Subgupos parabólicos

1/11/2021

Índice

1 Subgrupos de Borel y subgrupos parabólicos

1.1 en grupos algebraicos suaves

En esta sección, G denota un grupo algebraico conexo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $k = \overline{k}$. Asumimos, también, que G es geométricamente reducido, o, lo que es lo mismo, un grupo algebraico suave, es decir, una variedad.[1]

Definition 1.1. [2] Un *subgrupo de Borel* de G es un subgrupo $B \leq G$ soluble, conexo y maximal con respecto a estas propiedades.

Observación 1.2. En esta sección –en particular, en la Definición 1.1– "subgrupo" quiere decir subgrupo algebraico que es subvariedad. En particular, un subgrupo de Borel $B \leq G$ es un grupo algebraico *suave*.[3]

Un grupo abstracto G es *soluble*, si existe una cadena finita de subgrupos

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s = e$$

tal que $G_{i+1} \triangleleft G_i$ y que cada cociente G_i/G_{i+1} sea abeliano.

[1] [2, pp. 12, 13]
[2] [2, Definition 17.6]
[3] El lunes había dicho, erróneamente, que no le pedíamos a B que fuese suave.

Ejemplo 1.3. En $G = \mathsf{GL}_n$, el subgrupo de matrices triangulares superiores $B = \mathsf{T}_n$ es un subgrupo de Borel. Por ejemplo, para $n = 4$,

$$\mathsf{T}_4 = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix} \supset \mathsf{U}_4 = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{bmatrix} \supset \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ & 1 & 0 & * \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \supset \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \supset \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Esta sucesión muestra, también, que U_4 es *nilpotente*.

Siguiendo con el Ejemplo 1.3,

Proposición 1.4. *todo subgrupo de Borel de* GL_n *es conjugado a* T_n*.*

Un grupo algebraico G (arbitrario) se dice *triagonalizable*,[4] si toda representación no nula posee un autovector. En tal caso, si (V, ρ) es una representación de dimensión $n < \infty$, existe una base de V con respecto a la cual $\rho(G) \subset \mathsf{T}_n$. La demostración de la Proposición 1.4 se basa en el siguiente resultado.

Teorema 1.5 (Lie-Kolchin)**.** [5] *Sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, un grupo algebraico suave y conexo es soluble, si y sólo si es triagonalizable.*

Demostración de 1.4. Sea $B \leq \mathsf{GL}_n$ un subgrupo de Borel. De acuerdo con la Observación 1.2, como B es suave, conexo y soluble, podemos aplicar el Teorema 1.5. Concluimos, entonces, que la representación $B \hookrightarrow \mathsf{GL}_{k^n}$ admite una base (de k^n) con respecto a la cual $B \subset \mathsf{T}_n$. Dicho de otra manera, existe $g \in \mathsf{GL}_n(k)$ tal que

$$gBg^{-1} \subset \mathsf{T}_n \ .$$

Finalmente, por maximalidad de B, la inclusión anterior es una igualdad. □

Podemos expresar la conclusión de la Proposición 1.4 de una manera más invariante usando la noción de *banderas*.

Sea V un k-espacio vectorial. Una *bandera* en V es una cadena finita

$$F \quad : \quad 0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_s = V \tag{1}$$

de subespacios de V. El *estabilizador de una bandera* F como en (1) es el subgrupo $B_F \leq \mathsf{GL}_V$ más grande con la propiedad de que, para todo i

$$B_F \cdot V_i \subset V_i \ .$$

Decimos que una bandera como (1) es *maximal*, si $s = \mathsf{dim}()V$; en tal caso, la codimensión de V_{i-1} en V_i es 1.

Sea F una bandera maximal en V y sea B_F su estabilizador. Entonces, tomando como base de V un conjunto de la forma $\{v_1, \ldots, v_s\}$ tal que $v_i \in V_i \smallsetminus V_{i-1}$, vemos que B_F coincide con el grupo T_n. Recíprocamente, si $B \leq \mathsf{GL}_V$ es un subgrupo de Borel, como B es triagonalizable, existe $v_1 \in V$ tal que $V_1 := \langle v_1 \rangle$ es un autoespacio

[4] [2, Definition 16.1]
[5] [2, Theorem 16.30]

para la acción de B. Esta acción desciende al cociente V/V_1 y concluimos que existe $v_2 \in V \smallsetminus V_1$ tal que $V_2 := \langle v_1, v_2 \rangle$ sea un autoespacio para B. Inductuvamente, por la "triagonalizabilidad" de B, podemos construir una bandera maximal $F = (V_i)_i$ tal que $B \cdot V_i \subset V_i$. En particular, $B \subset B_F$ y, por maximalidad de B en tanto subgrupo soluble conexo,

$$B = B_F .$$

Es decir, los subgrupos de Borel de GL_V son, exactamente, los estabilizadores de banderas en V maximales. Por último, como GL_V actúa transitivamente en el conjunto de bases de V, concluimos que todos los subgrupos de Borel de GL_V son conjugados (por un elemento de $\mathsf{GL}_V(k)$).

