi}}$ ; es el conjunto de formas cuadráticas enteras semidefinidas positivas  $mx^2 + rxy + ny^2$  con  $m \in N\mathbb{Z}$ .

Las transformaciones  $u(U)$  vinculan los varios coeficientes de Fourier. Si  $F \in \mathcal{M}_k(K)$ , entonces

$$a(T[U]) = \det(U)^k a(T) , \quad (18)$$

para toda  $U \in \text{GL}(g, \mathbb{Q})$  tal que  $u(U) \in K$ . Por ejemplo,

- $u(U) \in \Gamma_0(N)$ , si y sólo si  $U \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ ;
- $u(U) \in \Gamma^{\text{para}}(N)$ , si y sólo si  $U \in \langle \Gamma_0(N), \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \rangle$ .<sup>5</sup>

Los operadores de Hecke  $T(m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , son operadores de doble coclase, pero se pueden describir en términos de su efecto en los coeficientes de Fourier de una forma paramodular. Si  $N = p$  es primo y  $q \neq p$  es primo y  $T \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} a(T; F[T(q)]_k) &= a(q T(q); F) + q^{2k-3} a\left(\frac{1}{q} T; F\right) \\ &\quad + q^{k-2} \sum_{j \pmod{q}} a\left(\frac{1}{q} T \left[ \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ jp & q \end{smallmatrix} \right]; F\right) \\ &\quad + q^{k-2} a\left(\frac{1}{q} T \left[ \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix} \right]; F\right) . \end{aligned}$$

### 2.3 Lifts de Gritsenko

**Definición 2.3.1.** Una función  $\phi : \mathfrak{H}_1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una *forma de Jacobi de índice  $m$  y peso  $k$* , si

(J1) es holomorfa,

---

<sup>5</sup> Aquí,  $\Gamma_0(N)$  denota el subgrupo de congruencia de nivel  $N$  en  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ .

(J2) la función  $\tilde{\phi} : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\tilde{\phi}(Z) = \phi(\tau, z) e^{2\pi i \omega m}$  es una forma modular de Siegel de género 2 con respecto al grupo

$$C_{2,1} = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & \\ & * & * & * \end{bmatrix} \right\} \cap \Gamma_2 ,$$

es decir,  $\tilde{\phi}[M]_k = \tilde{\phi}$ ,<sup>6</sup> si  $M \in C_{2,1}$  y

(J3) y, además, la función  $\phi$  admite un desarrollo en serie de Fourier del tipo

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n \geq 0, r \in \mathbb{Z}} c(n, r) e^{2\pi i (n\tau + rz)} ,$$

con  $c(n, r) = 0$ , a menos que  $r^2 - 4mn \leq 0$ .

Si  $c(n, r) \neq 0$  implica  $r^2 - 4mn < 0$ , entonces  $\phi$  es *cuspidal*.

**Teorema 2.3.2.** *Sea  $\phi(\tau, z) = \sum_{n > 0, r \in \mathbb{Z}} c(n, r) e^{2\pi i (n\tau + rz)}$  una forma de Jacobi de peso  $k$  e índice  $N$ . La expresión*

$$\text{Grit}(\tau, z, \omega) = \sum_{\{n, r, m\} \geq 0} \left( \sum_{\delta | (n, r, m)} \delta^{k-1} c\left(\frac{mn}{\delta^2}, \frac{r}{\delta}\right) \right) e^{n\tau + rz + mN\omega}$$

es una forma paramodular cuspidal de peso  $k$  y nivel  $N$ . Además,

$$\text{Grit}(\phi)[\mu]_k = (-1)^k \text{Grit}(\phi) .$$

## 2.4 El álgebra de Hecke paramodular

A diferencia de lo que ocurre en el caso de nivel  $N = 1$ , el álgebra de Hecke paramodular de nivel  $N > 1$  no es, en general, conmutativa. El álgebra de Hecke paramodular está generada por las álgebras “locales”. Si  $p | N$  es primo, entonces el álgebra local en  $p$  está generada por

$$\begin{aligned} V &= T(w) , \\ X &= T(\text{diag}(1, 1, p, p)) , \\ Y_1 &= T(\text{diag}(1, p, p^2, p)) \quad \text{y} \\ Y_2 &= T(\text{diag}(p, 1, p, p^2)) . \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup> Por un lado,

$$\phi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k e^{2\pi im\frac{cz^2}{c\tau + d}} \phi(\tau, z)$$

y, por otro,

$$\phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^{-2\pi im(\lambda^2\tau + 2\lambda z)} \phi(\tau, z) .$$

El elemento  $w \in \mathrm{GSp}(2, \mathbb{Q})$  es la matriz

$$\begin{bmatrix} & 1 \\ p & \\ & & p \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

El álgebra en cuestión es un cociente de  $\mathbb{Z}\{X, V, Y_1, Y_2\}$  por el ideal de ciertas relaciones explícitas entre estos elementos.