

Formas cuadráticas y algunas formas automorfas

Parte II: Formas paramodulares

1 Formas de Siegel

1.1 Matrices simplécticas

El grupo modular $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ es el grupo de automorfismos del retículo \mathbb{Z}^2 equipado con la forma bilineal alternada:

$$\langle (u, v), (w, z) \rangle = uz - vw .$$

Un poco más en general, si $g \geq 1$, introducimos, fijada en el retículo \mathbb{Z}^{2g} una base $e_1, \dots, e_g, f_1, \dots, f_g$, la forma bilineal alternada:

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad \langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle e_i, f_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si no} \end{cases} . \quad (1)$$

El *grupo modular de Siegel* se define como el grupo de automorfismos de \mathbb{Z}^{2g} que preserve la forma (1). En la base elegida, la matriz de la forma bilineal está dada por

$$J = \begin{bmatrix} & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I_g \\ -I_g & \end{bmatrix} , \quad (2)$$

donde I_g denota la matriz identidad de tamaño $g \times g$.¹ Vía esta elección de base, este grupo se identifica con el subgrupo de matrices

$$\Gamma_g := \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}) = \{ M \in \mathrm{Mat}(2g \times 2g, \mathbb{Z}) : MJ^t M = J \} .$$

¹ Espacios en blanco indican que la coordenada correspondiente es nula.

Es decir, si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$,² entonces

$$MJ^tM = \begin{bmatrix} A^tB - B^tA & A^tD - B^tC \\ C^tB - D^tA & C^tD - D^tC \end{bmatrix}$$

y $M \in \Gamma_g$, si y sólo si

$$A^tB = B^tA, \quad C^tD = D^tC \quad \text{y} \quad A^tD - B^tC = D^tA - C^tB = I_g.$$

En particular, si $M \in \Gamma_g$, entonces

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g & \\ & I_g \end{bmatrix},$$

lo que muestra que M es inversible con inversa dada por $M^{-1} = \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix}$ y, en consecuencia, que también se verifican las relaciones

$${}^tDA - {}^tBC = {}^tAD - {}^tCB = I_g, \quad {}^tDB = {}^tBD \quad \text{y} \quad {}^tAC = {}^tCA,$$

o sea ${}^tMJM = J$, también.

Un poco *más* en general, una matriz $M \in \text{Mat}(2g \times 2g, \mathbb{C})$ es *simpléctica*, si verifica:

$$MJ^tM = \mu(M)J,$$

para cierto escalar inversible $\mu(M)$. Si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ es simpléctica y

$$\text{adj}(M) = \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix}, \tag{3}$$

entonces $M\text{adj}(M) = \text{adj}(M)M = \mu(M)I_{2g}$. Las matrices simplécticas con coordenadas reales forman un grupo que denotamos $\text{GSp}(g, \mathbb{R})$ y $\mu : \text{GSp}(g, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ es un morfismo de grupos. El grupo modular de Siegel está contenido en el subgrupo

$$\text{GSp}(g, \mathbb{R})^+ = \left\{ M \in \text{GSp}(g, \mathbb{R}) : \mu(M) > 0 \right\},$$

de aquellas matrices simplécticas reales cuyo factor $\mu(M)$ es positivo. A modo de ejemplo, las matrices

$$\begin{bmatrix} U & \\ & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_g & S \\ & I_g \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad J = \begin{bmatrix} & I_g \\ -I_g & \end{bmatrix} \tag{4}$$

son simplécticas con factor $\mu = 1$, si $U \in \text{GL}(g, \mathbb{Z})$ y ${}^tS = S$; pertenecen a Γ_g .

² A, B, C y D , matrices cuadradas.

1.2 Funciones en el semiplano de Siegel

El *semiplano de Siegel* (de género g) es el conjunto conformado por las matrices simétricas, de tamaño $g \times g$ y de coordenadas complejas, cuya parte imaginaria es definida positiva:

$$\mathfrak{H}_g = \left\{ \Omega = X + iY \in \text{Mat}(g \times g, \mathbb{C}) : {}^t\Omega = \Omega, Y > 0 \right\}.$$

Si $g = 1$, \mathfrak{H}_1 es el semiplano complejo. Si $g = 2$, $\Omega = \begin{bmatrix} \omega & z \\ z & \tau \end{bmatrix} \in \mathfrak{H}_2$, si y sólo si

$$\text{Im}(\omega), \text{Im}(\tau) > 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}(z)^2 < \text{Im}(\omega) \text{Im}(\tau).$$

En general, el semiplano de Siegel es un abierto convexo dentro del espacio de matrices complejas simétricas; es una variedad compleja y su dimensión es $g(g+1)/2$.