Esta propiedad del grupo general lineal es válida en general.

Teorema 1.6. [6] *Dos subgrupos de Borel de G son conjugados por un elemento de $G(k)$.*

Observación 1.7. Existen subgrupos de Borel. Podemos empezar con cualquier subgrupo conexo soluble (hay, al menos, uno: $\{e\}$) y considerar todos los subgrupo conexos solubles que lo contienen. Los de dimensión máxima son los subgrupos de Borel.[7]

Si $T \leq G$ es un toro, entonces es conexo y soluble y está contenido en un subgrupo soluble y conexo maximal, es decir, en un subgrupo de Borel. A un par (B, T) donde $T \leq G$ es un toro maximal y $B \leq G$ es un subgrupo de Borel que lo contiene se lo llama *par de Borel*. Así, todo toro maximal forma parte de un par de Borel y, como hay al menos, un par de Borel y los subgrupos de Borel son todos conjugados, todo subgrupo de Borel forma parte de un par de Borel.

Teorema 1.8. [8] *Dos toros maximales de G son conjugados por un elemento de $G(k)$.*

Definición 1.9. [9] Un *subgrupo parabólico* de G es un subgrupo $P \leq G$ que contiene algún subgrupo de Borel.

El grupo G es, trivialmente, parabólico.

Proposición 1.10. [10] *El grupo G contiene subgrupos parabólicos propios, si y sólo si no es soluble.*

[6] [2, Theorem 17.9]

[7] La *dimensión* de un esquema irreducible de tipo finito se define como el supremo (máximo) de las longitudes de cadenas

$$Z = Z_d \subset \cdots Z_1 \subset Z_0$$

de subesquemas cerrados [2, § A.24]. Por otro lado, los subgrupos algebraicos de un grupo algebraico son cerrados para la topología Zariski [2, Proposition 1.41]. En particular, si $H \leq H' \leq G$ son subgrupos, entonces o bien $H = H'$, o bien $\mathsf{dim}(H) < \mathsf{dim}(H')$.

[8] [2, Theorem 17.10]

[9] C.f. [2, Theorem 17.16]

[10] [2, Corollary 17.17]

Demostración. Si G es soluble, entonces $B = G$ es el único subgrupo de Borel y, en particular $P = G$ es el único subgrupo parabólico. Recíprocamente, si G no es soluble y $B \leq G$ es un subgrupo de Borel, necesariamente, $B \neq G$. El subgrupo B es un subgrupo parabólico propio. □

Observación 1.11. En esta demostración usamos que siempre existen subgrupos de Borel si G es algebraico y suave, definido sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Ejemplo 1.12. En $G = \mathsf{GL}_4$, los subgrupos

$$\left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ & & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & & * \end{bmatrix} \right\}$$

contiene a T_4 y son parabólicos. Un poco más en general, en GL_n, los subgrupos de matrices triangulares superiores en bloques (para cualquier elección de tamaño de los bloques diagonales) contiene a T_n y son parabólicos.[11]

La descripción de los subgrupos parabólicos del Ejemplo 1.12 se puede dar en términos de banderas. Dados un k-espacio vectorial V y banderas $F = (V_i)_i$ y $\widetilde{F} = (\widetilde{V}_j)_j$ en V, decimos que $\widetilde{F}$ *extiende a* F, si, para cada índice i, existe $j = j(i)$ tal que $V_i = \widetilde{V}_j$. Si llamamos P_F al estabilizador de F y $B_{\widetilde{F}}$ al estabilizador de $\widetilde{F}$, entonces P_F es parabólico, porque $P_F \geq B_{\widetilde{F}}$ y $B_{\widetilde{F}}$ es de Borel.[12]

Observación 1.13. Los subgrupos de Borel son los subgrupos parabólicos minimales.

1.2 en grupos algebraicos

En esta sección, G denota un grupo algebraico, sin otras imposiciones. Dejamos, también, de asumir que $k = \overline{k}$.

Definiciones 1.14. [13] Un subgrupo $B \leq G$ es un *subgrupo de Borel*, si $B_{\overline{k}}$ es un subgrupo de Borel de $G_{\overline{k}}$ en el sentido de la Definición 1.1. Un subgrupo $P \leq G$ es un *subgrupo parabólico*, si $P_{\overline{k}}$ es un subgrupo parabólico de $G_{\overline{k}}$ en el sentido de la Definición 1.9.

