Fracciones continuas

Una charla en el campamento Inspira

Diciembre 2025

1 Introducción

Pregunta 1. Dado un número (real), aproximarlo por fracciones.

Ejemplo 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un número cuyo desarrollo decimal comienza de la siguiente manera: $\alpha = 1,13732\ldots$ ¿Cuán cerca queremos (podemos) aproximarlo? Digamos que queremos aproximarlo a tres decimales. La fracción $\frac{1137}{1000}$ conincide con α en los primeros tres decimales.

Otra manera de aproximar es indicar un intervalo, rango, en donde tengamos la certeza de que α se encuentra. Por ejemplo, $\alpha \in (1,1373, 1,1374)$. Hay otras fracciones en este intervalo; la $\frac{11373}{10^4}$ está justo en el borde. Talvez haya una "mejor". Además, su denominador es más grande que el de $\frac{1137}{10^3}$ ¿Podemos aproximarlo con la misma (o mejor) precisión, pero usando denominadores más chicos?

Primera aproximación Una aproximación sencilla es el piso: $\lfloor \alpha \rfloor = 1$. La diferencia (el error) es la parte fraccionaria: $\{\alpha\} = \alpha - 1 = 0,1373\cdots < 1$.

Segunda aproximación La idea es, en una segunda instancia, aproximar $\{\alpha\}$. Pero $\{\alpha\} < 1$, así que, en su lugar, intentamos aproximar $\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha\}} > 1$. Podemos hacer lo mismo que hicimos con α ¿Cuánto es $\lfloor \alpha_1 \rfloor$? Para encontrar este valor, buscamos un intervalo que contenga α_1 y sea lo suficientemente bueno (estrecho) como para determinar el valor que buscamos. Ahora,

$$\{\alpha\} \in (0,1373, 0,1374) = \left(\frac{1373}{10^4}, \frac{1374}{10^4}\right) ,$$

con lo que $\alpha_1 \in \left(\frac{10^4}{1374}, \frac{10^4}{1373}\right)$. Pero

$$\begin{aligned} 10^4 &= 7 \cdot 1374 + 382 , \quad & \frac{10^4}{1374} &= 7 + \frac{382}{1374} , \\ 10^4 &= 7 \cdot 1373 + 389 \quad \text{y} \quad & \frac{10^4}{1373} &= 7 + \frac{389}{1373} . \end{aligned}$$

O sea, $\lfloor \alpha_1 \rfloor = 7$ y conseguimos la siguiente aproximación para α:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha_1} = 1 + \frac{1}{7 + \{\alpha_1\}} \in \left(1 + \frac{1}{8}, 1 + \frac{1}{7}\right) .$$

Los extremos del intervalo son $1 + 1/8 = 9/8$ y $1 + 1/7 = 8/7$. En particular, el extremo derecho, $8/7$, obtenido despreciando la parte fraccionaria de α_1, aproxima bien a un decimal. Además, sabemos que $\{\alpha_1\} \in \left(\frac{382}{1374}, \frac{389}{1373}\right)$.

Tercera aproximación Ahora bien, podemos seguir este procedimiento, aproximando $\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}}$. Sabemos que $\alpha_2 \in \left(\frac{1373}{389}, \frac{1374}{382}\right)$. Pero

$$1373 = 3 \cdot 389 + 206 , \quad \frac{1373}{389} = 3 + \frac{206}{389} ,$$
$$1374 = 3 \cdot 382 + 228 \quad \text{y} \quad \frac{1374}{382} = 3 + \frac{228}{382} .$$

En particular, $\lfloor \alpha_2 \rfloor = 3$ y $\{\alpha_2\} \in \left(\frac{206}{389}, \frac{228}{382}\right)$. Así, notando que $\{\alpha_2\} \in (0, 1)$, deducimos que

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \{\alpha_2\}}} \in \left(1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3}}, 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}\right) .$$

Los extremos del intervalo son

$$1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3}} = \frac{25}{22} \quad \text{y} \quad 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}} = \frac{33}{29} .$$

El extremo *izquierdo*, $25/22$, obtenido despreciando la parte fraccionaria de α_2, aproxima correctamente a dos decimales.