El grupo $\text{GSp}(g, \mathbb{R})^+$ actúa en \mathfrak{H}_g vía:

$$M \langle \Omega \rangle = (A\Omega + B) (C\Omega + D)^{-1}, \quad (5)$$

para cada $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \text{GSp}_{2g}(\mathbb{R})^+$ y $\Omega \in \mathfrak{H}_g$; la acción es transitiva y cada M induce una transformación biholomorfa cuya inversa está dada por (3). Las matrices (4) actúan por:

$$\Omega \mapsto U\Omega {}^tU, \quad \Omega \mapsto \Omega + S \quad \text{y} \quad \Omega \mapsto -\Omega^{-1}. \quad (6)$$

Una *forma modular* (de Siegel) de género g y peso k con respecto al grupo Γ_g es una función $F : \mathfrak{H}_g \rightarrow \mathbb{C}$

(M1) holomorfa en \mathfrak{H}_g ,³

(M2) que, si $M = \begin{bmatrix} * & * \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_g$ y $\Omega \in \mathfrak{H}_g$, cumple

$$F(M \langle \Omega \rangle) = \det(C\Omega + D)^k F(\Omega) \quad \text{y} \quad (7)$$

(M3) acotada en regiones de la forma $\{Y \geq cI_g\}$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

Las formas modulares de Siegel de peso k constituyen un espacio vectorial de dimensión finita [Klingen], que denotamos $\mathcal{M}_k(\Gamma_g)$. De (7), se deducen las siguientes reglas de transformación para una forma modular F :

- (i) $F(U\Omega {}^tU) = \det(U)^k F(\Omega)$, si $U \in \text{GL}(g, \mathbb{Z})$;
- (ii) $F(\Omega + S) = F(\Omega)$, si ${}^tS = S \in \text{Mat}(g \times g, \mathbb{Z})$;
- (iii) $F(-\Omega^{-1}) = \det(\Omega)^k F(\Omega)$.

³ Una función en varias variables complejas es holomorfa, si localmente admite un desarrollo en serie de potencias; equivalentemente, dicha función es holomorfa en su dominio de definición, si es holomorfa en cada variable por separado [Gunning].

De (ii) y de (M3), se deduce que toda forma modular admite un desarrollo en serie de Fourier del tipo:

$$F(\Omega) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)} , \quad (8)$$

La sumatoria se realiza sobre las matrices simétricas ${}^tT = T$ tales que: $2T$ tiene coordenadas enteras y pares en la diagonal y T es semidefinida positiva. Si $g = 1$, (8) es el desarrollo de Fourier usual, donde $T \in \mathbb{Z}$. Si $g = 2$, entonces $T = \begin{bmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{bmatrix}$, $n, r, m \in \mathbb{Z}$, representa formas cuadráticas binarias con coeficientes enteros.

La serie (8) converge absoluta y uniformemente sobre compactos de \mathfrak{H}_g y podemos recuperar los coeficientes:

$$a(T) = \int_{X \pmod{1}} F(\Omega) e^{-2\pi i \text{tr}(T\Omega)} dX . \quad (9)$$

De (i) y de (9), se deduce que

$$a(UT {}^tU) = (\det U)^k a(T) .$$

En particular, $kg \not\equiv 0 \pmod{2}$ implica $\mathcal{M}_k(\Gamma_g) = 0$.

Teorema 1.2.1. *Supongamos que $g > 1$. Si F satisface (M1) y (M2), entonces F satisface (M3).*

Demostración. Como (8) converge en $\Omega = iI_g$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$|a(T)| \leq \alpha e^{2\pi i \text{tr}(T)} .$$

Afirmamos que $a(T) \neq 0$ implica $T \geq 0$. Asumiendo esto,

$$F(\Omega) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)} \ll \sum_{T \geq 0} |a(T)| e^{-2\pi c \text{tr}(T)} ,$$

uniformemente en $\{Y \geq cI_g\}$. Pero el lado derecho converge, pues es la serie de Fourier (que converge a.u./c. de \mathfrak{H}_g) evaluada en el punto icI_g .

Con respecto a la afirmación, si T no es semidefinida positiva, existe V_1 de coordenadas enteras y contenido 1 tal que $T[V_1] < 0$. Completando V_1 a una $V \in \text{GL}(g, \mathbb{Z})$, cambiando T por $T[V]$ y usando $a(T[V]) = (\det V)^k a(T)$, podemos suponer que $T_{11} < 0$. Ahora, sea $U = \begin{bmatrix} U^* & \\ & I_{g-2} \end{bmatrix}$, con $U^* = \begin{bmatrix} 1 & m \\ & 1 \end{bmatrix}$ y $m \in \mathbb{Z}$. El coeficiente

$$|a(T)| = |a(T[U])| \leq \alpha e^{2\pi \text{tr}(T[U])} ,$$

pero $\text{tr}(T[U]) = \text{tr}(T) + 2T_{12}m + T_{11}m^2$ tiende a $-\infty$ ($m \rightarrow \infty$), pues $T_{11} < 0$. \square

