Notas y ejercicios de grupos

Índice

1 Acciones de grupos 2

2 El grupo simétrico 5

1 Acciones de grupos

Ejercicio 1.1. Sea G un grupo con dos clases de conjugación, exactamente. Entonces,

(i) si el orden $|G|$ del grupo es finito, $|G| = 2$;

(ii) si existe en G un elemento de orden finito, $|G| = 2$.[1]

Solución. Si $|G| < \infty$, podemos argumentar de la siguiente manera. El grupo G se descompone como unión disjunta de dos clases de conjugación

$$G = \{e\} \sqcup a^G \ , \tag{1}$$

donde $e \in G$ es el elemento neutro y $a^G = \{xax^{-1} \ : \ x \in G\}$ denota la clase de conjugación de algún otro elemento $a \in G$. Necesariamente, una de las clases debe ser $\{e\}$, pues $e \in \mathcal{Z}(G)$. Pero, si $\mathcal{C}_G(a)$ denota el centralizador de a en G,

$$|a^G| = |G : \mathcal{C}_G(a)| \ ,$$

que divide a $|G|$, pues el orden es finito. Por otro lado, $|G| = 1 + |a^G|$, de lo que se deduce que $|a^G| = 1$ y $|G| = 2$.

El argumento anterior no es aplicable sin la hipótesis de que $|G|$ sea finito. Sin embargo, la descomposición (1) sigue siendo válida y podemos elegir como a cualquier elemento distinto del neutro; en particular, podemos suponer que $\mathsf{ord}(a) = n$ es finito y mayor que 1. Dado que hay sólo dos clases de conjugación, una de las cuales es la del neutro del grupo, todo elemento distinto del neutro debe ser conjugado de a y, en particular, tener orden finito n.

Si $n = 2$, todo elemento salvo el neutro tiene orden 2 y el grupo es abeliano.[2] Así, $a^G = \{a\}$ y $|G| = 2$. Si $n > 2$, entonces existe algún primo impar $p > 2$ que divide a n. En particular, reemplazando a por $a^{n/p} \neq e$, podemos asumir que el orden de a es p, usando, de nuevo, que a y $a^{n/p}$ son conjugados. Como $a^2 \neq e$, existe $x \in G$ tal que $a^2 = xax^{-1}$. En consecuencia, dado cualquier elemento $y \in G$, $(yay^{-1})^2 = yxa(yx)^{-1}$. En particular, eligiendo $y = a^{2^k}$, se deduce inductivamente que

$$a^{2^k} = x^k a x^{-k} \ ,$$

para todo $k \geq 1$. Si $k = p$, se deduce que $a^{2^p} = a$, pues x es o bien el neutro, o bien conjugado de a y, por lo tanto, de orden p. Como el orden de a es p, se cumple que $2^p \equiv 1 \,(\mathsf{mod}\, p)$, lo cual es absurdo, si p es primo. La contradicción viene de suponer que $p > 2$. □

Ejercicio 1.2. Sea G un grupo finito y $H \lhd G$ un subgrupo normal de índice primo. Si $x \in H$ verifica $\mathcal{C}_H(x) < \mathcal{C}_G(x)$[3] y si $y \in H$ es conjugado de x *en* G, entonces x e y son conjugados *en* H.

[1] Hint: Existe un primo p tal que $a^p = e$ para todo $a \in G$. Si $p > 2$ es impar, entonces $a^2 = xax^{-1}$ para cierto $x \in G$. Inductivamente, $a^{2^p} = x^p a x^{-p} = a$, con lo cual $2^p \equiv 1 \,(\mathsf{mod}\, p)$.

[2] $(bb_1)^2 = e$ implica $bb_1 = b_1 b$.

[3] Es un subgrupo contenido propiamente.