Cuarta aproximación Seguimos con $\alpha_3 = \frac{1}{\{\alpha_2\}}$, que se encuentra en el rango $\alpha_3 \in \left(\frac{382}{228}, \frac{389}{206}\right)$. Haciendo las divisiones correspondientes,

$$382 = 1 \cdot 228 + 154 , \quad \frac{382}{228} = 1 + \frac{154}{228} ,$$
$$389 = 1 \cdot 206 + 183 \quad \text{y} \quad \frac{389}{206} = 1 + \frac{183}{206} .$$

El piso de α_3 es $\lfloor \alpha_3 \rfloor = 1$, mientras que $\{\alpha_3\} \in \left(\frac{154}{228}, \frac{183}{206}\right)$. Entonces, podemos encerrar α en el siguiente intervalo:

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\{\alpha_3\}}}} \in \left(1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}, 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}\right) .$$

Los extremos del intervalo son:

$$1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=\frac{58}{51}\quad \text{y}\quad 1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}=\frac{33}{29}\,.$$

El extremo *derecho*, 33/29, obtenido despreciando la parte fraccionaria de α_3 coincide con α en los primeros tres decimales.

Continuación Podríamos seguir ¿Hasta qué punto? ¿Cuántos pasos podemos hacer con lo que sabemos de α hasta ahora, es decir, que $\alpha = 1,13732\dots$? Para empezar, $\alpha_4 = \frac{1}{\{\alpha_3\}}$ pertenece al intervalo $\left(\frac{206}{183}, \frac{228}{154}\right)$. En particular, $\lfloor \alpha_4 \rfloor = 1$ y $\{\alpha_4\} \in \left(\frac{23}{206}, \frac{74}{228}\right)$. De α, podemos decir que

$$\alpha = 1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\{\alpha_4\}}}}} \in \left(1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+0}}}}, 1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}\right),$$

o sea, $\alpha \in \left(\frac{58}{51}, \frac{91}{80}\right)$. Notemos que no conseguimos una aproximación correcta a más de tres decimales en este paso.

Ahora, $\alpha_5 = \frac{1}{\{\alpha_4\}}$ pertenece al intervalo $\left(\frac{228}{74}, \frac{206}{23}\right)$. Si hacemos las divisiones, vemos que $228 = 3 \cdot 74 + 6$ y que $206 = 8 \cdot 23 + 22$ ¡No podemos precisar el valor de $\lfloor \alpha_5 \rfloor$! ¡Sólo sabemos que $\lfloor \alpha_5 \rfloor \in [\![3, 8]\!]$! En todo caso, podemos decir que α se encuentra contenido en el intervalo

$$\left(1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8}}}}}, 1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}\right) = \left(\frac{497}{437}, \frac{207}{182}\right)\,.$$

En decimales, $\frac{497}{437} = 1,13729\dots$ y $\frac{207}{182} = 1,13736\dots$. Tiene sentido. Con la aproximación inicial de α con la que contamos, no podemos esperar conseguir una "mejor" aproximación, en el sentido de tener más decimales correctos.

Observación 1. La fracción $\frac{33}{29}$ aproxima α a tres decimales, igual que $\frac{1137}{1000}$. Los denominadores son más chicos; la aproximación es, al menos, tan buena como $\frac{1137}{1000}$, pero es "más sencilla". Obtuvimos, además, una sucesión de aproximaciones:

$$1 \ , \quad \frac{8}{7} \ , \quad \frac{25}{22} \ , \quad \frac{33}{29} \ .$$

Estas aproximaciones satisfacen:

$$1 < \alpha \ , \quad \alpha < \frac{8}{7} \ , \quad \frac{25}{22} < \alpha \ , \quad \alpha < \frac{33}{29} \ .$$

Las diferencias entre las sucesivas aproximaciones están dadas por:

$$\frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7} \ , \quad \frac{25}{22} - \frac{8}{7} = \frac{-1}{154} \ , \quad \frac{33}{29} - \frac{25}{22} = \frac{1}{638} \ .$$

2 Definiciones

Definición 1. Una expresión de la forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} \tag{1}$$

es una *fracción continua*. Abreviamos (1) por $[a_0, a_1, a_2, \dots]$.