Si F es una forma modular, entonces su expansión de Fourier es del tipo

$$F(\Omega) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)} ,$$

donde, ahora sabemos, $a(T) \neq 0$, sólo si $T \geq 0$, es decir, T representa una forma cuadrática semidefinida positiva, con coeficientes enteros. En particular, si $g = 2$, podemos reescribir la expansión de Fourier de una forma de Siegel de género 2 de la siguiente manera:

$$F(\tau, z, \omega) = \sum_{\{n, r, m\} \geq 0} a(n, r, m) e^{2\pi i (n\tau + rz + m\omega)}, \quad (10)$$

donde la condición $\{n, r, m\} \geq 0$ quiere decir que la forma es semidefinida positiva: $n, m, 4mn - r^2 \geq 0$. Si agrupamos los términos en función de $m \geq 0$,

$$F(\tau, z, \omega) = \sum_{m \geq 0} f_m(\tau, z) e^{2\pi i \omega m}. \quad (11)$$

Las funciones f_m son *formas de Jacobi de índice m* y la expansión (11) se conoce como la *expansión de Fourier-Jacobi de F* [EichlerZagier].

1.3 Las series de Eisenstein y el operador de Siegel

Dada $F \in \mathcal{M}_k(\Gamma_g)$ definimos una forma de género menor mediante el operador de Siegel. El espacio \mathfrak{H}_g tiene un borde. Vemos cómo restringir una forma a ese “borde”. Esto nos permitirá definir la noción de forma cuspidal como el núcleo del operador de Siegel: aquellas formas que son cero en el borde. Recíprocamente, dada una forma cuspidal de género $r \leq g$, definida en una componente de este borde, si el peso es suficientemente grande (con respecto al género), es posible extenderla a \mathfrak{H}_g mediante series de Eisenstein-Klingen. Para simplificar la exposición y no sobrecargar la notación, supondremos $g = 2$. En este caso,

$$\mathfrak{H}_2 = \left\{ \Omega = \begin{bmatrix} \omega & z \\ z & \tau \end{bmatrix} : \omega, \tau \in \mathfrak{H}_1, z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(\omega) \operatorname{Im}(\tau) > \operatorname{Im}(z)^2 \right\}.$$

Escribimos $\Omega = (\tau, z, \omega) \in \mathfrak{H}_2$.

Teorema 1.3.1. Sean $\tau \in \mathfrak{H}_1$ y $F \in \mathcal{M}_k(\Gamma_2)$. Si $\Omega_\nu = (\tau_\nu, z_\nu, \omega_\nu) \in \mathfrak{H}_2$ es una sucesión que cumple: $\omega_\nu = \omega$ está fijo, z_ν está acotada e $\operatorname{Im}(\tau_\nu) \rightarrow \infty$, entonces el límite

$$\lim_{\nu} F(\Omega_\nu)$$

existe y su valor depende de ω , pero no de la sucesión. La función resultante, $\Phi F(\omega)$ define una forma de Siegel de género 1 y peso k (una forma modular elíptica).

Demostración. La sucesión Ω_ν estará contenida en alguna región de la forma $\{Y \geq cI_2\}$, eventualmente. Allí, la serie de Fourier de F converge a.u./c. Si $T = \{n, r, m\}$ y $\Omega = (\tau, z, \omega)$, entonces $\operatorname{tr}(T\Omega) = n\tau + rz + m\omega$. Si $n > 0$,

$$|e^{2\pi i \operatorname{tr}(T\Omega_\nu)}| \leq e^{-2\pi \{n\tau_\nu + rz_\nu + m\omega\}}$$

tiende a 0. Tomando límite término a término en (10), se deduce que, $a(n, r, m) = 0$ cuando $n \neq 0$. En particular, en el límite, sólo sobreviven los términos con $n = r = 0$: el límite $\nu \rightarrow \infty$ existe y es igual a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} F(\tau_\nu, z_\nu, \omega) = \sum_{m \geq 0} a(0, 0, m) e^{2\pi i \omega m} .$$

La nueva serie converge a.u./c. de \mathfrak{H}_1 . La función resultante, $\Phi F(\omega)$ es holomorfa en \mathfrak{H}_1 y acotada en regiones de la forma $\{\omega \geq ic\}$. Veamos que es de peso k invariante para $\Gamma_1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Dado $\omega \in \mathfrak{H}_1$, elegimos la sucesión $(i\nu, 0, \omega)$. Dada $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, la matriz

$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} a & & b & \\ & 1 & & \\ c & & d & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

pertenece a Γ_2 . Actuando en un término de la sucesión por este elemento,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} \langle (i\nu, 0, \omega) \rangle &= \left(\begin{bmatrix} a & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega & \\ & i\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & \\ & \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} c & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega & \\ & i\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & \\ & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= (i\nu, 0, \frac{a\omega+b}{c\omega+d}) . \end{aligned}$$

Tomando límite $\nu \rightarrow \infty$ en la igualdad

$$F(\tilde{\gamma} \langle (i\nu, 0, \omega) \rangle) = \det \left(\begin{bmatrix} c & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega & \\ & i\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & \\ & 1 \end{bmatrix} \right)^k F(i\nu, 0, \omega) = (c\omega + d)^k F(i\nu, 0, \omega) ,$$

se concluye que

$$\Phi F(\gamma\omega) = j(\gamma, \omega)^k \Phi F(\omega) ,$$

es decir, ΦF es de peso k invariante para $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. □

Definición 1.3.2. Una forma de Siegel F es *cuspidal*, si $\Phi F = 0$.