Observación 1.15. Puede suceder que un grupo G no posea subgrupos de Borel. En la definición, no estamos pidiendo, sobre k, las mismas condiciones que antes pedíamos sobre la clausura algebraica. Específicamente, un subgrupo soluble, conexo maximal en G *no necesariamente es un subgrupo de Borel*; no podemos repetir el argumento de la Observación 1.7.

[11] Ver el Ejemplo **??**.

[12] Esto no significa que todos los subgrupos parabólicos de GL_n sean de esta forma, es decir, conjugados a un subgrupo de matrices triangulares superiores en bloques. Que esto es así es consecuencia de la expresión (**??**).

[13] [1, Definition 1.29]. C.f. [2, § 17.66]

Observación 1.16. Por la misma razón, podría darse el caso de un grupo que no posea subgrupos parabólicos propios (el grupo mismo *siempre* es parabólico). También podría ocurrir que existan subgrupos parabólicos, pero que éstos no contengan subgrupos de Borel.

Definición 1.17. Si G posee un subgrupo de Borel, se dice que G es *quasi-split*. Los subgrupos de Borel, si existieren, serán subgrupos parabólicos minimales.

2 Curvas y subgrupos parabólicos

A continuación, veremos cómo asociarle un esquema a un cocarácter del grupo G y veremos que, en el caso de los grupos reductivos, esta construcción da lugar a los subgrupos parabólicos de G.

Sean X una variedad afín y $\mathcal{O}(X)$ su anillo de funciones regulares. Sea $\lambda : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to X$ un morfismo. En términos de morfismos de k-álgebras, $\lambda = \varphi^*$ para cierto morfismo $\varphi : \mathcal{O}(X) \to k[T, T^{-1}]$. Decimos que *existe el límite de* $\lambda(t)$ *cuando* t *tiende a* 0, si λ se extiende a un morfismo $\tilde{\lambda} : \mathbb{A}^1 \to X$.[14] En términos de φ, pedimos que se correstrinja a $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}(X) \to k[T]$, es decir que $\varphi(f) = f \circ \lambda$ sea un polinomio para toda $f \in \mathcal{O}(X)$. Definimos, en ese caso,

$$\lim_{t \to 0} \varphi(t) \;:=\; \varphi(0) \;.$$

Sea, ahora, $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un cocarácter (un cocarácter es como una curva en G). Entonces λ determina una acción en G por conjugación:

$$t \cdot g \;=\; \lambda(t)\, g\, \lambda(t)^{-1} \;.$$

Definimos un grupo algebraico $P(\lambda)$ asociado a esta acción por[15]

$$P(\lambda)(R) \;:=\; \left\{ g \in G(R) \;:\; \text{existe } \lim_{t \to 0} t \cdot g \right\} \;.$$

Ejemplo 2.1. [16] En $G = \mathsf{SL}_2$, sea λ el cocarácter $t \mapsto \mathsf{diag}(t, t^{-1}) = \left[\begin{smallmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{smallmatrix}\right]$. La acción en G está dada por

$$\begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} a & t^2 b \\ t^{-2} c & d \end{bmatrix}$$

y el límite $t \to 0$ existe, si y sólo si $c = 0$. Entonces

$$P(\lambda) \;=\; \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ & a^{-1} \end{bmatrix} \right\} \;.$$

[14] [2, § 13.b]
[15] [2, Proposition 13.28]
[16] [2, Example 13.31]

Ejemplo 2.2. [17] En $G = \mathsf{GL}_3$, $\lambda : t \mapsto \mathsf{diag}(t^{m_1}, t^{m_2}, t^{m_3})$ con $m_1 \geq m_2 \geq m_3$ fijos. Entonces

$$\text{si } m_1 > m_2 > m_3\ , \qquad P(\lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{bmatrix} \right\} ,$$

$$\text{si } m_1 = m_2 > m_3\ , \qquad P(\lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ & & * \end{bmatrix} \right\} .$$

Definición 2.3. [18] Dado un grupo algebraico suave G, su *radical unipotente* es el subgrupo normal, suave, conexo y unipotente maximal; lo denotamos $R_u(G)$. Un grupo algebraico G es *reductivo*, si es suave, conexo y $R_u(G_{\overline{k}}) = e$.