Ejemplo 2. $[1,2] = 1 + \dfrac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 3. El Ejemplo 1 nos provee de algunos ejemplos de fracciones continuas:

$$\begin{aligned} [1] &= 1 \ , \\ [1,7] &= 1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7} \ , \\ [1,7,3] &= 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3}} = \frac{25}{22} \ , \\ [1,7,3,1] &= 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{33}{29} \ . \end{aligned}$$

Las fracciones del lado derecho de cada igualdad son los *valores* de la fracciones continuas.

Ejemplo 4. Al *resolver* la fracción continua $[3,7,5,1,292]$ obtenemos $\frac{103993}{33102}$ ¿Qué número parece estar aproximando?

Definición 2. Si $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ es una fracción continua y $m \leq n$, podemos "truncar" y obtener $[a_0, a_1, \ldots, a_m]$, la *convergente parcial m-ésima.*

Ejemplo 5. La primera convergente parcial de $[1, 7, 3, 1]$ es $[1, 7]$.

Observación 2. Las fracciones continuas "finitas" representan números racionales (fracciones).

Pregunta 2. ¿Podemos representar todo número racional como fracción continua?

Ejemplo 6. La fracción $\frac{10}{7}$ es representada por $[1, 2, 3]$; el valor de $[1, 2, 3]$ es $\frac{10}{7}$:

$$\begin{aligned} 10 &= 1 \cdot 7 + 3 \,, \quad \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{7/3} \,, \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \,, \quad \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{10}{7} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} \,. \end{aligned}$$

La fracción $\frac{43}{30}$ es representada por $[1, 2, 3, 4]$; el valor de $[1, 2, 3, 4]$ es $\frac{43}{30}$:

$$\begin{aligned} 43 &= 1 \cdot 30 + 13 \,, \quad \frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{30/13} \,, \\ 30 &= 2 \cdot 13 + 4 \,, \quad \frac{30}{13} = 2 + \frac{4}{13} = 2 + \frac{1}{13/4} \,, \\ 13 &= 3 \cdot 4 + 1 \,, \quad \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{43}{30} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} \,. \end{aligned}$$

La fracción $\frac{225}{157}$ es representada por $[1, 2, 3, 4, 5]$; el valor de $[1, 2, 3, 4, 5]$ es $\frac{225}{157}$:

$$\begin{aligned} 225 &= 1 \cdot 157 + 68 \,, \quad \frac{225}{157} = 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{157/68} \,, \\ 157 &= 2 \cdot 68 + 21 \,, \quad \frac{157}{68} = 2 + \frac{21}{68} = 2 + \frac{1}{68/21} \,, \\ 68 &= 3 \cdot 21 + 5 \,, \quad \frac{68}{21} = 3 + \frac{5}{21} = 3 + \frac{1}{21/5} \,, \\ 21 &= 4 \cdot 5 + 1 \,, \quad \frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad \frac{225}{157} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}} \,. \end{aligned}$$

3 Irracionales cuadráticos

Ejemplo 7. Sea $\alpha = \sqrt{2}$ ¿Cómo podemos aproximarlo? El piso de α es igual a $\lfloor \alpha \rfloor = 1$ $(1^2 \leq 2 < 2^2)$. Entonces, $\alpha = 1 + \{\alpha\}$, donde $\{\alpha\} = \sqrt{2} - 1$ y $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$, donde

$$\alpha_1 \;=\; \frac{1}{\{\alpha\}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}-1} \;=\; \sqrt{2}+1 \ .$$