Observación 1.3.3. Dado que toda $T = \{n, r, m\}$ singular es equivalente a $\{0, 0, *\}$ y que, en tal caso, $a(n, r, m) = a(0, 0, *)$, deducimos que $\Phi F = 0$, si y sólo si $a(n, r, m) = 0$ implica $\{n, r, m\} > 0$.

Sea $\Delta^+ \leq \Gamma_2$ el subgrupo de matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} U & S {}^t U^{-1} \\ & {}^t U^{-1} \end{bmatrix} , \quad U \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad {}^t S = S .$$

Sea $\Gamma_\infty \leq \Gamma_2$ el subgrupo de matrices de la forma

$$M = \begin{bmatrix} a & & b & * \\ * & * & * & * \\ c & & d & * \\ & & & * \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) .$$

Si $\Omega = (\tau, z, \omega) \in \mathfrak{H}_2$, sea $\Omega^* = \omega$.

Definición 1.3.4. Sea $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1)$, $k > 0$ par ($r = 1$), o bien una constante ($r = 0$), y sea $\Omega \in \mathfrak{H}_2$. La serie de Eisenstein asociada a f en Ω es

$$E_{2,r,k}(\Omega; f) = \sum_{M \in C_{2,r} \backslash \Gamma_2} \frac{f(M\langle\Omega\rangle^*)}{\det(C\Omega + D)^k} ,$$

donde $C_{2,0} = \Delta^+$ y $C_{2,1} = \Gamma_\infty$.

Teorema 1.3.5. Sean $r = 0, 1$, $k > r + 3$ par. Si $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1)$ ($r = 1$), o constante ($r = 0$), la serie de Eisenstein $E_{g,r,k}(\Omega; f)$ converge absoluta y uniformemente en bandas verticales.⁴ Además,

$$\Phi^{2-r} E_{2,r,k}(-; f) = f .$$

El espacio $\mathcal{M}_k(\Gamma_2)$ está generado por las series de Eisenstein $E_{2,r,k}(-; f)$ ($r = 0, 1$) y por las formas cuspidales $\mathcal{S}_k(\Gamma_2)$.

1.4 Un ejemplo

Dados $\Omega \in \mathfrak{H}_2$, $\epsilon = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z})$,

$$\vartheta(\Omega; \epsilon) := \sum_g e^{\pi i \{ \Omega[g+a/2] + {}^tbg \}} \quad (g = \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}, * \in \mathbb{Z})$$

define una función holomorfa. Estas funciones verifican

- (i) $\vartheta(\Omega; a + 2g, b) = (-1)^{{}^tbg} \vartheta(\Omega; a, b)$
- (ii) $\vartheta(\Omega; a, b + 2g) = \vartheta(\Omega; a, b)$.

En particular, podemos restringirnos a los casos en que ϵ (a y b) tiene coordenadas 0 y 1. Hay dieciséis posibles ϑ . Además, cambiando g por $-g - a$ en la definición de ϑ ,

- (iii) $\vartheta(\Omega; a, b) = (-1)^{{}^tab} \vartheta(\Omega; a, b)$.

En particular, si ${}^tab \not\equiv 0 \pmod{2}$, la función $\vartheta(\Omega; a, b) = 0$ en \mathfrak{H}_2 . Como

$${}^t\epsilon\epsilon = \begin{bmatrix} {}^taa & {}^tab \\ {}^tba & {}^tbb \end{bmatrix} ,$$

la condición equivale a que ${}^t\epsilon\epsilon$ sea par. Diez matrices ϵ son pares y permiten definir la siguiente función:

$$\Theta(\Omega) := \prod_{{}^t\epsilon\epsilon \text{ par}} \vartheta(\Omega; \epsilon) . \tag{12}$$

La función (12) es holomorfa y verifica

$$\Theta(M\langle\Omega\rangle) = v(M) j(M, \Omega)^5 \Theta(\Omega) ,$$

⁴ Regiones de la forma $\{\text{tr}(X) \leq c^{-1}, Y \geq cI_2\}$.

donde $v : \Gamma_2 \rightarrow \{\pm 1\}$ es cierto morfismo de grupos. Esta función no es idénticamente nula, se anula en

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} : \omega, \tau \in \mathfrak{H}_1 \right\},$$

no posee otros ceros módulo Γ_2 y cada cero es de orden 1: $\Theta(\Omega)/z$ es holomorfa y no se anula en cierto dominio fundamental para Γ_2 .