Solución. Empecemos con algunas observaciones. Primero, si $x, y \in G$ son conjugados, es decir, $y = gxg^{-1}$, $g \in G$, entonces

$$\mathcal{C}_G(y) \;=\; g\,\mathcal{C}_G(x)\,g^{-1}\ .$$

Segundo, si $H \leq G$ es un subgrupo arbitrario y $x \in H$, entonces

$$\mathcal{C}_H(x) \;=\; \mathcal{C}_G(x) \,\cap\, H\ .$$

Ahora, si $H \triangleleft G$ es normal, $x, y \in H$ y existe $g \in G$ tal que $y = gxg^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_H(y) &= \mathcal{C}_G(y) \,\cap\, H \;=\; \big(g\mathcal{C}_G(x)g^{-1}\big) \,\cap\, H \\ &= \big(g\mathcal{C}_G(x)g^{-1}\big) \,\cap\, gHg^{-1} \;=\; g\,\big(\mathcal{C}_G(x) \cap H\big)\,g^{-1} \\ &= g\,\mathcal{C}_H(x)\,g^{-1}\ .\end{aligned}$$

El objetivo es demostrar que $x^H = x^G \cap H$.[4] En general, $x^H \subset x^G$; en términos de los índices de los centralizadores,

$$|G : \mathcal{C}_G x| \;=\; |x^G| \;\geq\; |x^H| \;=\; |H : \mathcal{C}_H x|\ .$$

Por otra parte, dado que el índice es multiplicativo,

$$|G : H|\,|H : \mathcal{C}_H x| \;=\; |G : \mathcal{C}_G x|\,|\mathcal{C}_G x : \mathcal{C}_H x|\ .$$

Será suficiente ver que $p = |G : H|$ divide a $|\mathcal{C}_G x : \mathcal{C}_H x|$.[5] De las observaciones iniciales, como H es normal en G, si $g \in \mathcal{C}_G(x)$ (un elemento arbitrario del centralizador, no el que da lugar a y), entonces g normaliza a $\mathcal{C}_H(x)$. En particular,

$$\mathcal{C}_H(x) \triangleleft \mathcal{C}_G(x)\ .$$

Como $g^p \in H$ para todo $g \in G$, se deduce que $g^p \in \mathcal{C}_H(x)$ para todo $g \in \mathcal{C}_G(x)$. Como $|\mathcal{C}_G x/\mathcal{C}_H x| > 1$, algún elemento $g \in \mathcal{C}_G(x)$ tiene orden p módulo el subgrupo normal $\mathcal{C}_H(x)$. En particular, p divide al orden del cociente, es decir, al índice de los centralizadores de x. $\square$

Ejercicio 1.3. Una matriz $m = [m_{ij}] \in \mathsf{Mat}_{m\times m}(R)$ se dice *monomial*, si existe una permutación $\alpha \in S_m$ y elementos $x_1, \ldots, x_m \in R$ tales que

$$m_{ij} \;=\; \begin{cases} x_i & \text{si } j = \alpha(i) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}\ .$$

Las matrices monomiales tienen a lo sumo una coordenada distinta de cero por fila y por columna. Una matriz de permutación es un caso especial de matriz monomial: para cada i, $x_i = 1$. El producto de matrices monomiales es una matriz monomial.

Sea k un anillo no nulo (no necesariamente conmutativo) con la propiedad de que $ab = 0$ implica $a = 0$ o $b = 0$. Sea $G = \mathsf{GL}_m(k)$, $m \geq 2$, y sea $T \leq G$ el subgrupo de matrices diagonales.

[4] En este caso, como H es normal, $x^G \cap H = x^G$.

[5] No es suficiente saber que este índice es poitivo.

(i) Demostrar que $\mathcal{N}_G(T)$ es el subgrupo de las matrices monomiales en G.

(ii) Demostrar que $\mathcal{N}_G(T)/T \simeq S_m$.