Ahora, $\lfloor \alpha_1 \rfloor = 2$ $((2-1)^2 \leq 2 < (3-1)^2)$ y $\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2}$, donde $\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}}$. Pero

$$\{\alpha_1\} \;=\; (\sqrt{2}+1) - 2 \;=\; \sqrt{2} - 1 \;=\; \{\alpha\}$$

implica que $\alpha_2 = \alpha_1$ y

$$\alpha_1 \;=\; 2 + \frac{1}{\alpha_2} \;=\; 2 + \frac{1}{\alpha_1} \ .$$

En cuanto a α,

$$\alpha \;=\; 1 + \frac{1}{\alpha_1} \;=\; 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha_1}} \;=\; 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha_1}}} \;=\; \dots$$

Truncando, obtenemos la sucesión de convergentes parciales:

$$[1]\ , \quad [1,2]\ , \quad [1,2,2]\ , \quad \dots$$

¿Qué pasa con los valores de estas convergentes?[1]

$$\begin{aligned} [1] \;&=\; 1\ , \\ [1,2] \;&=\; \frac{3}{2}\ , \\ [1,2,2] \;&=\; \frac{7}{5}\ , \\ [1,2,2,2] \;&=\; \frac{17}{12}\ . \end{aligned}$$

Ejemplo 8. Sea $\alpha = \sqrt{3}$. Entonces, $\lfloor \alpha \rfloor = 1$ $(1^2 \leq 3 < 2^2)$ y $\{\alpha\} = \sqrt{3} - 1$. Si $\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha\}}$, entonces

$$\alpha_1 \;=\; \frac{\sqrt{3}+1}{2} \ .$$

Repitiendo con α_1 lo que hicimos con α, vemos que $\lfloor \alpha_1 \rfloor = 1$ $((2\cdot 1 - 1)^2 \leq 3 < (2\cdot 2 - 1)^2)$ y $\{\alpha_1\} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. si $\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}}$, entonces

$$\alpha_2 \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}-1} \;=\; \sqrt{3}+1 \ .$$

[1] Dejar $[1,2,2,2,2] = \frac{41}{29}$ como ejercicio.

Ahora, $\lfloor \alpha_2 \rfloor = 2$ $((2-1)^2 \leq 3 < (3-1)^2)$ y

$$\{\alpha_2\} \;=\; \sqrt{3}-1 \;=\; \{\alpha\}\ .$$

En particular, $\alpha_3 = \frac{1}{\{\alpha_2\}}$ será $= \alpha_1$ y llegamos a la fracción continua

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}} \tag{2}$$

¿Qué pasa con los valores de las convergentes parciales, truncando la fracción continua "infinita" (2) cada vez más lejos?

$$[1]\ ,\quad [1,1]\ ,\quad [1,1,2]\ ,\quad [1,1,2,1]\ ,\quad [1,1,2,1,2]\ ,\quad \ldots$$

Ejemplo 9. Sea $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Entonces, $\lfloor \alpha \rfloor = 1$ $((1\cdot 2-1)^2 \leq 5 < (2\cdot 2-1)^2)$ y $\alpha = 1 + \{\alpha\}$, con

$$\{\alpha\} \;=\; \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \;=\; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ .$$

Si $\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha\}}$, entonces

$$\alpha_1 \;=\; \frac{2}{\sqrt{5}-1} \;=\; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \;=\; \alpha \quad (!)$$

y, sustituyendo, α_1 por α,[2]

$$\alpha \;=\; 1+\frac{1}{\alpha} \;=\; 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha}} \;=\; \ldots$$

¿Cómo es la fracción contina en este caso?

4 Triángulos y ecuaciones diofánticas

Pregunta 3. ¿Hay triángulos rectángulos isósceles de lados enteros?