Teorema 1.4.1. *Las funciones $\chi_{10}(\Omega) := \Theta(\Omega)^2$ y*

$$\chi_{35}(\Omega) := \Theta(\Omega) \sum_{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \text{ impar}} \pm (\vartheta(\Omega; \epsilon_1) \vartheta(\Omega; \epsilon_2) \vartheta(\Omega; \epsilon_3))^{20}$$

son formas cuspidales $\neq 0$, de pesos 10 y 35, respectivamente. El anillo de formas de Siegel de género 2 es un álgebra finitamente generada y, si $E_k := E_{2,0,k}$,

$$\mathcal{M}(\Gamma_2) \simeq \mathbb{C}[E_4, E_6, E_{12}, \chi_{10}, \chi_{35}] / \langle \chi_{35}^2 - R \rangle,$$

donde R es una expresión polinomial en las formas de peso par.

1.5 Operadores de Hecke

Empezamos definiendo el anillo de Hecke en abstracto y enunciando algunas de sus propiedades. Usaremos la siguiente notación: $G = \mathbf{GSp}(g, \mathbb{Q})$, $G^+ = G \cap \{\mu > 0\}$, y $\Gamma = \mathbf{Sp}(g, \mathbb{Z})$.

Sea \mathcal{L} el espacio vectorial (módulo libre) cuyos elementos son las sumas formales de coclases a derecha

$$\sum_{\Gamma M \subseteq G^+} c_{\Gamma M} \Gamma M, \quad (13)$$

con $c_{\Gamma M} = 0$ para toda coclase salvo una cantidad finita. El subgrupo Γ actúa en \mathcal{L} : $(\Gamma M) \cdot \gamma = \Gamma M \gamma$. En el subespacio (submódulo) \mathcal{L}^Γ , podemos definir una operación:

$$\left(\sum_i c_i \Gamma M_i \right) \left(\sum_j c'_j \Gamma M'_j \right) = \sum_{i,j} c_i c'_j \Gamma M_i M'_j. \quad (14)$$

Esta nueva expresión no depende de los representantes $M_i \in \Gamma M_i$, ni $M'_j \in \Gamma M'_j$ y pertenece a \mathcal{L}^Γ . Por otro lado, cada doble coclase $\Gamma M \Gamma$, $M \in G^+$ se descompone como unión finita (disjunta) de coclases a derecha: $\Gamma M \Gamma = \bigsqcup_i \Gamma M_i$ y determina, por lo tanto, un elemento de \mathcal{L} . Denotamos por $\mathcal{H}(G^+, \Gamma)$ el espacio vectorial (módulo libre) con base las dobles coclases $\Gamma M \Gamma$, $M \in G^+$. La aplicación

$$\Gamma M \Gamma = \bigsqcup_i \Gamma M_i \mapsto \sum_i \Gamma M_i$$

determina un isomorfismo $\mathcal{H}(G^+, \Gamma) \simeq \mathcal{L}^\Gamma$.

Definición 1.5.1. El *álgebra de Hecke del par* (G^+, Γ) es el álgebra cuyo espacio subyacente es $\mathcal{H}(G^+, \Gamma)$ con producto dado por traslación de estructura de \mathcal{L}^Γ .

Para simplificar la notación, suponemos $g = 2$.

Lema 1.5.2 (Divisores simplécticos). *Sea $\Sigma^+ = G^+ \cap \text{Mat}(2g \times 2g, \mathbb{Z})$. Si $M \in \Sigma^+$, entonces $\Gamma_2 M \Gamma_2$ posee un único representante de la forma*

$$\text{sd}(M) = \langle a_1, a_2, d_1, d_2 \rangle ,$$

donde $a_i, d_i \in \mathbb{Z}$, $a_1 \mid a_2 \mid d_2 \mid d_1$ y $a_1 d_1 = a_2 d_2 = \mu(M) \in \mathbb{Z} > 0$.

Teorema 1.5.3. *El álgebra $\mathcal{H}(G^+, \Gamma_2)$ es conmutativa.*

Demostración. La aplicación $M \mapsto \text{adj}(M) = \mu(M) M^{-1}$ es una antiinvolución en G^+ que también preserva Γ_2 . Además, se verifica $\Gamma_2 \text{adj}(M) \Gamma_2 = \Gamma_2 M \Gamma_2$ (si M es diagonal, $\text{adj}(M) = J M J^{-1}$, pero $J \in \Gamma_2$). En particular, dicha antiinvolución es trivial en $\mathcal{H}(G^+, \Gamma_2)$. \square

Utilizaremos la siguiente notación para referirnos a ciertas (uniones de) dobles coclases o, equivalentemente, elementos del álgebra de Hecke: $T(M) = \Gamma_2 M \Gamma_2$,

$$T(a_1, a_2, d_1, d_2) = T(\text{diag}_{a_1, a_2, d_1, d_2}) ,$$

y $\langle d \rangle = T(dI_{2g})$.