Teorema 2.4. [19] *Sea G un grupo reductivo y sea $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un cocarácter. Entonces $P(\lambda)$ es un grupo parabólico y así son todos.*

Proposición 2.5. [20] *Si G es reductivo, entonces G contiene subgrupos parabólicos propios, si y sólo si posee un toro escindido no central.*

Demostración. Demostramos únicamente que la condición es necesaria. Si no hay toros escindidos no centrales en G, la imagen de cualquier cocarácter $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ debe caer en el centro $\lambda(\mathbb{G}_m) \subset \mathsf{Z}(G)$ y, por lo tanto, $P(\lambda) = G$. Pero todos los subgrupos parabólicos son de la forma $P(\lambda)$ para algún cocarácter. □

Para demostrar la suficiencia, tenemos que definir, dado un cocarácter $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$, el subgrupo[21] $U(\lambda) \leq P(\lambda)$ que a cada k-álgebra R le asigna

$$U(\lambda)(R) = \left\{ g \in G(R) \,:\, \lim_{t \to 0} t \cdot g = e \right\} .$$

Necesitaremos, también, el centralizador $Z(\lambda) = \mathsf{C}_G(\lambda\, \mathbb{G}_m)$.

Ejemplo 2.6. Siguiendo con el Ejemplo 2.1, para el cocarácter $\lambda(t) = \mathsf{diag}(t, t^{-1})$, el centralizador de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ está dado por

$$Z(\lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{bmatrix} \right\} ,$$

que es el toro maximal de SL_2. Si $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ & d \end{smallmatrix}\right] \in P(\lambda)$, el límite es $\lim_{t\to 0} t \cdot g = \left[\begin{smallmatrix} a & \\ & d \end{smallmatrix}\right]$. De esto, deducimos que

$$U(\lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{bmatrix} \right\} .$$

[17] [2, Example 13.32]
[18] [2, § 6.46]
[19] [2, Theorem 25.1]
[20] [2, Proposition 25.2]
[21] [2, Proposition 13.29]

Ejemplo 2.7. En el Ejemplo 2.2, $G = \mathsf{GL}_3$ y $\lambda(t) = \mathsf{diag}(t^{m_1}, t^{m_2}, t^{m_3})$. La acción está dada por

$$\lambda(t) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \lambda(t)^{-1} = \begin{bmatrix} a & t^{m_1-m_2}b & t^{m_1-m_3}c \\ t^{m_2-m_1}d & e & t^{m_2-m_3}f \\ t^{m_3-m_1}g & t^{m_3-m_2}h & i \end{bmatrix} .$$

Si $m_1 = m_2 > m_3$,

$$Z(\lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & \\ * & * & \\ & & * \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad U(\lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} .$$

Proposición 2.8. [22] *Si G es un grupo algebraico suave, entonces $P(\lambda)$, $U(\lambda)$ y $Z(\lambda)$ son subgrupos algebraicos suaves de G. Además, $U(\lambda)$ es normal en $P(\lambda)$ y unipotente*[23] *y la multiplicación induce un isomorfismo*

$$U(\lambda) \rtimes Z(\lambda) \to P(\lambda) . \tag{2}$$

Un grupo algebraico G (arbitrario) se dice *unipotente*,[24] si toda representación no nula posee un vector fijo (un autovector con autovalor asociado 1). En tal caso, si (V, ρ) es una representación de dimensión $n < \infty$, existe una base de V con respecto a la cual $\rho(G) \subset \mathsf{U}_n$ (el subgrupo de las matrices triangulares superiores T_n con 1 en la diagonal).

Fin de la demostración de 2.5. Si un grupo reductivo G no posee subgrupos parabólicos propios, entonces, para todo cocarácter λ, vale que $P(\lambda) = G$. Por otro lado, como $U(\lambda)$ es unipotente y normal en G reductivo, $U(\lambda) = e$. En particular, $\mathsf{C}(\lambda\,\mathbb{G}_m) = Z(\lambda) = G$ y $\lambda(\mathbb{G}_m) \subset G$. Si $T \simeq \mathbb{G}_m^k \leq G$ es un toro escindido de G, entonces existen cocaracteres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k : \mathbb{G}_m \to G$ tales que

$$T = \lambda_1(\mathbb{G}_m) \times \cdots \times \lambda_k(\mathbb{G}_m) \subset \mathsf{Z}(G) .$$

En definitiva, todo toro escindido es central. □

3 Subgrupos parabólicos de un grupo reductivo

3.1 Raíces y subgrupos parabólicos

3.2 El subgrupo parabólico opuesto

Referencias

[1] J. R. Getz and H. Hahn. *An Introduction to Automorphic Representations.* Springer, 2021.

[22] [2, Theorem 13.33]. Este resultado también garantiza que P, U y Z son conexos, si G lo es.
[23] [2, Example 14.13]
[24] [2, § 6.45]

[2] J. S. Milne. *Algebraic groups. The Theory of Group Schemes of Finite Type Over a Field*. Vol. 170. Cambridge: Cambridge University Press, 2017, pp. xvi + 644.