Solución. Un elemento $g \in G$ pertenece a $\mathcal{N}_G(T)$, si y sólo si para todo $t \in T$, existe $t' \in T$ tal que $gtg^{-1} = t'$. Si $g = [g_{ij}]$, $t = \mathsf{diag}(t_1, \ldots, t_m)$ y $t' = \mathsf{diag}(t'_1, \ldots, t'_m)$,

$$(t'^{-1}gt)_{ij} \;=\; t_i'^{-1} g_{ij} t_j \;.$$

Entonces, podemos expresar la condición de pertenencia al normalizador de T de la siguiente manera: dados $t_1, \ldots, t_m \in k$, existen $t'_1, \ldots, t'_m \in k$ tales que

$$g_{ij} t_j \;=\; t'_i g_{ij} \;,$$

para todo i, j. Ahora, si $g_{i_0 j_0} \neq 0$, elegimos $t \in T$ de manera que

$$t_j \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \;.$$

Si $g \in \mathcal{N}_G(T)$, entonces los elementos $t'_i \in k$ verifcan:

$$\begin{aligned} (1 - t'_{i_0})\, g_{i_0 j_0} \;&=\; 0 \;, \\ t'_{i_0}\, g_{i_0 j} \;&=\; 0 \;, \quad \text{si } j \neq j_0 \;. \end{aligned}$$

Como k verifica $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$, debe cumplirse que $t'_{i_0} = 1$ y que $g_{i_0 j} = 0$ para $j \neq j_0$. En particular, en cada fila hay, a lo sumo, una coordenada no nula. Es decir, g es una matriz monomial.

Las matrices monomiales se escriben de manera única como producto de una matriz de permutación por una matriz diagonal $m = pt$. En consecuencia, $pt \mapsto p$ induce un isomorfismo entre $\mathcal{N}_G(T)/T$ y S_m. $\square$

Ejercicio 1.4. Sea G un grupo finito.

(i) Si $H < G$ es un subgrupo propio, entonces G no es unión de conjugados de H.

(ii) Si $C_1, \ldots, C_m$ es una lista completa de las clases de conjugación en G y $g_i \in C_i$, entonces $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$.

Solución. Sea R un subconjunto de un sistema de representantes de las clases en $G/\mathcal{N}_G(H)$, de manera que $\{gHg^{-1} \,:\, g \in R\}$ sea un subconjunto de todos los conjugados de H en G. Si

$$G \;=\; \bigcup_{g \in R} gHg^{-1} \;,$$

entonces tenemos la cota

$$|G : H|\,|H| \;=\; |G| \;\leq\; |R|\,|H| \;, \tag{2}$$

acotando el cardinal de la unión por el de una unión disjunta. Como H es finito,

$$|R| \geq |G : H| = |G : \mathcal{N}_G H| \, |\mathcal{N}_G H : H| = |H^G| \, |\mathcal{N}_G H : H| \geq |R| \, |\mathcal{N}_G H : H| \quad ,$$

donde H^G denota el conjunto de conjugados de H en G. La última desigualdad es consecuencia de que

$$|H^G| = |G : \mathcal{N}_G H| \geq |R| \; .$$

En particular, $|\mathcal{N}_G H : H| \leq 1$. Se deduce, entonces, que $\mathcal{N}_G(H) = H$ y que $|R| = |G : \mathcal{N}_G H|$. Así, necesariamente, si G es unión de conjugados de H, debe ser la unión de *todos* los conjugados. Pero, ahora, usando que la desigualdad (2) debe ser estricta, se llega a una contradicción:

$$|G| = |G : H| \, |H| = |G : \mathcal{N}_G H| \, |H| = \sum_{g \in R} |gHg^{-1}| > |\bigcup_{g \in R} gHg^{-1}| = |G| \; .$$

La desigualdad es estricta, *porque H es subgrupo propio.*[6]

Si $G = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_m$ y $g_i \in C_i$, definimos $H = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$. Como G es la unión de los conjugados de H (todo elemento de G es conjugado a algún g_i y, en particular, a algún elemento de H), H no puede ser un subgrupo propio. □

2 El grupo simétrico

[6] En realidad, no usamos lo anterior, la cuestión de que R debe ser un sistema completo de representantes. Con saber que una desigualdad es estricta es suficiente:

$$|G| = |G : H| \, |H| \geq |G : \mathcal{N}_G H| \, |H| \geq \sum_{g \in R} |gHg^{-1}| > |\bigcup_{g \in R} gHg^{-1}| = |G| \; .$$