Los elementos $T(M)$ poseen la siguiente propiedad: si $(d_1/a_1, d'_1/a'_1) = 1$, entonces

$$T(a_1, a_2, d_1, d_2) T(a'_1, a'_2, d'_1, d'_2) = T(a_1 a'_1, a_2 a'_2, d_1 d'_1, d_2 d'_2) .$$

En particular,

$$\langle d \rangle T(a_1, a_2, d_1, d_2) = T(da_1, da_2, dd_1, dd_2) .$$

Además, si $m \geq 1$ y

$$T(m) = \mathcal{O}_g(m) = \{M \in \Sigma^+ : \mu(M) = m\} ,$$

entonces se cumple

$$\begin{aligned} T(m) &= \sum \left\{ T(a_1, a_2, d_1, d_2) : a_1 d_1 = a_2 d_2 = m, a_1 \mid a_2 \mid d_2 \mid d_1 \right\} \\ &= \sum \left\{ \Gamma_2 M : \Gamma_2 M \subseteq \Sigma^+, \mu(M) = m \right\} . \end{aligned}$$

Si $(m, m') = 1$, entonces $T(m)T(m') = T(mm')$.

Análogamente, podemos definir versiones “locales” de estos anillos. Usamos la siguiente notación: dado un primo p , $G_p = \text{GSp}(g, \mathbb{Z}[1/p])$, $G_p^+ = G_p \cap G^+$ y $\Sigma_p^+ = \Sigma^+ \cap G_p^+$.

Lema 1.5.4. *El álgebra $\mathcal{H}(G^+, \Gamma_2)$ está generada por todas las subálgebras $\mathcal{H}(G_p^+, \Gamma_2)$.*

Demostración. Hay una noción de divisor simpléctico en p , sd_p y se verifica

$$\text{sd}(M) = \prod_p \text{sd}_p(M) .$$

Entonces, $T(M) = T(\text{sd}(M)) = \prod_p T(\text{sd}_p(M))$. \square

Lema 1.5.5. Con $m = p, p^2$, se verifica

$$T(p) = T(1, 1, p, p) \quad y \quad T(p^2) = T_0(p^2) + T_1(p^2) + T_2(p^2) ,$$

donde

$$\begin{aligned} T_0(p^2) &= T(1, 1, p^2, p^2) , \\ T_1(p^2) &= T(1, p, p^2, p) \quad y \\ T_2(p^2) &= T(p, p, p, p) = \langle p \rangle . \end{aligned}$$

Teorema 1.5.6. Los elementos $T(p)$, $T_0(p^2)$, $T_1(p^2)$ y $T_2(p^2)$ generan $\mathcal{H}(\Sigma_p^+, \Gamma_2)$.

El Teorema 1.5.6 implica que existen ciertas relaciones entre los operadores $T(p^k)$, $k \geq 0$. Estas relaciones se pueden encapsular en una serie de potencias.

Teorema 1.5.7. Si $g = 2$, entonces, en $\mathcal{H}(\Sigma_p^+, \Gamma_2)[[X]]$,

$$\sum_{k \geq 0} T(p^k) X^k = (1 - p^2 \langle p \rangle X^2) (1 - Q_1(p) X + Q_2(p) X^2 - Q_3(p) X^3 + Q_4(p) X^4)^{-1} ,$$

donde

$$\begin{aligned} Q_1(p) &= T(p) , \\ Q_2(p) &= pT_1(p^2) + p(p^2 + 1) \langle p \rangle = T(p)^2 - T(p^2) - p^2 \langle p \rangle , \\ Q_3(p) &= p^3 \langle p \rangle T(p) \quad y \\ Q_4(p) &= p^6 \langle p \rangle^2 . \end{aligned}$$

2 Formas paramodulares

2.1 Subgrupos de congruencia

Dado un número natural $N \geq 1$, el *subgrupo principal de congruencia de nivel N* es el siguiente subgrupo del grupo modular:

$$\Gamma(N) = \left\{ M \in \Gamma_g : M \equiv I_g \pmod{N} \right\} .$$

Este subgrupo es el núcleo del morfismo $\Gamma_g \rightarrow \mathbf{Sp}(g, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ dado por reducir las coordenadas módulo N ; es un subgrupo normal de índice finito. Un *subgrupo de congruencia* es un subgrupo $K \leq \mathbf{GSp}(g, \mathbb{R})^+$ que cumple con:

- ser *commensurable* con Γ_g , es decir, $K \cap \Gamma_g$ tiene índice finito en Γ_g y en K , y
- contener un subgrupo principal de congruencia.

Por ejemplo, si $g = 2$, los subgrupos

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_2 : C \equiv 0 \pmod{N} \right\} = \Gamma_2 \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \quad y$$

$$\Gamma^{\text{para}}(N) := \text{Sp}(2, \mathbb{Q}) \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \frac{1}{N}\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$$

son subgrupos de congruencia. El grupo $\Gamma_0(N)$ se conoce como *grupo de congruencia de Siegel de nivel N* ; el grupo $\Gamma^{\text{para}}(N)$ es el *grupo paramodular de nivel N* . Los subgrupos

$$Q(N) := \Gamma_2 \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \Gamma_2 \cap \Gamma^{\text{para}}(N) \quad y$$

$$B(N) := \Gamma_2 \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \Gamma_0(N) \cap Q(N) ,$$

el *subgrupo de congruencia de Klingen* y el *subgrupo de congruencia de Borel*, respectivamente, también son subgrupos de congruencia. Todos estos grupos contienen al subgrupo principal de nivel N .