Si a, b y c son las longitudes de los lados, entonces $c^2 = b^2 + a^2$ y $b = a$. En particular,

$$c^2 \;=\; 2a^2\ ,$$

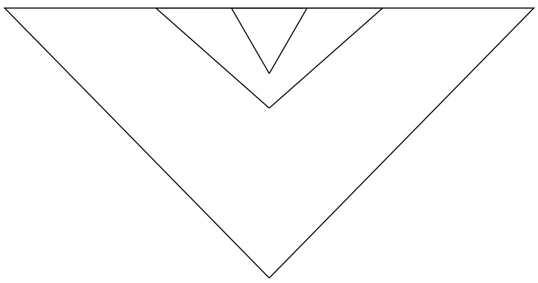
que no tiene solución, si $a, c \in \mathbb{Z}$ ¿Podemos "aproximarlo"? ¿Qué es lo más chico que $c^{=}2a^2$ puede ser? ¿Cuál es el valor más chico que puede tomar? Por ejemplo, podríamos empezar preguntand si

$$c^2 - 2a^2 \;=\; \pm 1 \tag{3}$$

n	a_n	a	c	$c^2 - 2a^2$
0	1	1	1	-1
1	2	2	3	1
2	2	5	7	-1
3	2	12	17	1
4	2	29	41	-1

Tabla 1: Algunas soluciones a $c^2 - 2a^2 = \pm 1$

tiene soluciones, con $a, c \in \mathbb{Z}$, para $+1$ o -1. La respuesta es que sí. La Tabla 1 muestra algunas de estas soluciones. Si (a, c) es una solución a la Ecuación 3, entonces el conciente c/a aproxima $\sqrt{2}$; si a es grande, $(c/a)^2 - 2 = \pm 1/a^2$ es chica. En definitiva, dada una solución (a, c), obtenemos un triángulo isósceles (a, a, c) que es una aproximación de un triángulo rectángulo de hipotenusa c.



Pregunta 4. Hallar triángulos rectángulos de lados enteros que difieran lo menos posible.

Si un triángulo así es $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ los catetos, entonces podemos intentar $\bar{b} = \bar{a} + 1$. De $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{c}^2$, se deduce que

$$(2\bar{a} + 1)^2 - 2\bar{c}^2 = -1 \ . \qquad (4)$$

Si tenemos una solución (a, c) de (3) con -1 del lado derecho y con c impar, definimos $\bar{a} \in \mathbb{Z}$ tal que $2\bar{a} + 1 = c$ ($\bar{a} = \frac{c-1}{2}$) y $\bar{c} = a \in \mathbb{Z}$. Así, obtenemos un triángulo rectángulo $(\bar{a}, \bar{a}+1, \bar{c})$ (¡primitiva!). O sea que hay una correspondencia entre triángulos rectángulos $(\bar{a}, \bar{a} + 1, \bar{c})$ y soluciones (a, c) a la ecuación con -1 y con c impar.

5 Preguntas

Las siguientes son sólo algunas preguntas posibles para plantear relacionadas con lo que hicimos.

[2] Notemos que, de la primera igualdad, se puede deducir una ecuación para α: $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ ¿Qué raíces tiene?

a	c	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$
1	1	0	1	1
2	3	-	-	-
5	7	3	4	5
12	17	-	-	-
29	41	20	21	29
70	99	-	-	-
169	239	119	120	169

Tabla 2: Algunas soluciones a (3) y las ternas pitagóricas correspondientes

Pregunta 5. ¿Hay alguna manera de distinguir los números racionales por su desarrollo decimal? ¿Qué pasa con fracciones continuas (representación alternativa de los números reales?

Pregunta 6. El valor de una fracción continua finita es racional (si los coeficientes son números enteros) ¿Podemos representar todo número racional por una fracción continua?

Podemos (parece) representar $\sqrt{N}$ por fracciones continuas infinitas (sucesiones de convergentes parciales) ¿Pdemos representar otros números? ¿Podemos representar todos los números?

Pregunta 7. ¿Hay alguna característica especial de las fracciones continuas de los racionales? ¿Y de $\sqrt{N}$? ¿Qué pasa con otros números?

Referencias

[Khi64] A. Y. Khinchin. *Continued Fractions*. Chicago and London: The University of Chicago Press. xi, 95 pp. (1964). 1964.

[Sha93] D. Shanks. *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*. 4th ed. New York, NY: Chelsea, 1993.

[Ste09] W. Stein. *Elementary Number Theory. Primes, Congruences, and Secrets. A Computational Approach*. Undergraduate Texts Math. New York, NY: Springer, 2009.