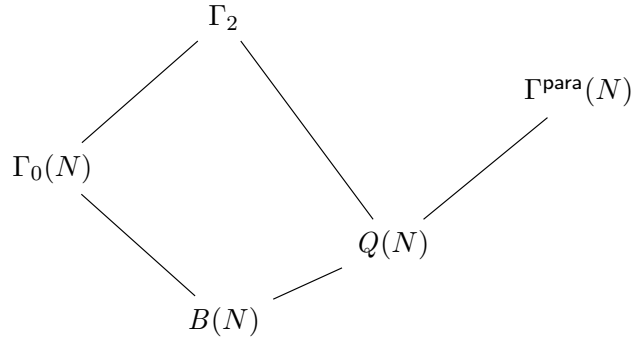


Figure 1: Diagrama de las relaciones de inclusión entre los subgrupos de congruencia.

Los subgrupos de congruencia admiten una noción de forma modular; la definición es análoga a la de formas de Siegel para el grupo Γ_g .

2.2 Funciones en el semiplano de Siegel

Dada M , operador de peso k en una función F definida en \mathfrak{H}_g asocia, a F , la función

$$F[M]_k(\Omega) = \frac{\mu(M)^{kg - \frac{g(g+1)}{2}}}{\det(C\Omega + D)^k} F(M\langle\Omega\rangle) . \quad (15)$$

Definición 2.2.1. Si K es un subgrupo de congruencia, una *forma modular (de Siegel) de peso k y género g con respecto a K* es una función $F : \mathfrak{H}_g \rightarrow \mathbb{C}$

(P1) holomorfa,

(P2) que verifica $F[M]_k = F$, para toda $M \in K$, y

(P3) tal que la función $F[M]_k$ está acotada en regiones $\{Y \geq cI_g\}$, para toda $M \in \Gamma_g$.

La forma F es *cuspidal*, si además satisface

$$\Phi F[M]_k = 0 , \quad (16)$$

para toda $M \in \Gamma_g$.

Toda forma modular F admite un desarrollo en serie de Fourier. Para describirlo, introducimos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} V_g(\mathbb{Q}) &= \left\{ S \in \text{Mat}(g \times g, \mathbb{Q}) : {}^t S = S \right\} \\ P_{g,\text{semi}}(\mathbb{Q}) &= \left\{ S \in V_g(\mathbb{Q}) : S \geq 0 \right\} \\ P_g(\mathbb{Q}) &= \left\{ S \in V_g(\mathbb{Q}) : S > 0 \right\} \\ \mathcal{X}_{g,\text{semi}} &= \left\{ T \in P_{g,\text{semi}}(\mathbb{Q}) : 2T \text{ es par} \right\} \\ \mathcal{X}_g &= \left\{ T \in P_g(\mathbb{Q}) : 2T \text{ es par} \right\} \\ n(S) &= \begin{bmatrix} I_g & S \\ & I_g \end{bmatrix} \quad (n : V_g(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Sp}(g, \mathbb{Q})) \\ u(U) &= \begin{bmatrix} U & \\ & {}^t U^{-1} \end{bmatrix} \quad (u : \text{GL}(g, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Sp}(g, \mathbb{Q})) \end{aligned}$$

Las matrices simétricas constituyen un espacio vectorial, V_g ; las matrices definidas positivas y semidefinidas positivas, P_g y $P_{g,\text{semi}}$ son conos en V_g . Los subconjuntos \mathcal{X}_g y $\mathcal{X}_{g,\text{semi}}$ están conformados por aquellas matrices que representan formas cuadráticas enteras, definidas positivas y semidefinidas positivas, respectivamente; son retículos en los respectivos conos. Las aplicaciones $X \mapsto n(X)$ y $U \mapsto u(U)$ son morfismos de grupos.

Con esta notación, podemos expresar el desarrollo en serie de una forma de Siegel para Γ_g de la siguiente manera:

$$F(\Omega) = \sum_{T \in \mathcal{X}_{g,\text{semi}}} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)} ;$$

si F es cuspidal, indexamos sobre \mathcal{X}_g . En general, si $F \in \mathcal{M}_k(K)$,

$$F(\Omega) = \sum_{T \in R^\vee \cap P_{g,\text{semi}}} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T\Omega)}, \quad (17)$$

donde R^\vee denota el retículo dual con respecto a la forma traza en V_g del retículo

$$R := R(K) = \{S \in V_g : n(S) \in K\}.$$

Por ejemplo, si $g = 2$, con respecto a los subgrupos de congruencia mencionados,

- $R(\Gamma_0(N)) = V_2(\mathbb{Q}) \cap \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z})$ y $R^\vee \cap P_{2,\text{semi}} = \mathcal{X}_{2,\text{semi}}$;
- $R(Q(N)) = R(B(N)) = R(\Gamma_0(N))$;
- $R(\Gamma^{\text{para}}(N)) = \left\{ \begin{bmatrix} a/N & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ y $R^\vee = \left\{ \begin{bmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{bmatrix} : m, r, n \in \mathbb{Z}, N|m \right\}$.

En este último caso, escribimos $\mathcal{X}_{2,\text{semi}}^N := R^\vee \cap P_{2,\text{semi}}$; es el conjunto de formas cuadráticas enteras semidefinidas positivas $mx^2 + rxy + ny^2$ con $m \in N\mathbb{Z}$.

Las transformaciones $u(U)$ vinculan los varios coeficientes de Fourier. Si $F \in \mathcal{M}_k(K)$, entonces

$$a(T[U]) = \det(U)^k a(T), \quad (18)$$

para toda $U \in \text{GL}(g, \mathbb{Q})$ tal que $u(U) \in K$. Por ejemplo,

- $u(U) \in \Gamma_0(N)$, si y sólo si $U \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$;
- $u(U) \in \Gamma^{\text{para}}(N)$, si y sólo si $U \in \langle \Gamma_0(N), \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \rangle$.⁵

Los operadores de Hecke $T(m)$, $m \in \mathbb{N}$, son operadores de doble coclase, pero se pueden describir en términos de su efecto en los coeficientes de Fourier de una forma paramodular. Si $N = p$ es primo y $q \neq p$ es primo y $T \geq 0$,

$$\begin{aligned} a(T; F[T(q)]_k) &= a(qT(q); F) + q^{2k-3} a\left(\frac{1}{q}T; F\right) \\ &\quad + q^{k-2} \sum_{j \pmod{q}} a\left(\frac{1}{q}T\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jp & q \end{bmatrix}\right]; F\right) \\ &\quad + q^{k-2} a\left(\frac{1}{q}T\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\right]; F\right). \end{aligned}$$

2.3 Lifts de Gritsenko

Definición 2.3.1. Una función $\phi : \mathfrak{H}_1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una *forma de Jacobi de índice m y peso k* , si

(J1) es holomorfa,

⁵ Aquí, $\Gamma_0(N)$ denota el subgrupo de congruencia de nivel N en $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

(J2) la función $\tilde{\phi} : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\tilde{\phi}(Z) = \phi(\tau, z) e^{2\pi i \omega m}$ es una forma modular de Siegel de género 2 con respecto al grupo

$$C_{2,1} = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix} \right\} \cap \Gamma_2 ,$$

es decir, $\tilde{\phi}[M]_k = \tilde{\phi}$,⁶ si $M \in C_{2,1}$ y

(J3) y, además, la función ϕ admite un desarrollo en serie de Fourier del tipo

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n \geq 0, r \in \mathbb{Z}} c(n, r) e^{2\pi i (n\tau + rz)} ,$$

con $c(n, r) = 0$, a menos que $r^2 - 4mn \leq 0$.

Si $c(n, r) \neq 0$ implica $r^2 - 4mn < 0$, entonces ϕ es *cuspidal*.

Teorema 2.3.2. Sea $\phi(\tau, z) = \sum_{n > 0, r \in \mathbb{Z}} c(n, r) e^{2\pi i (n\tau + rz)}$ una forma de Jacobi de peso k e índice N . La expresión

$$\text{Grit}(\tau, z, \omega) = \sum_{\{n, r, m\} \geq 0} \left(\sum_{\delta | (n, r, m)} \delta^{k-1} c\left(\frac{mn}{\delta^2}, \frac{r}{\delta}\right) \right) e^{n\tau + rz + mN\omega}$$

es una forma paramodular cuspidal de peso k y nivel N . Además,

$$\text{Grit}(\phi)[\mu]_k = (-1)^k \text{Grit}(\phi) .$$

2.4 El álgebra de Hecke paramodular

A diferencia de lo que ocurre en el caso de nivel $N = 1$, el álgebra de Hecke paramodular de nivel $N > 1$ no es, en general, conmutativa. El álgebra de Hecke paramodular está generada por las álgebras “locales”. Si $p \mid N$ es primo, entonces el álgebra local en p está generada por

$$\begin{aligned} V &= T(w) , \\ X &= T(\text{diag}(1, 1, p, p)) , \\ Y_1 &= T(\text{diag}(1, p, p^2, p)) \quad \text{y} \\ Y_2 &= T(\text{diag}(p, 1, p, p^2)) . \end{aligned}$$

⁶ Por un lado,

$$\phi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k e^{2\pi i m \frac{cz^2}{c\tau + d}} \phi(\tau, z)$$

y, por otro,

$$\phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^{-2\pi i m (\lambda^2\tau + 2\lambda z)} \phi(\tau, z) .$$

El elemento $w \in \mathbf{GSp}(2, \mathbb{Q})$ es la matriz

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ p & & \\ & & p \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

El álgebra en cuestión es un cociente de $\mathbb{Z}\{X, V, Y_1, Y_2\}$ por el ideal de ciertas relaciones explícitas entre estos elementos.